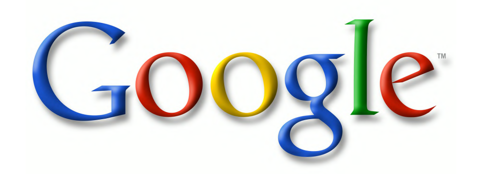
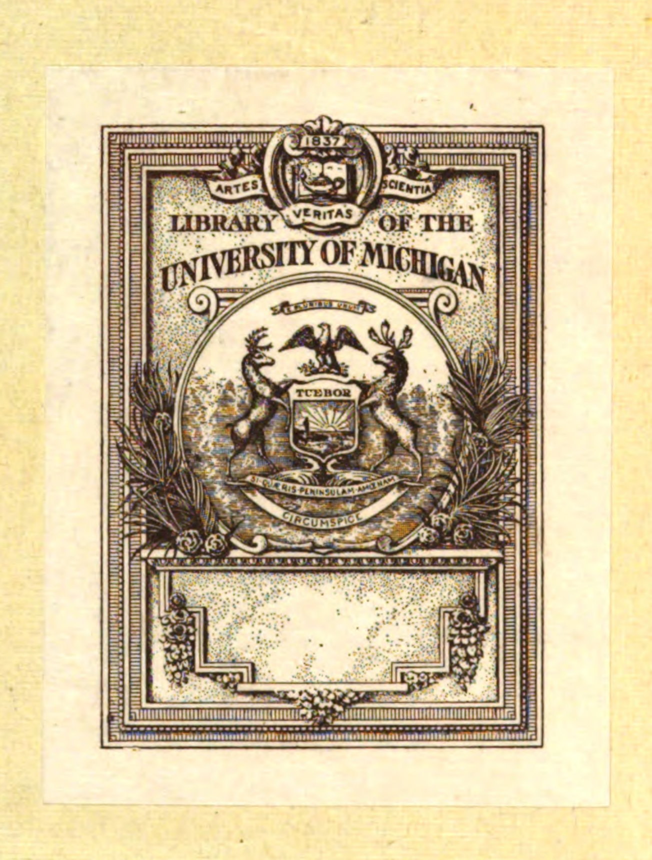



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Physikalische Zeitschrift

Herausgegeben von

Dr. H. TH. SIMON und Dr. P. DEBYE
o. ö. Professor an der Universität Göttingen. o. ö. Professor an der Universität Göttingen.

Schriftleitung:

H. TH. SIMON

ACHTZEHNTER JAHRGANG

1917

Mit vierzehn Tafeln

Leipzig

Verlag von S. Hirzel

1917

complete T+D.

Physikalische Zeitschrift
volume 18
1917

18.

Autoren- und Sachregister.

Abkürzungen: (B.) = Besprechung, (R.) = Referat, (Z. B.) = Zusammenfassende Bearbeitung.



G.

H.

M.

N.

O.

P.



T.

Namensverzeichnis der „Personalien".

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 1. | 1. Januar 1917. Redaktionsschluß für No. 2 am 13. Januar 1917. | 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Ionisierung der Erdatmosphäre durch den Halleyschen Kometen 1910, ein Beitrag zur Kenntnis des Ursprungs der durchdringenden Strahlung.

Von Albert Wigand.

Im Anschluß an meine luftelektrischen und erdmagnetischen Beobachtungen in Halle beim Durchgang des Halleyschen Kometen im Mai 1910[1]) habe ich die Literatur über gleichartige Beobachtungen an andern Orten verfolgt, um zu sehen, ob die gefundenen Störungen reell waren, ob sie in ursächliche Beziehung zum Kometen gebracht werden dürfen, und welcher Art die physikalische Ursache der Störungen war. Fräulein cand. phys. Margarete Sarnow in Halle hat mich bei der Bearbeitung dieses Gegenstandes unterstützt. Ihre demnächst erscheinende Dissertation wird das Ergebnis enthalten. Einstweilen möchte ich bereits kurz über die Beobachtungen der Luftionisierung beim Durchgang des Kometen zwischen Erde und Sonne berichten, da sie mir Licht zu werfen scheinen auf die zur Zeit viel erörterte Frage des Ursprungs der durchdringenden Strahlung in der Atmosphäre.

Die uns bekannt gewordenen Beobachtungen der durchdringenden Strahlung, Zerstreuung, Leitfähigkeit und Ionenzahl in der Atmosphäre während der Durchgangszeit des Kometenkopfes und -schweifes (18.—22. V.) sind in der Tabelle zusammengestellt. Die 17 Beobachtungsorte folgen einander nach der geographischen Länge von O nach W. Die Zeitangaben sind alle nach MEZ gemacht. In der Spalte „Zeit" ist für die Orte mit deutlicher Wirkung die Dauer derselben, für die andern Orte die in Betracht kommende ganze Beobachtungszeit angegeben.

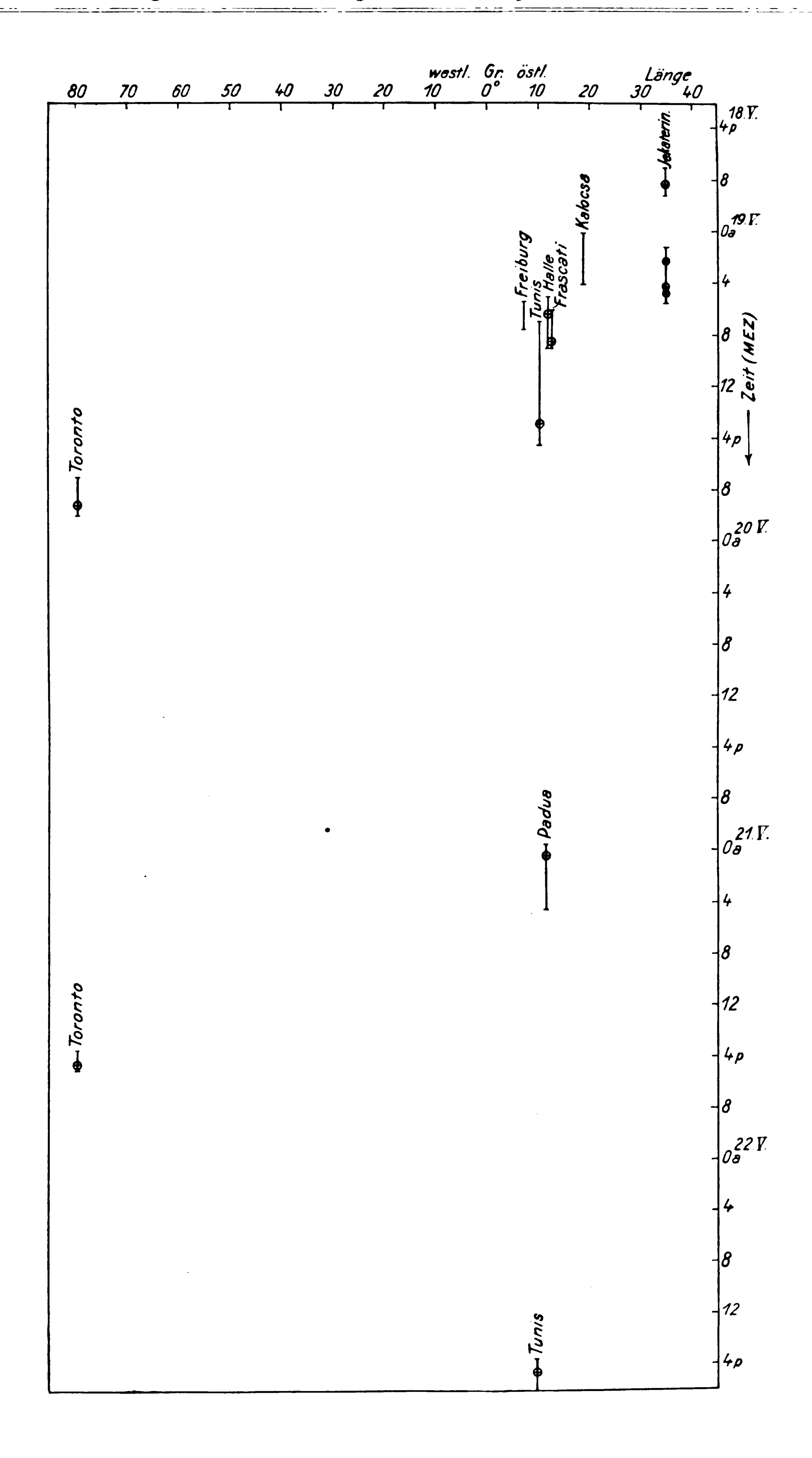
Es zeigt sich, daß an 11 von den 17 Orten eine erhöhte Ionisierung der Luft während des Kometendurchgangs gefunden wurde. Dies gleiche Ergebnis unabhängiger Beobachtungen nach verschiedenartigen Methoden in demselben Zeitraum an mehreren Orten läßt einen Zweifel an der objektiven Tatsache kaum zu, trotz der negativen Ergebnisse für einige andere Orte. Dabei ist Folgendes zu beachten: Vergleicht man die einzelnen Veröffentlichungen untereinander, so fällt sofort auf, daß die mitgeteilten Beobachtungen der verschiedenen Orte recht ungleichwertig sind. Als Gründe dafür kommen hauptsächlich folgende in Betracht: Die z. T. unbestimmten Angaben über die Beobachtungszeit und die Ergebnisse; ferner die mitunter nicht genügend lange Beobachtungszeit vor, während und nach dem Kometendurchgang; schließlich die Unterschiede der Meßgenauigkeit und der Ausschaltung von Fehlerquellen und meteorologischen Einflüssen. Bei strenger Prüfung der einzelnen Beobachtungen zum Vergleich untereinander müßten einige ausgeschieden werden.

Es wäre erwünscht, daß diese vergleichende Zusammenstellung die Beobachter von damals dazu anregte, ihre bereits publizierten Messungen durch genauere Angaben zu ergänzen und mit den andern Beobachtungen zu vergleichen, damit das Gesamtergebnis klarer hervortritt. Auch liegen vielleicht noch unpublizierte oder von uns übersehene Beobachtungen dieser Art vor, die zu berücksichtigen wären. Im Augenblick kann nur mit einer gewissen, wenn auch nicht ge-

1) A. Wigand, Verb. d. D. Physik. Ges. 12, 511, 1910.

Nr.	Ort	Geogr. Länge	Nördl. geogr. Breite	Zeit (MEZ)	Beobachtung	Ergebnis (meist Relativwerte)	Wetter	Beobachter, Zitat.
1.	Jekaterinoslaw	35° 0′ östl. Gr.	48° 31′	a) **18. V.** 7p—9p 10 Max. 8p 15 b) **19. V.** 1a 10—5a 30 Max. $\lambda+$ 2a 13 u. 4a 13 $\lambda-$ 4a 40	Leitfähigkeit	Erhöhung 1 auf 3,5 a) für $\lambda+$ b) für $\lambda+$ u. für $\lambda-$	Schwacher Wind, Himmel teilweise bedeckt.	K. v. Kotelow, Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 307, 1911.
2.	Kalocsa (Ungarn)	18° 58,4′ östl. Gr.	46° 32,7′	a) **19. V.** 0–4a b) **20. V.**	Ionenzahl	Erhöhung a) n_+ 1132 auf 1863 n_- 1019 auf 1178 (Nur bis 4a gemessen, Morgenmax. nicht mit) b) Max. n_+ 3019 n_- 1260	Klarer Himmel, staubfreie Luft, nahezu windstill.	A. Riegl, Met. Zeitschr. **27**, 313, 1910.
3.	Frascati	12° 40,8′ östl Gr.	41°, 48′	**19. V.** 6a–9a Max. 8a–9a	a) Durchdring. Strahlung b) Ionenzahl	a) Erhöhung 30 auf 50 (nur Stundenmittelwerte) b) Keine Änderung	Vorwiegend heiter, einige schwache Stratuswolken, Horizont nebelig. Schwacher Wind. Temp., rel. Feucht., Bar. wie vorher.	D. Pacini, Ann. Uffic. Centr. Meteor. Ital. **32**, 1a, 1910.
4.	Ballon Hildebrand, Schmargendorf (a) — Mölln (b)	a) 13° 19′ östl. Gr. b) 10° 41,9′ „ „	a) 52° 28,7′ b) 53° 37,7′	**19. V.** 0a 56–9a 38 (Fahrtdauer)	Leitfähigkeit	Keine Änderung	—	G. Lüdeling, Leipz. Ber. **63**, 8, 1911; Erg. d. Arb. des Kgl. Pr. Aeronaut. Obs. Lindenberg **6**, 240, 1911.
5.	Halle (Saale)	11° 58,7′ östl. Gr.	51° 30′	**19. V.** 5a—9a Max. $\lambda-$ 6a 17 Max. $\lambda+$ 6a	Zerstreuung	Erhöhung 2 auf 7 für $\lambda+$ und für $\lambda-$	Leichte Bewölkung mit zeitweiser Aufklärung; in größerer Höhe dünne Nebelschleier. Schwacher Wind.	A. Wigand, Verh. d. D. Phys. Ges. **12**, 511, 1910.
6.	Padua	11° 53,6′ östl. Gr.	45° 24,3′	a) **19. V.** b) **20. V.** 11p 30 bis **21. V.** 4a 30 Max. 0a 20	Zerstreuung	a) Keine Änderung b) Erhöhung 4,5 auf 6,5	Himmel teilweise bedeckt. Wind konstant, leichter Nebel morgens.	R. Alpago u. C. Silva. Atti del Istituto Veneto **64** (VIII), 12, S. 1169, 1910/11.
7.	Bologna	11° 21,1′ östl. Gr.	44° 30,8′	**19. V.**	Ionenzahl	Erhöhung	—	L. Amaduzzi, „Kometen u. Elektronen", von A. Righi, S. 60, 1911.
8.	**Wolfenbüttel**	**10° 32,7′ östl. Gr.**	**52° 10,3′**	**18. V. 6p bis 19. V. 7a**	**Zerstreuung**	**Keine Änderung**	**Lebhafter Wind zur Zeit der Annäherung des Kometen.**	**W. Hagemann u. J. Schünemann, Met. Ztschr. 28, 41, 1911.**

9.	Tunis	10^0 12′ östl. Gr.	36^0 48,5′	a) **19. V.** 7a—4p 30 Max. 2p 50 b) **22. V.** 3p 30—6p Max. 4p 20	Zerstreuung	a) Erhöhung etwa 1 auf 3 b) Erhöhung etwa 1 auf 2	Starker Wind, Himmel bedeckt.	G. Accolla, Nuovo Cim. (6) I, 1911.
10.	Ballon Frankfurt a. M. Griesheim (a) — Ederbringhausen (b)	a) 8^0 36,7′ östl. Gr. b) 9^0 0,3′ „ „	a) 50^0 54′ b) 51^0 10,9′	**19. V.** 8a 28—3p 22 (Fahrtdauer) Max. 11a 30	Leitfähigkeit	Erhöhung in 4500 m, in größeren Höhen wieder normal.	—	F. Linke, Ber. d. Physik. Vereins zu Frankfurt a/M. 1909/10.
11.	Feldberg (Taunus)	8^0 30′ östl. Gr.	50^0 14,3′	**19. V.**	Ionenzahl	Keine Änderung	Himmel teilweise bewölkt.	F. Linke, Ber. d. Physik. Vereins zu Frankfurt a/M. 1909/10.
12.	Freiburg (Schweiz)	7^0 8′ östl. Gr.	46^0 48′	**19. V.** 5a 30—7a 30	Durchdringende Strahlung	Erhöhung 10 auf 13 5 (nur Mittelwerte für 2 Stunden)	Nach Regen starke Altocumulusbedeckung u. hohe Feuchtigkeit.	A. Gockel, Jahrb. d. Rad. **9**, 14, 1912.
13.	Paris	2^0 20,2′ östl. Gr.	48^0 50,2′	**19. V.** 3a 35	Durchdringende Strahlung	Erniedrigung 2,1 auf 1,9 (Änderung nicht sicher nachgewiesen)	Gleichzeitige Luftdruckabnahme.	J. A. Lebel, C. R. **150**, 1372, 1910.
14.	Ebroobservatorium (bei Tortosa)	0^0 29,6′ östl. Gr.	40^0 49,2′	**19. V.**	a) Leitfähigkeit b) Beweglichkeit der Ionen c) Ionenzahl	(Nur Tagesmittelwerte) a) Erhöhung, b) Verminderung, v+ 1,2 auf 0,9 v— 1,2 „ 0,8 c) Erhöhung, n+ 1300 auf 1900 n— 1100 „ 1680	Fast windstill, wolkiger Himmel, Luft ziemlich durchsichtig, 1,3 mm Regen tagsüber, nur 4½ Std. Sonnenschein	P. Cirera u. Ubach, C. R. **150**, 1494, 1910.
15.	Dyrafjord (Island)	23^0 30′ westl. Gr.	65^0 53′	**18.—22. V.**	Leitfähigkeit	Keine Änderung	Unbeständiges Wetter u. Wind wie an den benachbarten Tagen.	A. Ansel, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss., Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1912.
16.	Toronto (Ontariosee)	79^0 23,7′ westl. Gr.	43^0 39,6′	a) **19. V.** 7p—10p Max. 9p 10 b) **21. V.** 3p 30—5p Max. 4p 30	Durchdringende Strahlung	Erhöhung a) 30 auf 100 b) 30 „ 130	—	A. Thompson, Terr. Magn. **16**, 25, 1910.
17.	Kyoto (Japan)	135^0 47′ östl. Gr.	35^0 1′	**18.—22. V.**	Leitfähigkeit	Keine Änderung	19. V. sonniger Tag.	R. Ichinohe, M. Kinoschita, M. Kimura, Kyoto Mem. 1910, S. 155.


westl. Gr. östl.
Länge
80 70 60 50 40 30 20 10 0° 10 20 30 40
18.V.
19.V.
20.V.
21.V.
22.V.
Zeit (MEZ)
Jekaterin.
Kalocsa
Freiburg
Tunis
Halle
Frascati
Toronto
Padua
Toronto
Tunis

rade überwältigenden Wahrscheinlichkeit von einer Erhöhung der Luftionisierung beim Kometendurchgang gesprochen werden.

Zur Untersuchung der Frage, ob der Komet die Ursache dieser Wirkung war, betrachten wir ihren zeitlich-örtlichen Ablauf. In der Figur ist die Zeit der am sichersten erscheinenden positiven Störungen als Funktion der geographischen Länge des Beobachtungsortes dargestellt; die Maxima der Störungen sind mit ⊕ bezeichnet. Man sieht sofort zweierlei: Es sind drei getrennte Wirkungen vorhanden. Und diese schreiten von O nach W fort mit einer Geschwindigkeit, die bei den einzelnen Wirkungen nicht sehr verschiedene Beträge aufweist; die Neigung der die einzelnen Wirkungen darstellenden Kurven ist nahezu gleich.

Am 18. und 19. V. sind zwei Wirkungen zu erkennen, die einander in einem Zwischenraum von mehreren Stunden folgen, nämlich 1. Jekaterinoslaw — Kalocsa — Halle — Freiburg — Toronto, und 2. Jekaterinoslaw — Frascati — Halle — Tunis — Freiburg. In Halle und Freiburg erscheinen diese beiden Wirkungen zu einer einzigen zusammengezogen. Die in Tunis am 22. V. gefundene Störung scheint mit der zweiten Wirkung nach einem vollen Umlauf um die Erde identisch zu sein. Eine dritte Wirkung läuft am 20. und 21. V. von Padua bis Toronto.

Zur Berechnung der Geschwindigkeit des Fortschreitens der drei Wirkungen seien folgende Einzelstörungen zusammengefaßt: 1. die erste Störung von Jekaterinoslaw mit der ersten von Toronto, 2. die beiden Störungen von Tunis, 3. die zweite Störung von Padua mit der zweiten von Toronto. Dann ergeben sich, je nachdem man die Anfangszeit oder die Maximumszeit der Störungen einsetzt, für die Fortschreitungsgeschwindigkeit die Werte der kleinen Tabelle:

eindeutiges Bild, zum mindesten nicht für das Verhalten des Schweifes. Nach der Berechnung von A. O. Leuschner[1]), die als die beste gilt, war die Zeit für den Vorübergang des Kometenkopfes vor der Sonne, bezogen auf den Erdmittelpunkt:

19. V. $4^{h}\ 39^{m}\ 37^{s}$ bis $5^{h}\ 38^{m}\ 27^{s}$ *am MEZ.*

Die Angaben für den Durchgang des Schweifes sind unsicher und z. T. widersprechend wegen der Schwierigkeiten, die Krümmung des Schweifes zu bestimmen, und weil der Schweif offenbar aus mehreren Ästen bestand. Man kann annehmen, daß die Erde jedenfalls zur Zeit des Kopfvorübergangs durch einen Teil des Schweifes gegangen ist. Nach anderen Angaben soll der Durchgang der Erde durch den Schweif vom 19. abends bis 21. morgens gedauert haben oder auch schon am 20. früh beendet gewesen sein. Andrerseits wird auch behauptet, die Hauptstrahlen des Schweifes seien am 20. und 21. nördlich der Erde vorbeigegangen.

Im ganzen genommen war jedenfalls die gefundene erhöhte Luftionisierung gleichzeitig mit dem Durchgang von Kopf und Schweif des Halleyschen Kometen; und die Behauptung eines ursächlichen Zusammenhangs ist nicht zu gewagt.

Welcher Art ist nun der physikalische Vorgang bei einer solchen Ionisierung der Erdatmosphäre durch den Kometen? Da nach den Messungen an drei Orten die Ionisierung beim Kometendurchgang durch eine Erhöhung der durchdringenden Strahlung entstand, ist anzunehmen, daß an den acht andern Orten die Erhöhung der Zerstreuung, Leitfähigkeit und Ionenzahl ebenfalls ausschließlich oder überwiegend auf Verstärkung der durchdringenden Strahlung beruhte. Die Ursache dieser Ionisierung wäre demnach eine Strahlung von der Natur der auch sonst in der Atmosphäre dauernd mit merklicher Konstanz vorhandenen durchdringenden Strahlung, die wahrscheinlich elektromagnetischer Natur und von der Art

Wirkung	Ort	geogr. Länge	Längendiff.	Anfangszeit	Zeitdiff.	O-W-Geschwindk. n. Anf.-Zeit	Maximumszeit	Zeitdiff.	O-W-Geschw. n. Max.-Zeit
1.	Jekater. Toronto	ö. 35,0° w. 79,4	114,4°	18. V. 7^{p} 19. V. 7^{p}	24,0 St.	4,8° St.	18. V. $8^{p}\,15$ 19. V. $9^{p}\,10$	24,9 St.	4,6° St.
2.	Tunis	ö. 10,2	360	19. V. 7^{a} 22. V. $3^{p}\,30$	80,5 „	4,5 „	19. V. $2^{p}\,50$ 22. V. $4^{p}\,20$	73,5 „	4,9 „
3.	Padua Toronto	ö. 11,9 w. 79,4	91,3	20. V. $11^{p}\,30$ 11. V. $3^{p}\,30$	16,0 „	5,7 „	21. V. $0^{a}\,20$ 21. V. $4^{p}\,30$	16,2 „	5,6 „

Die annähernde Übereinstimmung dieser Geschwindigkeiten ist bemerkenswert und rechtfertigt die vollzogene Beziehung der einzelnen unabhängigen Beobachtungen zueinander.

Für die Durchgangszeit des Halleyschen Kometen ergibt die zahlreiche astronomische Literatur, deren kritische Prüfung den Fachgelehrten überlassen bleiben muß, kein

1) A. O. Leuschner, Astronomical Journal **26**, Nr. 616, 1910.

einer sehr harten γ-Strahlung der radioaktiven Substanzen ist.

Man könnte zunächst daran denken, daß eine solche Strahlung vom Kopf oder Schweif des Kometen ausgehend bis in die unteren Schichten der Erdatmosphäre eingedrungen und die beobachteten Wirkungen hervorgebracht hat. In diesem Falle wäre die Dauer der Wirkung gleich der Dauer der Strahlung des Kometen. Die einzelnen getrennt beobachteten Wirkungen wären dann auf die größte Erdnähe der einzelnen Schweifteile (vielleicht auch des Kometenkopfes) zu beziehen; und das ostwestliche Fortschreiten der Wirkungen würde in der Bewegung der Schweifteile relativ zur Erde seine Erklärung finden. Die astronomischen Daten sind jedoch leider zu unvollkommen, um die Prüfung dieser Annahme zu ermöglichen durch den Vergleich der Durchgangszeiten mit dem zeitlich-örtlichen Ablauf der luftelektrischen Störung.

Ein anderer Erklärungsversuch hat mehr für sich: die erhöhte durchdringende Strahlung ist von einer materiellen aktiven Substanz in den oberen Luftschichten ausgegangen. Die raum-zeitliche Struktur der beobachteten Wirkung wird dadurch verständlich, daß beim Durchgang der Erde durch die getrennten Teile des Kometenschweifes von den oberen Schichten der Atmosphäre zu mehreren Malen solche aktive Substanz festgehalten und während ihres allmählichen Abklingens von dem dort dauernd herrschenden starken, gleichmäßigen Ostwind (vgl. „leuchtende Nachtwolken") ostwestlich fortbewegt wurde. Die ziemlich gleiche Fortschreitungsgeschwindigkeit der verschiedenen Wirkungen und der bei der zweiten Wirkung anscheinend erfolgte vollständige Umlauf um die Erde sprechen für diese Erklärung.

Als derartige radioaktive Substanz käme sowohl ein Gas, wie auch eine fein verteilte feste Materie („Staub") in Betracht. Mehr für eine Suspension von aktivem Staub sprechen zahlreiche, beim Kometendurchgang gemachte Beobachtungen von Dämmerungsanomalien, besonderen Trübungen und Leuchterscheinungen in den oberen Luftschichten.

Ich habe bereits im Jahre 1914 die Annahme geäußert[1]), daß überhaupt der Ursprung der normalen, von oben kommenden, mit der Höhe zunehmenden durchdringenden Strahlung[2]) nicht

1) Vgl. W. Kolhörster, Das Weltall **14**, Heft 8, S. 122, 1914.

2) Bei aller Anerkennung der Verdienste von Heß bin ich der Meinung, daß die von E. v. Schweidler (Elster-Geitel-Festschrift 1915, S. 411) gebrauchte Bezeichnung „Heßsche Strahlung" den Arbeiten von Gockel, Pacini und Kolhörster nicht gerecht wird, sowohl hinsichtlich der Priorität wie auch mit Rücksicht auf die Erforschung der wichtigsten Eigenschaften dieser Strahlung.

im Kosmos, sondern in der Erdatmosphäre sei; daß als eine solche Quelle durchdringender Strahlung etwa Emanationen und radioaktive Zerfallsprodukte in Betracht kommen, die sich an der Grenze zwischen Troposphäre und Stratosphäre (in etwa 11 km Höhe) oder weiter oben in der Stratosphäre infolge der dort herrschenden Verhältnisse der Luftschichtung anhäufen.

Diese Annahme ist vor kurzem auch von andern Forschern ausgesprochen, begründet[1]) und bestritten[2]) worden. Man hat bei dieser Diskussion den Eindruck, daß die Annahme zwar durch das, was dafür spricht, noch nicht hinreichend begründet, aber auch durch die Berufung auf die Eigenschaften der bisher bekannten radioaktiven Substanzen nicht zwingend widerlegt ist; denn es können doch in der Stratosphäre Substanzen mit quantitativ andern radioaktiven Eigenschaften vorhanden sein. Jedenfalls als Arbeitshypothese darf die Annahme einer materiellen Quelle der durchdringenden Strahlung in der Stratosphäre zunächst bestehen bleiben, bis wir erst ein vielseitigeres Beobachtungsmaterial haben, besonders Messungen, die zur Prüfung der Hypothesen über den Ursprung der Strahlung unter geeigneten Bedingungen eigens angestellt sind.

Die Beobachtungen beim Kometendurchgang scheinen mir für diese Frage insofern von Bedeutung zu sein, als dadurch mit einiger Wahrscheinlichkeit gezeigt worden ist, daß aktive Substanzen in den oberen Luftschichten eine am Erdboden meßbare durchdringende Strahlung aussenden können, und daß eher feste Teilchen als Gase für die Strahlungsquelle in Betracht kommen.

1) A. Gockel, Met. Zeitschr. 1916, S. 15; F. Linke, Met. Zeitschr. 1916, S. 157.

2) E. v. Schweidler, Elster-Geitel-Festschr. 1915, S. 411; K. Bergwitz, Met. Zeitschr. 1916, S. 310.

(Halle a. d. S., Physik. Institut der Universität.)

Im Felde, November 1916.

(Eingegangen 30. November 1916.)

Resonanz in eisenhaltigen Kreisen.

Von H. Starke.

1. In der an den Vortrag des Herrn W. Petersen, betr. Überströme und Überspannungen in Leitungsnetzen sich knüpfenden Diskussion im Elektrotechnischen Verein (E. T. Z. **37**, 129, 148, 1916) sowie im Anschluß daran in einigen brieflichen Mitteilungen der Herren O. Martienssen, K. W. Wagner, Heinke (ebenda S. 252) sind die eigentümlichen



Kipperscheinungen zur Besprechung gekommen, welche sich bei der Resonanz in eisenhaltigen Wechselstromkreisen, z. B. in maschinenangeschlossenen Kabeln, einstellen und Veranlassung zu unliebsamen Störungen geben können. Über den Gegenstand ist auch bereits vor mehreren

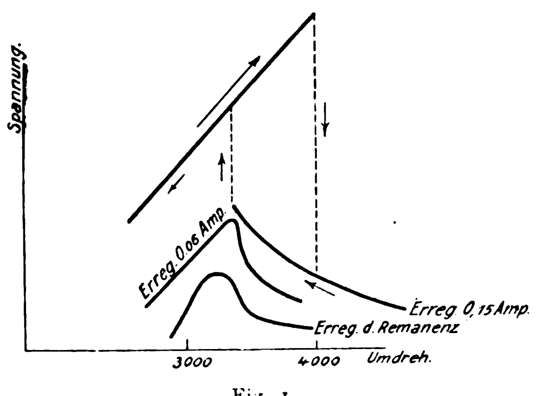


Fig. 1.

Jahren eine Untersuchung des Herrn O. Martienssen veröffentlicht worden (diese Zeitschr. 11, 448, 1910). Ohne Kenntnis dieser damals allein vorliegenden Publikation stieß ich auf die in Frage kommende Erscheinung und den eigentümlichen Bereich labilen Verhaltens bei der Aufnahme von Resonanzkurven in einem

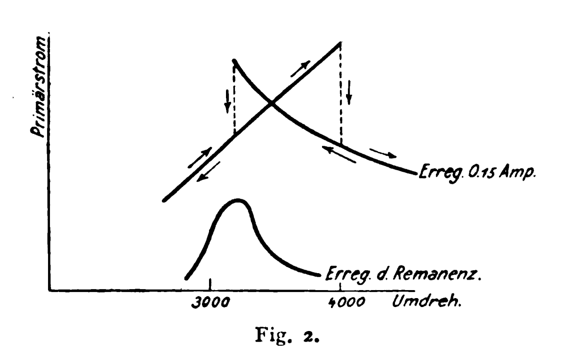


Fig. 2.

Kreis, der eine höherfrequente Wechselstrommaschine und einen eisengeschlossenen Transformator mit sekundär angeschlossenem Kondensator enthielt. Im Folgenden sei über einige Versuche hierüber und ihre Deutung berichtet.

Die beobachtete Erscheinung ist die folgende: Wird bei einer konstanten sehr schwachen Erregung der Maschine, etwa der Erregung durch den vorhandenen Restmagnetismus, der Primärstrom oder die Maschinenspannung in ihrer Abhängigkeit von der Tourenzahl aufgenommen, so ergibt sich die bekannte typische Resonanzkurve, welche je nach der Größe des sekundär angeschalteten Kondensators ihr Maximum bei höherer oder niederer Frequenz hat. Bereits bei mäßiger Steigerung der Erregung der Maschine verändert die Kurve aber völlig ihren Charakter.

Zunächst tritt eine starke Asymmetrie der Kurve zu beiden Seiten des Maximums auf, indem die Kurve auf Seite höherer Tourenzahl steiler abfällt als sie vorher zum Maximum angestiegen ist, und sehr bald verliert die Kurve ihre Kontinuität und nimmt das Aussehen der obersten in zwei Teile gespaltenen Kurve in Fig. 1 bzw. 2 an. Spannung und Strom steigen mit wachsender Tourenzahl bis zu einem plötzlichen unstetigen Abfall auf sehr niedrigen Betrag. Bei Rückgang erfolgt nicht an gleicher Stelle der Rücksprung, sondern der veränderte Zustand bleibt bis zu einer viel tiefer liegenden Tourenzahl erhalten, die etwa der Resonanztourenzahl bei schwacher Erregung gleich ist, und bei welcher der Rücksprung ganz oder fast in den vorherigen, aufsteigenden Kurvenast eintritt. Die beiden Äste der Kurve des Primärstroms durchkreuzen sich.

Eine ähnliche Kipperscheinung tritt auch auf, wenn bei konstanter Tourenzahl die Erregung der Maschine verändert wird. Die Fig. 3 zeigt

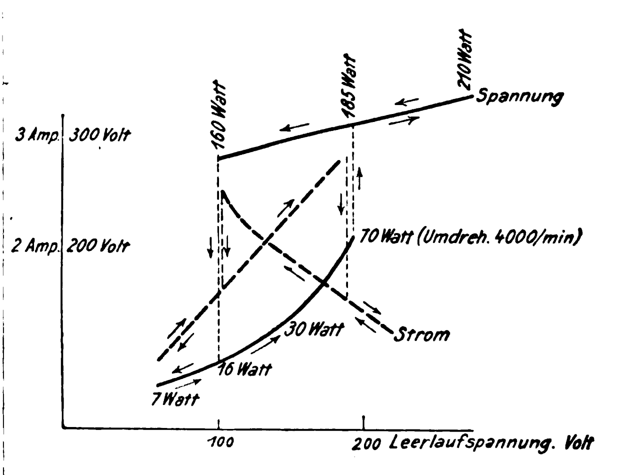


Fig. 3.

für die Tourenzahl 4000/min einen beobachteten Verlauf von Primärspannung und Primärstrom, als Funktion der durch die Leerlaufspannung (EMK.) der offenen Maschine gemessenen Erregung. Bei EMK. = 190 Volt findet plötzliches „Kippen“ auf hohe Spannung statt, wobei der Primärstrom auf niedrigen Wert springt. Läßt man die Erregung wieder sinken, so bleibt der gekippte Zustand bis zu der viel geringeren Erregung 100 Volt bestehen, bei welchem plötzlicher Rücksprung in den alten Zustand erfolgt.

2. Zwecks Erklärung der Erscheinung betrachten wir zunächst einen einfachen Resonanzkreis, bestehend aus erregender Maschine (Induktion L_1), einer Induktionsspule L, Kondensator C. Den gesamten vorhandenen Widerstand verlegen wir in den Teil w (Fig. 4). Der Kreis sei zunächst eisenfrei gedacht. Aufnahme der Stromstärke in ihrer Abhängigkeit von der Frequenz ω ergibt

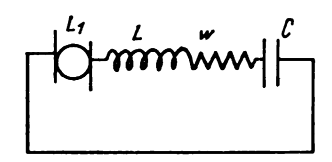


Fig. 4.

die je nach dem vorhandenen Widerstand mehr oder weniger gedämpfte Resonanzkurve, deren Maximum bei der Frequenz $\omega = \frac{1}{\sqrt{(L + L_1)C}}$ liegt. Im Resonanzfall sind EMK. der Maschine E und Strom I in Phase, die Resonanzspannung am Kondensator um 90^0, an den Enden von L und w gemessen umso angenäherter 90^0 gegen E verschoben, je kleiner w ist. Je nach dem Betrage L_1, mit welchem die Maschine an der Induktion des Gesamtkreises beteiligt ist, erleidet die Klemmenspannung der Maschine verschiedenen Einfluß durch die Resonanzerscheinung. Liegt der wesentliche Teil der Induktion des Kreises in der Maschine, so mißt man an ihren Klemmen auch die volle Resonanzspannung.

Die Schaltung (Fig. 5), Maschine an den Primärklemmen eines sekundär kapazitätsbelasteten Transformators, kann man im allgemeinen etwa durch das Schaltungsschema (Fig. 6) ersetzen, in welchem s_1, s_2 die primäre und sekundäre Streuinduktion bedeuten. L und s_1 zusammen würden die Induktion der Primärspule darstellen. Insofern als der Induktionswert L zumeist sehr groß gegen die anderen Induktionen sein wird, kann man das Verhalten des Kreises, soweit der Wechselstromwiderstand des Kondensatorzweiges nicht auch sehr groß ist (kleines C, großes s_2) oder gar der Transformator leerläuft $C = 0$ durch das Schema Fig. 6 unter Fortlassung der Spule L charakterisieren, womit der Fall auf den vorigen einfachen zurückgeführt ist.

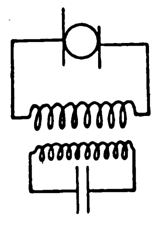


Fig. 5.

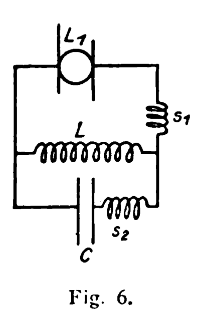


Fig. 6.

Bei fehlender Streuung ist der Transformator mit angehängtem Kondensator direkt durch eine Kapazität zu ersetzen, die im quadratischen Übersetzungsverhältnis zu der Kapazität des Kondensators steht. Die Frequenz des Kreises bestimmt sich dann aus dieser Kapazität und der Maschineninduktion. Belastung und Verluste des Transformators wirken wie eingeschalteter Widerstand.

Ist, wie beim Resonanztransformator, die Koppelung zwischen Primär- und Sekundärspule des Transformators nicht starr, so stehen Sekundär- und Primärspannung nicht mehr im Übersetzungsverhältnis zueinander. Das aus Sekundärspule und Kondensator bestehende Schwingungssystem wird vom Primärkreis umso unabhängiger, je geringer die Koppelung wird. Es kann durch Resonanz auf die ungedämpfte Schwingung des Maschinenkreises zu hohen Spannungsamplituden erregt werden und hat beim Koppelungsgrad k die angenäherte Eigenperiode

$$T = 2\pi \sqrt{L_2 C(1 - k^2)},$$

die bei sehr loser Koppelung ($k = 0$) durch Kapazität und Induktion im Sekundärkreis gegeben ist.

3. Das resonatorische Verhalten eines Kreises gewinnt ein verändertes Aussehen, wenn er Eisen enthält, wegen der veränderlichen Permeabilität desselben. Diese bewirkt, daß der Kreis nicht immer für eine bestimmte Frequenz in Resonanz ist, sondern daß diese Resonanz auch nur bei einer gewissen mittleren Stromstärke im System eintritt. Änderung der Stromstärke bewirkt Änderung der Eigenfrequenz, und zwar muß die Abnahme von μ und damit der Induktion L zunächst zur Folge haben, daß mit steigender Erregung das Resonanzmaximum nach der Seite höherer Frequenz sich verschiebt. Ferner muß die erste Folge sein, daß bei der Aufnahme der Resonanzkurve selbst, indem man

sich frequenzsteigend ihrem Maximum zu nähern trachtet, man dasselbe gewissermaßen vor sich her drückt. Hat man es aber erreicht, und nimmt der Strom im System wieder ab, so gleitet die Maximumslage wieder zurück zu niedererem Frequenzwert. Die Folge hiervon muß sein, daß der aufsteigende Ast der Resonanzkurve flacher, der absteigende steiler verläuft, als es ohne Eisen der Fall wäre. Geht man zwecks rückwärtiger Aufnahme der Kurve wieder in der Frequenz zurück, so muß einem das Resonanzmaximum entgegenkommen und nach Rücküberschreitung nach niederer Frequenz zu mit nachwandern, so daß also die gleiche Kurve auch rückwärts beschrieben wird. Nähert man sich aber bei stärkerer Erregung der Sättigung des Eisens, so tritt das in Fig. 1 u. 2 dargestellte diskontinuierliche Kurvenbild in Erscheinung. Zur Erklärung dieses Verhaltens leiten wir graphisch das Verhalten des einfachen Resonanzkreises aus Kapazität, eisenhaltiger Induktion und erregender Maschine in Serienschaltung her, wenn bei konstanter Frequenz ω die EMK. des Kreises geändert wird, betrachten dies Verhalten bei verschiedenen Werten ω, woraus wir alsdann das gesuchte Verhalten bei variabler Frequenz und konstant gehaltener EMK. entnehmen können (§ 10). In Fig. 7

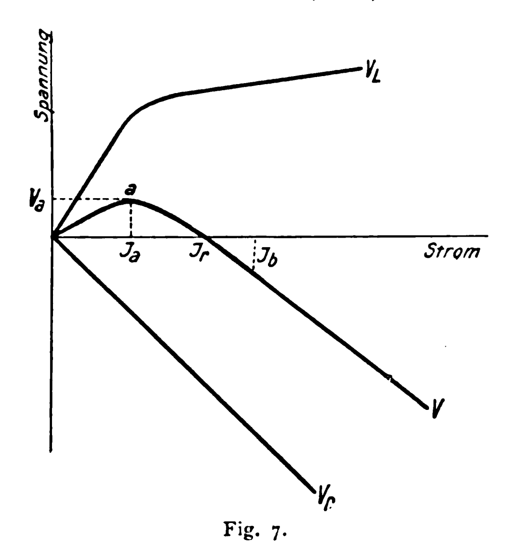


Fig. 7.

stellen V_L und V_C die Partialspannungen an den Klemmen der eisenhaltigen Spule und an den Kondensatorbelegungen in ihrer Abhängigkeit von dem das System (Fig. 4) durchfließenden Strom dar. Die Summe dieser beiden um 180^0 in Phase differierenden Spannungen ist bei Fehlen von Außenwiderstand die Klemmspannung der Maschine und wenn die Maschine praktisch widerstands- und induktionsfrei ist, gleich der EMK. derselben. Die Kurve der Summenspannung hat einen eigentümlichen Verlauf. Erst ansteigend, fällt sie nach einem Höchstwert bei a wieder, schneidet die Stromachse, um alsdann fast geradlinig auszulaufen. Es ist aus ihr ersichtlich, daß, wenn die Maschine eine von Null ansteigende Spannung liefert, erst der Strom kontinuierlich bis zu einem Wert J_a bei der Spannung V_a ansteigt. Bei weiterer Spannungssteigerung springt aber der Strom unter Phasenumkehr plötzlich auf den höheren Betrag J_b, um dann mit weiter wachsender Spannung wieder kontinuierlich zuzunehmen. Geht man jetzt wieder mit der angelegten Spannung der Maschine zurück, so findet nicht an gleicher Stelle ein Rücksprung der Werte statt, sondern der Strom sinkt bis zu dem Wert J_r, welcher erreicht wird, wenn die Summenspannung fast auf Null gesunken ist, um alsdann plötzlich auf fast Null abzufallen. (Siehe nächsten Absatz über Einfluß von Widerstand.) Der Wert J_r wird im eigentlichen Resonanzpunkt erreicht, wo induktiver und kapazitiver Widerstand gleichen Betrag haben $\left(\omega L = \frac{1}{\omega C}\right)$. Der Kurventeil zwischen J_a und J_r stellt einen labilen Zustand dar, in welchem die Spannung mit steigendem Strom abnimmt. Der Kurvenast zwischen J_b und J_r entspricht dagegen einem stabilen Zustand.

4. Ohmscher Widerstand und Verluste wirken ausgleichend. Es addiert sich zu jedem Spannungswert der Kurve eine der Stromstärke proportionale Spannung vektoriell hinzu. Die Gesamtspannung hat dann den Betrag

$$V = J\sqrt{w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

worin L eine Funktion von J ist. Der den Ohmschen und Verlust-Widerstand überwindende Spannungsvektor steht senkrecht auf dem induktiven und kapazitiven Vektor. Wenn man ihn sich an jeder Stelle der Figur hinzudenkt, so wird die ebene Abbildung zu einem räumlichen Modell vervollständigt, welches die Phasenverhältnisse verdeutlicht. Es ist aus ihm ohne weiteres ersichtlich, daß Ohmscher- und Verlust-Widerstand den Phasensprung und den Betrag des Stromstärkensprungs verkleinern und von einer gewissen Höhe ihres Wertes an die Kipperscheinung überhaupt zum Verschwinden bringen. Der Rücksprung aus dem gekippten Zustand heraus findet nicht erst bei erreichtem Nullwert der Spannung in den stromlosen Zustand statt, sondern die Spannung hat an der Sprungstelle noch den Betrag $J_r \cdot w$, mit welchem sie den Ohm- und Verlust-Widerstand überwindet, und hat die Phase des Stromes. Nach dem Sprung hat die Stromstärke alsdann den Restwert J_0. Das zeigt Fig. 8, in welcher die strich-

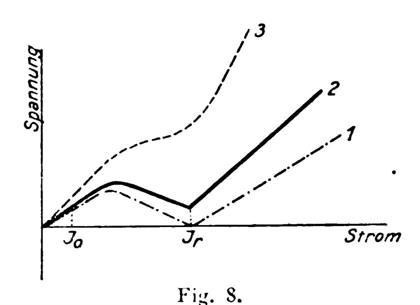


Fig. 8.

punktierte (1) und die ausgezogene (2) Kurve die Effektivwerte der Spannung ohne und mit vorhandenem Widerstand darstellen, nur die positiven Beträge, ohne Rücksicht auf Phase, also der auf negativer Ordinate verlaufende Teil der gestrichelten Kurve nach oben umgeklappt.

5. Die Kipperscheinung kann nicht bei allen Abmessungen des Resonanzkreises und nicht bei allen Frequenzen eintreten, nämlich jedesmal dann nicht, wenn die resultierende Spannungskurve kein Maximum und damit keinen absteigenden, labilen Bereich besitzt. Dies ist, wie eben erwähnt, für jeden Kreis oberhalb eines gewissen Grenzwiderstands der Fall. (Gestrichelte Kurve 3 in Fig. 8.) Sodann fehlt aber auch der labile Bereich dann, wenn die kapazitive Spannung die induktive immer überwiegt, wenn also die gerade Linie, welche in Fig. 7 den Verlauf der Kondensatorspannung V_C darstellt, gleich von Anfang an steiler gegen die Stromachse verläuft, als die V_L-Kurve in ihrem steilsten Anfangsteil. Etwas Derartiges tritt ein, wenn die Spule geringe Induktion oder der Kondensator kleine Kapazität hat, oder endlich wenn die Frequenz gering ist. Kleines L oder C hat also zur Folge, daß bei geringer Frequenz eine Kipperscheinung überhaupt nicht eintritt, sondern eine solche sich erst von einer gewissen höheren Frequenz ab einstellt, und zwar in umso ausgeprägterem Maße, d. h. mit umso größerem Betrag des Sprunges in der Stromstärke, je höher die Frequenz ist.

6. Für einen gegebenen Resonanzkreis wird sich mit von Null an wachsender Frequenz die EMK. als Funktion der Stromstärke nach obigen Ausführungen etwa folgendermaßen (Fig. 9) gestalten müssen: Bei niedriger Frequenz dominiert die steile Gerade der Kondensatorspannung über die Kurve der Induktionsspannung auch in deren erstem steilsten Bereich. Die resultierende Kurve 1 der EMK. bleibt unterhalb der Nullinie und verläuft erst schwächer, dann stärker zur Stromachse geneigt. Mit steigender Frequenz nimmt die Induktionsspannung zu, während die Gerade der Kondensatorspannung an Neigung verliert. Die EMK.-

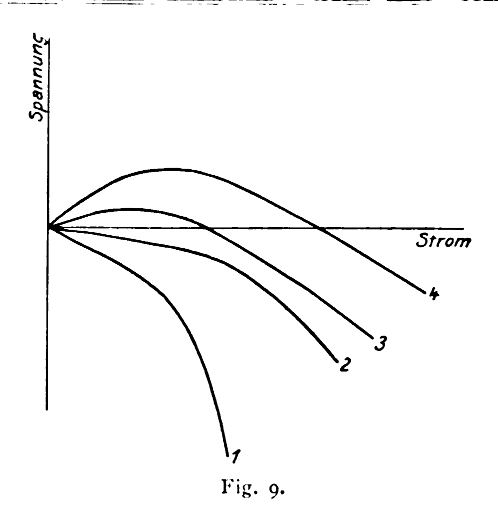


Fig. 9.

Kurve muß sich daher in ihrem ersten Bereich zunächst der Stromachse mehr anschmiegen (Kurve 2), und bei einem gewissen Frequenzwert beginnt sie zu schneiden, indem sie bei kleinen Stromwerten oberhalb der Nullinie verläuft. Von dieser Frequenz an beginnt der Eintritt der Kipperscheinung (Kurve 3). Bei weiter erhöhter Frequenz steigt der oberhalb der Nulllinie befindliche Kurventeil steiler zur Stromachse zu einem höheren Maximum, und gleichzeitig rückt der Schnittpunkt mit der Nullachse weiter hinaus zu hohen Stromwerten, umso weiter, je höher die Frequenz ist (Kurve 4). Die Kipperscheinung nimmt an Sprungweite der Stromstärke schnell zu.

7. Der experimentell beobachtete Verlauf der Kipperscheinung. Zu obigen Auseinandersetzungen ist vor allem zu bemerken, daß sie nur im großen und ganzen angenähert ein Bild der Sachlage zu geben vermögen. Die auch innerhalb einer Einzelperiode veränderliche Permeabilität bewirkt eine kräftige Verzerrung der Strom- und Spannungskurve, die einen erheblichen Einfluß auf die beobachteten Effektivwerte nicht verfehlen kann. Oszillogramme des Stromes zeigen in der Tat im gekippten und ungekippten Zustand, wie auch Herr Martienssen bereits mitgeteilt hat, ein gänzlich verschiedenes Aussehen. Die Kurven in Fig. 10, welche die Abhängigkeit der Klemmenspannung des Transformators, also angenähert des Sekundärstroms, von der EMK. der Maschine bei den den einzelnen Kurven beigeschriebenen Tourenzahlen darstellen, geben trotzdem sehr gut das Bild der Fig. 9 wieder, wenn man diese um 90° dreht, also die Abszissenachse zur Ordinatenachse macht. Die EMK. wurde durch Änderung der Maschinenerregung variiert und als Leerlaufspannung bei geöffnetem Primärkreis gemessen. Bemerkt sei noch, daß hierbei vor solcher Messung nach

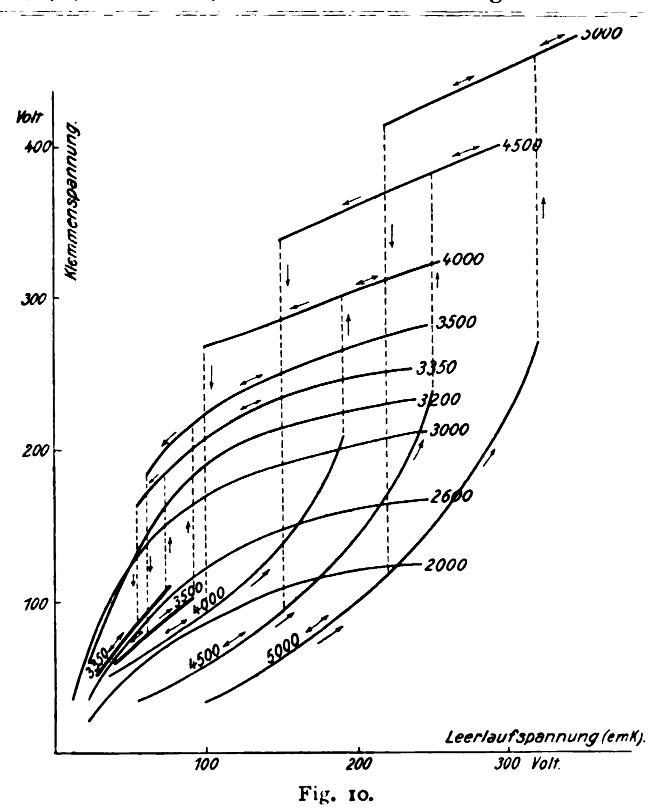


Fig. 10.

jedesmaliger Änderung der Erregung der Wechselstrom einen Augenblick lang geschlossen wurde, weil jedes erstmalige Schließen eine kleine Änderung der Leerlaufspannung ergab, die bei weiteren Schließungen fortblieb. Eine Rückwirkung des Wechselstroms auf den durch Hysteresis beeinflußten Verlauf einer Magnetisierungsänderung. Die benutzte kleine Maschine war 16 polig, d. h. bei 4500 Touren/min. finden 1200 Wechsel in der Sekunde statt. Man sieht, wie entsprechend dem in Fig. 9 bezeichneten Verhalten, bei niedriger Tourenzahl eine Erhöhung derselben, z. B. von 2000 auf 3000, die EMK.-Kurve sich der Klemmenspannungs-, d. i. der Stromachse immer mehr anschmiegen läßt. Bei weiterer Steigerung der Tourenzahl würden wegen des nunmehr beginnenden Überwiegens der induktiven über die kapazitive Spannung die Kurven mit allmählich zunehmender Neigung auf Seite negativer EMK anfangen, um alsdann nach Passieren eines Maximums die Stromachse wieder zu schneiden, wobei der Kurvenast zwischen Maximum und Schnitt labil ist. Da die Figur aber Effektivwerte ohne Rücksicht auf Phase, also nur positive Beträge gibt, so erscheinen die negativen Kurventeile nach der Seite positiver EMK. umgeklappt. Die mit der Tourenzahl oberhalb 3000 wieder zunehmende Neigung gegen die Stromachse bis zu einer immer höher hinaufrückenden Maximumstelle, in welcher die Kurve zur Klemmenspannungsachse (Stromachse) fast parallel wird, ist deutlich. Bei dieser Stelle findet das Kippen nach hohem Stromwert statt, das an Betrag mit steigender Tourenzahl zunimmt. Der Rücksprung erfolgt bei allen Kurven für wesentlich tiefere EMK.-Werte zu einem bei allen Kurven angenähert gleichen Strombetrag hinab. Der noch recht hohe EMK.-Wert, bei welchem der Rücksprung einsetzt, mag in dem großen Verlustwiderstand des benutzten Kreises (Eisenverluste, erhebliches Sprühen im Sekundärkreis) und in Streuung seine Ursache haben. Die Kurven, insbesondere diejenigen höherer Tourenzahl, haben einen sehr eigentümlich anmutenden Verlauf. Bei 4500 Touren z. B. nimmt mit wachsender EMK. die Klemmenspannung erst langsam, dann allmählich schneller steigend bis 240 Volt bei EMK. = 250 Volt zu, um bei diesem Wert der EMK. plötzlich auf 380 Volt emporzuschnellen. Bei weiterer Erhöhung der EMK. steigt die Klemmspannung nur noch langsam an. Geht man jetzt mit der EMK. zurück, so springt die Klemmspannung nicht an gleicher Stelle zurück, sondern behält bis EMK. = 150 Volt ihren hohen Wert fast unvermindert bei, um dann plötzlich in die erste Kurve auf den für alle Kurven etwa gleichen Betrag von rund 100 Volt zurückzufallen.

8. Für jede Tourenzahl, bei welcher Kippen eintreten kann, besteht ein mit ihrer Höhe wachsender und nach höheren Erregungswerten

rückender Erregungsbereich, in welchem zwei verschiedene Zustände des Wechselstromkreises, der gekippte und der ungekippte, möglich sind. Diese Zustände unterscheiden sich in Spannung, Stromstärke, Phase, Kurvenform und Wattverbrauch. In Fig. 3 ist an der herausgegriffenen Kurve der letztere in den beiden Zuständen als Beispiel angegeben.

Der gekippte Zustand hohen Strombetrags wird im allgemeinen vom System bevorzugt. Den großen aufsteigenden Kurvenast zwischen den beiden Sprungstellen kann man nur dadurch erzwingen, daß man bei dauernd geschlossenem Wechselstromkreis die Erregung der Maschine vorsichtig kontinuierlich in die Höhe treibt. Geschieht dies sprungweise, so springt der Kreis viel früher in den gekippten Zustand über, als es die gestrichelte Sprungaufwärtslinie angibt. Und wird der Stromkreis gar unterbrochen und durch Tasten wieder geschlossen, so erhält man stets nur den gekippten oberen Zustand bei allen Erregungen, die höher liegen, als die Rücksprungslinie. Nur in einem sehr kleinen Bereich nahe dieser Linie, der sich etwa 10—20 Volt nach oberen EMK.-Werten erstreckt, erhält man beim Schließen bald den einen, bald den andern Zustand. Unterhalb der Rücksprungslinie setzt beim Tasten manchmal der obere gekippte Zustand ein, der Kreis fällt aber sogleich in den untern Zustand zurück.

9. In Fig. 11 teile ich noch die gleichzeitig

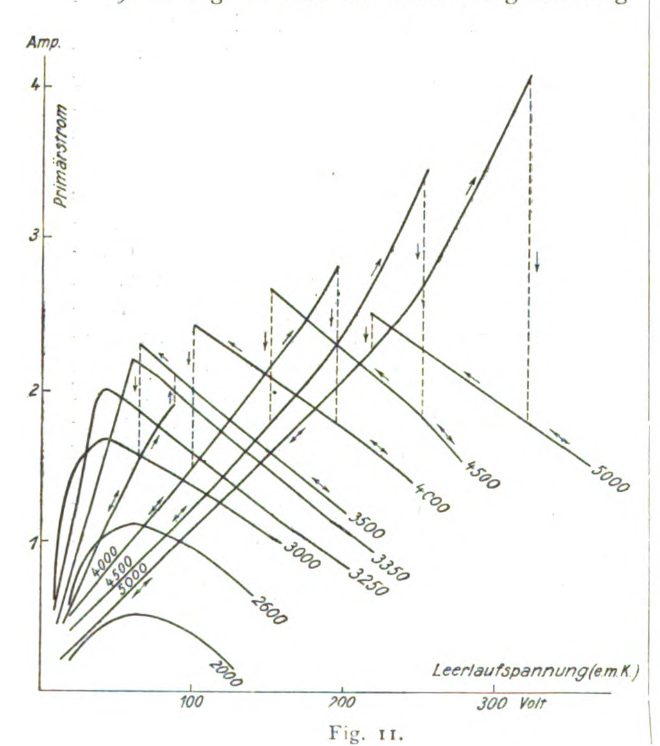


Fig. 11.

aufgenommenen Kurven mit, welche den Verlauf des Primärstroms in seiner Abhängigkeit von der EMK. des Kreises darstellen. Über dies in allen Einzelheiten mir noch nicht klare eigentümliche Verhalten werden noch Versuche angestellt. Der dem gekippten Zustand entsprechende Kurvenast liegt hier nicht durchweg über oder unter dem andern, dem ungekippten Zustand entsprechenden, sondern die beiden Äste kreuzen sich. Wie bei den Klemmspannungskurven, so sieht man auch bei den Stromkurven, daß die Kurventeile des gekippten Zustands analog, fast parallel den Kurven bei niederen Tourenzahlen verlaufen, bei welchen noch kein Kippen auftritt. Die Kurvenäste des ungekippten Zustands bei den höheren Tourenzahlen bieten das vom normalen abweichende Bild.

Das Kreuzen der Stromkurven hat zur Folge, daß der willkürliche Übergang in den gekippten Zustand (z. B. bei Stromunterbrechung und erneutem Schließen des Tasters) von Stromzu- oder -abnahme begleitet sein kann, während er stets mit einer hohen Steigerung der Klemmspannung, also des sekundären Kondensator-Ladestroms verbunden ist. So springt z. B. bei 5000 Touren bei der Erregung 320 Volt EMK. die Spannung von 290 auf 460 Volt, während der Strom von 4,1 auf 1,8 Amp. sinkt; dagegen bei der niedrigen Erregung von 220 Volt EMK. ist der Spannungssprung von 120 auf 415 Volt von einem positiven Stromsprung von 2,3 auf 2,5 Amp. begleitet. Bei 230 Volt EMK. befindet sich der Kreuzungspunkt der Primärstromkurven bei 5000 Touren. Bei dieser Erregung ist der Sprung in den gekippten Zustand also von keiner Änderung des Primärstroms begleitet, während ein Klemmspannungssprung von 130 auf 420 Volt und ein Phasensprung zwischen Spannung und Strom erfolgt. Wie bei niedriger Erregung und variierter Frequenz, so tritt auch bei niedriger Frequenz und variierter Erregung kein Kippen auf. Die Stromkurven haben in beiden Fällen ähnliches Aussehen, nämlich etwa das einer gewöhnlichen Resonanzkurve.

10. Verhalten bei konstanter Erregung und veränderlicher Tourenzahl. Die Fig. 10 und 11 geben in jeder einzelnen Kurve den Verlauf von Klemmspannung bzw. Primärstrom in ihrer Abhängigkeit von der EMK., also der Erregung der Maschine bei konstanter Tourenzahl. Man kann aus den Abbildungen ohne weiteres das Verhalten bei konstanter EMK. und veränderlicher Tourenzahl konstruieren, indem man in den Kurvenscharen auf einer zur vertikalen Stromachse parallelen Geraden von Kurve zu Kurve, d. h. bei konstanter

EMK. von Tourenzahl zu Tourenzahl fortschreitet. Wofern man die EMK. bei konstanter Erregung der Tourenzahl proportional setzt, kann man auch das Verhalten **bei konstanter Erregung und Tourenvariation** ablesen. Zur Charakterisierung des magnetischen Zustands der Maschine gibt die Tabelle die Abhängigkeit der EMK. von dem Erregungsstrom bei den Tourenzahlen 3500 und 4500 wieder:

Wechselstrommaschine $^1/_3$ K.W., 16 polig, also 4500 Umdr./min. = 600 Period./sec.
Rotierender Feldmagnet $w = 17$ Ohm. Feststehender Anker $w = 7,3$ Ohm.

Erregung Amp.	Leerlaufspannung bei 3500 Umdrehung. Volt	Kurzschl.-Strom bei 3500 Umdrehung. Amp.	Leerlaufspannung bei 4500 Umdrehung. Volt	Kurzschl.-Strom bei 4500 Umdrehung. Amp.
0,1	120	—	—	—
0,2	175	—	—	—
0,3	200	2,2	250	2,2
0,4	220	—	—	—
0,5	230	—	—	—
0,6	240	3,15	300	3,2
0,7	245	—	—	—
0,8	250	3,45	320	3,5
0,9	253	—	—	—
1,0	255	3,62	325	3,65

Man erkennt aus der Fig. 10 folgendes Verhalten der Klemmspannung und damit des Sekundärstroms bei konstant erhaltener EMK. und veränderlicher Tourenzahl: Bei niedriger EMK. steigt die Klemmspannung bis zu einem Maximum bei 3000 Touren an (Resonanz), um darauf kontinuierlich wieder zu sinken. Mit steigender Erregung (EMK.) rückt das Maximum nach höherer Tourenzahl und der Abfall der Kurve nach Seite höherer Tourenzahl wird gleichzeitig steiler. Das gleiche gilt, aus den Kurven noch deutlicher ersichtlich, für den Primärstrom. Bei weiter gesteigerter Erregung (EMK. etwa 60 Volt) beginnt erst in geringerem, dann mit zunehmender EMK. schnell sich steigerndem Betrage, die Diskontinuität des Verhaltens. Bei der EMK. = 160 Volt beispielsweise steigt die Klemmspannung sehr gleichmäßig bis zu der Tourenzahl 4500 (Klemmspannung ca. 350 Volt) an. Bei Weitersteigerung der Tourenzahl wird bei dieser EMK. der obere gekippte Kurvenast 5000 nicht mehr von der Vertikalen durch EMK. = 160 getroffen, sondern tief unten der untere ungekippte Kurvenast bei 70 Volt. Das System fällt also bei Überschreitung von 4500 Touren aus dem gekippten Zustand mit dem hohen Wert der Klemmspannung von ca. 350 Volt plötzlich diskontinuierlich in den ungekippten Zustand mit 70 Volt Klemmspannung, die bei weiterer Erhöhung der Umdrehungszahl langsam noch weiter sinkt, weil die Kurven noch höherer Tourenzahlen sich entsprechend anschließen. Geht man jetzt mit der Umdrehungszahl zurück, so steigt die Klemmspannung kontinuierlich noch bis unter die Tourenzahl 4000 an, deren ungekippter Kurvenast noch voll getroffen wird. Erst bei schätzungsweise 3800, deren zugehörige Kurve man sich in der Kurvenschar leicht angenähert hinzudenken kann, findet der Rücksprung in den gekippten Zustand auf eine Spannung von etwas unter 300 Volt statt. Es ist dies das Verhalten, welches zu Beginn dieser Mitteilung in Fig. 1 gekennzeichnet war. Mit größer werdender Erregung steigt die Tourenzahl, bei welcher das System kippt, kräftig an. Ebenso läßt sich das Verhalten des Primärstroms bei Änderung der Tourenzahl aus Fig. 11 ablesen.

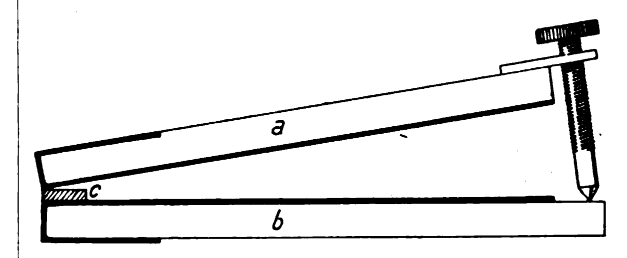
Berlin, Herbst 1916.

(Eingegangen 12. Dezember 1916.)

Ein einfacher veränderlicher Kondensator.

Von A. Pflüger.

Zwei Spiegelglasplatten tragen die in der Figur dick gezeichneten Stanniol- oder Silberbelegungen. Ein dünnes Glimmerblättchen *c* trennt die beiden Belegungen. Eine Schraube gestattet, den Keilwinkel und damit die Kapazität meßbar zu verändern. Das Ganze liegt in einer flachen Schachtel. Die Zuführung erfolgt unten durch untergelegtes Stanniol, oben durch eine Feder oder ein Metallgewicht.



Der Kondensator ist brauchbar für einfache Empfangsvorrichtungen der drahtlosen Telegraphie und, je nach der Güte der Ausführung, für Messungen bei niedriger Spannung. Bei Schülerübungen wird er gute Dienste leisten.

Bei Silberbelag kann unschwer ein kleinster Abstand von etwa $^1/_{50}$ mm, und dementsprechend eine Maximalkapazität von ca. 4000 cm pro qdm Oberfläche erzielt werden. Bedeckt man *b* mit einem Glimmerblatt von dieser Dicke, so erhöht

sich die Maximalkapazität und die Durchschlagsfestigkeit beträchtlich.

Bonn, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 14. Dezember 1916.)

Über das innere Atomfeld des Lithiums.

Von A. Hartmann.

(Vorläufige Mitteilung.)

Die mit den experimentellen Tatsachen in vorzüglicher Übereinstimmung stehenden Resultate, welche A. Sommerfeld[1]) und F. Paschen[2]) in ihren Arbeiten über die Feinstruktur der Wasserstoff- und Heliumlinien bekommen haben, legen den Gedanken nahe, ähnliche Untersuchungen auch an anderen Elementen anzustellen. Da wurde ich nun durch Herrn Privatdozent Dr. M. Wolfke auf die Alkalien, speziell auf Lithium, aufmerksam gemacht, wofür ihm zu danken mir auch an dieser Stelle gestattet sei.

Wenn man sich die Serienformel für die Alkalien näher ansieht, so erkennt man gleich, daß man bei diesen Elementen ohne spezielle Annahmen über das Atomfeld nicht viel erreichen kann, und so habe ich vor allem beschlossen, das Atomfeld direkt aus den experimentellen Tatsachen und auf Grund des Bohrschen Atommodells[3]) zu berechnen, worauf auch Sommerfeld in der oben erwähnten Arbeit[4]) aufmerksam gemacht hat. Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun, zu zeigen, wie diese Rechnung in ganz allgemeiner Weise durchgeführt werden kann.

Wir wollen der Rechnung die experimentell ermittelte Spektralformel von Mogendorff-Hicks[5]) zugrunde legen, die nach der Arbeit von W. M. Watts[6]) die Alkaliserien am besten darstellt. Bei näherer Betrachtung dieser Formel sieht man sofort, daß sie bei Vernachlässigung der kleinen Koeffizienten in die Balmersche Formel übergeht. Das würde darauf hindeuten, daß in erster Annäherung das Li-Feld demjenigen des Wasserstoffs entspricht, daß also der Kern wie bei Wasserstoff die Ladung eines Elementarquantums trägt. Nach van den Broek[7]) sollte jedoch der Li-Kern 3 Elementarladungen enthalten; man müßte daher annehmen, daß für die Strahlung nur ein Elektron in Betracht kommt, die beiden andern dagegen sich in unmittelbarer Nähe des Kerns befinden und auf diese Weise $^2/_3$ der Kernladung kompensieren. Die Rechnung zeigt nun, daß dies tatsächlich der Fall ist.

Nehmen wir an, das Feld sei symmetrisch; dann ist die Feldstärke E nur Funktion des Abstandes vom Kern. Diese Funktion $E = f(r)$ soll nun im folgenden ermittelt werden. Wir setzen von ihr voraus, daß sie stetig ist und mit wachsendem r gegen o konvergiert.

Es möge zunächst in unserem Lithiumatom nur ein Elektron rotieren, und zwar auf dem i-ten Ring vom Radius r_i. Aus der Gleichgewichtsbedingung $\frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot f(r)$ und der Bohrschen Annahme über das Impulsmoment $m \cdot v \cdot r = \frac{i \cdot h}{2\pi}$ ergibt sich dann für die Feldstärke auf dem i-ten Ring

$$f(r_i) = \frac{h^2}{4\pi^2 m \cdot e} \cdot \frac{i^2}{r_i^3}, \qquad (1)$$

worin e und m die Ladung bzw. Masse des Elektrons bedeuten. Die kinetische Energie des Elektrons ist dann

$$T = \frac{e \cdot r_i}{2} \cdot f(r_i),$$

die potentielle

$$U = e\int_\infty^{r_i} f(r)\,dr + C.$$

C ist der Wert der potentiellen Energie im Unendlichen. Für die Gesamtenergie ergibt sich also

$$W_i = \frac{e\,r_i}{2} f(r_i) + e\int_\infty^{r_i} f(r)\,dr + C. \qquad (2)$$

Beim Übergang vom i-ten auf den k-ten Ring strahlt das Elektron nach Bohr die Frequenz

$$\nu_{ik} = \frac{W_i - W_k}{h} = \frac{e}{2h}\left[\left\{r_i f(r_i) + 2\int_\infty^{r_i} f(r)\,dr\right\}\right.$$

$$\left. - \left\{r_k f(r_k) + 2\int_\infty^{r_k} f(r)\,dr\right\}\right] = A + \frac{e}{2h}\left[r_i f(r_i)\right.$$

$$\left. + 2\int_\infty^{r_i} f(r)\,dr\right] \qquad (3)$$

Für $i = \infty$ wird $r = A$. A ist also die Konvergenzfrequenz und daher ist $\frac{e}{2h}\left[r_i f(r_i)\right.$

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. (4) **51**, 1, 1916.
2) F. Paschen, Ann. d. Phys. (4) **50**, 901, 1916.
3) N. Bohr, Phil. Mag. **26**, 1, 476, 857, 1913.
4) l. c. S. 67.
5) W. M. Hicks, Phil. Trans., A **210**, 96, 1910.
6) W. M. Watts, Phil. Mag. **29**, 775, 1915.
7) van den Broek, diese Ztschr. **14**, 32, 1913.

$+ 2\int_{\infty}^{r_i} f(r)dr\Big]$ nichts anderes als der variable Term in der Serienformel, also eine empirisch bekannte Funktion von i:

$$r_i f(r_i) + 2\int_{\infty}^{k_i} f(r)dr = \varphi(i) \tag{4}$$

Aus (1) und (4) läßt sich jetzt $f(r)$ berechnen. Wir fassen zu diesem Zwecke i als eine stetig variable Größe auf; dann ist r eine stetige Funktion von i. Setzt man zur Abkürzung $\frac{h^2}{4\pi^2 m e} = a$, so hat man

$$\frac{a i^2}{r_i^2} + 2a\int_{\infty}^{r_i} \frac{i^2}{r^3} dr = \varphi(i)$$

oder nach Einführung der unabhängigen Variabeln unter dem Integral

$$\frac{ai^2}{r_i^2} + 2a\int_{\infty}^{i} \frac{i^2}{r^3}\frac{dr}{di} di = \varphi(i). \tag{5}$$

Durch Differentiation nach der obern Grenze erhält man

$$\frac{2ia}{r_i^2} = \frac{d\varphi}{di},$$

woraus

$$r_i^2 = \frac{2ia}{\frac{d\varphi}{di}}.$$

Nach der Formel von Mogendorff-Hicks hat man

$$\varphi(i) = \frac{-3{,}29 \cdot 10^{15}}{\left[i - 0{,}04929 + \frac{0{,}008185}{i-1}\right]^2} \cdot \frac{2h}{e}$$

zu setzen, woraus sich für r^2 die Beziehung ergibt:

$$r^2 = \frac{2ih\left[i - 0{,}04929 + \frac{0{,}008185}{i-1}\right]^3}{16\pi^2 \cdot 3{,}19 \cdot 10^{15} \cdot m \cdot \left[1 - \frac{0{,}008185}{(i-1)^2}\right]}. \tag{6}$$

Wir wollen nun für die Funktion $f(r)$ einen ersten Näherungswert berechnen. Einen solchen erhalten wir, wenn wir $i > 0{,}04929$ annehmen, d. h. der Ausdruck, den wir so bekommen, gilt nur in größerer Entfernung vom Kern. Die Funktion (6) reduziert sich dann auf

$$r^2 = \frac{2i^4 h}{16\pi^2 \cdot 3{,}29 \cdot 10^{15} m},$$

woraus direkt

$$i^2 = 4\pi\sqrt{\frac{3{,}29 \cdot 10^{15} \cdot m}{2h}} \cdot r$$

folgt. Setzen wir hierin die numerischen Werte h[1] $= 6{,}57 \cdot 10^{-27}$ und $m = 0{,}897 \cdot 10^{-27}$ [dieser Wert ergibt sich aus e[1]) $= 4{,}77$ und dem wahrscheinlichen[1]) Wert für $\frac{e}{m} = 5{,}32 \cdot 10^{17}$] ein, so erhält man mit Rücksicht auf (1):

$$f(r) = \frac{4{,}81 \cdot 10^{-10}}{r^2}. \tag{7}$$

Auf das Elektron wirkt also die Kraft

$$K = e \cdot f(r) = \frac{4{,}81 \cdot 10^{-10} \cdot e}{r^2}.$$

In größerer Entfernung vom Kern gilt also das Coulombsche Gesetz. Nun ist aber $4{,}81 \cdot 10^{-10}$ bis auf 1 Proz. genau der Millikansche Wert für die Elementarladung e[2]). Dies bestätigt also, was am Anfang gesagt wurde, daß nur $^1/_3$ der Kernladung wirksam ist und daß die übrigen $^2/_3$ durch die andern Elektronen kompensiert werden.

Betrachten wir jetzt den Fall, daß zwei Elektronen in derselben Ebene um den Kern rotieren. Dieses System ist nach Bohr nur stabil, wenn sich die beiden Elektronen auf dem gleichen Kreis und in diametraler Stellung bewegen. Wenn wir annehmen, daß die beiden Elektronen nach dem Coulombschen Gesetz aufeinander einwirken, so wird auf ein Elektron die Kraft

$$K = \frac{mv^2}{r} = ef(r) - \frac{e^2}{4r^2}$$

ausgeübt. Berechnet man nun ganz analog wie oben die Funktion $f(r)$, so erhält man wieder in derselben Annäherung

$$f(r) = \frac{5}{4} \cdot \frac{e}{r^2},$$

d. h. in diesem Falle würde dem Kern die Ladung $\frac{5}{4}e$ zukommen.

Nehmen wir endlich die dritte Möglichkeit an, daß nämlich alle 3 Elektronen rotieren, und zwar auf dem gleichen Kreis und in gleichen Abständen. Dann ergibt sich für die Kraft, die auf ein Elektron in einer stationären Bahn wirkt,

$$K = \frac{mv^2}{r} = ef(r) - \frac{e}{r^2\sqrt{3}}.$$

1) R. A. Millikan, diese Ztschr. 17, 217, 1916.

1) M. Wolfke, diese Ztschr. 17, 198, 1916.

2) Auf die Diskrepanz zwischen den spektroskopisch und den nach andern Methoden bestimmten Werten der universellen Konstanten macht schon Paschen l. c. S. 937 aufmerksam.

Für die Funktion $f(r)$ in diesem System liefert die Rechnung den Näherungswert

$$f(r) = \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)c}{r^2}$$

Das bedeutet aber, daß in diesem Falle der Kern die Ladung $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)c$ tragen müßte.

Damit ist also gezeigt, daß wenn die Bohrschen Annahmen auch für das Lithiumatom gelten, dann um den Kern immer nur 1 Elektron, wahrscheinlich das Valenzelektron, rotieren kann, während sich die beiden andern in unmittelbarer Nähe des Kernes befinden. Dies hat schon Bohr für das Li-Atom als wahrscheinlich vorausgesehen[1]).

Für die theoretische Interpretation der Lage und Struktur der Lithiumlinien ist es unbedingt notwendig, den genauen Wert der Funktion $f(r)$ zu kennen. Dieser Wert läßt sich dadurch erhalten, daß man aus Gleichung (6) i^2 in Abhängigkeit von r berechnet und diesen Wert dann in (1) einsetzt. Eine erste flüchtige Rechnung ergab für $f(r)$ etwa folgende Entwicklung:

$$f(r) = \frac{e}{r^2} + \frac{1{,}7 \cdot 10^{-6} e}{r^{2,5}} + \frac{4{,}2 \cdot 10^{-12} e}{r^3} + \cdots \quad (8)$$

Dieser Ausdruck für die Feldstärke gilt vom 2. Ring an nach außen. Über das Atomfeld innerhalb dieses Ringes läßt sich aus spektroskopischen Tatsachen wohl nichts aussagen.

Leider bin ich durch Militärdienst momentan an der Weiterentwicklung dieser Gedanken verhindert, behalte mir jedoch vor, eine präzisere Rechnung für das Feld des Lithiums und dann auch der übrigen Alkalien demnächst in meiner Doktorarbeit durchzuführen.

1) N. Bohr, l. c. S. 491.

Zürich, Dezember 1916.

(Eingegangen 15. Dezember 1916.)

Das periodische System der Elemente in der elementaren Spektralanalyse.

Von Viktor Kutter.

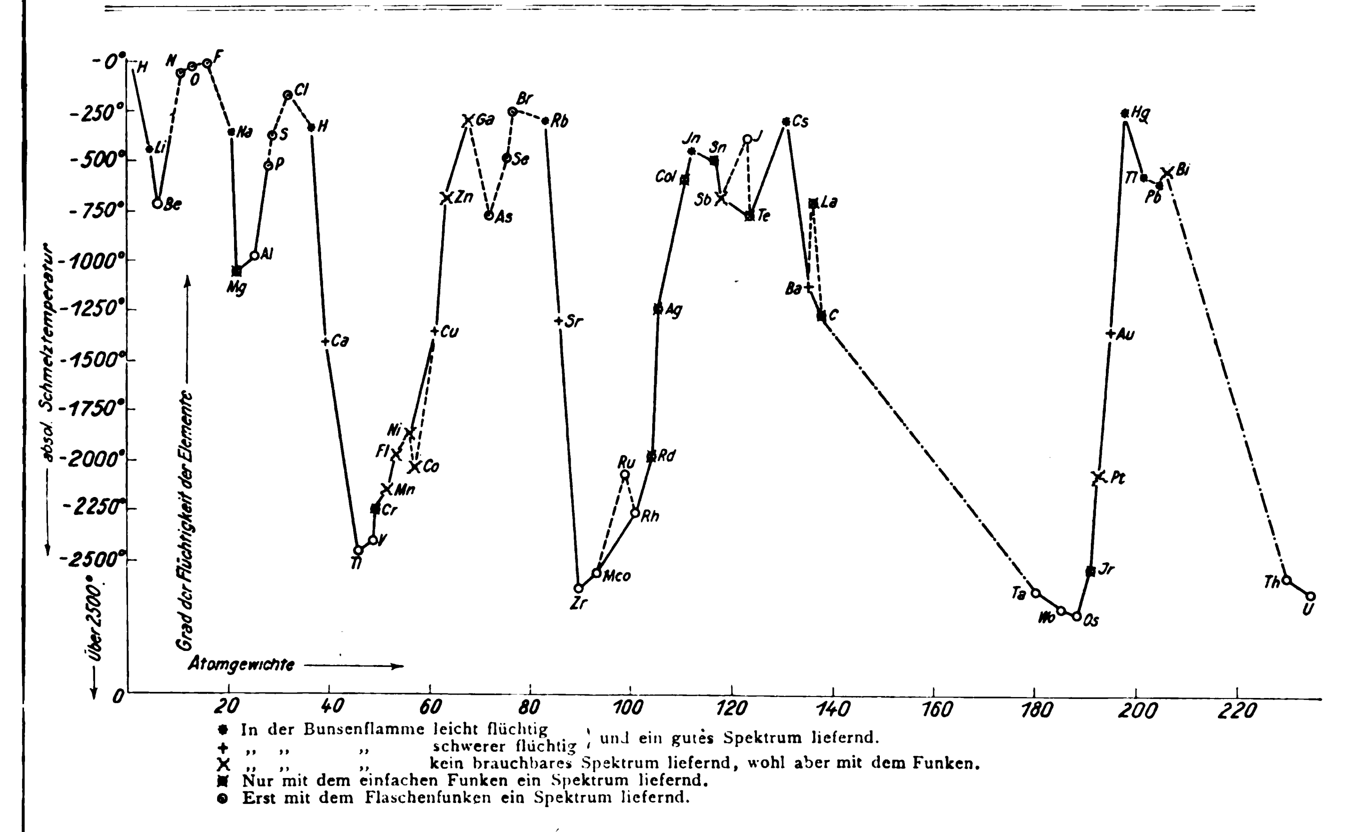
Während die bisherigen Beziehungen zwischen der Spektralanalyse und dem periodischen System vor allem die Lage der Linien betreffen und die Wellenlängen der Haupt- und Nebenserien in einen Zusammenhang mit dem Atomgewichte bringen[1]), oder die Empfindlichkeit der Reaktion betreffen[1]), handelt es sich hier um eine wesentlich einfachere Beziehung, die im Grunde genommen nichts anderes darstellt, als eine direkte Anwendung der bekannten, von W. Nernst formulierten Gesetzmäßigkeit zwischen den Schmelztemperaturen der reinen Metalle und den Atomgewichten[2]); hiernach zeigen die Schmelzpunkte eine große Regelmäßigkeit in ihren periodischen Änderungen mit den Atomgewichten, und diese Gesetzmäßigkeit ist es, die wir verwerten wollen.

Bringt man ein Gemisch verschiedener Metallsalze vor dem Spektralapparat in die Gasflamme, so erscheinen die Linien der einzelnen Elemente bekanntlich nicht gleichzeitig, sondern teilweise nacheinander und verschwinden auch ebenso wieder. Je flüchtiger das Element, desto rascher verschwinden die Linien und man muß sich daher bei der Analyse eines solchen Gemisches an gewisse empirische Regeln halten, wonach man seine Aufmerksamkeit zuerst den flüchtigsten Elementen widmet, und dann in derselben Reihenfolge zu den anderen übergeht, wie die Flüchtigkeit abnimmt. Am flüchtigsten erscheinen die Alkalien, und zwar in folgender Reihenfolge: Cäsium, Rubidium, Kalium, Lithium und Natrium; hieran schließen sich Indium und Thallium an, dann folgen die Erdalkalimetalle Barium, Strontium, Kalzium. Auf diese Weise kann man unter Zugrundelegung der Flüchtigkeit die wichtigeren Elemente der Kationen in vier empirische Gruppen einteilen. Die erste Gruppe umfaßt die bisher aufgezählten und außerdem noch das Blei, Kupfer und Gold, also diejenigen Elemente, die in der Bunsenflamme ein charakteristisches und ausreichendes Spektrum geben. Die zweite Gruppe umfaßt diejenigen Metalle, die in der gewöhnlichen Flamme nur noch ein ungenügendes Spektrum geben, bei denen daher schon der elektrische Funke zu Hilfe gezogen werden muß. Es sind dies: Eisen, Nickel, Kobalt, Zink, Mangan, Platin, Gallium, Antimon und Wismut. Die dritte liefert überhaupt erst mit dem Funken ein Spektrum und enthält Magnesium, Chrom, Zinn, Kadmium, Silber, Palladium, Tellur, Lanthan und Cer. In der letzten Gruppe endlich befinden sich diejenigen Elemente, für die der gewöhnliche Funke nicht mehr ausreicht und wo erst der Flaschenfunke genügt; hierher gehören: Beryllium, Aluminium, Titan, Vanadium, Zirkon, Molybdän,

1) Kayser u. Runge, Wied. Ann. **41**, 302, 1890; **43**, 385, 1891; **46**, 225, 1892; **52**, 93 u. 114, 1894; Rydberg, Wied. Ann. **50**, 625, 1893; **52**, 119, 1894; Balmer, Wied. Ann. **25**, 80, 1885; **60**, 380, 1897.

1) Schuler, Ann. d. Phys. **5**, 931, 1901. Vergleichung der Empfindlichkeit der spektralanalytischen Reaktionen für die Metalle der zwei ersten Gruppen des Mendelejeffschen Systems sowie des Thalliums.

2) W. Nernst, Theoretische Chemie, 4. Aufl. 1903, S. 194–197.



● In der Bunsenflamme leicht flüchtig } und ein gutes Spektrum liefernd.
+ „ „ „ schwerer flüchtig }
X „ „ „ kein brauchbares Spektrum liefernd, wohl aber mit dem Funken.
▪ Nur mit dem einfachen Funken ein Spektrum liefernd.
⊙ Erst mit dem Flaschenfunken ein Spektrum liefernd.

Ruthenium, Rhodium, Tantal, Wolfram, Osmium, Iridium, Thor und Uran.

Da nun die Flüchtigkeit eines Körpers in hohem Maße mit dem Siedepunkt zusammenhängt und dieser im allgemeinen um so höher liegt, je höher der Schmelzpunkt ist, so ist es klar, daß man im großen ganzen für beide Eigenschaften auch dieselben Gesetzmäßigkeiten wird erwarten dürfen. Trägt man daher, wie in der beigegebenen Figur, die Atomgewichte auf der Abszisse und die Schmelzpunkte so auf der Ordinate ab, daß die Temperaturen von oben nach unten gezählt werden, dann liegen die Elemente auf einer Kurve, aus der sich ohne weiteres eine ausgesprochen periodische Gesetzmäßigkeit für die Flüchtigkeit der Elemente ergibt.

In den höchsten Lagen hat man die Alkalimetalle in der früher besprochenen Reihenfolge und außerdem noch das Quecksilber, welches sich sogar schon verflüchtigt, bevor seine Gase zum Glühen kommen und ein Spektrum aussenden. Umgekehrt finden sich in den Minima der Kurve die am schwersten flüchtigen, erst durch den Flaschenfunken verdampfenden Elemente, und zwar mit großer Regelmäßigkeit vom Beryllium mit dem kleinen Atomgewicht 9,1 über das Aluminium und Molybdän bis zum Uran mit dem überhaupt höchsten Atomgewicht 238,5. Zwischen diesen beiden äußersten Lagen verteilen sich die übrigen Metalle ihren Eigenschaften entsprechend, wobei sich immer wieder deutliche Regelmäßigkeiten zeigen, die am klarsten durch die Kurve selbst veranschaulicht sind. Hierbei macht das Silber eine Ausnahme, insofern es entsprechend seiner Lage zwischen Kupfer und Gold eigentlich noch ein reines Flammenspektrum liefern müßte; auch das Gallium fällt etwas aus der Ordnung heraus, da es wie das Indium und Thallium eigentlich sehr leichtflüchtig sein sollte, was in Wirklichkeit nicht ganz zutrifft. Bedenkt man jedoch, daß die Beziehungen des periodischen Systems fast durchweg nur Regelmäßigkeiten und keine zahlenmäßigen Gesetze betreffen, dann können die hier besprochenen Übereinstimmungen als genügend angesehen werden, und die eingangs erwähnten empirischen Arbeitsregeln erfahren auf diese Weise eine tiefere Begründung durch die Einführung der Flüchtigkeit der Elemente in das periodische System.

(Eingegangen 15. Dezember 1916.)

BESPRECHUNGEN.

E. Grimsehl, Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauche beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. In zwei Bänden. Erster Band: Mechanik, Akustik und Optik; zweiter Band: Magnetismus und Elektrizität. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. gr. 8. XII u. 966 bzw. X u. 542 S. Mit 1063 bzw. 517 Figuren im Text und 2 farbigen Tafeln im ersten und einem Bildnis E. Grimsehls als Titelbild im zweiten Bande. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1914 bzw. 1916. Band I: geh. M. 11.—, geb. M. 12.—; Band II: geh. M. 7.—, geb. M. 8.—.[1])

Fast ebenso schnell wie die erste Auflage dieses trefflichen Lehrbuchs ist die zweite vergriffen gewesen, und der rastlose Schöpfer dieses Werkes mußte an die neue Bearbeitung herangehen. Leider ist es ihm nicht mehr vergönnt gewesen, diese Arbeit zu vollenden. Kurze Zeit nach dem Erscheinen des ersten Bandes — der Umfang war so stark gewachsen, daß eine Teilung in zwei Bände unvermeidlich geworden war — fand der 53jährige, der bei Ausbruch des Weltkrieges zu den Fahnen geeilt war, auf den blutgetränkten Schlachtfeldern Flanderns den Heldentod Es ist hier nicht der Ort, zu erörtern, was die deutsche Wissenschaft an diesem trefflichen Manne verloren hat. Das warm empfundene Vorwort, das der Herausgeber des zweiten Bandes, Wilhelm Hillers, diesem Bande vorausgesandt hat, gibt davon Kunde. (Auch diese Zeitschr. **16**, 19, 1915.)

Welche Gesichtspunkte für die Überarbeitung des Werkes maßgebend gewesen sind, geht aus folgenden Sätzen des Vorworts zum ersten Bande hervor. Der Verfasser schreibt hier u. a.: „Ich habe einen Abschnitt mit dem Thema ‚Die Kraftübertragung' von den übrigen vollständig getrennt und diesen Stoff erst nach der Lehre von der Elastizität und Festigkeit behandelt. Dadurch ist eine auch den technischen Bedürfnissen entsprechende Berechnung der Spannungen in den Mechanismen, dem Fachwerk und dem Seilpolygon, sowie eine Berücksichtigung der Reibung möglich geworden. In der Lehre von den Flüssigkeiten ist das Ebbe- und Flutproblem neu behandelt worden; ferner ist die Wirkungsweise der Turbinen eingehender ausgearbeitet worden. Bei den luftförmigen Körpern hat die Behandlung des Flugproblems eine starke Erweiterung erfahren. Die Oberflächenspannung und Kapillarität habe ich neu bearbeitet. Umfangreiche Änderungen und Vertiefungen hat die Wärmelehre erfahren. Besonders ist alles das, was mit den beiden Hauptsätzen der mechanischen Wärmetheorie zusammenhängt, neu bearbeitet worden. In der Lehre vom Licht sind die die Photometrie behandelnden Kapitel erweitert und vertieft worden. Eine starke Ergänzung hat die geometrische Optik durch die Behandlung der Abbildung durch zentrierte sphärische Flächen erfahren. In der physikalischen Optik sind die Interferenzerscheinungen und besonders die Beugungserscheinungen sehr eingehend behandelt worden."

Sind hiermit die größeren und tiefer greifenden Änderungen gegenüber den beiden ersten Auflagen gekennzeichnet, so wird man auch sonst auf Schritt und Tritt die rastlos bessernde Hand verspüren. Überall zeigt sich das erfolgreiche Bestreben, das Werk dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft anzupassen.

Für den zweiten Band hatte der Verfasser größere Änderungen nicht geplant. Wo in einzelnen Fällen umfangreichere Überarbeitungen durch den Fortschritt der Forschung erforderlich geworden waren, haben sich Freunde und Fachgenossen Grimsehls dieser Arbeit unterzogen. So haben H. Geitel den Abschnitt über die Luftelektrizität, J. Classen den letzten Abschnitt über die historische Entwicklung der Elektrizitätslehre überarbeitet. B. Walter hat eine Blitzphotographie und E. Wagner Röntgenspektrumaufnahmen beigesteuert. Für die Drucklegung ist man den Herren W. Koch und W. Hillers zu Dank verpflichtet. Durch die Beifügung des lebensvollen Bildes des Verfassers hat sich die Verlagsanstalt den Dank aller Freunde und Verehrer des zu früh Dahingeschiedenen erworben.

Lehrer und Schüler höherer Lehranstalten, Studierende, die im Anschluß an die Vorlesungen ein Lehrbuch benützen, sowie solche, die durch Selbststudium sich tiefere Kenntnisse in der Physik aneignen wollen, werden aus diesem trefflichen Buche gleichermaßen Nutzen ziehen. Es gehört zu den Werken, die sich einen dauernden Ehrenplatz in der Literatur erworben haben. Iklé.

1) 2. Auflage: s. diese Zeitschr. **13**, 838, 1912.

J. W. Giltay, De strijkinstrumenten uit een natuurkundig oogpunt beschouwd. gr. 8⁰. XI u. 103 S. m. 57 Abbildungen im Text. A. W. Sijthoff, Leiden. 1916.

Mit großem Fleiß hat der Verfasser zunächst zusammengetragen, was sich in der Literatur an Einschlägigem finden läßt, und unterzieht nun das so gewonnene Material einer scharfen kritischen Durchsicht, indem er nach Möglichkeit eigene Versuche da einschaltet, wo sich anders ein abschließendes Urteil nicht fällen läßt. Da sämtliche Streichinstrumente gebaut sind wie die Geige und sich von ihr in der Hauptsache nur durch Größe und Tonhöhe unterscheiden, so behandelt er nur diese. Er untersucht die Wirksamkeit eines jeden Teiles der Geige und zwar, worauf frühere Autoren nicht immer genügend geachtet zu haben scheinen, sowohl einzeln als auch im festen Verbande des Geigenkörpers. Denn die, durch die Zargen mit dem Boden fest verbundene und obendrein durch die Stimme an einer Stelle gestützte Decke wird natürlich anders schwingen als eine ebenso geformte freie Holzplatte. Das Resultat der Untersuchung ist kurz folgendes: Die Schwingungen der Saite werden durch den Steg auf die Decke übertragen und wesentlich durch diese einer größeren Luftfläche mitgeteilt. Durch einige ebenso einfache, wie sinnreich erdachte Versuche wird hierbei gezeigt, daß der Steg nicht nur in seiner eigenen Ebene um den — vom Spieler aus gesehen — rechten Fuß schwingt, sondern auch senkrecht dazu um die Fußlinie. Die erstere Bewegung überträgt alle Schwingungen der Saite, die letztere nur die geraden Vielfachen der Grundschwingung. Hierdurch erklärt es sich, daß der Dämpfer, der ja wesentlich nur die zweite Bewegung hemmt, nicht nur die Stärke des Tones herabsetzt, sondern auch seine Klangfarbe verändert. Gegen den Druck der Saiten wird die Decke durch den Baßbalken unterstützt, während die Stimme, in der Nähe des rechten Stegfußes angebracht, diesen einigermaßen festlegt um so ein „Schlingern" des Steges zu verhüten, außerdem aber einen geringen Teil

der Bewegung der Decke auf den Boden überträgt. Die F-löcher dienen dazu, den Mittelteil leichter beweglich zu machen, und erst in zweiter Linie, um die Außenluft mit der Innenluft in Verbindung zu setzen. Durch den Boden wird in der Geige ein ganz bestimmtes Luftvolumen eingeschlossen, das einige deutlich nachweisbare Resonanztöne besitzt; doch scheint deren Vorhandensein geringen Einfluß zu besitzen auf Tonstärke und Klangfarbe.

Zum Schluß geht der Verfasser noch auf die so wichtige, bis heute unentschiedene Frage ein, ob Geigen „eingespielt" werden müssen, ob eine an sich gute Geige dadurch an Tonschönheit verliert, daß sie nicht bespielt wird. Ein großer, vielleicht der größte, Teil derer, die ein Urteil darüber haben können, ist ja bis heute dieser Meinung gewesen, und es ist auch bis jetzt keine Tatsache bekannt, die sie beweiskräftig widerlegen könnte. Allein der Verfasser betont, daß sich auch ein wissenschaftlicher Grund, der sie unterstützte, nicht einsehen läßt, daß aber andererseits viele Umstände dazu beitragen können, einen derartigen Effekt vorzutäuschen, so vor allem, daß nach einigem Spielen der Künstler die Fehler seines Instruments kennen und auszuschalten gelernt haben wird.

Man erkennt bei der Lektüre dieses Buches, wie auf einem verhältnismäßig eng begrenzten, systematischer Untersuchung durchaus nicht verschlossenen Gebiete eine große Reihe von Behauptungen durch die Jahrzehnte mit fortgeschleppt werden, deren einige gänzlich unbegründet sind, andere sich direkt gegenseitig widersprechen. Um so dankbarer ist es zu begrüßen, wenn sich einmal, wie hier, ein Autor findet, der diese Behauptungen auf ihren Wert prüft, und der den einzig richtigen Weg, zu greifbaren Resultaten zu gelangen, einschlägt, den Weg exakter experimenteller Untersuchung. V. Pieck.

W. Ramsay, Moderne Chemie. Ins Deutsche übertragen von M. Huth. 8. 2. Auflage. Halle a. S., Wilh. Knapp. I. Teil. Theoretische Chemie. 158 S. m. 9 Abbildungen. 1908. M. 2.—. II. Teil. Systematische Chemie. 243 S. 1914. M. 3.80.

Der erste Teil des vorliegenden Werkes gibt in kurzer, prägnanter Darstellung die Hauptlinien des historischen Entwicklungsganges der modernen Chemie, sowie ihre wichtigsten theoretischen Grundlagen. Beginnend mit der Entwicklung des Elementbegriffs, werden in den ersten Kapiteln hauptsächlich, in möglichst historischer Folge, die Gesetze von Dalton, Boyle, Gay-Lussac, Dulong und Petit und die Avogadrosche Regel eingeführt. Durch Anführung von Beispielen und eingehende Behandlung des Atom- und Äquivalentbegriffs wird der Leser mit der Handhabung dieser Gesetze vertraut gemacht und anschaulich auf ihre Bedeutung hingewiesen. Hierauf werden die Grundgedanken der kinetischen Gastheorie, die Gesetze des osmotischen Druckes und die mit den Dissoziationserscheinungen zusammenhängenden Gesetze eingeführt und die galvanischen Erscheinungen behandelt. Die weiteren Kapitel gehen tiefer auf die Anwendungen der Gesetze ein und behandeln das periodische System der Elemente, ihre allgemeinsten Darstellungsverfahren, die Valenz und die Strukturformeln, Einteilung und Nomenklatur der Verbindungen. Im Anschluß daran werden die Verfahren zur Bestimmung der Äquivalente und Molekulargewichte der Elemente besprochen, die Erscheinungen der Allotropie, Isomerie, Polymerie, der Tautomerie und in einem besonderen Abschnitt die Stereochemie und die Deutung vieler der vorher besprochenen Erscheinungen mit ihrer Hilfe. Das Schlußkapitel bildet ein Abschnitt über Begriff und Umwandlungen der Energie. —

Der zweite Teil des Werkes sucht das gesamte Gebiet der chemischen Verbindungen systematisch zu umfassen. Er behandelt demgemäß die Verbindungen klassenweise zusammengefaßt. Das erste, mehr einführende Kapitel dient der Erörterung allgemeiner hierher gehöriger Fragen, zunächst einer Präzision der Unterscheidung von Mischungen und Verbindungen, verdeutlicht und ausgeführt an der Analyse der Atmosphäre. Weiter werden hier die Verfahren zur Abscheidung der Elemente aus ihren Verbindungen und die allgemeineren Eigenschaften der Elemente besprochen. An geeigneten Stellen der hierauf folgenden systematischen Behandlung der Verbindungen finden sich mancherlei Ergänzungen zu den Ausführungen des ersten, theoretischen Teils eingestreut, ein Verfahren, welches in der Art der gewählten, besonders eingehend besprochenen Beispiele seine pädagogische Berechtigung hat und die Übersichtlichkeit des Ganzen nicht beeinträchtigt. — Der Verf. bedient sich bei seinen systematischen Darstellungen, wie bei der Behandlung von Einzelbeispielen, in ausgedehntem Maße der Strukturformeln und mit ihnen der Valenzlehre, was der Eleganz und Lebhaftigkeit der Darstellung, die das ganze Werk kennzeichnen, zu großem Vorteil gereicht. Demgegenüber ist, wie häufig bei solchen Werken, eine gewisse Neigung zu bemerken, sich über Schwierigkeiten hinwegzusetzen, wie sie sich bei einer so umfangreichen systematischen Erfassung gerade der anorganischen Verbindungen bieten, deren Behandlung natürlich bei Ramsay im Vordergrunde steht. Im Schlußkapitel, in welchem die Legierungen behandelt werden, tritt die erwähnte Neigung besonders hervor: der Schwierigkeiten, die sich der alten Valenzauffassung bei den Metallverbindungen bieten, ist keinerlei Erwähnung getan, obwohl sich diese Stelle zu einer eingehenden Betrachtung der Valenzfragen von diesem Gesichtspunkte aus besonders eignet. — Das Werk kann bestens empfohlen werden, besonders auch dem Physiker. S. Kyropoulos.

H. Rübesamen, Über Empfangsstörungen und elektrisch-meteorologische Elemente der Atmosphäre. Dissertation Halle 1915.

Die vorliegende Dissertation, deren Verfasser leider im Felde gefallen ist, enthält Beiträge zu der in den letzten Jahren von vielen Seiten gepflegten Erforschung der Empfangsstörungen der drahtlosen Telegraphie. Die Untersuchungen wurden an vertikalen Antennen mit einer Höhe bis zu 20 m und an horizontalen, in den Erdboden vergrabenen Antennen in Halle-Cröllwitz ausgeführt. Zählungen der Störungen ergaben eine einfache Periode mit einem Maximum in der Nacht und einem Minimum gegen Mittag und einige Minima in der Dämmerungszeit. Gleichzeitigkeit der Störungen in verschiedenen Antennen wurde oft nachgewiesen, war aber nur angenähert vorhanden. Die Störungserscheinungen in vergrabenen Horizontalantennen wichen z. T. erheblich von denen in den Vertikalantennen ab. Eine Anzahl der Störungen hatten vorübergehende Gewitter zur Ursache. Besonders erwähnenswert ist die vom Verfasser zuerst beschriebene Erscheinung, daß bei auffallender, durch Wolken verursachter Unstetigkeit in der Sonnen- oder Mondbeleuchtung der Antenne starke Störungen auftreten. Der erste Teil der Arbeit ist der Bestimmung der elektrischen Zerstreuungskoeffizienten in Abhängigkeit von verschiedenen Witterungsverhältnissen gewidmet.

P. Ludewig.



Tagesereignisse.

Am 13. Dezember 1916, der **100. Wiederkehr des Geburtstages Werner v. Siemens,** fand in dem Lichthofe der Technischen Hochschule zu Charlottenburg eine eindrucksvolle Gedenkfeier statt. Ergreifende musikalische Darbietungen des Berliner Lehrergesangvereins und des Bläserchors der Kgl. Akadem. Hochschule für Musik gaben den Rahmen für die Würdigung des großen Begründers der deutschen Elektrotechnik aus dem Munde der Redner des Tages. Exzellenz Warburg begrüßte die Versammlung; in Vertretung des Reichskanzlers gab Exzellenz Helfferich eine Ansprache und schließlich hielt Reichsrat Oskar v. Miller die eigentliche Festrede. Aus all diesen Reden hob sich lebendig die wundervolle Persönlichkeit Werner von Siemens heraus, als Vorbild der reifen deutschen Männlichkeit unserer Tage, jener wirkungsvollen Legierung weitblickender und ausgreifender industrieller Energie mit der ethischen Energie wissenschaftlicher und sozialphilosophischer Durchdringung. — Eine Reihe von Körperschaften, die in diesem Sinne Werner v. Siemens als Bannerträger der neuen Zeit verehren, haben eine Siemens-Ring-Stiftung begründet, „zur Auszeichnung von Personen, welche sich hervorragende und allgemein anerkannte Verdienste um die Technik in Verbindung mit der Wissenschaft erworben haben". Diese Auszeichnung besteht für Lebende in der Verleihung des künstlerisch ausgestatteten „Siemens-Ringes" nebst Kassette, für Gestorbene in der Errichtung von Denkmälern, in der Kennzeichnung ihrer Persönlichkeit und ihres Wirkens in Bild und Wort, in der Verbreitung ihrer Schriften u. dergl. — Die Rede Oskar v. Millers endete mit der Verkündigung, daß der erste Siemens-Ring an Professor Dr. Carl v. Linde verliehen sei, und daß von den Verstorbenen Ernst Abbe als Erster dadurch geehrt werden soll, daß ein gedrucktes Lebensbild dieses bedeutenden und eigenartigen Mannes in weitesten Kreisen verbreitet wird. — Auch die deutsche Physik rechnet W. v. Siemens zu den Ihrigen und sie nimmt in vorderster Reihe an der Huldigung für den großen Menschen, technischen Gelehrten und Industrieführer teil.

H. Th. S.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Robert Jentzsch für Mathematik, an der Universität Göttingen Dr. Wilhelm Bachmann für anorganische Chemie.

Ernannt: Der Professor der allgemeinen Chemie an der Landwirtschaftlichen Akademie Lemberg-Dublany Dr. Jan Zawidzki zum ord. Professor der Chemie an der Universität Krakau, Dr. R. L. Borger zum a. o. Professor der Mathematik an der Ohio Universität in Athens, Professor G. C. Evans zum o. Professor der Mathematik und Dr. W. C. Graustein zum a. o. Professor der Mathematik am Rice Institut, Dr. S. Lefschetz und Dr. J. Wheeler zu a. o. Professoren der Mathematik an der Kansas Universität in Lawrence, Dr. C. N. Yeaton zum a. o. Professor der Mathematik an der Northwestern Universität in Chicago, der Privatdozent an der Universität Halle Dr. techn. Friedrich Pfeiffer zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Heidelberg, der Dozent an der Bergakademie Berlin Dr. H. Wölbling zum etatsmäßigen Professor für Analytische und Theoretische Chemie in der Abteilung Bergbau der Technischen Hochschule Berlin, der a. o. Professor der technischen Physik an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Felix Exner zum Direktor der Zentralstelle für Geodäsie und Dynamik und zum ord. Professor der Geophysik an der Universität Wien, der ord. Professor an der Universität Königsberg Dr. Karl Böhm zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Karlsruhe, der Privatdozent an der Universität Gießen Dr. Karl Uller zum a. o. Professor der Physik ebenda, der ord. Professor der allgemeinen und Experimentalchemie an der Universität München Dr. Richard Willstätter zum ord. Mitglied, der a. o. Professor für Physik und Meteorologie an der Technischen Hochschule München Dr. Robert Emden zum a. o. Mitgliede der Mathematisch-physikalischen Klasse der Bayr. Akademie der Wissenschaften in München, der ord. Professor an der Deutschen technischen Hochschule Brünn Dr. Friedrich Niethammer zum ord. Professor der Elektrotechnik an der Deutschen technischen Hochschule Prag, der Observator am meteorologisch-magnetischen Observatorium in Potsdam (z. Z. Assistent der Feldwetterwarte in Brüssel) Dr. Alfred Nippoldt zum Professor.

Verliehen: Dem ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Gießen Dr. Walter König und dem ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Jacob Horn der Titel Geheimer Hofrat, dem a. o. Professor der Pharmazeutischen Chemie an der Universität Münster Dr. Georg Kaßner der Titel Geh. Regierungsrat, dem Privatdozenten der Chemie an der Universität Bonn Dr. Julius Gewecke, dem Dozenten für analytische Chemie an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Karl Jellinek, dem Privatdozenten für organische Chemie an derselben Hochschule Dr. Max Claass, dem Privatdozenten für Chemie an der Universität Freiburg i. B. Dr. Kurt Heß, dem Privatdozenten an der Universität Göttingen Dr. Hans Gerdien (beurlaubt zum Laboratorium des Wernerwerks von Siemens & Halske, Berlin) und dem Elektrotechniker Direktor der Siemens-Schuckert-Werke Otto Krell in Berlin der Titel Professor.

Angenommene Berufung: Professor Dr. Gustav Mie in Greifswald für den Lehrstuhl der Experimentalphysik an der Universität Halle (vgl. **17**, 465, 1916).

Ehrungen: Der Direktor von Philips' Glühlampenfabriken in Eindhoven (Holland) Ingenieur G. L. F. Philips wurde vom Senat der Technischen Hochschule in Delft (Holland) zum Doktor honoris causa ernannt.

Gestorben: Der Privatdozent für Nahrungsmittel- und Pharmazeutische Chemie an der Universität Berlin Dr. Wilhelm Lenz, der frühere Professor der Mathematik an der De Pauw Universität Dr. J. P. D. John, der erste Präsident der American Mathematical Society Dr. E. Mc Clintock, der ord. Professor der Mathematik an der Böhmischen Technischen Hochschule Brünn Dr. Karl Zahradnik, der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Pisa Dr. Angelo Battelli, der etatsmäßige a. o. Professor der medizinischen Physik an der Universität Leipzig Dr. Otto Fischer, der ständige Mitarbeiter der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin Dr. Robert Lindemann.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 2. | 15. Januar 1917. Redaktionsschluß für No. 3 am 27. Januar 1917. | 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die adiabatischen Invarianten bedingt periodischer Systeme.

Von J. M. Burgers.

Im Anschluß an die Untersuchungen von A. Sommerfeld[1]) haben bekanntlich K. Schwarzschild und P. Epstein[2]) gezeigt, daß das Studium der sogenannten „bedingt periodischen" Systeme[3]) die Hilfsmittel zu einer weitgehenden Ausbreitung der Quantentheorie liefert. Für diese Systeme charakteristisch ist, daß jedes Moment sich ausdrücken läßt als Funktion der zugehörigen Koordinate in Verbindung mit den Integrationskonstanten der n ersten kanonischen Integrale und mit Parametern a, und daß jede Koordinate zwischen festen Grenzwerten hin und her geht.

Nun hat andererseits P. Ehrenfest gezeigt[4]), welche große Bedeutung für die Quantentheorie die „adiabatischen Invarianten" besitzen, d. h. diejenigen Größen deren Wert sich nicht ändert, falls man die „langsam veränderlichen Parameter" des Systems unendlich langsam ihre Werte ändern läßt. Speziell hat er gezeigt, daß

1) A. Sommerfeld, Münch. Sitz.-Ber. 1915, S. 425, 459; Ann. d. Phys. **51**, 1, 1916.
2) K. Schwarzschild, Sitz.-Ber. Berl. Akad. 1916, S. 548.
P. Epstein, Ann. d. Phys. **50**, 490, 1916; **51**, 168, 1916.
Siehe auch: P. Debye, Gött. Nachr. 1916, S. 142; diese Zeitschr. **17**, 507, 512, 1916.
3) Diese Systeme sind zuerst von P. Stäckel behandelt worden. Siehe für die Theorie z. B. Charlier, Die Mech. d. Himmels, I.
4) P. Ehrenfest, diese Zeitschr. **15**, 657, 1914; Ann. d. Phys. **51**, 327, 1916.

die älteren von Planck, Debye, Bohr und Sommerfeld benützten Quantenansätze in Quantelung von solchen adiabatischen Invarianten bestehen. Dementsprechend bemerkte schon Herr Ehrenfest, daß es wichtig wäre zu untersuchen, ob auch in den von Schwarzschild, Epstein und anderen studierten Problemen die gequantelten „Phasenintegrale": $I_k = \int p_k\, dq_k$[1]) Invarianten sind.

In einer in den „Verslagen Akad. v. Wetensch. Amsterdam" erschienenen Abhandlung[2]) konnte ich zeigen, daß die Größen $I_k = \int p_k\, dq_k$ in der Tat adiab. Invarianten sind. Spezielle Entartungsprobleme (die auch von Herrn Epstein hervorgehobenen Fälle von Ganzzahligkeitsrelationen zwischen den mittleren Bewegungen) erfordern dabei eine besondere Behandlung.

1) Bei der Integration geht q_k einmal zwischen ihren Grenzwerten hin und her.
2) Verslagen Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Sitzung vom 25. Nov. 1916. — Comm. Leiden, Suppl. 41c.

Leiden, Dezember 1916.

(Eingegangen 19. Dezember 1916.)

Untersuchung des aerodynamischen Feldes einer kreisrunden Platte mit einer neuen Sonde.

Von A. Hagenbach und K. Gegauff.

Die Untersuchung eines aerodynamischen Feldes, wie es etwa durch einen Körper im Luftstrom erzeugt ist, kann man optisch vor-

nehmen, indem die Stromlinien irgendwie durch Fäden oder Flammen oder durch eine Trübung (Rauch) sichtbar gemacht und eventuell mittels einer photographischen Momentaufnahme festgehalten werden. Auch die optische Schlierenmethode hat öfters gute Dienste geleistet (Zickendraht). Diese Methoden geben im allgemeinen nur qualitative Ergebnisse, sie lassen aber gleichzeitig ein größeres Gebiet des Feldes übersehen und sind für die erste Orientierung stets wertvoll. Quantitative Resultate müssen mit Sonden ermittelt werden, die von Stelle zu Stelle verschoben den Zustand des Feldes angeben. Eine Sondenuntersuchung ist demnach viel umständlicher und zeitraubender, aber man erhält allein dadurch das nötige Zahlenmaterial, das eine Prüfung der Theorien gestattet und die Erkenntnis auf aerodynamischem Gebiet erweitert.

Aufnahmen nach optischen Methoden finden wir bei Ahlborn[1]), Eiffel[2]), Coanda[3]), Lafay[4]), Mach[5]), Marey[6]), Tanakadaté[7]), Riabuchinski[8]) und anderen, Sondenmessungen bei Abbé[9]), Krell[10]), Nipher[11]), Pitot[12]), Recknagel[13]), Zickendraht[14]) und anderen.

Jede Sonde bringt in dem zu messenden Felde eine Störung hervor, und je kleiner die Sonde und je mehr sie im Gebrauch ein Stromlinienkörper ist, umso kleiner wird die Störung sein. Die Größe der Sonde kommt in vielen Fällen nur relativ zur Größe des zu untersuchenden umströmten Körpers in Betracht. Große Körper verlangen aber wieder breite Luftströme mit parallelen Stromfäden und dazu sind umfangreiche Apparaturen (Luftkanäle) notwendig. Es ist deshalb wünschenswert, auch in kleinen Abmessungen im Laboratorium brauchbare Messungen ausführen zu können. Solche Überlegungen haben uns veranlaßt, das zu diesem Zweck zusammengestellte Instrumentarium von Zickendraht[1]) noch weiter zu vervollständigen.

Um das aerodynamische Feld an einem Orte zu kennen, ist notwendig, folgende drei Größen anzugeben: die Windgeschwindigkeit, die Windrichtung und den statischen Druck, Größen, die natürlich voneinander abhängen. Unter dem statischen Druck wollen wir die Druckänderung ohne dynamische Wirkung gegen eine windlose Stelle verstehen. Er kann demnach ein Überdruck oder ein Unterdruck sein, je nachdem infolge einer Stauung das spezifische Gewicht der Luft an der Stelle erhöht oder durch eine Saugwirkung vermindert worden ist.

Die in obiger Arbeit angegebene Sonde von Zickendraht zur Bestimmung des statischen Druckes hat zwar recht gute und praktische Eigenschaften, aber sie ist immer noch für manche Zwecke zu groß und die Messungen müssen durch andere Sonden ergänzt werden, welche Geschwindigkeit und Richtung ergeben.

Im folgenden soll über eine Sonde berichtet werden, die an Kleinheit kaum mehr übertroffen werden kann und die alle drei genannten Größen anzeigt. Sie besteht aus einer stricknadeldicken geraden Röhre, vorn abgerundet verschlossen und mit einem kleinen seitlichen, genau senkrecht gegen die Rohrachse gebohrten Loch unmittelbar vor dem abgerundeten Ende versehen. Das offene rückwärtige Ende der Sonde wird mit einer Drucklibelle durch einen Kautschukschlauch verbunden.

Das Verhalten einer Nadelsonde in einem Luftstrom an einem Orte, wo weder Über- noch Unterdruck herrscht, senkrecht zu den Stromlinien gestellt, ist nun folgendes, wenn wir die Nadel um ihre eigene Achse drehen. Unter φ wollen wir den Winkel verstehen, den die Richtung der Stromlinien mit der Richtung des Mundes, d. h. der Öffnung der Sonde bildet. Ist $\varphi = 0$, bläst also der Wind direkt in die Öffnung, so zeigt die Libelle maximalen Überdruck an; bei zunehmendem φ nimmt der Libellenausschlag ab und erreicht beim Winkel von 44^0 den Wert Null. Unter diesem Winkel zeigt also die Sonde gar keine dynamische Wirkung an. Beim Weiterdrehen wird der Druck negativ, es muß demnach aus dem Mund der Sonde Luft ausströmen, so daß eine Verminderung des spezifischen Druckes der Luft in der Sonde eintritt. Für $\varphi = 85^0$ ist der Unterdruck maximal, nachher nimmt er zuerst rasch, dann langsam wieder ab bis zu 180 Grad. Der maximale Unterdruck ist größer als der maximale Überdruck bei Null. Der

1) Fr. Ahlborn, Über den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes. Abhandl. aus d. Geb. d. Nat. Hamburg Bd. 17 (1902), ferner diese Zeitschr. 9, 201, 1908.
2) G. Eiffel, La résistance de l'air, Paris 1910.
3) Vgl. die Bemerkung, Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, II. S. 168, 1911.
4) A. Lafay, Compt. rend. 152, 694, 1911.
5) L. Mach, Zeitschr. f. Luftschiffahrt u. Phys. d. Atmosphäre S. 129, 1896.
6) M. Marey, Comp. rend. 132, 1291, 1901.
7) A. Tanakadaté, Compt. rend. 151, 211, 1910.
8) Riabuchinsky, Bull. de l'inst. aérod. de Koutchino 1906 u. 1907.
9) Abbé, Report of the Chief Signal Officer 2, 144, 1887.
10) O. Krell (jun.), Über Messung von dyn. u. stat. Druck bewegter Luft. München u. Berlin, Verlag Oldenbourg 1904.
11) F. E. Nipher, Trans. of the Acad. of sc. St. Louis 1898.
12) Vgl. Krell l. c. S. 19.
13) G. Recknagel, Ann. Phys. 10, 677, 1880.
14) H. Zickendraht, Ann. Phys. (4) 35, 73, 1911. Fortschr. d. nat. Forschung 4, 45, 1912.

1) H. Zickendraht, l. c.



Unterdruck bei 180⁰ hingegen ist kleiner wie der Überdruck bei 0⁰.

In einem Diagramm kann man die Verhältnisse nach Krell[1]) am einfachsten so darstellen, daß man auf den Radien für die verschiedenen φ den Überdruck von einem willkürlichen Nullkreis nach außen und den Unterdruck nach innen aufträgt. Alle diese Punkte zu einer geschlossenen Kurve vereinigt, liefern ein anschauliches Bild des Verhaltens der Nadelsonde.

Ändert man nun die Geschwindigkeit und nimmt das Diagramm wieder auf, so werden die Ausschläge am Manometer proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit geändert, aber, was nun wichtig ist, die Sonde zeigt wieder für φ gleich 44 Grad keinen Druck an, vorausgesetzt, daß an der betreffenden Stelle des Luftstromes keine Stauung also der statische Druck null existiert. In dem beigegebenen Diagramm (Fig. 1) entsprechen die beiden Kurven den Geschwindigkeiten 4 und 6 m. Die Größe der Öffnung an der Sonde scheint keinen nennenswerten Einfluß auszuüben, nur darf die Öffnung im Verhältnis zur Sondendicke nicht zu groß werden. Eine Sonde von 1,6 äußerem und 1 mm innerem Durchmesser mit einer 0,2 mm weiten Öffnung gab dasselbe wie mit 0,4 mm; bei der Erweiterung auf 0,6 mm traten Unregelmäßigkeiten auf, die sich bei 0,8 mm unangenehm steigerten.

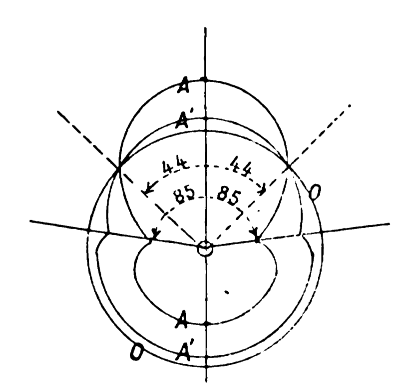


Fig. 1.

Offenbar tritt bei zu großer Öffnung des Mundes im Innern der Sonde Wirbelbildung auf. Bleibt man also unterhalb der Grenze, wo Störungen auftreten, so scheint die Größe der Öffnung belanglos.

Auf einen eingehenderen Vergleich verschiedener Nadelsonden wollen wir erst am Schluß eintreten, nachdem die Brauchbarkeit der Sonde an einem Beispiel gezeigt ist.

Was bedeutet nun der an der Drucklibelle abgelesene Überdruck für den Winkel $\varphi = 0^0$? Bezeichnet man mit v die Geschwindigkeit des Luftstromes, mit h die Stauhöhe der Libelle in Zentimeter Wasser, mit δ die Dichte der Luft, mit g die Beschleunigung und mit p den dynamischen Druck, so gilt für die Recknagelsche Stauscheibe und für die Pitotröhre die Beziehung:

$$v = \sqrt{2gh} \text{ oder da } h\delta = p \quad v = \sqrt{\frac{2gp}{\delta}}.$$

Die Stauscheibe ist eine (unendlich) dünne ebene Scheibe von mindestens mehreren Quadratzentimeter großen Fläche, die in der Mitte eine kleine Öffnung besitzt, von der durch ein dünnes Röhrchen eine Leitung nach dem Manometer geführt wird. Die Pitotröhre ist eine vorn um 90⁰ abgebogene Röhre mit der Öffnung gegen den Wind gekehrt. Krell zeigte, daß für alle Durchmesser und für die verschiedenen Formen der Öffnung zylindrisch-konisch zugespitzt, trichterförmig erweitert bei der Pitotröhre der obige Ansatz gilt, nur darf der nach vorn abgebogene Schenkel nicht zu kurz sein.

Das einfachste war, nun die Nadelsonde mit einer Stauscheibe oder einer Pitotröhre zu vergleichen. Dazu wurde auf der einen Seite der Drucklibelle die Nadelsonde und auf der andern eine Pitotröhre geschaltet und die beiden Sonden nebeneinander in den Luftstrom gestellt. Für mäßige Geschwindigkeiten wurde kein Unterschied beobachtet, der ins Gewicht fiel und die kleinen Abweichungen von Null wurden zuerst nur für zufällige Schwankungen gehalten, die im Luftstrom stets vorhanden sind. Erst durch eine systematische Untersuchung konnte dann später die Größe dieser Abweichungen gemessen werden, doch soll darüber erst später berichtet werden. Sehen wir also von diesem wenig Prozente betragenden Fehler ab, so können wir sagen, daß auch die Nadelsonde, wenn der Mund gegen den Wind steht, die Größe der Geschwindigkeit angibt nach der Gleichung

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Aus dem Verhalten der Sonde geht nun ohne weiteres die Verwendung der Nadelsonde zum Ausmessen eines beliebig gestörten aerodynamischen Feldes hervor. Für den Winkel $\varphi = 0^0$ zeigt die Sonde maximalen Druck. Dieser Druck ist nun im allgemeinen die Summe des hier vorhandenen statischen Über- oder Unterdrucks plus dem dynamischen. Ist der statische Druck p_s und der dynamische p_d, so ist der an der Libelle abgelesene Gesamtdruck

1) O. Krell, l. c.

$$P = p_s + p_d \text{ oder } P = p_s + \frac{\delta v^2}{2g}.$$

Man erhält also die Geschwindigkeit aus der Gleichung

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\delta}(P - p_s)}.$$

Der statische Druck kann aber sofort ermittelt werden. Wir haben nur notwendig, die Sonde um den Winkel $\varphi = 44^0$ zu drehen, linksherum oder rechtsherum, so muß das, was die Libelle anzeigt, der statische Druck allein sein, denn in dieser Stellung wirkt ja die bewegte Luft nicht auf die Sonde. Diese Bedingung, daß für alle Geschwindigkeiten für den Winkel von 44^0 an einem Orte ohne statischen Druck Null zeigt, ist jedenfalls nicht mit mathematischer Genauigkeit erfüllt. Das Verhalten der Sonde erklärt sich dadurch, daß unter dem genannten Winkel sich die Stromlinien tangential an den Zylinder legen. Dies kann nicht bei allen Geschwindigkeiten v bei genau demselben Winkel eintreten, weil der Zylinder nicht ein vollkommener Stromlinienkörper ist. Er dürfte aber auf der Vorderseite sich einem solchen so sehr nähern, daß es begreiflich erscheint, daß wir mit unsern einfachen Hilfsmitteln eine Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten nicht finden konnten. Durch systematische Messungen läßt es sich vielleicht feststellen. Für die Praxis spielt es glücklicherweise keine Rolle.

Die Pitotröhre weist ein ähnliches Verhalten auf; sie zeigt den statischen Druck für $\varphi = 62{,}5^0$ statt für 44, aber sie bringt eine viel größere Störung im Feld hervor, besonders weil bei der Drehung das Knie in den Wind hineingedreht wird und ferner kann man wegen der Abbiegung niemals nahe an den zu untersuchenden Körper heran, was doch gerade wünschenswert ist, weil dort die interessantesten Änderungen auftreten.

Als Ergänzung sei noch bemerkt, daß es auch möglich ist die Geschwindigkeit und den statischen Druck aus dem Wert für $\varphi = 0^0$ und $\varphi = 180^0$ zu berechnen, weil das Verhältnis

$$\frac{\text{Überdruck für } \varphi = 0^0}{\text{Unterdruck für } \varphi = 180^0}$$

konstant ist, unabhängig von der Geschwindigkeit.

Bezeichnet man den Gesamtdruck mit P_0 für $\varphi = 0$, den statischen mit p_s und den dynamischen mit p_0, wo der Index auch den Winkel gegen die Windrichtung angibt, so gilt

$$P_0 = p_s + p_0.$$

Da nun

$$p_0 = \frac{\delta v^2}{2g},$$

so ist

$$P_0 - p_s + \frac{\delta v^2}{2g};$$

ferner steht p_s zu p_{180} in einem konstanten Verhältnis, also

$$\frac{p_0}{p_{180}} = C,$$

so daß

$$P_{180} = p_s - C\frac{\delta v^2}{2g};$$

Subtrahiert man P_{180} von P_0 so ergibt sich

$$P_0 - P_{180} = \frac{\delta v^2}{2g}(1 + C),$$

woraus

$$v = \sqrt{\frac{2g(P_0 - P_{180})}{\delta(1 + C)}}.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung

$$P_0 = p_s + \frac{\delta v^2}{2g}$$

ein, so erhält man

$$p_s = \frac{C P_0 + P_{180}}{1 + C}.$$

Stellt man demnach die Sondenöffnung nicht nur in Richtung des maximalen Überdruckes und in die um 44^0 veränderte Lage, sondern auch noch in die um 180^0 gedrehte, so hat man eine Kontrolle, indem man den statischen Druck zweimal erhält.

Damit man die Sonde eichen kann, d. h. um den Winkel festzustellen, unter dem sie den statischen Druck anzeigt, muß man zuerst einen Ort im Luftstrom haben, von dem man weiß, daß dort kein statischer Druck herrscht. In einem Luftstrom, der durch einen Ventilator in die freie Luft geblasen wird, ist das keineswegs überall der Fall. Man kann den Ort einzig mit der Serschen Scheibe finden; das ist eine sehr dünne Scheibe, deren Fläche parallel zu den Stromlinien liegt. Sie erleidet auf der Oberfläche alsdann keine dynamische Wirkung. Bringt man in der Mitte eine kleine Öffnung an und verbindet diese Öffnung durch ein abgebogenes Röhrchen mit der Drucklibelle, so muß sie den statischen Druck angeben. Die schließlich verwendete Platte hatte einen Durchmesser vom 2,5 cm, war 0,4 mm dick und mit messerscharfem Rand versehen; ihre Meßöffnung von 0,3 mm war mit einer Zuleitungsröhre von 2,5 mm versehen. Die Zuleitung war halbkreisförmig umgebogen und endete in einem geraden Röhrenstück, das genau in die Ebene der Scheibe zu liegen kam, so daß es als Drehungsachse beim Umlegen der Platte um 180^0 dienen konnte. Mit dieser Platte wurde der Luftstrom abgesucht, bis man eine Stelle

gefunden hatte, an der die Scheibe in zwei um 180° verschiedenen Stellungen den Druckwert Null ergab.

Die Drucksonde von Zickendraht kann auch erst benützt werden, wenn sie an einer solchen Stelle im Luftstrom eingestellt ist, deshalb kann man sie nicht ohne weiteres dazu verwenden, um eine solche Stelle zu ermitteln.

Das Instrumentarium bestand aus folgenden Apparaten. Die Drucklibelle war mit einer Millimeterteilung längs beider Schenkel versehen. 1 mm Wasserdruck entsprach einer einseitigen Verschiebung von 6,8 mm.

Bei den Ablesungen wurden durchweg die Zehntel geschätzt, doch ist die Konstanz im allgemeinen nicht über zwei Zehntel. Als Flüssigkeit diente Alkohol. Die Sonde, mit der die folgenden Messungen durchgeführt wurden, war eine Stahlsonde, wie sie in der Chirurgie Verwendung findet, mit einem äußeren Durchmesser von 1,6 mm und einem inneren von 1,0 mm. Sie war in einem Koordinatenapparat[1]) befestigt und durch einen hohlen Halter mit der Drucklibelle durch einen Gummischlauch verbunden. Die Drehung der in einer Röhre F gelagerten Sonde um ihre Achse konnte an einem Teilkreis H (Fig. 2a u. 2b) abgelesen werden. Im freien Luftstrom stand der Zeiger D

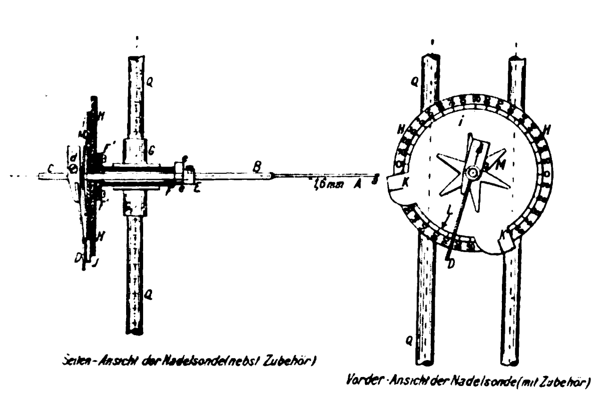


Fig. 2a u. 2b.

auf Null. Drehte man also die Sonde bis zum maximalen Überdruck, so kannte man die Windrichtung. Um nun von dieser Stelle aus rasch um einen Winkel von 44° nach beiden Seiten drehen zu können zur Ermittlung des statischen Druckes, war noch eine Scheibe mit drei Radialstrichen, die zweimal den Winkel von 44° einschlossen, mit einer Feder M leicht angedrückt. Den mittleren Strich brachte man zur Koinzidenz mit dem Zeiger und stellte auf die beiden um 44° abstehenden Striche K u. K' ein.

Differierten die beiden Ablesungen, so wurde bis zur Gleichheit korrigiert, dann kehrte man zum Mittelstrich zurück, um die Richtung des Windes genauer zu erhalten. Es ist leicht begreiflich, daß die erste Einstellung nicht sehr genau sein kann, weil beim maximalen Überdruck die Druckänderung pro Grad klein ist, aber in der 44°-Stellung gerade sehr groß. Dann drehte man die Sonde auch noch um 180° zur Kontrolle, wie oben auseinandergesetzt. Der Quotient des Überdruckes bei 0° zum Unterdruck bei 180° war für diese Sonde 0,85.

Der Ventilator mit 4 Flügeln B zur Erzeugung des Luftstroms war, wie Fig. 3 zeigt, in einen Blechkonus eingestellt und wurde durch einen kleinen Gleichstrommotor C von 220 Volt betrieben. Die

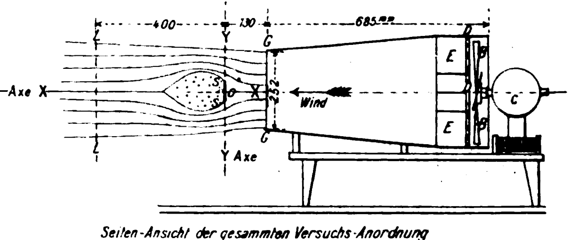


Fig. 3.

Breite des austretenden Luftstroms war 25,2 cm Die Schwankungen im Gleichstromnetz waren bei den Messungen sehr lästig und verschlechterten die Meßgenauigkeit. Ventilatoren mit Flügeln erzeugen keinen parallelen Luftstrom sondern einen helikoidalen, d. h. es findet eine Drehbewegung statt, wodurch in der Achse des Stromes ein Unterdruck entsteht. Durch mühsames Ausprobieren gelang es durch Einsetzen eines Parallelrichters E und einer Siebwand D die Drehbewegung aufzunehmen und die größere Geschwindigkeit am Rand zu vermindern, so daß der Luftstrom fast zylindrisch, schwach divergierend mit praktisch gleichmäßiger Geschwindigkeit über dem ganzen Querschnitt war. Die Siebwand bestand aus einem Blech mit Löchern, die nach außen immer kleiner wurden und so außen die Geschwindigkeit im richtigen Maß herabsetzten. Der Parallelrichter war eine Anordnung von radial gestellten Lamellen, die außen zahlreicher waren wie innen.

Zunächst wurde der ungestörte Luftstrom untersucht. Vor der Öffnung des Ventilators in den beiden Entfernungen von 10 cm und 52 cm wurde der Querschnitt des Luftstromes mit der Sonde genauer ausgemessen. Es zeigte sich dabei, daß in der größeren Distanz durch Reibung der bewegten an der unbewegten Luft eine Verbreiterung des bewegten Querschnittes stattgefunden hatte und dadurch die Geschwindigkeit verringert worden war.

Die Berechnung der Geschwindigkeit und

1) H. Zickendraht, l. c.

des statischen Druckes erfolgte nach der oben angegebenen Formel

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\delta}(P - p_s)}$$

worin P und p_s in Millimeter Wasserdruck anzugeben sind. Die auf der Libelle abgelesenen Verschiebungen mußten zur Umrechnung in Millimeter Wasser mit 0,0147 multipliziert werden. Der Barometerstand schwankte während der Zeit der Messungen um 740 mm, so daß man unter Berücksichtigung der mittleren Temperatur des Versuchsraumes von 18° C. den Wert von 1,180 kg/m³ einsetzen kann. Nimmt man noch für g den Wert 9,81 m/sec², so wird

$$\sqrt{\frac{2g}{\delta}} = 4{,}074$$

so daß man schreiben kann

$$V = 4{,}074\sqrt{P - p_s}\,.$$

Da die gemessenen Überdrucke nicht über 2,5 mm betrugen, so durfte die dadurch hervorgerufene Änderung der Dichte der Luft vernachlässigt werden.

In der folgenden Tabelle findet man unter y die Entfernung der Sondenöffnung von der Achse des Luftstroms in Millimetern, ferner den Gesamtdruck P aus den nebenstehenden Skalenteilen der Libelle, dann den statischen Druck p_s mit den entsprechenden Skalenteilen und zuletzt die daraus berechnete Windgeschwindigkeit.

Ausmessung des Luftstroms.

	Y	Ablesung des Manometers				Berechnung nach Formel $V = 4{,}074\sqrt{P - p_s}$ Geschwindigkeit V
		Gesamtdruck		Stat. Druck		
		Weg auf der Skala	P	Weg auf der Skala	p_s	
	mm	mm	mm	mm	mm	m/sec
Entferng. v. Ventilatorkonus 1 cm	0	17,75	2,61	0,95	0,14	6,40
	+ 20	17,6	2,59	0,8	0,12	6,40
	+ 40	17,15	2,52	0,8	0,12	6,32
	+ 60	17,15	2,52	0 75	0,11	6,34
	+ 80	17,33	2.55	0,55	0,08	6,40
	+ 100	17.5	2,57	0,27	0,04	6,47
	+ 120	17,33	2.55	0,14	0,02	6,47
	+ 124	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Entfernung 52 cm	0	16,4	2,41	— 0,4	— 0,059	6,4
	+ 20	16,2	2,39	— 0,3	— 0,044	6,35
	+ 40	16,0	2,35	— 0,2	— 0,029	6,29
	+ 60	15,7	2,31	0	0	6,20
	+ 80	14,9	2,20	0	0	6,05
	+ 100	13,8	2,03	0	0	5,81
	+ 110	11,9	1,76	0	0	5,40
	+ 120	8,3	1,23	0	0	4,52
	+ 130	5,9	0,87	0	0	3,80
	+ 140	4,0	0,585	0	0	3,11
	+ 150	2,5	0,376	0	0	2,50
	+ 160	1.5	0,223	0	0	1,92
	+ 170	0,85	0,124	0	0	1,43
	+ 180	0,35	0,05	0	0	0,91

In den beiden Querschnitten wurden noch andere Radien ausgemessen, doch sind die Zahlen von den genannten so wenig verschieden, daß wir von der Wiedergabe absehen können. Sie beweisen nur, daß der Luftstrom gleichmäßig war. Im ersten Querschnitt erkennt man, daß bis auf eine Entfernung von 120 mm von der Achse die Geschwindigkeit konstant gleich 6,4 m/sec war, um dann innerhalb 4 mm auf Null abzufallen. An dieser Stelle ist also der Luftstrom noch scharf abgegrenzt. Im entfernteren Querschnitt hingegen ist in der Mitte die Geschwindigkeit noch dieselbe, nimmt aber gleich ab, anfangs allerdings langsam, weiter außen aber rascher, doch ist sie selbst in 180 mm Entfernung von der Achse noch nicht Null. Der Luftstrom ist somit auf dem Weg von 500 mm merklich verbreitert und nach außen diffuser geworden. Im ersten Querschnitt ist in der Mitte noch etwas Überdruck im entfernteren etwas Unterdruck. Die Stelle mit dem statischen Druck Null war in einer Entfernung von 120 mm vor dem Konus, wie die Messungen mit der Stauscheibe gezeigt hatten.

Um die Brauchbarkeit der Sonde zu demonstrieren, wurde eine Messung des aerodynamischen Feldes einer kreisrunden Platte von 80 mm Durchmesser senkrecht vom Wind getroffen durchgeführt. Die Eisenplatte von 80 mm Durchmesser und 0,5 Dicke wurde an einem Halter an die Stelle, wo der statische Druck Null war, genau senkrecht zu den Stromlinien befestigt. Bei der runden Platte genügt es natürlich, die Messungen in jedem Querschnitt nur in einem Radius durchzuführen, weil ja aus Gründen der Symmetrie jeder Radius dasselbe zeigen muß. Man braucht deshalb die Nadelsonde nur um die eigene Achse drehbar und, wenn sie horizontal aufgestellt ist, vertikal verschiebbar zu montieren. Sechs Querschnitte an der Vorderseite (Luvseite) und neun auf der Rückseite (Leeseite) wurden vermessen. Legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfang in die Mitte der Platte, zieht die X-Achse durch die Mitte des Luftstromes und rechnet die positiven X in Richtung des Windes, legt man ferner die Y-Achse in vertikaler Richtung nach oben, so ist der Ort der Sonde durch Angabe von X und Y eindeutig bestimmt. In der folgenden Tabelle findet man die beobachteten Werte des statischen Druckes p_s des Gesamtdruckes P sowie den Winkel α, d. h. die Veränderung der Windrichtung gegen die ursprüngliche ohne jegliche Korrekturen. Ferner ist die Windgeschwindigkeit für alle diese Punkte aus der gegebenen Formel berechnet.

Die Winkel sind so angegeben, daß, wenn

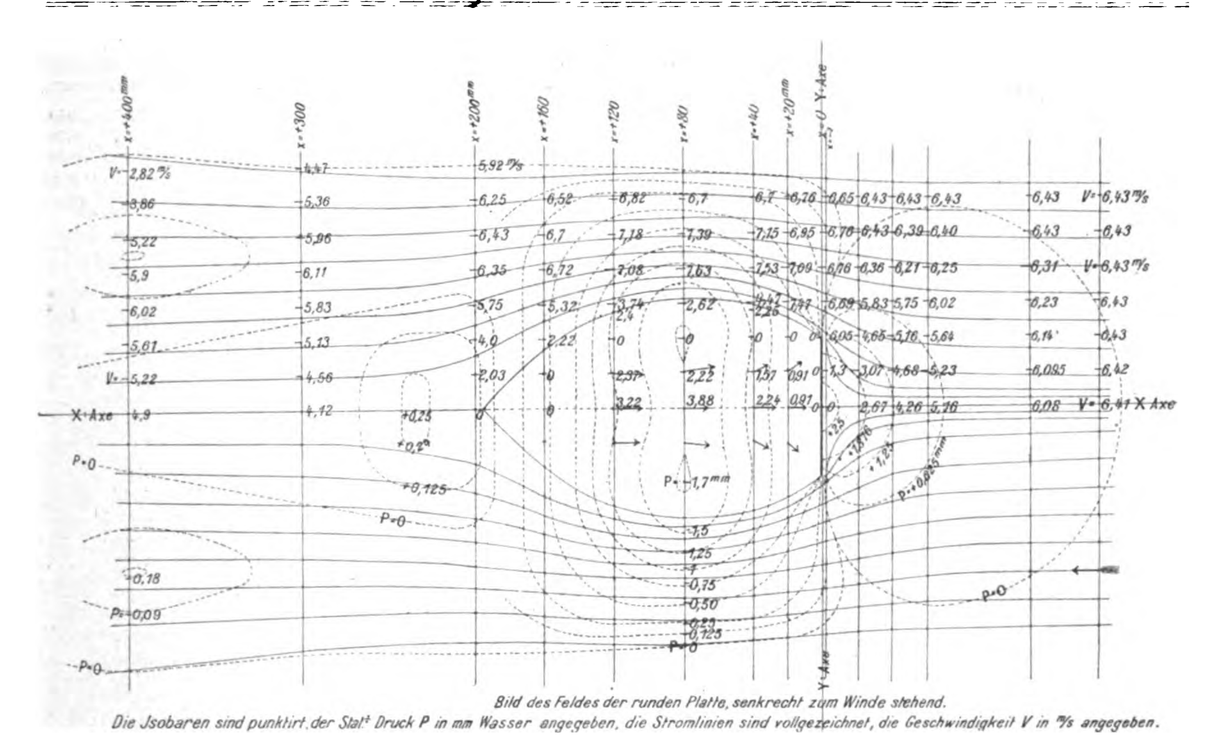


Fig. 4.

der Wind im Sinne des Uhrzeigers abgelenkt worden ist, die Winkel negatives Vorzeichen erhalten haben, im andern Fall positives. Im „toten Wasser“ kommen deshalb Winkel vor, die positiv sind und größer als 180° wegen der Wirbelbildung.

In der graphischen Darstellung der Tabellenwerte in Fig. 4 sind die Stromlinien ausgezogen, die Isobaren (Kurven gleichen statischen Druckes) punktiert gezeichnet. Die Windgeschwindigkeit ist in Meter pro Sekunde hineingeschrieben. Im toten Wasser sind durch Pfeile

Luvseite.

mm	y =	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120	130	mm
$X = -120$	P_0	2,5	2,5	2,52	2,51	2,5	2,5	2,49	2,49	2,5	2,5	2,5	2,51	2,5	mm
	p_s	0,28	0,276	0,285	0,258	0,23	0,20	0,157	0,124	0,10	0,05	0,0	0,01	0,0	mm
	α														Grad
	v	6,08	6,087	6,095	6,12	6,14	6,19	6,23	6,27	6,31	6,36	6,43	6,43	6,43	m/sec
$X = -60$	P	2,5	2,49	2,5	2,5	2,5	2,51	2,5	2,5	2,49	2,49	2,5	2,51	2,5	
	p_s	0,90	0,87	0,84	0,74	0,58	0,46	0.32	0,2	0,15	0,05	0,02	0,01	0,0	
	α	0	− 2,0	− 3,9	− 5,2	− 5,9	− 5,0	− 5,8	− 5,0	−4,45	− 3,9	− 3,2	−2,05	− 1,5	
	v	5.16	5,185	5,235	5,39	5,64	5,83	6,02	6,19	6,25	6,35	6,40	6,43	6,43	
$X = -40$	P	2,51	2,50	2,50	2,51	2,52	2.31	2,5	2,5	2 49	2,49	2,49	2,49	2,5	
	p_s	1,41	1,31	1,18	1,06	0,92	0,71	0,5	0,32	0,17	0,09	0,02	−0.01	0,0	
	α	0−	− 4,0	− 8,0	−10,4	− 10,6	− 9,5	− 8,4	− 7,4	− 6,5	− 5,8	− 5,0	− 3,5	− 3,0	
	v	4,26	4,45	4,68	4,9	5,16	5,46	5,75	6,02	6,21	6,31	6,39	6,43	6,43	
$X = -20$	P	2,51	2,5	2,5	2,5	2,51	2,51	2,5	2,5	2,49	2,49	2,49	2.5	2.5	
	p_s	2,08	2,02	1,93	1,6	1,21	0.81	0.45	0,18	0,04	−0,01	−0,01	0.0	0,0	
	α	0	−10,1	−20,2	−24,3	−24,3	−21,5	−17,0	−13,2	−10,4	− 8,2	− 6,6	−,4.4	− 3,8	
	v	2,67	2,82	3,07	3,86	4,65	5,31	5,83	6,21	6,36	6,43	6,43	6,43	6.43	
$X = -10$	P	2,5	2,51	2,51	2,52	2,51	2,5	2,5	2,49	2,49	2,49	2,5	2,49	2,48	
	p_s	2,48	2,41	2,26	1,82	1,29	0,83	0,45	0,18	−0,01	−0,09	−0,13	−0,14	−0,12	
	α	0	− 80	− 55	−42,8	− 34	−26,7	− 21	−15,7	− 12	− 9,1	− 7,2	− 5,0	− 4,2	
	v	0,54	1,24	2,03	3,4	4,5	5,26	5,83	6,2	6,43	6,54	6,61	6,61	6,57	
$X = -2$	P	2,49	2,5	2,5	2,51	2,51	2,5	2,5	2,5	2,48	2,46	2,46	2,45	2,45	
	p_s	2,49	2.48	2,4	2,02	0,31	− 0,05	−0,19	−0,25	−0,30	−0,30	−0,31	−0,21	−0,11	
	α	0	− 90	− 88	− 85	− 78	− 49	−27,3	−19,5	− 14	−10,4	− 7,9	− 5,5	− 4,9	
	v	0	0,54	1,30	2,87	6,05	6,5	6,69	6,76	6,77	6,76	6,76	6,65	6,58	

Leeseite.

$X = +2$	$y =$	0	20	30	40	42	45	50	60	80	100	120	130	mm
	P	−0,81	−0,81	−0,81	−0,81	2,5	2,5	2,5	2,48	2,45	2,45	2 45	2,43	mm
	p_s	−0,81	−0,81	−0,81	−0,81	−1,03	−0,7	−0,3	−0,22	−0,28	−0,26	−0,10	−0,02	mm
	α					−34	−33	−30,5	−25	−14,5	−7,4	−4,6	−3,5	Grad
	v	0	0	0	0	7,63	7,3	6,82	6,7	6,74	6,72	6,5	6,35	m/sec
$X = +20$	$y =$	0	20		40		51	55	60	80	100	120	130	
	P	−0,82	−0 77		−0,81		−0,30	1,30	2,5	2,5	2,5	2.46	2,4	
	p_s	−0,87	−0,82		−0,81		−0,85	−0,95	−0,87	−0,54	−0,4	−0,21	−0.14	
	α	+180	+220				−23	−22,2	−20,8	−12,3	−6,3	−4,7	−2,2	
	v	0,912			0		3,01	6,11	7,47	7,09	6,95	6,76	6,48	
$X = +40$	$y =$	0	20	40	50	55	60	65	70	80	100	120	130	
	P	−0,89	−1,05	−1,20	−1,2	−0,88	0	1,10	2,48	2,5	2,5	2,45	2,45	
	p_s	−1,20	−1,20	−1,20	−1,2	−1,20	−1,20	−1,17	−1,14	−0.93	−0,59	−0 25	−0,09	
	α	+180	+200			−14,3	−15,3	−14	−12,8	−9,9	−5,2	−2,5	−1,6	
	v	2,24	1,57	0	0	2,25	4,47	6,14	7,72	7,53	7:15	6,7	6,49	
$X = +80$	$y =$	0	20		40	50	60	70	80	83	100	120	130	
	P	−0,74	−1,33		−1,7	−1,7	−1.22	1,02	2,21	2,49	2,49	2,45	2,45	
	p_s	−1,65	−1,68		−1,7	−1,7	−1,63	−1,55	−1,32	−1,23	−0,80	−0,30	0	
	α	+180	+186				+2	+0,6	0	0	+0,15	+0,30	+0,20	
	v	3,88	2,22		0	0	2,62	6,53	7,63	7,82	7,39	6,70	6,35	
$X = +120$	$y =$	0	20	40	48	55	60	70	80	90	100	1,20	130	
	P	−0,6	−0,93	−1,33	−1,33	−0,90	−0,35	0,85	2,10	2,47	2,48	2,48	2,43	
	p_s	−1,23	−1,27	−1,33	−1,33	−1,25	−1,20	−1,05	−0,92	−0,78	−0,63	−0.32	−0,18	
	α	+180	+180			+20	+16,5	+10,2	+6	+4	+3	+1,3	+0,9	
	v	3,32	2,37	0	0	2,4	3,74	5,61	7,08	7,35	7,18	6,82	6,58	
$X = +160$	$y =$	0	20	30	40	60	70	80	90	100	120	130		
	P	−0,40	−0,43	−0,40	−0,13	1.30	1,86	2.35	2,45	2,46	2,42	2,4		
	p_s	−0,40	−0,43	−0,43	−0,43	−0,41	−0,39	−0.37	−0.33	−0,29	−0,15	−0,08		
	α			+32	+33	+19.4	+14,1	+10	+7.3	+5.7	+4,1	+3,5		
	v	0	0	0,66	2,22	5,32	6,11	6,72	6,80	6,7	6,52	6,4		
$X = +200$	$y =$	0	20	40	60	80	100	120	140					
	P	0,16	0,41	1,11	2,03	2,38	2,40	2,30	2,10					
	p_s	0,16	0,16	0,14	0,03	−0,07	−0,10	−0,05	0					
	α		+23,7	+19,5	+14,3	+9,8	+6	+2,2	0					
	v	0	2,03	4,0	5.75	6,35	6,42	6,25	5,9					
$X = +300$	$y =$	0	20	40	60	80	100	120	140					
	P	1,03	1,25	1,59	2,03	2,16	2,05	1,70	1,20					
	p_s	0	0	0	−0,02	−0,09	−0,09	−0,04	0					
	α	0	+1,5	+1,2	+0,8	+0,6	0	−1,6	−3,8					
	v	4,12	4,56	5,13	5,83	6,11	5,96	5,36	4.47					
$X = +400$	$y =$	0	20	40	60	80	100	120	140					
	P	1,45	1,65	1,87	2,07	1.92	1,47	0,80	0,45					
	p_s	0	0	−0,03	0,11	−0,18	−0,18	−0,10	−0,03					
	α	0	+1,3	+1,0	+06	+0,4	0	−1,6	−3,7					
	v	4,9	5,22	5,61	6,02	5.9	5,22	3,86	2,82					

einige Windrichtungen angegeben, wodurch man die Wirbel (Wirbelring) erkennt.

Diese Ergebnisse sind von Herrn Gegauff[1]) in seiner Dissertation wiedergegeben. Dort findet man auch noch einige weitere Angaben über experimentelle Einzelheiten.

Zu der Zeichnung der Stromlinien ist noch zu bemerken, daß genau genommen diese Kurven nur zu zeichnen sind, wenn ungeheuer viele Punkte bestimmt würden, damit man sozusagen von Punkt zu Punkt dem Pfeil, also der Richtung des Windes, nachgehen könnte, ähnlich wie bei der Konstruktion der Kraftlinien eines Magneten. Es wäre wünschenswert, daß man in jedem Punkte noch die Krümmung (Krümmungsradius) der Stromlinie angeben könnte. Wir werden später darüber berichten wie auch das möglich ist. Das Problem soll mit der gleichen Sonde gelöst werden; es muß nur noch experimentell ausgearbeitet werden.

Nachdem die Brauchbarkeit der Nadelsonde nachgewiesen war, wurden von einem von uns (Hagenbach) mehrere Sonden untersucht, zunächst um festzustellen, inwieweit der Maximaldruck beim Winkel $\varphi = 0$ mit dem dynamischen Druck, wie ihn die Pitotröhre oder die Stauscheibe liefert, übereinstimmt. Für diese beiden weiß man durch eingehende Untersuchungen, daß für den dynamischen Druck gilt

$$p_d = \frac{\partial v^2}{2g},$$

wo p_d die an der Libelle abgelesene Druckhöhe

1) K. Gegauff, Sondenmessungen im aerodynamischen Feld. Dissertation. Basel 1916.

darstellt. Zuerst ergab ein Vergleich vor dem Ventilator, daß eine Pitotröhre mit einem umgebogenen Ende von 4 cm (äußerer Durchmesser der Röhre 2,3 innerer 2,0 mm) weder gegen eine Stauscheibe von 2,5 cm Durchmesser mit einer bogenförmigen Zuführung von hinten, noch gegen eine Prandtlröhre mit einer Scheibe von 18 mm Durchmesser irgendeinen meßbaren Unterschied im Druck anzeigte. Man ist also wohl berechtigt anzunehmen, daß alle drei Sonden den Anforderungen genügen und an einem Ort ohne statischen Druck nach obiger Formel die Windgeschwindigkeit liefern.

Früher ist festgestellt worden, daß aber die Pitotröhre einen zu kleinen Wert für den Druck liefert, wenn das dem Winde zu abgebogene Ende zu kurz ist. Faßt man die Nadelsonde als Pitotröhre auf, so hat sie ein so kurzes vorgebogenes Stück wie die Dicke der Wandung. Man mußte also erwarten, daß keine genaue Übereinstimmung zwischen der Nadelsonde und der Pitotröhre bestehe. Diese Abweichung sollte nun ermittelt werden.

Die ersten Messungen wurden so ausgeführt, daß mit dem einen Ende der Libelle die Nadelsonde, mit dem andern die Stauscheibe verbunden wurde und beide in nicht zu großer Entfernung voneinander in einem Querschnitt des Luftstromes aufgestellt wurden. Da aber trotz aller Sorgfalt die Geschwindigkeit nicht in jedem Punkt eines Querschnittes absolut gleich war, so konnten die kleinen Abweichungen zwischen Stauscheibe und Nadelsonde nicht einwandfrei eruiert werden. Diese Differentialmethode hatte zwar den Vorteil, daß die Schwankungen des Ventilators keine Rolle spielten, aber man mußte darauf verzichten, weil Verschiebungen einer Sonde im Querschnitt immer wahllose Schwankungen zeigten. Man stellte deshalb die beiden Sonden nacheinander an genau dieselbe Stelle des Feldes, was mittels eines Anschlages ohne Schwierigkeit auf etwa 1 mm Genauigkeit erreicht wurde. Wegen der zeitlichen Änderungen des Ventilators bedurfte es einer ganzen Serie von Ablesungen bei beständigem Vertauschen der Sonden. Man las im Interesse der Geschwindigkeit nur auf einer Seite der Libelle ab, vertauschte aber in der Mitte der Beobachtungsreihe die Verbindungsschläuche zur Libelle, so daß auch Ungleichheiten des linken und rechten Libellenarmes herausfielen. Die mit einer Lupe ausgeführten Druckablesungen wurden auf 0,2 Skalenteile (Millimeterteilung auf Glas) geschätzt. Die wahrscheinlichen Fehler der Mittelwerte betrugen im Durchschnitt etwa 0,1 mm.

Für diese Versuche war eine etwas größere Windgeschwindigkeit wünschenswert und es wurde deshalb ein größerer kräftiger dreiflügliger Ventilator von 50 cm Durchmesser verwendet. Er war auch, wie der früher benützte, in einen Konus eingebaut, der sich auf 41 cm Länge auf einen Durchmesser von 35 cm verjüngte; daran schloß sich ein zylinderförmiges Rohr von 52 cm Länge. In letzterem war ein Gleichrichter, bestehend aus einem System von horizontalen und vertikalen Lamellen abgeschlossen mit einem Drahtnetz eingesetzt. Der Luftstrom wurde auf diese Weise recht homogen.

Die Windgeschwindigkeit betrug bei den meisten Messungen 7,4 m/sec, was einem Libellenausschlag von etwa 23 mm entsprach. Der Konstanz zuliebe wurde manchmal der Motor statt mit 220 Volt Stadtstrom mit 180 Volt Akkumulatorenstrom betrieben, wodurch die Windgeschwindigkeit nur noch 6 m betrug, entsprechend dem kleineren Ausschlag von 16,5 mm.

Von den meisten Sonden wurden auch die Diagramme aufgenommen in den interessanten Gebieten von 5 zu 5, in den andern von 10 zu 10 Grad. Dazu wurde die betreffende Sonde in der Achse eines Teilkreises drehbar befestigt.

In der folgenden Tabelle findet man die Bezeichnung, Abmessungen und Material der Sonden, die Größe der Öffnung, die Windgeschwindigkeit, bei der gemessen wurde. Der Winkel φ_0 gibt den Winkel an, bei dem die Öffnung von dem Wind nicht beeinflußt wird, bei dem die Sonde also nur den statischen Druck angeben kann. Die folgende Rubrik zeigt das Verhältnis des Unterdruckes, wenn die Sondenöffnung in Richtung des abfließenden Windes zum Überdruck, wenn der Sondenmund nach dem Wind hin sieht. Dieser Quotient ist auch unabhängig von der Windgeschwindigkeit. Die letzte Kolonne endlich gibt in Prozenten die Abweichungen des Druckes, wie man ihn mit der betreffenden Nadelsonde abliest, gegenüber dem mit der Stauscheibe ermittelten.

Vergleich der Sonden.

Bezeichnung der Sonde	Durchmesser äußerer	Durchmesser innerer	Durchmesser der Öffnung	Windgeschwindigkeit	φ_0	Unterdruck $\varphi=180^0$ / Überdruck $\varphi=0^0$	Abweichung in Prozenten gegen Stauscheibe für $\varphi=0$
I Messing	2,5	1,5	0,4	6,0	41^0	0,06	13
II Neusilber.	1,7	1,0	0,3	7.4 5.5	46,7 46,7	0,88 0,85	5,6
III Neusilber	1,7	1,0	0,5	7.4	45,7	0,83	4,6
IV Neusilber	1.3	0,7	0,3	7.4	45	0,85	3.9
V Neusilber	1,3	0,7	0,5	7.4	50.3^0	0,80	5,4
VI Stahl	1,6	1,0	0,4	4,0 6,0	44 44	0,85	6,3

Sehen wir von der Sonde I ab, so sind die Abweichungen gegen die Stauscheibe rund 5 Pro-



zent. Die Genauigkeit der Messung dürfte etwa 1 Prozent sein, so daß wir auf die Stellen hinter dem Komma keinen großen Wert legen möchten. Nehmen wir also für die dünnen Sonden von 1,3, 1,6 und 1,7 mm 5 Prozent Abweichung an, so muß man für diese Sonden schreiben statt

$$p_d = \frac{\partial v^2}{2g} \cdots 1{,}05\, p'_d = \frac{\partial v^2}{2g},$$

wo p'_d den experimentell ermittelten Wert darstellt. Die Windgeschwindigkeit v berechnet sich demnach durch

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot 1{,}05\, p'_d}{\partial}}\,.$$

Für unsern Fall

$$v = 4{,}074 \sqrt{1{,}05\, p'_d} = 4{,}074 \sqrt{1{,}05 (P - p_s)}$$
$$= 4{,}175 \sqrt{P - p_s}.$$

Die Windgeschwindigkeit wird also ohne Berücksichtigung dieser Abweichung um 2,5 Prozent zu klein gefunden. Die in der früheren Tabelle angegebenen Werte der Geschwindigkeit wären demnach alle um 2,5 Prozent zu erhöhen. Die dort angeführten Messungen sind mit der Sonde VI durchgeführt. Bei Geschwindigkeiten unter etwa 3 m ist diese Abweichung auf unserer Drucklibelle nicht mehr sichtbar.

Die Winkel φ_0 sind bei den verschiedenen Sonden nicht gleich. Eine einfache Beziehung zu den übrigen Größen läßt sich jedoch nicht erkennen. Da bei diesem Winkel offenbar die Stromlinien sich tangential anlegen, so ist erklärlich, daß zufällige kleine Unregelmäßigkeiten an den Rändern der Öffnung Änderungen von einigen Graden hervorrufen können. Um die Theorie dieser Sonde genau aufzustellen, muß der Vergleich mit dem stromumflossenen Zylinder durchgeführt werden.

Es ist auch noch denkbar, daß die Entfernung der Öffnung vom abgerundeten Ende der Sonde eine Einwirkung ausübt. Bis jetzt haben wir nicht weiter darauf geachtet, wir wollen aber doch die Größen für die untersuchten Sonden angeben. Die Entfernungen vom äußersten Ende der Sonde bis zur Mitte des Mundes betrugen bei Sonde

I	II	III	IV	V	VI
1,0	1,7	1,7	1,2	1,0	1,0 mm

Die aufgenommenen Diagramme zeigten immer eine mehr oder weniger ausgesprochene Unsymmetrie, was ja ebenfalls durch kleine Unregelmäßigkeiten in der Bohrung erklärt werden kann. Die Unsymmetrie war immer am ausgesprochensten beim maximalen Unterdruck. Da dieser maximale Unterdruck größer ist wie der maximale Überdruck für $\varphi = 0$, so muß man annehmen, daß beim maximalen Unterdruck Wirbel in die Sondenöffnung hineinblasen, was aus dem Stromlinienverlauf am Zylinder verständlich erscheint. In dieser Stellung zeigten sich auch leicht kleine Schwankungen am Manometer. Die Sonde in dieser Stellung zum Messen zu gebrauchen, erscheint deshalb nicht empfehlenswert. Wir lassen in der folgenden kleinen Tabelle noch die Winkel φ_m für maximalen Unterdruck folgen, soweit sie genau ermittelt wurden und ferner die Quotienten maximalen Unterdrucks zu maximalem Überdruck.

	φ_m	$\frac{\text{max. Unterdruck}}{\text{max. Überdruck}}$
Sonde I	83^0	1,28
„ II		1,23 links bei $v = 7{,}4$ m/sec 1,20 links bei 5,5 m/sec 1,21 rechts bei $v = 7{,}4$ m/sec 1,20 rechts bei 5,5 m/sec
„ III		1,22 links 1,16 rechts
„ IV	83^0	1,23 „ 1,22 „
„ V		1,17 „ 1,08 „
„ VI	85^0	1,22

Durch diese Untersuchungen dürften die Haupteigenschaften der Nadelsonde klargelegt und die Überlegenheit gegenüber andern Sonden erwiesen sein.

Basel, Dezember 1916.

(Eingegangen 25. Dezember 1916.)

Zur Thermodynamik des Drosselvorgangs.

Bemerkung zur gleichnamigen Arbeit von R. Plank[1]).

Von Léon Schames.

Während die Abkühlung beim Drosselvorgang von der spezifischen Wärme der Substanz abhängt, ist die dabei auftretende Wärmemenge von ihr unabhängig. Wird die Substanz durch den Drosselvorgang bis zum idealen Gaszustand, d. h. streng genommen bis $p = 0$, entspannt, so ist die auftretende Wärmemenge

$$Q = \int_0^p \left\{ T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right\} dp.$$

Die Kurven $Q = 0$, sowohl als auch $\frac{dQ}{dp} = 0$, nennt man „Inversionskurven des Drosselvorgangs", weil bei höheren Temperaturen alsdann Q, bzw. $\frac{dQ}{dp}$ negativ wird. Der Begriff der Inversionskurve wird also doppelt gebraucht, und Plank glaubt daher, diesen Begriff klären zu müssen. Tatsächlich hat aber

1) R. Plank, diese Zeitschr. 17, 521, 1916.

schon Kuenen[1]) aus dem gleichen Grunde Vorsicht bei der Ableitung der Inversion empfohlen, ohne allerdings klar die beiden Inversionskurven zu trennen; letzteres scheint von verschiedenen Seiten[2]) geschehen zu sein, auch ich habe es vor einiger Zeit getan[3]), und zwar habe ich die Kurve

$Q = 0$ integrale Inversionskurve, und

$\frac{dQ}{dp} = 0$ differentiale Inversionskurve

genannt. Plank führt dafür die dem Sinne nach analoge Bezeichnung endliche, bzw. elementare Inversionskurve ein. Auch auf den eigentlich selbstverständlichen Umstand, daß das Maximum des Integraleffekts auftritt, wenn der Differentialeffekt Null ist, habe ich schon hingewiesen.

Da nach Obigem die Inversionskurven von der spezifischen Wärme der Substanz unabhängig sind, so sind zu ihrer Bestimmung keinerlei kalorische Messungen nötig, auch nicht etwa diejenige des Kühleffekts bei der Drosselung, was häufig übersehen wird. Vielmehr kann man die Inversionskurven direkt aus den Zustandsgrößen p, v, T ableiten, wie ich das loc. cit. für CO_2, C_2H_4, O_2, N_2, Luft und H_2 getan habe. Dort habe ich außer den beiden Inversionskurven noch zwei andere, charakteristische Kurven behandelt, nämlich diejenige der Minima der pv = Isothermen $\left(\frac{dpv}{dp} = 0\right)$ und diejenige gleicher Ordinaten wie die Anfangspunkte der pv-Isothermen, in welchen also gerade wieder das Idealgasgesetz gilt. Die erstere nannte ich wie üblich

$$\text{Boylekurve: } \frac{dpv}{dp} = 0,$$

die letztere nannte ich aus obigem Grunde

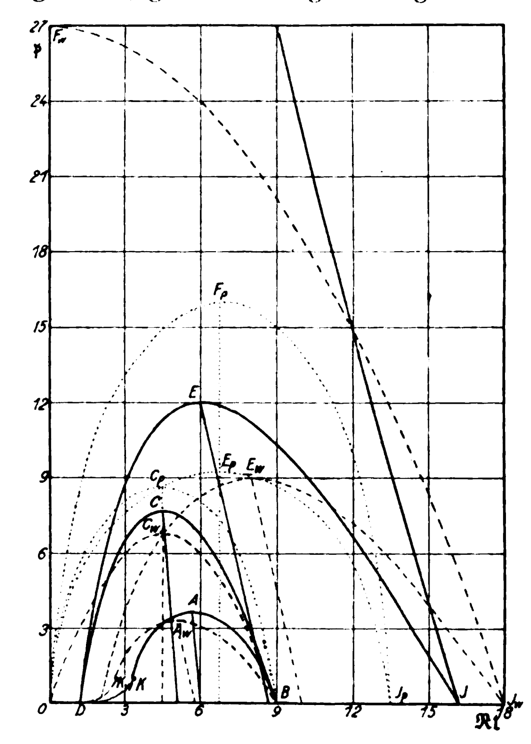
$$\text{Idealkurve: } pv = RT.$$

Mit dieser letzteren Kurve hat sich auch Plank befaßt; er hat sie jedoch Boylekurve genannt. Wir wollen hier die früher eingeführte Bezeichnung beibehalten. Zu dieser gehört auch noch, daß wir „Inversions“- bzw. „Boyletemperatur“ kurzweg die betreffenden Temperaturen im Avogadroschen Zustand (also für $p = 0$) nennen, denn in diesem Zustad schneiden sich die beiden Inversionskurven im Inversionspunkt bzw. die Boyle- und Idealkurve im Boylepunkt.

Nun widersprechen die Plankschen Inversionskurven und dessen Idealkurve denjenigen, die früher (loc. cit.) aus den experimentellen Isothermen abgeleitet wurden; ja sogar die Boyle- und die Inversionstemperatur nach Plank sind mit der Erfahrung[1]) gänzlich unvereinbar. Reduzieren wir die Zustandsgrößen, indem wir sie durch die kritischen Größen dividieren, also

$$\mathfrak{t} = \frac{T}{T_k}, \quad \mathfrak{p} = \frac{p}{p_k},$$

so wird nach Plank die reduzierte Inversionstemperatur für Luft $\mathfrak{t}_J = \frac{1320}{133} = 9{,}92$ und die reduzierte Boyletemperatur $\mathfrak{t}_B = \frac{880}{133} = 6{,}62$, während sich tatsächlich für die Gruppe der zweiatomigen Substanzen (mit Ausnahme von H_2) $\mathfrak{t}_J = 4{,}80$, $\mathfrak{t}_B = 2{,}667$ ergibt. Um die Gestalt der wirklichen Kurven mit den Plankschen zu vergleichen, geben wir folgende Figur. Dabei



haben wir, um den Vergleich auf die aus der van der Waalsschen Zustandsgleichung folgenden charakteristischen Kurven ausdehnen zu können, $\mathfrak{p}$ nicht als Funktion von $\mathfrak{t}$, sondern von $\mathfrak{R}\mathfrak{t}$ gezeichnet, wobei $\mathfrak{R}\left(= \frac{RT_k}{mp_kv_k}\right)$ die „reduzierte Gaskonstante“ ist. Dadurch wird erreicht, daß alle Punkte im Avogadroschen Zustand, also speziell Boyle- und Inversionspunkt, für alle Stoffe korrespondierende Punkte wer-

1) J. P. Kuenen, Die Zustandsgleichung 1907, S. 112.

2) Lit. bei Kamerlingh Onnes u. Keesom, Enzykl. d. math. Wiss. 5, I, X, S. 842.

3) L. Schames, Elster- u. Geitel-Festschrift 1915, S. 287.

1) Lit. z. B. bei Kamerlingh Onnes u. Keesom, Enzykl. d. math. Wiss. 5 I, X, S. 897 u. 943.

den, wogegen allerdings der kritische Punkt in diesem Diagramm nicht als korrespondierender Punkt erscheint. (Letzterer Nachteil verschwindet im $\mathfrak{p}\mathfrak{v}-\mathfrak{p}$, und erst recht im $\mathfrak{p}\mathfrak{v}-\frac{1}{\mathfrak{v}}$-Diagramm, welches als einfachstes, früher [loc. cit.] am ausführlichsten behandelt wurde.)

Nach der van der Waalsschen Zustandsgleichung werden die vier charakteristischen Kurven Parabeln, die wir in der Figur gestrichelt gezeichnet haben. $\mathfrak{R}$ ist hier bekanntlich $^8/_3$.

Kurve I. Die Boylekurve ist eine schiefe Parabel, sie beginnt im Boylepunkt B bei $\mathfrak{R}\mathfrak{t}=9$, erreicht ihren Scheitelpunkt in A_w und mündet links vom kritischen Punkt K_w in die Dampfdruckkurve OK_w

Kurve II. Die Idealkurve ist eine gerade Parabel, die ebenfalls in B beginnt, in C_w ihren Scheitel hat und im Nullpunkt endet.

Kurve III. Die differentiale Inversionskurve ist eine schiefe Parabel, im Inversionspunkt J_w ($\mathfrak{R}\mathfrak{t}=18$) beginnend, Scheitel in E_w, und in die Dampfdruckkurve mündend.

Kurve IV. Die integrale Inversionskurve ist eine gerade Parabel, ebenfalls in J_w beginnend und im Scheitelpunkt F_w endend.

Auffallend ist, daß die Achsen der beiden schiefen Parabeln I und III die gleiche Neigung (nämlich $\frac{9}{2}$) haben, und daß die Parabeln II und III sich im Scheitel von II schneiden.

Die vier charakteristischen Kurven der Erfahrung sind stark ausgezogen. Für alle Substanzen ist der Boylepunkt mit dem van der Waalsschen identisch, der Inversionspunkt liegt jedoch bei $\mathfrak{R}\mathfrak{t}=16{,}2$. Die Figur gilt für die Gruppe der zweiatomigen Gase (mit Ausnahme von H_2) für die $\mathfrak{R}={}^{27}/_8$[1]).

Die Kurven I, II und III ergeben sich als schiefe Parabeln, und zwar zeigen die Achsen von I und II dieselbe Neigung (nämlich 12), während die Neigung von III gleich derjenigen nach van der Waals ist.

Kurve IV ist im dargestellten Bereich annähernd geradlinig; mit weiter abnehmender Temperatur nähert sie sich der Druckachse asymptotisch (vgl. Fig. 4 der zit. Arbeit).

Im Gegensatz zur Folgerung aus der van der Waalsschen Zustandsgleichung durchschneiden sich die Parabeln II und III nicht; sie münden vielmehr gemeinsam im Punkte D in die Dampfspannungskurve OK.

Mit diesen beiden Kurvenscharen sind die Planckschen Kurven direkt nicht zu vergleichen, da, wie wir oben sahen, die Boyletemperatur 2,48 mal, die Inversionstemperatur 2,07 mal so groß sind, als die wirklichen. Um dennoch einen Vergleich durchführen zu können, haben wir den Temperaturmaßstab so verändert, daß der Boylepunkt bei $\mathfrak{R}\mathfrak{t}=9$ richtig wiedergegeben wird, d. h. wir haben alle Temperaturen 2,48 mal kleiner genommen, als den Planckschen Formeln entspricht. Die sich so ergebenden Planckschen Kurven haben wir punktiert eingetragen.

Während Kurve I von Plank nicht untersucht wurde, sind die übrigen Kurven II, III und IV nach ihm gerade Parabeln, die im Nullpunkt enden. Wie wir gesehen haben, endet von den Kurven der Erfahrung keine im Nullpunkt, auch ergeben sich Kurve II und III tatsächlich als schiefe Parabeln. Besonders unrichtig wird die Kurve IV, während bei dieser nach Plank für $\mathfrak{t}=0$, $\mathfrak{p}=0$ sein soll, gilt nach van der Waals $\mathfrak{p}=27$, und nach der Erfahrung $\mathfrak{p}=\infty$. Was den Planckschen Schnittpunkt der Parabeln II und III anbetrifft, so sahen wir, daß dieser nach van der Waals wohl, nach der Erfahrung aber nicht auftritt.

Zum Schlusse seien die Gleichungen der charakteristischen Kurven im $\mathfrak{p}-\mathfrak{R}\mathfrak{t}$-Diagramm in einer Tabelle zusammengestellt.

Gleichungen der charakteristischen Kurven im $\mathfrak{p}$-$\mathfrak{R}\mathfrak{t}$ Diagramm

	nach der van der Waalsschen Zustandsgleichung	nach der Erfahrung	nach der Planckschen Formel (reduziert u. mit dem Faktor 2,48 korrigiert.)
Boylekurve	$\mathfrak{R}\mathfrak{t}=5{,}817-\frac{2\mathfrak{p}}{9}\pm 3{,}183\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}}{3{,}375}}$	$\mathfrak{R}\mathfrak{t}=6{,}00-\frac{\mathfrak{p}}{12}\pm 3{,}00\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}}{3{,}67}}$	—
Idealkurve	$\mathfrak{R}\mathfrak{t}=4{,}50\left(1\pm\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}}{6{,}75}}\right)$	$\mathfrak{R}\mathfrak{t}=5{,}067-\frac{\mathfrak{p}}{12}\pm 3{,}933\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}}{7{,}67}}$	$\mathfrak{R}\mathfrak{t}=4{,}50\left(1\pm\sqrt{1-\left(\frac{\mathfrak{p}}{8{,}67}\right)^2}\right)$
Differentiale Inversionskurve	$\mathfrak{R}\mathfrak{t}=10-\frac{2\mathfrak{p}}{9}\pm 8\sqrt{1+\frac{\mathfrak{p}}{9}}$	$\mathfrak{R}\mathfrak{t}=8{,}667-\frac{2\mathfrak{p}}{9}\pm 7{,}533\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}}{12}}$	$\mathfrak{R}\mathfrak{t}=6{,}75\left(1\pm\sqrt{1-\left(\frac{\mathfrak{p}}{9{,}25}\right)^2}\right)$
Integrale Inversionskurve	$\mathfrak{R}\mathfrak{t}=18\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}}{27}}$	$\mathfrak{R}\mathfrak{t}\sim 16{,}2-0{,}267\,\mathfrak{p}$ für $0<\mathfrak{p}<30$	$\mathfrak{R}\mathfrak{t}=6{,}75\left(1\pm\sqrt{1-\left(\frac{\mathfrak{p}}{16}\right)^2}\right)$

1) L. Schames, Verh. d. D. phys. Ges. 18, 35, 1916.

(Eingegangen 7. Dezember 1916.)



Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn Léon Schames zu meiner Arbeit „Zur Thermodynamik des Drosselvorgangs" [1]).

Von R. Plank.

Die in den vorstehenden Bemerkungen entgegengehaltene Arbeit des Herrn Schames, die im vorigen Jahre in der Elster- und Geitel-Festschrift veröffentlicht wurde, ist mir leider entgangen, da mir die Neuerscheinungen auf diesem Gebiet in den Kriegsjahren nur mangelhaft zugänglich waren. Auch jetzt fehlt mir die Möglichkeit zum eingehenden Studium dieser Arbeit, so daß ich nur auf den Wortlaut der vorstehenden Bemerkungen Bezug nehmen kann.

Herr Schames indentifiziert das Integral

$$\int_0^p \left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right] dp$$

mit der Wärmemenge Q, die bei der Abdrosselung eines Gases bis zum Druck $p = 0$ auftritt. Daraus würde folgen

$$dQ = \left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right] dp.$$

Dagegen ergibt sich aus dem ersten Hauptsatz

$$dQ = du + pdv$$

durch Einführung des Wärmeinhalts $i = u + pv$

$$dQ = di - vdp$$

und somit für eine Drosselkurve mit $di = 0$

$$dQ = -vdp$$

an Stelle des obigen Ausdrucks.

Von den beiden Kurven, die Herr Schames als Inversionskurven bezeichnet, deckt sich nur die eine, und zwar die „differentiale Inversionskurve"

$$\frac{dQ}{dp} = T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v = 0$$

mit meiner elementaren Inversionskurve

$$\alpha = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i = 0.$$

Dagegen ist die „integrale Inversionskurve"

$$\int_0^p \left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right] dp = 0$$

nicht übereinstimmend mit meiner endlichen Inversionskurve $\Delta = 0$. Aus der Gleichung

$$T^2\left(\frac{\partial(v/T)}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v = c_p^c \left(\frac{\partial \triangle}{\partial p}\right)_T,$$

die ich in § 4 meiner Arbeit entwickelte, folgt nämlich, daß die integrale Inversionskurve von Schames in der Form

$$\int \left(\frac{\partial \triangle}{\partial p}\right)_T dp = 0$$

geschrieben werden kann, während ich die Kurve $\Delta = 0$ untersuchte, welcher die Bezeichnung „endliche" oder „integrale" Inversionskurve eher zukommt.

Herr Schames bemerkt, daß die von mir im Zahlenbeispiel des § 7 entwickelten Inversionskurven und die Boylesche Kurve stark von den Erfahrungswerten abweichen. Dabei wird aber der Zweck meiner Arbeit gänzlich verkannt. Wie ich gleich zu Anfang bemerkt habe, lag es mir nur daran, einen Beitrag zur Theorie der Luftverflüssigungsmaschinen zu liefern. Wenn ich also im letzten Abschnitt die entwickelten theoretischen Zusammenhänge auf Luft anwendete, so kam hierbei nur das technisch wichtige Gebiet von Zimmertemperatur bis etwa -190^0 in Betracht. Dieses Gebiet wurde im Anwendungsbeispiel noch weiter dadurch eingeschränkt, daß ich als Ausgangspunkt meiner Zahlenrechnungen die Versuchsreihen von Bradley und Hale wählte, die sich auf das Temperaturgebiet von 0 bis -100^0 bei Drücken von 70 bis 200 Atm. auf der Hochdruckseite der Drosselstelle beziehen. Es ist ganz klar, daß die daraus entwickelten thermischen und kalorischen Größen nur in diesem sowie im angrenzenden Bereich Anspruch auf Zuverlässigkeit haben; ich habe nachgewiesen, daß die Übereinstimmung in diesen Grenzen eine recht gute ist (spezifische Wärme, elementare Abkühlung). Eine Extrapolation von 0^0 auf 900^0 und darüber hinaus ist natürlich nicht zulässig. In dem von mir untersuchten Gebiet ist die Übereinstimmung der elementaren Inversionskurve mit derjenigen von van der Waals, wie meine Figur 3 zeigt, eine recht befriedigende. Die Figur läßt ferner erkennen, daß die Abweichungen bei höheren Temperaturen immer größer werden. Es ist daher auch gänzlich unzulässig, beim Vergleich der beiden Kurven die höchste Inversionstemperatur als Bezugspunkt zu nehmen. Für die hohen Temperaturen war bei meiner Arbeit eine Übereinstimmung weder verlangt noch angestrebt.

Ebensowenig war es meine Aufgabe, den Verlauf der Boyleschen Kurve neu festzulegen; auch hier kam für mich nur das eng definierte Temperaturgebiet in Frage.

Bei der endlichen Inversionskurve $\Delta = 0$ ist ein Vergleich überhaupt nicht möglich, weil die „integrale Inversionskurve", wie oben erwähnt, eine von der ersteren abweichende Bedeutung hat.

(Eingegangen 31. Dezember 1916.)

1) Diese Zeitschr. **17**, 521, 1916.

Biprismen in der Photometrie.

Von J. Koenigsberger.

H. Seemann beschreibt in dieser Zeitschr. 17, 622, 1916, einige Formen von Biprismen. Hierbei sind prinzipiell zwei Klassen zu unterscheiden. Die eine Art von Biprismen, besser Doppelplatten, läßt die Strahlenwinkel unverändert; zu ihnen gehört die Doppelplatte nach H. v. Helmholtz und die von W. Autenrieth und mir angewandte Abänderung derselben (Fig. 3 bei H. Seemann), die seit etwa 8 Jahren an einem von Medizinern und Chemikern benützten Kolorimeter der Firma F. Hellige in Freiburg i. B. angebracht wird. Die zweite Klasse Biprismen verändert den Winkel zweier Strahlenbündel gegeneinander und bedingt dadurch ein Zusammenschieben entfernter Gegenstände, dessen Ausmaß vom Abstand des Gegenstandes vom Biprisma abhängt. Beispiel hierfür ist die Verwendung des Prismas im Polarisationsphotometer von A. König (Neukonstruktion von F. Martens). — Die Kombination der Wirkung Doppelplatte—Doppelprisma (Fig. 1 u. 2 von H. Seemann) ist für die Firma F. Hellige seit $^3/_4$ Jahren in die Reichsgebrauchsmusterrolle eingetragen.

(Eingegangen 20. Dezember 1916.)

Stoßionisation der Gase durch Wärmebewegung.

Von M. Wolfke.

In dieser Zeitschrift hat F. v. Hauer[1]) unter demselben Titel eine Betrachtung veröffentlicht, die beweisen soll, daß die Zahl der durch Stoßionisation der Wärmebewegung erzeugten Ionen bei Zimmertemperatur viel zu klein ist, um die Restionisation zu erklären, falls man auch für neutrale Moleküle den aus den experimentellen Daten für Ionen bekannten Schwellenwert der kinetischen Stoßenergie benutzt[2]). P. Langevin und J. Rey[3]) haben gezeigt, daß auch bei der Annahme einer beliebigen unteren Grenze für die zur Ionisation notwendige Stoßenergie die Restionisation dadurch nicht erklärt werden kann, da in diesem Falle eine sehr rasche Zunahme dieser Ionisation mit der Temperatur eintreten müßte, was in krassem Widerspruch zu den bekannten Tatsachen steht.

1) F. v. Hauer, diese Zeitschr. 17, 583, 1916.

2) Meines Wissens hat darauf zum erstenmal K. Bergwitz in seiner Habilitationsschrift hingewiesen. (Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn 1910.)

3) P. Langevin und J. Rey, Le Radium 10, 142, 1913.

Ich habe die Hypothese der tangentiellen Stöße seinerzeit nur im Anschluß an die Abhandlung von Langevin und Rey veröffentlicht[1]), um zu zeigen, daß es möglich ist die Definition der ionisierenden Stöße so zu wählen, daß ihre Zahl mit der Temperatur äußerst schwach variiert. Ich habe jedoch diesen Gedanken nicht weiter verfolgt, da mir das Versuchsmaterial zu unsicher erschien, um darauf eine exakte Theorie zu bauen. Inzwischen wurden neue Messungen im Laboratorium von Mc Lenan ausgeführt und K. H. Kingdon[2]) hat, auf diese Messungen gestützt, meine Hypothese der tangentiellen Stöße durch die Annahme einer unteren Grenze für die tangentielle Geschwindigkeitskomponente ergänzt, und dadurch eine gute Übereinstimmung der Theorie mit den Beobachtungen erzielt.

Ich möchte in dieser Note nur kurz darauf hinweisen, daß die Hypothese der tangentiellen Stöße den üblichen Vorstellungen über die Stoßionisation nicht widerspricht, sondern sie im Gegenteil in plausibler Weise ergänzt.

Die modernen Atommodelle deuten nämlich darauf hin, daß die Stabilität der im Atom gebundenen Elektronen in verschiedenen Richtungen verschieden ist, so daß es vollkommen denkbar erscheint in die Bedingungen der Stoßionisation nicht nur die kinetische Energie allein aufzunehmen, sondern auch die Richtung des Stoßes zu berücksichtigen. Dies könnte in allgemeinster Weise so geschehen, daß man die untere Grenze für die zur Ionisation notwendige Stoßenergie als Funktion der Stoßrichtung setzen würde. Es genügt jedoch anzunehmen, daß oberhalb des bekannten Schwellenwertes der Stoßenergie bei jeder Stoßrichtung eine Ionisation möglich ist, daß aber unterhalb dieses Schwellenwertes nur bei einer bevorzugten Richtung der kleinsten Stabilität des gebundenen Elektrons eine Ionisation eintreten kann. Diese bevorzugte Richtung wäre nach meiner Hypothese diejenige der tangentiellen Stöße. Bei Zimmertemperatur kommt, wie auch F. v. Hauer bewiesen hat, die erste Ionisationsmöglichkeit gar nicht in Frage, es bleibt also nur die Möglichkeit einer tangentiellen Stoßionisation. Diese Möglichkeit ist, wie Kingdon gezeigt hat, durch eine untere Grenze der tangentiellen Geschwindigkeitskomponente begrenzt, was mit einem zweiten unteren Schwellenwert der kinetischen Stoßenergie äquivalent ist.

1) M. Wolfke, Le Radium 10, 265, 1913.

2) K. H. Kingdon, Phil. Mag. (6), 32, 396, 1916.

Von diesem Standpunkt aus wird die Stoßionisation durch zwei Schwellenwerte charakterisiert: ist der kleinere Schwellenwert der kinetischen Stoßenergie überschritten, so kann die Stoßionisation vorderhand nur vermittelst der tangentiellen Stöße stattfinden — ist aber der zweite größere Schwellenwert (der bis jetzt allein bekannt war) erreicht, so kann jeder Stoß unabhängig von der Stoßrichtung zur Ionisation führen.

Wenn ich auch keinen Widerspruch zwischen dieser Auffassung und den modernen Anschauungen auf diesem Gebiete sehe, so bin ich weit davon entfernt, diese Hypothese heute schon als gesichert anzunehmen — es müßten noch weitere experimentelle Resultate vorliegen und vor allem die Abhängigkeit der Restionisation von der Temperatur in noch weiteren Grenzen untersucht werden.

Zürich, Dezember 1916.

(Eingegangen 31. Dezember 1916.)

Die Gültigkeitsgrenze des Fermatschen Prinzips; Kritik der Theorie der Refraktion und Extinktion von Wellen in inhomogenen Körpern.

Von Karl Uller.

Wir kennen Wellenbewegung in Körpern, deren Beschaffenheit sich von Ort zu Ort stetig ändert: Licht- und Schallbewegung in der Atmosphäre, Bebenbewegung in der Erde. Die auffälligste Eigenschaft dieser Art von Strahlen, nämlich ihre Gekrümmtheit, gewahren wir bei Lichtstrahlen am leichtesten, sei es indirekt durch die scheinbaren Objektversetzungen und -verkehrungen, sei es direkt in trüben Medien, wo die Bahn der Welle durch das seitlich zerstreute Licht von dem seitlich beobachtenden Auge unmittelbar wahrgenommen wird. Auch Schallstrahlen in der Atmosphäre sind gekrümmt, wie wir aus den Zonen des Schweigens schließen müssen, die bei mächtigen Schallerregungen auftreten. Bebenwellen sind als gekrümmt noch nicht einwandfrei nachgewiesen; doch wird es wohl auch bei diesen der Fall sein, denn die Inhomogenität der Dichte und der Elastizität der Erde ist so gut wie gewiß und ihre Proportionalität, welche geradlinige Ausbreitung zur Folge haben würde, nicht gerade wahrscheinlich. Theoretisch ist Strahlengekrümmtheit eine notwendige und allgemeine Eigenschaft von Wellen, die durch stetig inhomogene Körper laufen.

Wie hat man sich bisher die Tatsache der Gekrümmtheit erklärt?

Der nächstliegende und auch wirklich begangene Gedankenweg ist folgender. In einem homogenen Körper geht bei beugungsfreien Wellen die Energiebewegung nachweislich geradlinig vor sich. Man wird sich nun den gekrümmten Strahl in einem inhomogenen Körper aus lauter kleinen geradlinigen Wellenstückchen zusammengesetzt denken dürfen, deren jedes in einer kleinen homogenen Schicht verläuft. Zu der Schichtung des Körpers kommen wir durch folgende Überlegung. Der Einfluß des Körpers auf die ihn durchsetzende Welle, die wir einfarbig voraussetzen, drückt sich in einer Größe aus, die wir den Körperparameter a nennen wollen, wobei wir indessen nicht übersehen dürfen, daß a außerdem auch noch von der Frequenz und Dämpfung der Welle abhängt. Hat nun der Körper, wie wir zunächst einmal annehmen wollen, keine wellenlöschende Eigenschaft, dann ist a reell und der Körper zerfällt in ein Schichtensystem mit den Grenzflächen $a = \text{const.}$, $a + \delta a = \text{const.}$ usw. Jede dieser unendlich dünnen Schichten darf nach diesem Gedankengang als homogen angesehen werden. Infolgedessen ist das auf eine Schicht entfallende Strahlstückchen eine Welle in einem homogenen Mittel. Die Wellenbewegung in einem stetig inhomogenen Körper kommt nach dieser Schichtenmethode zustande durch kontinuierliche Brechung einer Welle, wie sie Stück für Stück im homogenen Mittel gebaut sein würde. Dabei erklärt sich die kontinuierliche Richtungsänderung des Strahles eben durch die kontinuierliche Brechung. Die auf dieser Vorstellung aufgebaute Wellentheorie heißt deshalb die Refraktionstheorie. Die Richtungsänderung des Strahles berechnet sie auf Grund des Snelliusschen Brechungsgesetzes für zwei angrenzende homogene Körper. Danach stehen die Winkel i_1 und i_2 der beiden Strahlen in bezug auf das Flächenlot zueinander in der Beziehung

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2, \tag{1}$$

wenn n den (absoluten) Brechungsindex eines Körpers gegen das Vakuum bezeichnet oder in unserer Sprache den obengenannten Körperparameter. Dies Gesetz ist hier anzuwenden auf zwei benachbarte Strahlelemente in zwei benachbarten Mitteln. Für festgehaltene n_1 und i_1 ergibt sich aus (1) durch logarithmische Differentiation

$$di = -\operatorname{tang} i \cdot d \log n. \tag{2}$$

Hat man drei oder mehr Strahlelemente, so ist zu beachten, daß im allgemeinen auch das Parametergefälle grad n, also das Schichtflächenlot, zwischen je zwei Elementen seine Richtung ändert. Diese Drehung $d\varphi$ kommt noch zu di

hinzu, wenn man die Abweichung des dritten Elements gegen das erste berechnen will. Bekanntlich läßt sich das Snelliussche Brechungsgesetz aus dem Satz vom ausgezeichneten Lichtweg ableiten, wonach der wirkliche optische Weg zwischen zwei Bahnpunkten dadurch ausgezeichnet ist, daß bei unendlich kleiner Variation seiner Elemente die optische Weglänge $\int_{P_1}^{P_2} n\,ds$ höchstens um Glieder zweiter Ordnung von ihm abweicht. Wir wollen diesen Satz der Kürze halber das Fermatsche Prinzip nennen. Auf ihm fußend kann man also nach der Schichtenmethode in allgemeiner Weise die Differentialgleichungen aufstellen, denen die „Trajektorien" zu genügen haben, wenn gegeben sind, die Parameterflächen sowie die Richtung des Strahles in einem Punkt. Diese Aufgabe ist schon seit langem gelöst (Hamilton, um 1825).

Verhältnismäßig recht spät (1880, Rayleigh) stellten sich Bedenken gegen die Schichtenauffassung ein. Wenn es wahr ist, daß das Fortschreiten der Welle an kontinuierliche Brechung gebunden ist, dann muß unweigerlich an jeder Parameterfläche eine unendlich schwache reflektierte Welle auftreten, und da der schwachen Reflexionen an den unendlich vielen Schichten unendlich viele sind, so muß ein endlicher Betrag zustandekommen. Diese „innere Reflexion" müßte beobachtbar sein entweder unmittelbar oder an der Schwächung des durchgehenden Strahls. Unmittelbar ist noch niemals etwas bemerkt worden und mittelbar sind die Versuche nicht aussichtsvoll in der Deutung wegen des Mitspiels der immer etwas vorhandenen Extinktion. Damit ist aber ein innerer Widerspruch in der Refraktionstheorie sehr wahrscheinlich gemacht. Noch einer andern Schwierigkeit steht diese Theorie ratlos gegenüber. Im allgemeinen treten nämlich mehrere, voneinander unabhängige, Körperparameter auf, gibt es also mehrere, sich schneidende, Schichtensysteme. Wie soll da die Brechung vor sich gehen? Oder ist ein gewisses kombiniertes Hauptsystem allein für die Brechung maßgebend? Wo sind aber dann die Bedingungen für dieses herzuholen? Diese Schwierigkeiten sind zugleich auch verwunderlich, denn die Folgerungen aus der Refraktionstheorie scheinen bisher befriedigend von den Erfahrungen bestätigt zu werden, wenigstens allemal, wenn nicht wellenlöschende Körper in Frage kommen.

Aus dieser mißlichen Lage kann man nur herauskommen, wenn man sich bewußt wird, daß immer der historische Weg in den Naturwissenschaften ein induktiver Pfad ist. So auch hier. Man ist von Vorstellungen ausgegangen, die von Wellen in homogenen und durchsichtigen Körpern gewonnen worden sind und sich bewährt haben, und hat sie verwertet in dem allgemeineren Falle von Wellen in inhomogenen und wellenlöschenden Körpern. Ist das erlaubt? Die Antwort kann nur das deduktive Verfahren geben, nämlich die Herleitung der Wellenbewegung aus den für inhomogene und wellenlöschende Körper geltenden Grundgleichungen. Diese geben auf unsere Frage nach der Existenz innerer Reflexion sofort klaren Bescheid. Merkwürdig, daß man ihn bisher nicht abgelesen hat. Das kam aber daher, daß man die Grundgleichungen immer nur in der für die Sondervoraussetzung ebener Schichtung gebotenen Form verwendete und sogleich nach Lösungen ausschaute. Die Grundgleichungen in allgemeiner Darstellung sagen nun allgemein aus, daß von innerer Reflexion in einem inhomogenen Körper ebensowenig die Rede sein kann wie in einem homogenen, wenn neben den Körperparametern auch deren Gefälle stetig sind. Ausführlicheres darüber findet man a. a. O.[1]) Gibt es keine innere Reflexion, so kann auch die Schichtenmethode unmöglich richtig sein. In der Tat ist das nachweisbar. So kommen wir zu dem zwingenden Schluß: Mit der bestimmten Leugnung einer inneren Reflexion fällt die Refraktionstheorie!

Wie aber finden wir nun den Weg zu den Gesetzmäßigkeiten der gekrümmten Strahlen, den deduktiven, an dessen Ausgangspunkt nur die allgemeinen Grundgleichungen stehen?

An Versuchen hat es nicht ganz gefehlt. Sie sind indessen als gescheitert anzusehen. Mangels eines Leitseils müssen in ihnen nämlich Annahmen gemacht werden. Diese laufen in allen Versuchen darauf hinaus, daß die Welle als in den kleinsten Teilchen aus Planwellenelementen bestehend gehalten wird. Diese Auffassung entspricht aber nicht der Wirklichkeit, wie ich zeigen konnte[2]). Der zum Ziel führende Leitsatz nun ist der ideale Begriff der Umkehrbarkeit der Welle[3]), zum Ausdruck gebracht in allen Bedingungen, welche die Welle zu erfüllen hat. Um verständlich zu werden, ist es vorerst notwendig auf den Begriff und Bau einer physikalischen Welle einzugehen.

Eine Skalarwelle von elementarer Schwingungsform hat die Gestalt

1) K. Uller, Die Strahlung in einer Welle von elementarer Schwingungsform. (Diese Zeitschr. **17**, 369, 1916.)

2 u. 3) K. Uller, Grundlegung der Kinematik einer physikalischen Welle. II. (Diese Zeitschr. **17**, 610, 1916.)



$$\Omega = \omega \cdot e^{-(\nu'' t + \Phi'')} \cos \{\nu' t + \Phi'\}; \qquad (3')$$

beispielsweise stellt Ω nach Hinzufügung eines zeitfreien Gliedes die Dichteschwankungen in einer Verdünnungswelle vor. Die Größen ω, Φ' und Φ'' sind reine Ortsfunktionen, ν' die Frequenz der Schwingung und ν'' ihre (positive oder negative) Dämpfung. Das Argument des Kosinus nennen wir die Phase von Ω, ferner ω den Wellenskalar und $e^{-(\nu'' t + \Phi'')}$ den Amplitudenfaktor, welch beide zusammen die Amplitude der Schwingung in einem Punkte der Welle bestimmen. Die Bedingungen, welche die Welle zu erfüllen hat, enthalten nun niemals die Funktionen Φ' und Φ'' selber, sondern stets ihre Gradienten. Dementsprechend müssen wir definieren:

$$\mathfrak{w}' = -\operatorname{grad} \Phi' \text{ und } \mathfrak{w}'' = -\operatorname{grad} \Phi''.$$

Es besagt nun: $\nu' t + \Phi' = \text{const.} = c'$, daß der Phasenwert c', mit wachsender Zeit t zu wachsenden Φ'-Werten getragen wird, und zwar mit der Geschwindigkeit $\nu'/|\mathfrak{w}'|$, wenn wir in Richtung von $\mathfrak{w}'$ messen. Aus dem Grunde nennen wir die Flächen $\Phi' = \text{const.}$ die im Raum festliegenden Isophasenflächen und $\mathfrak{w}'$ die Isophasennormale. Ferner besagt in Verbindung mit $c' = \text{const.}$: $\nu'' t + \Phi'' = \text{const.} = c''$, daß der Amplitudenfaktorwert $e^{-c''}$ mit wachsender Zeit bei Dämpfung zu wachsenden Φ''-Werten getragen wird mit der Relativgeschwindigkeit $|\nu''|/|\mathfrak{w}''|$, wenn wir in Richtung von $\mathfrak{w}''$ messen; relativ zur Phasengeschwindigkeit, weil konstantes c'', nur sofern c' konstant ist, konstanten Beitrag zum Wellenskalar ω liefert. Wir nennen die Flächen $\Phi'' = \text{const.}$ die im Raum festliegenden Isodynamenflächen und $\mathfrak{w}''$ die Isodynamennormale. Die kinematischen Vektoren $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ bilden im allgemeinen einen, meist stumpfen, Winkel miteinander. Derselbe geht in ihre Beträge ein und verursacht dadurch eine bedeutende Verwickeltheit des Wellenbaues, indem die Phasengeschwindigkeit, die Wellenlänge, der Wellenskalar und die Strahlung von ihm abhängig sind. Kurz zusammengefaßt ist nun die Deutung der Skalarwelle (3'): Die Phasen von Ω laufen von Isophasenebene zu Isophasenebene nach steigenden Φ'-Werten. Ist die Schwingung nicht permanent, also $\nu'' \neq 0$, so findet in der Welle auch eine relative Amplitudenbewegung statt; sie verläuft bei gedämpften Schwingungen in Richtung der Isodynamennormale, bei zeitlich ansteigenden Schwingungen entgegengesetzt.

Die allgemeine Theorie der Wellen elementarer Schwingungsform erfordert zu ihrer Bewältigung, wie ich an anderen Orten durch die Tat gezeigt habe, die Verwendung komplexer Ausdrücke in Verbindung mit konjugiert-komplexen, welch letztere wir durch ein oben angesetztes Sternchen kennzeichnen wollen. Der allgemeine Ausdruck für eine Skalarwelle von elementarer Schwingungsform lautet dann:

$$\begin{aligned}\Omega &= {}^1/_2 \{\omega \cdot e^{i(\Phi + \nu t)} + \omega^* \cdot e^{-i(\Phi^* + \nu^* t)}\} \\ &= e^{-(\nu'' t + \Phi'')} \\ &\quad \times \{\omega' \cdot \cos(\nu' t + \Phi') - \omega'' \cdot \sin(\nu' t + \Phi')\}.\end{aligned} \qquad (3)$$

Seine Deutung ist etwas verwickelter als die des Unterfalls (3'), insofern als die kinematische Phasengeschwindigkeit nun auch von dem komplexen Wellenskalar ω abhängig ist. Man sieht, daß Φ' und Φ'' nur in der Verbindung $\Phi' + i\Phi'' = \Phi$ auftreten, was natürlich sich auch auf $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ überträgt. Wir wollen $\mathfrak{w}' + i\mathfrak{w}'' = \mathfrak{w}$ kurz das Wellennormalenpaar heißen; seine Definition folgt weiter unten. Unsere Deutungen und Begriffsbildungen gelten sinngemäß auch in einer Vektorwelle von elementarer Schwingungsform, deren allgemeiner Ausdruck ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} &= {}^1/_2 \{\mathfrak{v} \cdot e^{i(\Phi + \nu t)} + \mathfrak{v}^* \cdot e^{-i(\Phi^* + \nu^* t)}\} \\ &= e^{-(\nu'' t + \Phi'')} \\ &\quad \times \{\mathfrak{v}' \cdot \cos(\nu' t + \Phi') - \mathfrak{v}'' \cdot \sin(\nu' t + \Phi')\},\end{aligned} \qquad (4)$$

wobei $\mathfrak{B}$ in einer Ebene rotiert. Die spiralische Rotation geht bei permanenten Schwingungen ($\nu'' = 0$) in eine harmonisch durchlaufene, elliptische über.

Wie an anderen Orten[1]) weiter ausgeführt ist, sind die Ausdrücke (3) und (4) rein kinematischen Inhalts; in dem physikalischen Gebilde: Welle ist wesentlich die Energiefortpflanzung. Demgemäß sind alle Verschiebungen auf die Richtung der momentanen Energieströmung zu beziehen. Da diese meist turbulent ist, so hat man für praktische Zwecke die Richtung des definitiven Energiefortgangs zu nehmen. Diese Bezugnahme ist auch maßgebend für den Begriff der Transversalität und den aus der Phasengeschwindigkeit abzuleitenden Begriff der Wellenlänge.

In einer gegebenen Skalarwelle (Ω) ist bei gewähltem N.-P. der Zeitzählung das Produkt $(\omega e^{i\Phi})$ gegeben. Wir können aber dies Produkt ebensogut schreiben: $(\omega_1 e^{i\Phi_1})$ usw. Von vornherein wäre somit einer der Skalare ω und Φ willkürlich und der andere von diesem abhängig. Das aber kann unmöglich so bleiben, wenn (3) mehr sein soll als ein rein mathematischer Ansatz. Gerade der Zwang, diese mathematische Willkürlichkeit in dem kinematischen Ansatz für eine Welle zu beseitigen, verrät uns die Existenz eines Wellenprinzips. Dasselbe lautet:

1) K. Uller, Die kinematische, die physikalische Welle. (Jahrb. f. drahtl. Tel. 1915, S. 438.) — Grundlegung I, § 1 und 2. (Diese Zeitschr. 17. 168, 1916.)

Soll der Ansatz (3) eine Welle darstellen, so muß Φ von ω unabhängig sein.

Entsprechendes gilt in einer Vektorwelle ($\mathfrak{V}$) zwischen Φ und dem Betrage von $\mathfrak{v}$. Mit Rücksicht darauf, daß in den Bedingungen, welche eine Welle zu erfüllen hat, niemals Φ, sondern sein Gefälle $\mathfrak{w}$ auftritt, nimmt der genannte Satz die Form[1]) an:

In einer Skalarwelle (Ω) ist der Vektor $\mathfrak{w}$ unabhängig von ω, in einer Vektorwelle ($\mathfrak{V}$) unabhängig vom Betrage von $\mathfrak{v}$.

Dann und nur dann sind $\mathfrak{w}$, ω und $\mathfrak{v}$ kinematische Größen, die wir das Wellennormalenpaar, den Wellenskalar bzw. den Wellenvektor benennen, wobei die beiden letztgenannten vom N-P. der Zeitzählung abhängig sind.

Das genannte Wellenprinzip nun wirkt sich in allen Bedingungen aus, welchen die Welle unterworfen ist. Erst diejenige Gesamtheit von Gleichungen, in denen dies Prinzip zum Ausdruck gebracht ist, bildet das Gleichungssystem der betreffenden Welle von elementarer Schwingungsform. Für elektromagnetische Wellen, Scherungs- und Verdünnungswellen in gewöhnlichen isotropen Körpern sind diese Gleichungssysteme im § 5 der genannten Grundlegung zu finden. Sie lassen erkennen, daß in Beugungswellen, die ebenda gekennzeichnet werden, eine Isodynamennormale $\mathfrak{w}''$ selbst dann auftritt, wenn sie durch konservative Körper laufen. Da nun ihr Winkel gegen die Isophasennormale $\mathfrak{w}'$ nur ausnahmsweise ein gestreckter ist, ergeben sich einige bemerkenswerte Folgerungen. Zunächst kann bei Beugungswellen selbst in konservativen Körpern keine Rede davon sein, daß die Strahlung mit der Isophasennormale gleichgerichtet ist. Auch Betrag der Strahlung sowie Phasengeschwindigkeit und Wellenlänge sind durch die Spreizung des Wellennormalenpaars wesentlich beeinflußt. Ferner fordert für elektromagnetische Wellen die Solenoidalität des Feldes, daß selbst in konservativen Körpern die elektrische oder die magnetische Feldstärke in Beugungsgebieten geradlinig nur senkrecht sowohl zur Isophasenals auch zur Isodynamennormale schwingen kann. Entsprechendes gilt für Scherungswellen. In Verdünnungswellen schließlich schwingen in Beugungsgebieten die Teilchen in festen Körpern ausgesprochen elliptisch, in Flüssigkeiten in ausgesprochen elliptisch-spiralischen Bahnen um die Isophasennormale als Achse.

Wir können nunmehr zu unserem Thema zurückkehren. Für Wellen aller Art zeigen die Gleichungssysteme folgende gemeinsame Eigenschaft: Wellen sind nicht umkehrbar, d. h. ersetzen wir in ihnen $\mathfrak{w}'$ durch $-\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ durch $-\mathfrak{w}''$, kurz $\mathfrak{w}$ durch $-\mathfrak{w}$, so laufen sie mit anderen Phasen und Amplituden rückwärts, meist nicht einmal über denselben Weg. Das gilt, auch wenn der Körper konservativ ist. Damit ist auf rein wellenkinematischem Wege eine strittige Frage entschieden, die in der Thermodynamik der Strahlung von Bedeutung ist, worauf andernorts zurückzukommen ist. Es gibt aber Wellen, bei denen die Unumkehrbarkeit bedeutungslos gering ist und infolgedessen theoretisch und mathematisch ganz verleugnet werden darf, während diejenigen Wellen, bei denen die Unumkehrbarkeit stark hervortritt, die Beugungswellen im besonderen Wortsinne sind. Tritt z. B. eine Welle durch eine genügend große Öffnung, so kann ihre Oberflächenbeugung ganz zurücktreten gegen die mehr oder minder vollkommene Umkehrbarkeit des eigentlichen Strahls. Auch Ausschnitte von Wellen, die allseitig sich ungehindert ausbreiten können, dürfen in hinreichend großen Entfernungen von ihren Quellgebieten praktisch als umkehrbar gelten. Die umkehrbare Welle ist ein idealer Grenzfall, der aber für Theorie und Praxis von Bedeutung ist. Sein Gleichungssystem wird gewonnen, wenn das oben erwähnte Grundgleichungssystem der Welle der Bedingung unterworfen wird, daß es unabhängig sein soll vom Vorzeichen des Wellennormalenpaars.

Sofern die Wellen praktisch umkehrbar befunden werden, ist nun der oben gesuchte deduktive Weg, an dessen Ausgangspunkt nur das Gleichungssystem der betreffenden physikalischen Welle steht, beschrieben. Für den Fall isotroper Körper sind die umkehrbaren Untersysteme für elektromagnetische Wellen, Scherungs- und Verdünnungswellen im § 6 der genannten Grundlegung bereits niedergelegt. Irgendwelche andere Voraussetzungen oder Beschränkungen sind dabei nicht gemacht; insbesondere brauchen die Systeme der Flächen konstanter Körperparameter keineswegs zusammenzufallen. Für homogene Körper gehen unsere Wellen in Planwellen über, sonst aber haben sie auch in den kleinsten Teilen andern Charakter.

Von den am ebengenannten Ort entwickelten Eigenschaften der umkehrbaren Welle interessiert uns hier diejenige, welche besagt: Das Quadrat des Wellennormalenpaars ist in jedem Punkte gleich einer gewissen Kombination der Körperparameter an dieser Stelle. Bezeichnen wir diese Kombination mit a, so gilt also die Beziehung

$$\mathfrak{w}^2 = a. \qquad (5)$$

1) K. Uller, Grundlegung II, § 5. (Diese Zeitschrift 17, 610, 1916).

Sie gilt streng in elektromagnetischen und Scherungs-Wellen, allgemeiner gesprochen in solenoidalen Wellen; angenähert auch in Verdünnungswellen, allgemeiner gesprochen in lamellaren Wellen, sofern die logarithmischen Gefälle der Körperparameter schwach sind. Die Größe $a = a' + ia''$ heiße der komplexe Wellenparameter; a' der erste, a'' der zweite Wellenparameter. Beide Größen, welche die Dimension cm^{-2} haben, unterliegen keiner Beschränkung, beide können alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Bei permanenten Schwingungen ($\nu'' = 0$) verlangt das Energieprinzip, daß a'' negativ sei. Dann ist der Spreizwinkel ϑ zwischen der Isophasennormale $\mathfrak{w}'$ und der Isodynamennormale $\mathfrak{w}''$ stumpf. Aus (5) kommt

$$\mathfrak{w}'^2 - \mathfrak{w}''^2 = a'; \tag{6}$$

$$2(\mathfrak{w}'\mathfrak{w}'') = 2\,|\mathfrak{w}'|\,|\mathfrak{w}''|\cos\vartheta = a''; \tag{7}$$

woraus mit der Abkürzung

$$\sqrt{a'^2 + a''^2/\cos^2\vartheta} = \mathfrak{w}'^2 + \mathfrak{w}''^2 = (\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) \tag{8}$$

entsteht:

$$|\mathfrak{w}'| = \sqrt{{}^1\!/_2\{(\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) + a'\}}; \tag{9}$$

$$|\mathfrak{w}''| = \sqrt{{}^1\!/_2\{(\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) - a'\}}. \tag{10}$$

Man sieht, von welch großem Einfluß der Spreizwinkel ϑ auf die Beträge der Isophasen- und Isodynamennormale ist, also auf Richtung und Größe der Phasengeschwindigkeit und Strahlung und schließlich auch auf die Wellenlänge, worüber indessen die bisherige Physik unberührt hinweggeht! In konservativen Körpern verschwindet $(\mathfrak{w}'\mathfrak{w}'')$ immer, aber nicht immer der Spreizvektor $[\mathfrak{w}''\mathfrak{w}'] = {}^1\!/_2 i \cdot [\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*]$ des Wellennormalenpaars; hier ist also die Spreizung entweder null — dann verschwindet $\mathfrak{w}''$ oder $\mathfrak{w}'$, oder sie ist gleich einem rechten Winkel wie im Gebiet der sogenannten Totalreflexion.

Aus (5) folgt

$$2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{w} = \mathrm{grad}\,\mathfrak{w}^2 = \mathrm{grad}\,a. \tag{11}$$

Die Wellen sind mithin gekrümmt, und zwar lediglich durch die Gefälle der Körperparameter. Ferner ersehen wir, daß die Änderung von $\mathfrak{w}$ in Richtung von $\mathfrak{w}$ durch das Gefälle des Wellenparameters a bestimmt ist.

Jede $\mathfrak{w}$-Linie ist also berechenbar, sobald in einem ihrer Punkte $\mathfrak{w}$ gegeben ist.

Tiefer dringen wir in diesen für uns wichtigen Satz ein, wenn wir eine Zerlegung von $\mathfrak{w}$ vornehmen. Dazu ist es nötig, vorher einen mathematischen Satz herzuleiten.

Ein vektoranalytischer Satz. Es sei eine Schar von Krümmungslinien ($\mathfrak{k}$) gegeben. Einen beliebigen Vektor $\mathfrak{B}$ zerlegen wir in zwei Komponenten, parallel und senkrecht zu $\mathfrak{k}$. Die eine ist also $(\mathfrak{B}\mathfrak{k})\mathfrak{k}$, die andere, die in der Tangentialebene der Orthogonalfläche liegt, $\mathfrak{B} - (\mathfrak{B}\mathfrak{k})\mathfrak{k} = \mathfrak{B}_t$. Dementsprechend ist

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{k})^2 + \mathfrak{B}_t^2 = \mathfrak{B}^2. \tag{12}$$

Worauf wir hinaus wollen, ist eine Auseinanderlegung des Vektors $(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{B}_t$. Zu dem Zweck zerlegen wir $(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{B}$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 2(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{B} &= 2(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{B}_t + 2(\mathfrak{B}\nabla)(\mathfrak{B}\mathfrak{k})\mathfrak{k} \\ &= 2(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{B}_t + 2(\mathfrak{B}\mathfrak{k})(\mathfrak{B}_t\nabla)\mathfrak{k} - 2(\mathfrak{B}\mathfrak{k})^2[\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}] \\ &\quad + \{(\mathfrak{k}, \mathrm{grad}(\mathfrak{B}\mathfrak{k})^2) + 2(\mathfrak{B}_t, \mathrm{grad}_t(\mathfrak{B}\mathfrak{k}))\}\,\mathfrak{k}. \end{aligned} \tag{13}$$

Des weiteren stützen wir uns auf die bekannte Formel:

$$2(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{A} = \mathrm{grad}\,\mathfrak{A}^2 - 2[\mathfrak{A}, \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}]. \tag{14}$$

Setzen wir darin für $\mathfrak{A}$ den oben genannten Tangentialvektor $\mathfrak{B}_t$, so erhalten wir für die Normalkomponente von (14)

$$\begin{aligned} 2(\mathfrak{k}, (\mathfrak{B}_t\nabla)\mathfrak{B}_t) &= (\mathfrak{k}, \mathrm{grad}\,\mathfrak{B}_t^2) + 2([\mathfrak{B}\mathfrak{k}], \mathrm{rot}\,\mathfrak{B}_t) \\ &= (\mathfrak{k}, \mathrm{grad}\,\mathfrak{B}_t^2) + 2([\mathfrak{B}\mathfrak{k}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}) \\ &\quad - 2(\mathfrak{B}\mathfrak{k})([\mathfrak{B}\mathfrak{k}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}) - 2(\mathfrak{B}_t\,\mathrm{grad}_t(\mathfrak{B}\mathfrak{k})). \end{aligned} \tag{15}$$

Eliminieren wir nun aus (13) und (15) das letzte Glied, so kommt mit Rücksicht auf (12) und (14)

$$\begin{aligned} &\mathrm{grad}_t\,\mathfrak{B}^2 - 2[\mathfrak{B}, \mathrm{rot}\,\mathfrak{B}] = \\ &2(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{B}_t + 2(\mathfrak{B}\mathfrak{k})(\mathfrak{B}_t\nabla)\mathfrak{k} - 2(\mathfrak{B}\mathfrak{k})^2[\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}] \\ &+ \{2([\mathfrak{B}\mathfrak{k}], \mathrm{rot}\,\mathfrak{B}) - 2(\mathfrak{B}\mathfrak{k})([\mathfrak{B}\mathfrak{k}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}) - 2(\mathfrak{k}(\mathfrak{B}_t\nabla)\mathfrak{B}_t)\}\,\mathfrak{k}. \end{aligned} \tag{16}$$

Das letzte Glied hierin müssen wir noch umformen.

In der Identität (17)

$$([\mathfrak{C}\mathfrak{D}], (\mathfrak{D}\nabla)\mathfrak{C}) + (\mathfrak{D}, (\mathfrak{C}\nabla)[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]) = ([\mathfrak{C}\mathfrak{D}]\,\mathrm{rot}\,[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]),$$

die sich leicht aus $\mathrm{grad}\,(\mathfrak{C}[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]) = 0$ entwickeln läßt, setzen wir $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_t$ und $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}_t$ und bedenken, daß damit $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = ([\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{k})\mathfrak{k} = S\mathfrak{k}$ wird. Der Skalarausdruck (17) wird nun insbesondere

$$(S\mathfrak{k}, (\mathfrak{B}_t\nabla)\mathfrak{A}_t + \mathfrak{A}_t, (\mathfrak{B}_t\nabla)S\mathfrak{k}) = 0$$

oder auch

$$(\mathfrak{k}, (\mathfrak{B}_t\nabla)\mathfrak{A}_t) + (\mathfrak{A}_t, (\mathfrak{B}_t\nabla)\mathfrak{k}) = 0. \tag{18}$$

Demnach können wir auch setzen

$$(\mathfrak{k}, (\mathfrak{B}_t\nabla)\mathfrak{B}_t) = -(\mathfrak{B}_t(\mathfrak{B}_t\nabla)\mathfrak{k}).$$

Schließlich zerlegen wir in (16) noch $[\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}]$ in

$$-(\mathfrak{B}\mathfrak{k})[\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}, \mathfrak{k}] + (\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{B}\mathfrak{k}] + ([\mathfrak{B}, \mathrm{rot}\,\mathfrak{B}]\mathfrak{k})\,\mathfrak{k}. \tag{19}$$

Nunmehr nimmt (16) die endgültige Gestalt an

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{B}_t - {}^1\!/_2\,\mathrm{grad}_t\,\mathfrak{B}^2 + (\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{B}\mathfrak{k}] + (\mathfrak{B}\mathfrak{k})[\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}] \\ &\quad = -(\mathfrak{B}\mathfrak{k})(\mathfrak{B}_t\nabla)\mathfrak{k} + (\mathfrak{B}\mathfrak{k})^2[\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}] \\ &\quad\quad + \{-(\mathfrak{B}_t(\mathfrak{B}_t\nabla)\mathfrak{k}) + (\mathfrak{B}\mathfrak{k})([\mathfrak{B}\mathfrak{k}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k})\}\,\mathfrak{k}. \end{aligned} \tag{20}$$

Die Bedeutung dieser Identität liegt darin, daß es physikalische Aufgaben gibt, in denen die Intensität der $\mathfrak{B}$-Linien in jedem Punkt eine vorgegebene Größe sein soll, die im Raum stetig variiert. Soll nämlich $\mathfrak{B}^2 = \chi$ sein, so können wir stets als $\mathfrak{k}$-Linien die Gefäll-Linien von χ wählen, was $\mathrm{grad}_t\,\mathfrak{B}^2 = \mathrm{grad}_t\,\chi$ überall zum Verschwinden bringt.

Wir wenden nun diesen Satz, der auch für komplexe Vektoren gültig bleibt, auf unser Wellennormalenpaar $\mathfrak{w}$ an, das ein komplexer Gradient ist. Es kommt, wenn wir $\mathfrak{k}$ überall mit der (komplexen) Richtung von grad a zusammenfallen lassen, also beschränkend annehmen, daß a' und a'' Funktionen ein

und derselben Veränderlichen seien, in Hinblick auf die Beziehungen (5) und (20)

$$\begin{aligned}(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{w}_t = &\{(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{w}_t\}_{\mathfrak{k}} \\ &-(\mathfrak{w}\mathfrak{k})(\mathfrak{w}_t\nabla)\mathfrak{k}+(\mathfrak{w}\mathfrak{k})^2[\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}] \\ &+\{-(\mathfrak{w}_t(\mathfrak{w}_t\nabla)\mathfrak{k})+(\mathfrak{w}\mathfrak{k})([\mathfrak{w}\mathfrak{k}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k})\}\mathfrak{k}\end{aligned} \qquad (21)$$

als volle Änderung der Tangentialkomponente von $\mathfrak{w}$ im Punkte P mit der Schichtnormale $\mathfrak{k}$, wenn man in der (komplexen) Richtung von $\mathfrak{w}$ zu einem unendlich benachbarten Punkte P' fortschreitet und die Tangentialkomponente daselbst auf die Schichtnormale $\mathfrak{k}'$ daselbst bezieht. Mit (21) und (11) erhalten wir für die volle Änderung der Normalkomponente von $\mathfrak{w}$ in Richtung von $\mathfrak{w}$

$$(\mathfrak{w}\nabla)\{(\mathfrak{w}\mathfrak{k})\mathfrak{k}\} = {}^1/_2(\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,a)\mathfrak{k}-(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{w}_t. \qquad (22)$$

In (21) ist rechts an erster Stelle nachträglich ein Glied hinzugefügt mit dem Zeiger $\mathfrak{k}$, was besagen soll, daß diejenige Partialänderung des linksseitigen Ausdrucks gemeint ist, die bei konstant gehaltener Richtung der Schichtnormale auftritt. Man sieht, daß es den Wert Null hat. Geht man also von einem Punkte P zu einem unendlich benachbarten Punkte P' in der (komplexen) Richtung von $\mathfrak{w}$ weiter, so ändert sich die Tangentialkomponente von $\mathfrak{w}$ nicht, wenn man sie dort auf die Schichtnormale in P bezieht.

Es ist bemerkenswert, daß diese Folgerung aus den Voraussetzungen, daß $\mathfrak{w}$ ein Gradient sei und sein Quadrat einer gegebenen stetigen Ortsfunktion von obiger Beschränkung gleiche, sich mit der Koexistenzbedingung deckt, der für jede Welle von elementarer Schwingungsform die Wellennormalenpaare im Falle von Brechung und Reflexion beiderseits der Trennungsfläche zweier Körper zu genügen haben, nämlich daß die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{w}$ beiderseits gleich seien.

Sind insbesondere die $\mathfrak{w}$ reell, sind mithin die beiden Körper konservativ, so folgt aus der Koexistenzbedingung im Verein mit (5), also für umkehrbare Wellen, unmittelbar das Snelliussche Brechungsgesetz, und das Fermatsche Prinzip, auf solche Brechung angewandt, ist schließlich nur eine andere Formulierung dieses Gesetzes.

Damit löst sich nun der Widerspruch auf, der darin bestand, daß einerseits die Refraktionstheorie als unzulässig von uns erkannt worden war, andererseits aber das Fermatsche Prinzip, als dessen Wurzel das Snelliussche Brechungsgesetz angesehen wird, die Bahnen vollständig bestimmt und auch befriedigend, wenn durch konservative Körper die Welle sich hindurchkrümmt! Das Fermatsche Prinzip — so stellt sich jetzt heraus — gilt eben nicht nur für Brechung umkehrbarer Wellen in konservativen Körpern, sondern für umkehrbare Wellen in konservativen Körpern überhaupt.

Setzen wir einmal voraus, es wären in den Bahnen folgende drei Bedingungen als erfüllt erwiesen:

1. Die Richtung der Strahlung fällt überall mit der Richtung der Isophasennormale der Welle zusammen.

2. Die Isophasennormale ist ein Gradient.

3. Das Quadrat der Isophasennormale ist überall gleich einer stetigen und reellen Ortsfunktion.

Dann würde sich aus ihnen sofort die Beziehung (11) ergeben. Diese führt nach unserem vektoranalytischen Satz auf die Zerlegungen (21) und (22), welche aber identisch sind mit den aus dem Fermatschen Prinzip ableitbaren Formeln. Folglich ist das Fermatsche Prinzip des ausgewählten Weges in inhomogenen Körpern nur eine andere Formulierung des Inbegriffs unserer drei Voraussetzungen; seine Wurzel ist nicht das Snelliussche Brechungsgesetz.

Wir haben jetzt zu fragen, wann die genannten drei Bedingungen erfüllt sind. Die zweite ist stets erfüllt, die dritte nur bei umkehrbaren Wellen, und die erste bei permanenten Schwingungen und umkehrbaren Wellen in konservativen Körpern außerhalb des Gebietes der Totalreflexion[1]).

Für umkehrbare Wellen in konservativen Körpern und mit permanenten Schwingungen kann also die Bahnbestimmung nach dem Fermatschen Prinzip des ausgezeichneten Weges, gleichwertig mit den Beziehungen (21) und (22) erfolgen, man hat aber dabei die Vorstellung kontinuierlicher Brechung aufzugeben.

Hat der Körper indessen wellenlöschende Eigenschaften, dann ist die Ortsfunktion a komplex, dann tritt neben der Isophasennormale $\mathfrak{w}'$ stets die Isodynamennormale $\mathfrak{w}''$, also ein Wellennormalenpaar, auf. Auch jetzt sind die $\mathfrak{w}'$-Linien sowie die $\mathfrak{w}''$-Linien berechenbar, wenn auch die Rechnungen sich außerordentlich verwickelt gestalten, da durch den Spreizwinkel zwischen $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$, der in die Beträge von $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ eingeht, Wechselbeziehungen zwischen den $\mathfrak{w}'$- und $\mathfrak{w}''$-Linien sich einstellen. Auch jetzt sind diese Linien, falls a' und a'' Funktionen derselben Veränderlichen sind, ausgezeichnete Wege,

1) K. Uller, Eine Wellenstudie (Elster-Geitel-Festschrift; 1915, § 4). K. Uller, Die Strahlung usw. (a. a. O.).

aber die $\mathfrak{w}'$-Linien, die Isophasennormalenlinien, sind nicht mehr die Bahnen des definitiven Energiefortgangs in der umkehrbaren Welle. Diese Bahnen sind überhaupt nicht aus der Kenntnis des Wellennormalenpaars allein heraus konstruierbar, sondern erfordern auch die Kenntnis des Wellenvektors, kurz des Wellenbaus, da sie auch vom Polarisationszustand der Welle abhängen[1]). Folglich können diese Bahnen nicht mehr das Fermatsche Prinzip befolgen. In der Tat lassen die Erfahrungen — sie liegen bisher anscheinend nur bei Lichtwellen in der Erdatmosphäre vor — schließen, daß die nach dem Fermatschen Prinzip berechneten Bahnen um so mehr von der Wirklichkeit abweichen, je größer die Extinktion ist oder je stärker sie sich geltend machen kann.

Aus der Abhängigkeit der Strahlung einer umkehrbaren Welle in einem wellenlöschenden Körper vom Polarisationszustand ergibt sich für ein natürliches einfarbiges Lichtwellenbündel eine fortschreitende Querschnittsvergrößerung des ganzen Bündels, die sich der Querschnittsänderung der einzelnen Strahlen überlagert, die durch die Divergenz der Wellennormalenlinien bedingt ist, wie in § 6 der Grundlegung bewiesen wurde.

Wir wollen noch untersuchen, ob eine einfache umkehrbare Welle — das ist eine solche, in welcher der Spreizvektor $[\mathfrak{w}'', \mathfrak{w}']$ des Wellennormalenpaars verschwindet — ihre Einfachheit verliert oder behält. Setzen wir in der Identität

$$2(\mathfrak{A}\Gamma)\mathfrak{B} = \operatorname{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) - \operatorname{rot}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A} - [\mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{A}] \qquad (23)$$

$\mathfrak{A} = \mathfrak{w} \pm \mathfrak{w}^*$ und $\mathfrak{B} = [\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*]$, so kommt

$$2(\mathfrak{w} \pm \mathfrak{w}^*\Gamma)[\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*] = -\operatorname{rot}[\mathfrak{w} \pm \mathfrak{w}^*, [\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*]] - \operatorname{div}(\mathfrak{w} \pm \mathfrak{w}^*)\cdot[\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*] - [\mathfrak{w} \pm \mathfrak{w}^*, \operatorname{rot}[\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*]]. \qquad (24)$$

Nun ist wegen (5)

$$\operatorname{rot}[\mathfrak{w} \pm \mathfrak{w}^*, [\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*]] = [\mathfrak{w}^* \operatorname{grad} a] \mp [\mathfrak{w} \operatorname{grad} a^*] - [\mathfrak{w} \mp \mathfrak{w}^*, \operatorname{grad}(\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*)],$$

so daß

$$2(\mathfrak{w} \pm \mathfrak{w}^*, (\mathfrak{w} \pm \mathfrak{w}^*\Gamma)[\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*]) = -(\operatorname{grad}\{a + a^* \pm 2(\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*)\}, [\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*]) \qquad (25)$$

$$2(\mathfrak{w} \mp \mathfrak{w}^*, (\mathfrak{w} \pm \mathfrak{w}^*\Gamma, [\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*]) = -(\operatorname{grad}(a) - a^*) \pm 2\operatorname{rot}[\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*], [\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*]): \qquad (26)$$

darin sollen die oberen bzw. unteren Vorzeichen zusammen gehören. An (25) und (26) liest man den Satz ab: Ist in einem Punkte die umkehrbare Welle einfach, so ist sie es auch in der unmittelbaren Umgebung ringsherum. Mit anderen Worten: Eine einfache umkehrbare Welle verliert in einem wellenlöschenden Körper ihren einfachen Charakter im Laufe ihres Fortschreitens nur ganz allmählich. Sie verliert ihn gar nicht in einem konservativen Körper, da in einem solchen eine Isodynamennormale $\mathfrak{w}''$ überhaupt nicht auftreten kann außerhalb des Gebietes der Totalreflexion.

1) Am letztgenannten Ort.

Wenn es wahr ist, daß die Bahnen des Sternenlichts in der extingierenden Erdatmosphäre nach den Berechnungen der Astronomen bei nicht sehr großen Zenitabständen das Fermatsche Prinzip noch befolgen, so ist das ein Beweis, daß die Atmosphäre keine scharfe obere Grenze hat. Denn im anderen Falle müßte beim Eintritt in diese eine radial gerichtete Isodynamennormale auftreten, die, wenn auch sehr klein, eine stärkere Abweichung der eindringenden Welle vom Bau der einfachen einleiten würde, womit auch eine Abweichung der Bahn von der nach dem Fermatschen Prinzip berechneten verbunden wäre.

Zum Schluß möge noch eine kritische Bemerkung zur bisherigen Extinktionstheorie Platz finden. Befangen in der landläufigen Vorstellung der Refraktion und ihrer völligen Unberührtheit von der Extinktion nimmt man an, daß auch bei Wellenlöschung Strahlengang, Abbildung und Querschnittsdeformation wie in konservativen Körpern zu berechnen seien. Die Wellenlöschung wirke nur auf die Intensität ein, und zwar nach der Bouguerschen Formel $|\mathfrak{R}| = |\mathfrak{R}_0| \cdot e^{-\int \lambda\, ds}$. Wir wissen jetzt nach den vorangegangenen Auseinandersetzungen, daß im Gegensatz zu dieser primitiven Auffassung der Einfluß der Extinktion den ganzen Bau und die Fortschreitungsrichtung der Welle durchdringt, daß er das Fermatsche Prinzip außer Geltung setzt und die Intensität nicht nur exponentiell schwächt. Kein Wunder daher, daß die bisherige Extinktionstheorie bei der wohl stärksten Prüfung, der sie im großen unterworfen werden kann, nämlich der Wiedergabe der Helligkeitsverteilung des von der Sonne hervorgerufenen Erdschattens, einen völligen Mißerfolg erlitten hat. Die Mitte des Erdschattens ist heller als der periphere Teil, denn die verfinsterte Mondscheibe leuchtet in der Mitte des Erdschattens uns heller als bei seinem Eintritt in denselben. Im Gegensatz dazu sollten nach den Rechnungen der Extinktionstheorie die peripheren Teile des Erdschattens in der Mondbahn ungefähr 700 mal heller sein als das Zentrum[1]).

1) H. Petzold, Die Dioptrik der Atmosphäre in ihrer Beziehung zur Theorie der Mondfinsternisse. (Dissertation Rostock 1907, S. 37; Beibl. **33**, 473.)

Gießen, Dezember 1916.

(Eingegangen 16. Dezember 1916.)

BESPRECHUNGEN.

Brooks and Weaver, A variable self and mutual inductor. Scientific papers of the Bureau of Standards (Department of commerce, U. S. A.) No. 290. S. 569—580. Für Interessenten frei zu beziehen durch das Bureau of Standards.

Veranlaßt durch die bei den Arbeiten der Anstalt sich geltend machenden Bedürfnisse haben die Verfasser systematische Versuche angestellt, um zur Konstruktion eines Selbstinduktionsvariometers zu gelangen, das in möglichst weitgehender Weise folgende Vorzüge in sich vereinigt: große Zeitkonstante bei handlicher Form, großer Veränderlichkeitsbereich, lineare Skala, keine oder geringe magnetische Wechselwirkung mit der Umgebung. Das Instrument, das diesen Anforderungen am weitesten nachkommt, besteht aus 3 kreisförmigen Hartgummischeiben, deren jede 2 Spulen trägt. Die mittlere Scheibe, deren Spulen doppelt so dick sind wie die in den beiden äußeren Scheiben befindlichen, ist um eine durch den Mittelpunkt gehende Achse drehbar, die beiden andern sind fest. Die Dimensionen sämtlicher Spulen sind im übrigen gleich und werden genau angegeben. Die Spulen haben die Gestalt von Kettengliedern, d. h. Rechtecken, deren kurze Seiten durch Halbkreise ersetzt sind. Die 4 festen Spulen sind hintereinander geschaltet und zu zwei Klemmschrauben geführt, ebenso die zwei beweglichen. Schaltet man alle 6 Spulen hintereinander, so erhält man eine Selbstinduktion, deren Größe zwischen 125 und 1225 Mikrohenry, also um 1,1 Millihenry veränderlich ist. Zwischen 325 und 1025 Mikrohenry ist die Skala genau linear, zwischen 325 und 125 und zwischen 1025 und 1175 Mikrohenry nimmt die Länge der Skalenteile allmählich zu. Will man die beiden Spulensysteme als Primär- und Sekundärseite einer Gegeninduktivität benutzen, so muß man, um deren Größe zu ermitteln, bei jeder Einstellung die Ablesung auf der Skala — die nur Selbstinduktionswerte angibt — um 669 vermindern und dann durch 2 dividieren. Die Astasierung des Instruments wird dadurch erreicht, daß die beiden Spulen jedes Paares gegensinnig vom Strom durchflossen werden.

Zum Schlusse wird das Variometer mit anderen verglichen, deren Konstruktion ähnliche Absichten verfolgt, und es werden Hinweise gegeben, wie es in der einen oder der andern Richtung noch verbessert werden könnte.

Überflüssig und wenig glücklich will uns der Versuch erscheinen, gegen die Anwendung des Wortes Induktanz, Selbstinduktion zu protestieren, wenn damit auch der Apparat selber und nicht nur seine Haupteigenschaft bezeichnet werden soll, und statt dessen für ersteren das (englische) Wort Induktor einzuführen. Da der bisherige Gebrauch weder gegen Grammatik oder Logik verstößt, noch zu Unklarheiten Anlaß gibt, so besteht eigentlich kein triftiger Grund dafür, ihn in dieser Weise einschränken zu wollen. V. Pieck.

J. Klein, Chemie, anorganischer Teil. 6. verbesserte Auflage. kl. 8⁰. 170 S. (Sammlung Göschen Nr. 37.) Leipzig u. Berlin, G. J. Göschen 1915. Geb. M. 1.—

Das kleine Werk gibt auf engem Raum einen Überblick über die theoretischen und erfahrungsmäßigen Grundlagen der anorganischen Chemie. Nach Einführung der chemischen Grundbegriffe und der wichtigsten die Chemie betreffenden Gesetze werden die hauptsächlichsten Elemente, ihre Verbindungen, sowie ihre Darstellungsmethoden behandelt. Die neuesten Entwickelungen der Chemie sind weitgehend berücksichtigt; indessen sei hier eine Anregung erlaubt: die Darstellung der Allotropieerscheinungen sollte nicht den Eindruck erwecken, als hätten diese notwendig Polymerie zur Voraussetzung. — Die Art der Darstellung und die Erläuterung chemischer Begriffe und Vorgänge durch geschickt gewählte Beispiele macht das Werkchen für den Physiker recht geeignet zur ersten Orientierung auf chemischem Gebiete.

S. Kyropoulos.

S. Genelin, Das chemische Praktikum, anschließend an den obligaten Unterricht in der anorganischen Chemie, in Form von Eprouvettenversuchen, nebst einer kleinen Anleitung zum Analysieren. 8⁰. VI. u. 94 S. Wien, A. Pichlers Witwe & Sohn. 1915. Geb. K. 1.20; Mk. 1.05.

Das kleine Buch bringt eine große Anzahl einfacher chemischer Versuche für das Schülerpraktikum höherer Lehranstalten, mit einer kleinen Anleitung zur Ausführung einfacher Analysen. Die Versuche sind nach pädagogischen Gesichtspunkten geordnet und so ausgearbeitet, daß sie von den Schülern einzeln und bereits mit den einfachsten Hilfsmitteln ausgeführt werden können. Die gute Auswahl und Diskussion der Experimente macht das Büchlein zu einem recht wertvollen Unterrichtsmittel. S. Kyropoulos.

Aus Natur und Geisteswelt. Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen. 8. Leipzig, B. G. Teubner. Jeder Band geb. M. 1.50.

228. Bd.: A. von Ihring, Die Wasserkraftmaschinen und deren Ausnutzung durch Wasserkräfte. 2. Aufl. IV u. 85 S. m. 57 Abbildungen. 1914.

Das Buch behandelt zunächst das Gefälle, die Stauanlagen, die Leistung von Wasserkräften sowie die Wassermessung, darauf die Wirkungsweise des Wassers in Maschinen, die Wasserräder, die Turbinen, ausgeführte Turbinenanlagen und schließlich die wirtschaftliche Bedeutung der Wasserkräfte. Der Verfasser verzichtet auf jede Rechnung und begnügt sich mit einigen energetischen Überlegungen; demgemäß ist das Schriftchen auch nur für Nichttechniker als Einführung zu brauchen. Für diese ist allerdings die Wassermessung viel zu ausführlich dargestellt, ebenso könnten von den 4 unterschlächtigen Wasserrädern 3 wegfallen. Der so gewonnene Raum käme dann den Turbinen zugute, wobei Widersprüche über die Stoßwirkung des Wassers auf Seite 19 und über die Beaufschlagung von Fourneyron-Turbinen auf Seite 35 und 36 auszumerzen wären. Die zurzeit wichtigste Francis-Turbine ist kein reines Radialrad, sondern arbeitet mit Radial- und Axialströmung, daher der bequeme Saugrohranschluß. Alte Axialräder sowie Partial-Turbinen könnten wegfallen, dafür dürfte die Regelung etwas ausführlicher besprochen werden als auf einer

halben Seite, deren Inhalt abgesehen von Unrichtigkeiten für den Leser kaum verständlich ist. Jedenfalls würden die meist guten Abbildungen mehr zur Geltung kommen, wenn der Text auf Grund selbständiger Erfahrungen und Studien, die dem Verfasser zu fehlen scheinen, zeitgemäß umgearbeitet würde.

H. Lorenz.

516. Bd.: R. Vater, Einführung in die technische Wärmelehre (Thermodynamik). Kl. 8°. VII u. 111 S. m. 40 Abbildungen. 1916.

Im Rahmen der bekannten Teubnerschen Sammlung hat der Verf. eine elementar gehaltene Einführung in dasjenige Gebiet der theoretischen Wärmelehre verfaßt, welches hauptsächlich in der Technik zur Anwendung kommt. Das Bändchen ist in erster Linie für Studierende geschrieben, welche von einer Vertiefung ihrer theoretischen Kenntnisse vielfach durch die Annahme abgehalten werden, daß eine solche ebenso schwierig wie zeitraubend sei. Aus diesem Grunde hat der Verf. eine größere Anzahl von zahlenmäßig durchgerechneten Beispielen eingefügt, welche die technische Wichtigkeit der abgeleiteten Gesetze erkennen lassen und das Verständnis derselben beim Leser vertiefen.

Wenn sich somit das kleine Buch vor allem an die Studierenden der technischen Hochschulen wendet, so ist es doch auch denen der Universitäten warm zu empfehlen. Es gipfelt nämlich in der Behandlung der sog. S, T- und J, S-Diagramme, bei denen einmal die Entropie und Temperatur, das andere Mal der Wärmeinhalt und die Entropie als Koordinaten gewählt sind. Diese Diagramme sind dem Ingenieur der Praxis ebenso vertraut wie sie dem Physiker im allgemeinen unbekannt sind. Von dem Zweck und der Benützung der Diagramme gibt das Buch ein sehr klares Bild, so daß auch der Physiker aus ihm das sehr wünschenswerte Verständnis dafür erhält, wie die ihm bekannten theoretischen Gesetze in der Praxis zur Verwendung kommen.

Oscar Knoblauch.

520. Bd.: P. Thormeyer, Philosophisches Wörterbuch. II u. 96 S. 1916.

Das vorliegende kleine Wörterbuch enthält in alphabetischer Reihenfolge die Erläuterungen von etwa tausend philosophischen Grundbegriffen, so daß dasselbe recht wohl zur Einführung in die Philosophie dienen und auch dem Physiker mitunter von Nutzen sein kann.

R. Lucas.

Ewald Fonrobert, Das Ozon. Gr. 8°. X u. 282 S. mit einer Abbildung. Stuttgart, Verlag von Ferdinand Enke. 1916. Geheftet M. 10.80, in Leinwand gebunden M. 12.—.

Das Ozon ist im letzten Jahrhundert aus einem chemischen Kuriosum — es sei nur an seine Identifikation mit Radiumemanation und an das lange Zeit rätselhafte Antozon erinnert — zu einem Reagenz und technischen Produkt von vielseitiger Verwendbarkeit und großer Bedeutung geworden. Es ist daher eine verdienstvolle Tat des Verf., den Inhalt der weitverstreuten Literatur zu einer Einzeldarstellung zusammengefaßt zu haben, auch ist der Zeitpunkt ihres Erscheinens — wichtige Streitfragen wurden gerade in den letzten Jahren gelöst — sehr geschickt gewählt. Wie der Verf. im Vorwort hervorhebt, wird im vorliegenden Bande nur die Chemie des Ozons eingehend behandelt, über seine physikalische Chemie hingegen kurz hinweggegangen, da ein besonderes Werk hierüber von einem anderen Bearbeiter demnächst erscheinen soll. Die Literatur ist, soweit Ref. es beurteilen kann, vollständig zusammengetragen, sie ist übersichtlich angeordnet und kritisch gewertet. Gerade letzteres ist auf dem Gebiete der Ozonchemie besonders schwierig, denn wo man hinblickt, stößt man auf Widersprüche. Daher konnte dieses Werk nur von einem geschrieben werden, der sich selbst jahrelang mit diesen Fragen experimentell beschäftigt und so eine große Erfahrung gewonnen hat, wie der Verf. Dieser hat nämlich in Gemeinschaft mit unserem heute erfolgreichsten Ozonforscher, mit Harries, an einem der größten Probleme, die mit Hilfe des Ozons gelöst wurden, an der Kautschuk-Synthese, mit gearbeitet. Diese seine Betätigung gereicht dem Werke einerseits zum Vorteil, indem die Arbeiten von Harries und seinen Schülern besonders klar und ausführlich behandelt sind, andererseits aber auch zum Nachteil, da der Verf. seinem Herrn und Meister gegenüber nicht immer die sonst so glücklich geübte Kritik walten läßt. Das Werk ist klar geschrieben, der Stil flüssig. Es könnte daher, auch wenn es nicht das einzige Ozonbuch in deutscher Sprache wäre, warm empfohlen werden.

Riesenfeld.

Werner v. Siemens-Gedenknummer. Dinglers polytechnisches Journal. 97. Jahrgang. Band 331. Heft 25. Berlin, R. Dietze 1916.

Die bekannte Zeitschrift „Dinglers polytechnisches Journal", die bald selbst auf ein 100jähriges Bestehen wird zurückblicken können, widmet das vorletzte Heft des nunmehr abgeschlossenen Jahrganges dem Andenken an ihren, wie die Schriftleitung mit Stolz hervorhebt, berühmtesten Mitarbeiter, Werner Siemens. War es doch in dieser Zeitschrift, in der seinerzeit der 29jährige Siemens seine erste literarische Arbeit veröffentlichte, und zwar „Über die Anwendung der erhitzten Luft als Triebkraft". Aus der Feder berufener Vertreter von Wissenschaft und Technik bringt die Gedenknummer eine Reihe von Artikeln, in denen uns in anschaulicher Weise zum Teil auf persönlichen Erinnerungen beruhend, ein Bild vom Leben und Schaffen dieses Großen gegeben wird. Unter den Abbildungen ist für uns Jüngere, die wir die Entwicklung der Elektrotechnik zu ihrer heutigen Höhe nicht mehr miterlebt haben, von besonderem Interesse diejenige einer der ersten Dynamomaschinen. Besonders hervorzuheben ist noch der unverkürzte Abdruck von Siemens' Brief an das Ministerium, mit dem die Gründung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt veranlaßt wurde.

V. Pieck.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Aachen Dr. Ladislaus Gasiorowski für Mathematik einschließlich darstellende Geometrie, an der Universität Jena Dr. Paul Hirsch für Chemie.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Straßburg Dr. Andreas Speiser zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Zürich, Fräulein Dr. Johanna Westerdyk zum a. o. Professor für Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Utrecht.

Verliehen: Dem Observator am Geodätischen Observatorium bei Potsdam Dr. Erich Przybyllok und dem Observator am meteorologisch-magnetischen Observatorium daselbst Dr. W. Marten der Titel Professor, dem Lehrer für Chemie an der k. k. Fachschule in Haida und Leiter der Schulglashütte Dr. Kaspar Killer der Titel Professor.

Ehrung: Die königl. Preußische Akademie der Wissenschaften in Berlin verlieh die Helmholtz-Prämie dem ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität München Dr. Arnold Sommerfeld.

Bemerkungen für die Herren Mitarbeiter!

1. Die **Briefbezeichnung der Schriftleitung** ist Göttingen, Nikolausberger Weg 20.

2. Die Physikalische Zeitschrift will vor allem einer rasch aufklärenden und anregenden Berichterstattung dienen. Die Mitteilungen müssen daher **auf das Wesentliche beschränkt** und **in möglichst knapper Form** abgefaßt sein. Sie sollen im allgemeinen den Umfang von etwa 8 Spalten nicht überschreiten.

3. Die **Abhandlungen** müssen druckfertig eingeliefert werden. Im Interesse rascher Erledigung liegt es, sie auf **einseitig** und deutlich, am besten mit **Schreibmaschine** geschriebenen Blättern einzuliefern.

4. **Zitate** bitten wir in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form zu geben; auch bitten wir, die vom Ausschuß für Einheiten und Formelzeichen (AEF) vorgeschlagenen Bezeichnungen zu berücksichtigen.

5. Am Schluße der Arbeit bitten wir eine kurze **Zusammenfassung** der wesentlichen Ergebnisse sowie die **Briefbezeichnung des Verfassers** beizufügen.

6. **Figurenvorlagen** müssen auf besonderen Blättern **gleichzeitig mit der Abhandlung** und möglichst so eingeliefert werden, daß ihre Wiedergabe ohne weiteres erfolgen kann. Wiedergabe auf besonderen Tafeln kann, mit Rücksicht auf die hohen Kosten, nur ausnahmsweise ausgeführt werden.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag der Physikalischen Zeitschrift.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 3. 1. Februar 1917. 18. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 4 am 10. Februar 1917.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über graphische Darstellungen mit Kurvenscharen.

Von Hans Schwerdt.

Eine in der Praxis häufig vorkommende Aufgabe ist die graphische Darstellung des Zusammenhanges zwischen mehreren voneinander abhängigen Größen. Die Aufgabe kann erstens dann vorliegen, wenn Beobachtungsresultate, häufig gebrauchte Faktoren, Korrektionsgrößen u. Ähnl. zusammenzufassen sind, deren Abhängigkeit von anderen Größen mathematisch in Gestalt einer bekannten Gleichung oder Funktion formulierbar ist; zweitens dann, wenn Beobachtungswerte, statistische Daten u. Ähnl. unbekannter mathematischer Gesetzmäßigkeit darzustellen sind. Während sich bei der zweiten Gruppe von Aufgaben im voraus nichts darüber aussagen läßt, auf welche Art die empirischen Größen am zweckmäßigsten dargestellt werden, kann für einen großen Kreis von Aufgaben erster Art im voraus auf rechnerischem Wege eine Darstellung gefunden werden, die die Berechnung oder Konstruktion oder Benutzung der Tafel wesentlich einfach gestaltet.

Es seien zunächst zwei Größen, x und y, durch die Formel

$$F(x, y) = 0$$

miteinander verknüpft. Als Beispiel mögen die Hyperbeltafel von Pouchet und die entsprechende logarithmische Tafel von Lalanne genannt sein, die die Funktion

$$x \cdot y = p \tag{1}$$

für variierende p innerhalb eines bestimmten Bereiches darstellen.

Wird ein rechtwinkliges, Cartesisches Koordinatensystem gewählt und werden die x-Werte als Abszissen, die y-Werte als Ordinaten eingezeichnet, so ergibt sich eine gleichseitige Hyperbel. Sie wird die Bildkurve der Rechenaufgabe $F = 0$ genannt.

Wird die Gleichung (1) logarithmiert,

$$\log x + \log y = \log p, \tag{2}$$

und werden die Werte ($\log x$) als Abszissen-, die Werte ($\log y$) als Ordinatenteilungen aufgetragen, so wird offenbar die Bildkurve eine Gerade (Fig. 2). An die Achsen, die die logarithmischen Teilungen tragen, werden nicht die Funktionswerte, sondern die Argumentwerte angeschrieben. Die sich ergebende Teilung heißt Funktionsskala.

Dieses an einem Beispiel angedeutete Prinzip der Funktionsskalen (Anamorphose), das von Léon Lalanne zuerst eingeführt, von M. d'Ocagne weiter entwickelt worden ist, ist eine der wichtigsten Methoden, die bei der graphischen Darstellung Verwendung finden:

Die Rechenaufgabe $F = 0$ wird eventuell geeigneten Umformungen unterzogen, auf den Achsen des Bezugssystems werden die sich als zweckmäßig ergebenden Funktionen aufgetragen und an die Teilungen die Argumentwerte angeschrieben. Dann wird die Bildkurve eingezeichnet. Der praktische Nutzen solcher Funktionsskalen ist ersichtlich sehr groß, wenn sich als Bildkurven Gerade ergeben; denn es genügen dann zwei Punkte, um den Verlauf der gesamten Kurve einzeichnen zu können. Handelt es sich um die Zusammenfassung von Beobachtungswerten, so ist bei geradliniger Bildkurve eine genaue, von Mehmke angegebene Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadratsumme anwendbar, während bei allen anderen Kurvenzügen eine Ausgleichung nur nach Gutdünken möglich ist.

Dieses Prinzip der sog. geometrischen Anamorphose erscheint durch das angeführte Verfahren hinreichend begründet. Alle Übersicht über den mathematischen Zusammenhang geht aber sofort verloren, wenn zur allgemeinen Anamorphose in gleicher Weise übergegangen wird. Als Beispiel für die allgemeine Anamorphose kann die Darstellung über $\frac{y}{x}$ als Ordinate dienen, die für gewisse parabolische Funktionen ohne Absolutglied zweckmäßig ist, aber auch

sonst mit Erfolg angewandt wird. Ist die Funktion

$$y' = A \cdot x^m + B x^n \ (m > n)$$

vorgelegt, so werden

$$\frac{y'}{x^n}$$

als Ordinaten zu den Abszissen x^{m-n} aufgetragen. Das Bild der Funktion wird geradlinig. Es ist sofort ersichtlich, daß die Ordinatenachse nicht mit einer Funktionsteilung eines Argumentes versehen werden kann. Es handelt sich hierbei um eine vielgebrauchte Darstellung. So stellt

$$y = A \,.\, x^4 + B x^2$$

den Zusammenhang zwischen der Frequenz x eines Wechselstromes mit der Schallintensität y eines tönenden Lichtbogens dar [1]).

Von besonderer Bedeutung ist diese Darstellung für das Problem des Oberflächenwiderstandes [2]), das im Schiffs- und Kanalbau eine hervorragende Rolle spielt [3]).

In der Beleuchtungstechnik ist eine ähnliche Darstellung benutzt worden, um die Wertigkeit der künstlichen Lichtquellen untereinander und mit dem Tageslicht zu vergleichen. Es werden die Verhältniszahlen $\frac{\text{blau}}{\text{grün}}$ als Abszissen, als Ordinaten die Zahlen $\frac{\text{rot}}{\text{grün}}$ aufgetragen [4]) (blau + grün + rot = 100).

Eine Begründung für diese allgemeine Anamorphose, der sich die geometrische offenbar einordnet, soll im folgenden durch eine andere Auffassung dargestellt werden, zu der aus der Abbildungslehre entlehnte Vorstellungen geführt haben.

Der Gedanke der Abbildung wurde zuerst von d'Ocagne in das Gebiet der Nomographie getragen. Er unterwarf seine graphischen Tafeln einer Punkttransformation [5]) (einer Abbildung, die Punkte in Punkte überführt) und zeigte, daß sie einen bestimmten analytischen Bereich innerhalb eines verlangten geometrischen Gebietes, etwa eines Rechteckes, darzustellen vermögen. Ferner fügte er seinen linearen Tafeln die dualistische Transformation der reziproken Polaren hinzu [1]) und gab auf diese Weise die strenge Begründung für die kollinearen oder fluchtrechten Tafeln.

Hier soll von der Darstellung der Funktion

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (3)$$

in allgemeiner Anamorphose durch Rechentafeln mit Kurvenkreuzung (abaques à entrecroisement) gehandelt werden.

Jede Funktion $F = 0$ ist in einem rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensystem (x, y) als Kurvenschar nach dem Parameter $z = p$ darstellbar [2]). Es werde für jede darzustellende Funktion F eine solche Cartesische Ebene vorausgesetzt, in der die regulären Achsen (x, y) definiert seien. Dieser Ebene E werde eine Punkttransformation hinzugefügt, die sie in die Ebene E mit den regulären orthogonalen Cartesischen Achsen (ξ, η) überführt.

Die Achsenkreuze (x, y) und (ξ, η) seien äquivalent. Die Transformation

$$\begin{aligned} x &= U(\xi, \eta) \\ y &= V(\xi, \eta) \end{aligned} \qquad (4)$$

muß gewissen Bedingungen genügen, damit die Abbildung der Ebenen aufeinander näher bestimmt sei:

Es sollen U und V endlich, stetig und reell sein, wenigstens innerhalb angebbarer Bereiche in E und E. Es sei zugelassen, daß U und V endlichfach mehrdeutig sind mit folgender Einschränkung: Um jeden Punkt a soll es ein angebbares Gebiet E geben, dessen sämtliche diskrete Punkte sich wieder in diskrete Punkte abbilden (Fig. 1), d. h.: liegt c außerhalb E, so darf es stattfinden, daß die Bilder γ und α zusammenfallen. Liegt dagegen b innerhalb E, so soll das Bild β notwendig verschieden von α sein. Damit diese Beziehung zwischen E und E umkehrbar bestehe, ist die Existenz der Ungleichung notwendig und hinreichend:

1) v. Pirani, Graph. Darstellung in Wissenschaft und Technik § 16. Sammlung Göschen. 1914.

2) Blasius, Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure 1912, Nr. 16. Stanton, Transact. Inst. Naval Archit. 1912.

3) Gümbel, Jahresb. d. Schiffsbautech. Ges. **14**, 491, 1913.

4) Bloch, Elektrotechn. Zeitschr. 1913, S. 1306. In das Wesen der dort entwickelten Darstellung erhält man einen Einblick, wenn man sie mit dem von Jasse, E. T. Z. 1913, S. 1454 berechneten Maxwellschen Farbendreieck vergleicht, das eine Transformation in einen speziellen Fall der bekannten von Hesse in seiner 6. Vorlesung der Analyt. Geom. entwickelten homogenen Koordinaten bedeutet.

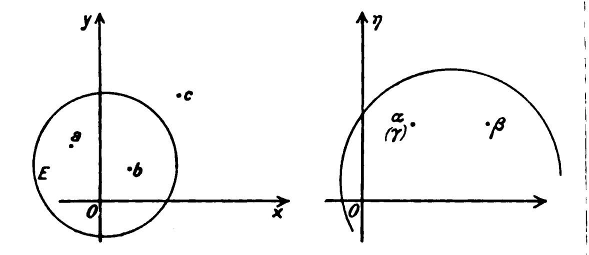
5) d'Ocagne, Traité de nomographie. Paris, 1899. Nr. 49, S. 103.

1) d'Ocagne, l. c. Nr. 56, S. 124 und Annales des Ponts et Chaussées 1884, S. 531.

2) Von dieser Anschauung ging auch Pouchet in der Arithmétique lineaire (1797) aus. Deutet man aber $F(x, y, z) = 0$ als Fläche im räumlichen Cartesischen Koordinatensystem (x, y, z), so erscheinen die Kurven $z = \text{const.}$ in der (x, y) Ebene als Orthogonalprojektionen der Niveaulinien der Fläche F auf die (x, y) Ebene. Diese Eigenschaft wird von Lalanne u. a. in den Vordergrund gestellt, die die Kurven $z = \text{const.}$ nicht als Parameterkurven, sondern als Schichtenlinien auffassen und damit den Zusammenhang der graph. Tafeln mit den geograph. Karten betonen. Lalanne erwähnt mehrmals die grundlegende Arbeit von Philippe Buache, Mém. de l'Acad. des sciences 1752, S. 415. Es erscheint jedoch vorteilhafter, diese Anschauung fallen zu lassen. Lalanne, Annales des Ponts et Chaussées 1846. I. S. 61 u. 63 ff.

$$M = \frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (5)$$

wie die Entwicklung mit Taylors Reihe zeigt.



a und b liegen innerhalb E, ihre Bildpunkte α und β sind notwendig verschieden. c liegt außerhalb E, sein Bild γ kann mit dem Bilde eines inneren Punktes, etwa α, zusammenfallen.

Fig. 1.

Die ersten partiellen Ableitungen seien als stetig vorausgesetzt, dann ist M als homogene bilineare Funktion dieser Ableitungen auch stetig. Die Gleichung

$$M = 0 \qquad (6)$$

definiert die Grenzkurven von E und E.

Eine einfache Betrachtung zeigt, daß bei äquivalent vorausgesetzter Orientierung der Achsenkreuze für Gebiete $M > 0$ der Drehungssinn gewahrt bleibt, während er für Gebiete $M < 0$ in den entgegengesetzten übergeführt wird. Es sei ein Flächenelement in E als Dreieck definiert.

$$2 \cdot dS = \begin{vmatrix} dx & dy \\ \delta x & \delta y \end{vmatrix}; \text{ sein Bild in E sei}$$

$$2 \cdot d\Sigma = \begin{vmatrix} d\xi & d\eta \\ \delta\xi & \delta\eta \end{vmatrix}; \text{ dann ist}$$

$$dS = M \cdot d\Sigma.$$

Also ist M die Zahlengröße, die an jeder Stelle den Flächenmaßstab von dS zu $d\Sigma$ angibt. Von der linearen Vergrößerung kann nicht gesprochen werden, da sie nicht allein eine Funktion des Ortes, sondern auch eine Funktion der Richtung ist; denn die Funktionen U und V brauchen nicht der Laplaceschen Differentialgleichung zu genügen. Das ist der wesentliche Unterschied zwischen den hier behandelten und den konformen Abbildungen. Auf den Kurven $M = 0$ muß jede Abbildung besonders untersucht werden.

Bei der geometrischen Anamorphose sind die Funktionen U und V von besonderer Art,

x ist Funktion von ξ allein,
y ist Funktion von η allein,

d. h. die Schar der y-Linien (x = const.) transformiert sich in die Schar der η-Linien (ξ = const.), die x-Linien (y = const.) werden in die ξ-Linien verwandelt. Die Ebene E ist also einer Deformation parallel zur x-Richtung und einer Deformation parallel zur y-Richtung unterworfen worden. Auf diese Weise sind die Koordinatenlinien in ihrer Paralleleneigenschaft invariant geblieben.

Für die Praxis ist die geometrische Anamorphose von besonderer Bedeutung, da das vorgedruckte Koordinatenpapier benutzt werden kann und nur mit Funktionsteilungen versehen zu werden braucht. Es sind deshalb auch Untersuchungen angestellt worden, welche Funktionen in geometrischer Anamorphose geradlinige Bildkurven haben können.

Die Funktionen $F(x, y;\ p) = 0$, deren Bilder in geometrischer Anamorphose eine Schar paralleler Geraden sein sollen, sind von de Saint-Robert[1]) behandelt worden. Ihre Differentialgleichung ist:

$$\frac{\partial^2 \log\left(\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

Die übrigen Funktionen sind von Massau[2]) dargestellt.

Für die Praxis wird folgende Überlegung hinreichen:

Es werde der darzustellenden Funktion $F(x, y; p) = 0$ die Punkttransformation

$$\begin{aligned} \xi &= u(x) \\ \eta &= v(y) \end{aligned} \qquad (7)$$

hinzugefügt. Es wird nun eine einzelne, bestimmte Kurve $p = p_0$ betrachtet. Soll ihr Bild geradlinig sein, so muß

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = C = \text{const. sein.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

$$dx = \frac{1}{u'}\, d\xi$$

$$dy = \frac{1}{v'}\, d\eta$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{1}{u'} d\xi + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{1}{v'} d\eta = 0$$

$$C \cdot d\xi - d\eta = 0$$

$$C \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{1}{v'} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{1}{u'} = 0 \qquad (8)$$

Handelt es sich zunächst nur darum, nicht eine Schar mit variierendem p, sondern eine einzelne Kurve (p = const.) darzustellen, so ist sofort er-

1) Memorie della R. Accademia di Torino. 2. Serie **25**, 53, 1871.
2) Massau, Annales de l'Assoc. des Ing. sortis des écoles spéc. de Gand, 1884, Buch III, Kap. 3, § 2.

sichtlich, daß eine solche Darstellung, vorbehaltlich einer Quadratur, stets auf beliebig viele Arten möglich ist. Es wird eine der beiden Funktionen u (oder v) willkürlich angenommen, dann ergibt sich die andere, also v (oder u), aus der letzten Gleichung[1]).

Am Beispiel der oben erwähnten Multiplikationstafeln soll gezeigt werden, wie sich durch verschiedene Wahl der Funktion u die verschiedenen gebräuchlichen Arten ergeben:

$$x \cdot y = p$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{p}{x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{p}{y}$$

Somit ergibt sich die Gleichung (8)

$$C \cdot \frac{p}{y} \cdot \frac{1}{v'} + \frac{p}{x} \cdot \frac{1}{u'} = 0 \qquad (9)$$

I. Es wird $u' = \frac{1}{x}$ gewählt. Somit wird aus (9)

$$v' = -\frac{C}{y}. \quad \text{Hieraus folgt}$$
$$C = -1$$
$$u = \int \frac{dx}{x} \quad \ldots\ldots \quad \xi = \log x$$
$$v = \int \frac{dy}{y} \quad \ldots\ldots \quad \eta = \log y.$$

Beide Achsen tragen logarithmische Teilungen, die Bildkurven sind untereinander parallel ($C = -1$).

Dies ist Lalannes Tafel[2]) (Fig. 2).

II. Setzt man $u' = 1$, so wird aus (9)

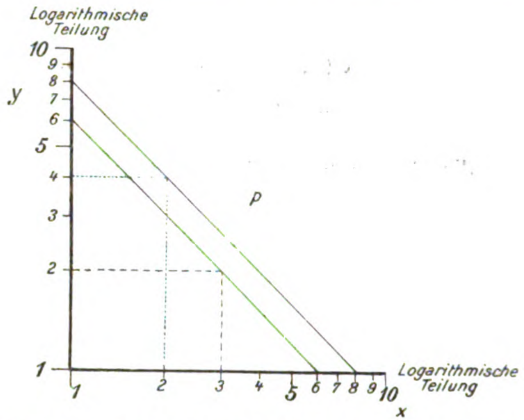
$$v' = -C \cdot \frac{p}{y^2}. \quad \text{Hieraus folgt}$$
$$C = \frac{1}{p}$$
$$u = \int dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad \xi = x$$
$$v = -\int \frac{dy}{y^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \eta = \frac{1}{y}$$

Die ξ-Achse ist regulär geteilt, die η-Achse trägt die reziproke Skala[3]). Die Richtungskonstanten der Bildgeraden sind $C = \frac{1}{p}$.

1) Tritt in Gleichung (8) der Parameter p so auf, daß er durch eine geeignete Wahl von C aus der Gleichung verschwindet, so ist auch die gesamte Schar durch gerade Linien darstellbar. Dafür dürfen u' und v' den Parameter p nicht enthalten; es ist dann hinreichend, wenn $\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$ in das Produkt zweier Funktionen $h(p) \cdot g(x, y)$ zerlegbar ist, von denen g von p unabhängig ist und h die Größen x und y nicht enthält. Dann wird $C = h(p)$ gesetzt.

2) Annales des Ponts et Chaussées, **11**, 31 ff. u. 43 ff., 1846.

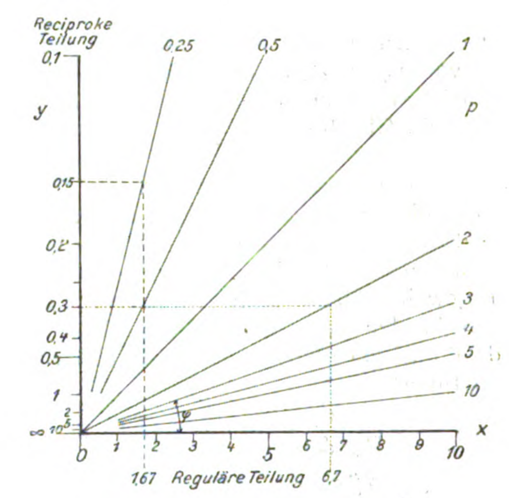
3) v. Pirani u. H. Miething, Zeitschrift für Feinmechanik 1915 Nr. 7.



Tafel nach Lalanne. Beispiele: $2 \cdot 4 = 8$, $3 \cdot 2 = 6$.

Fig. 2.

Dies ist die von Crépin[1]) angegebene Tafel (Fig. 3).



Tafel nach Crépin. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{p}$.

Beispiele: $1{,}67 \cdot 0{,}15 = 0{,}25$, $6{,}7 \cdot 0{,}3 = 2$.

Fig. 3.

III. Setzt man $u' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, so wird nach (9)

$$v' = -C \cdot \frac{\sqrt{x}}{y} = -C \cdot \frac{\sqrt{p}}{y \cdot \sqrt{y}}.$$

Hieraus folgt:

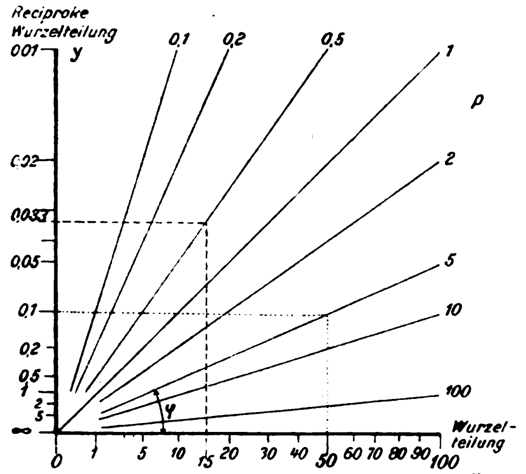
$$C = \frac{1}{\sqrt{p}}$$
$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \ldots \quad \xi = 2 \cdot \sqrt{x}$$
$$v = -\int \frac{dy}{y \cdot \sqrt{y}} \quad \ldots \quad \eta = \frac{2}{\sqrt{y}}$$

Die ξ-Achse trägt eine Wurzelteilung, die η-Achse eine reziproke Wurzelteilung, die Rich-

1) Crépin, Annales des Ponts et Chaussées 1881, I, 138, Plan VI.

tungskonstanten der Geraden sind $C = \frac{1}{\sqrt{p}}$.

Dies ist eine von Fürle[1]) konstruierte Tafel (Fig. 4).



Tafel nach Fürle. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{p}}$.

Beispiele: $15 \cdot 0{,}033 = 0{,}5$, $50 \cdot 0{,}1 = 5$.

Fig. 4.

Es läßt sich die Gleichung umschreiben in

$$x \cdot q = y.$$

Dann wird nach Gleichung (8)

$$-C \cdot \frac{1}{v'} + q \cdot \frac{1}{u'} = 0. \qquad (10)$$

IV. Setzt man

$u' = 1$, so wird nach (10)

$v' = \frac{C}{q}$. Hieraus folgt

$C = q$

$u = x \ldots\ldots\ldots \xi = x$

$v = y \ldots\ldots\ldots \eta = y.$

Dies ist die von Chenevier[2]) benutzte Tafel (Fig. 5). Sie findet ausgedehnte Anwendung z. B. in der Kartographie bei Bestimmung von geographischer Breite und Uhrstand nach der Standlinienmethode. Gewisse Rechenkoeffizienten sind abhängig von Stundenwinkel und Breite[3]).

V. Wird in (10)

$u' = \frac{1}{x^2}$ gesetzt, so wird aus (10)

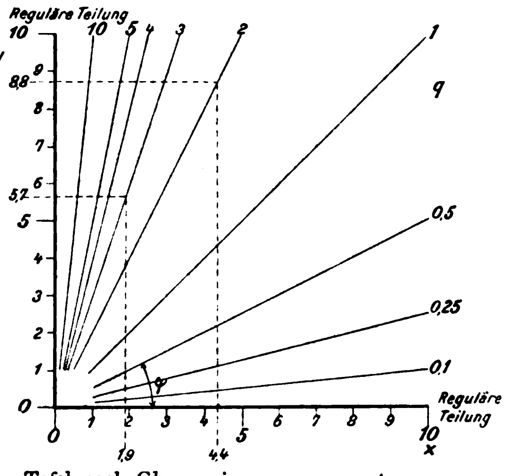
$v' = -\frac{C \cdot q}{y^2}$. Hieraus folgt

$C = \frac{1}{q}$

$$u = -\int \frac{dx}{x^2} \ldots\ldots\ldots \xi = \frac{1}{x}$$

$$v = -\int \frac{dy}{y^2} \ldots\ldots\ldots \eta = \frac{1}{y}.$$

Dies ist eine von Fürle[1]) angegebene Tafel.



Tafel nach Chenevier. $x \cdot q = y$, $\operatorname{tg}\varphi = q$.

Beispiele: $1{,}9 \cdot 3 = 5{,}7$, $4{,}4 \cdot 2 = 8{,}8$.

Fig. 5.

Zwischen diesen verschiedenen Arten von Multiplikationstafeln ist ein Zusammenhang hergestellt, der auf Grund der Gleichung (9) (bzw. (10)) durch die Wahl einer einzigen Funktion, nämlich u', vermittelt wird.

	u'	C	ξ	η		Fig.
(9)	$\frac{1}{x}$	-1	$\log x$	$\log y$	Lalanne	2
(9)	1	$\frac{1}{p}$	x	$\frac{1}{y}$	Crépin	3
(9)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{2}{\sqrt{y}}$	Fürle	4
(10)	1	q	x	y	Chenevier	5
(10)	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	Fürle	—

In den Fig. 2—5 sind nur einige Geraden aus jeder Schar gezeichnet.

Der Vorteil, den eine Tafel vor einer anderen voraus hat, ist sowohl in der Genauigkeit zu sehen, mit der sie einen bestimmten Bereich darstellt, als auch in der Ausdehnung der Bereiche für x, y und p, die in den verschiedenen Tafeln verschieden ist.

Durch andere Wahl von u' ließen sich noch beliebig viele andere Tafeln herstellen, deren Besonderheit eben in den Bereichen für x und y bestehen würde.

Handelt es sich bei der geometrischen Anamorphose um Abbildungen mit Parallelenin-

1) Fürle, Rechenblätter. Progr. d. 9. Realschule zu Berlin. O. 1902, S. 16, Tafel 2, 11.
2) d'Ocagne, l. c. S. 42.
3) Hugershoff, Kartograph. Aufnahmen 1912 (Göschen) S. 148, Fig. 65.

1) Fürle, l. c. Tafel 2, 16, S. 16.

varianz, so wird auf diese bei der allgemeinen Anamorphose auch noch verzichtet.

Die Linien $x=$ const. und $y=$ const. werden in andere Kurven transformiert. Zunächst werden in der Praxis wieder Gerade bevorzugt. Die theoretische Begründung für diese allgemeinen geradlinigen Tafeln hat Duporcq[1]) gegeben, indem er gewisse Funktionsgleichungen bestimmte, die die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür enthalten, daß eine Funktion F in allgemeiner Anamorphose durch drei Geradenscharen darstellbar ist.

Die vorhergehenden Ausführungen sollen auf das spezielle Beispiel der Schar der Wurfparabeln

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{x^2}{\alpha \cdot \cos^2 \varphi} \tag{10}$$

angewandt werden. Hierin ist

$$\alpha = \frac{2v}{g},$$

wenn

$$g = 9{,}81 \text{ cm/sec}^{-2}$$

und v die Anfangsgeschwindigkeit des geworfenen Körpers bedeuten.

Nach dem oben angegebenen Verfahren ergibt sich

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi - x \cdot \frac{1}{\alpha \cdot \cos^2 \varphi}$$
$$\xi = x$$
$$\eta = \frac{y}{x} \;\ldots\ldots\; y = \xi \cdot \eta.$$

Trotz des Vorzuges, die Parabelschar in eine Schar gerader Linien zu verwandeln, weist diese Tafel erhebliche Mängel auf.

Eine kurze Rechnung zeigt, daß die Geraden ein System 2. Grades bilden, das von einer Hyperbel umhüllt wird. Nach bekannten Sätzen der projektiven Geometrie wird zwar dadurch auf einer beliebigen, der Schar angehörigen Geraden, die zu einem Teilungsträger gewählt wird, durch die übrigen Geraden der Schar eine reguläre Teilung[2]) ausgeschnitten, so daß die Konstruktion erleichtert wird; aber durch die zweifache Überdeckung der Ebene mit Geraden wird der Benutzer der Tafel vollständig von der Vorstellung des zugrunde liegenden physikalischen Vorganges entfernt. Sodann ist sofort ersichtlich, daß wegen der Singularität der Geraden $x=0$ der freie Fall in der Tafel nicht enthalten ist und gerade der Anfangspunkt und seine nähere Umgebung unsicher dargestellt werden. Schließlich muß das Blatt noch mit einer Schar gleichseitiger Hyperbeln

$$\xi \cdot \eta = y$$

überzogen werden, damit die y-Werte an einer Skala ablesbar sein können; oder es müßte jede Ablesung an der η-Achse eine Umrechnung mit Hilfe des Rechenschiebers erfahren.

Eine andere Darstellung, die den physikalischen Zusammenhang zwischen den einzelnen Bildkurven nicht verschleiert, dabei die Parabelschar auch in eine Geradenschar überführt und nur Gerade und Kreise zur Konstruktion benötigt, wird durch folgende Abbildung hergestellt

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= -\frac{1}{\alpha}\xi^2 - \frac{1}{\alpha}\eta^2 + \eta \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

In den Figuren ist $\alpha = 1$ angenommen.

Zu jedem Punkt der Ebene E gehört ein und nur ein Punkt der Ebene E. Zu einem Punkte von E gehören stets 2 Punkte von E, die entweder reell verschieden oder zusammenfallend oder konjugiert komplex sein können.

$$M = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \ldots\ldots & 1 - \frac{2}{\alpha}\eta \end{vmatrix}$$

$$M = 1 - \frac{2}{\alpha} \cdot \eta \cdot \tag{12}$$

Für alle Werte $\eta \neq \frac{\alpha}{2}$ ist $M \neq 0$, die Abbildung also nach (5) brauchbar.

Es zeigt sich sofort, daß

1. die y-Linien ($x=$ const.) invariant bleiben,
2. die x-Linien ($y=$ const.) sich in die Schar konzentrischer Kreise

$$\xi^2 + \eta^2 - \alpha\eta + y = 0 \tag{13}$$

transformieren, deren Mittelpunkt

$$\left(0, \frac{\alpha}{2}\right)$$

und deren Radien

$$\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha y} \tag{14}$$

sind.

Die Umhüllende der Schar (10) ist die Parabel

$$\alpha y = \frac{\alpha^2}{4} - x^2. \tag{15}$$

Eine einfache Substitution zeigt, daß auf dieser Umhüllungskurve $M=0$ ist. Das Bild der Umhüllenden ist die Gerade.

$$\eta = \frac{\alpha}{2}.$$

Bezeichnet man denjenigen Teil der Ebene E, der den Nullpunkt enthält, als das Innere

---

1) Bulletin des sciences mathématiques, 1898, I. 287.

2) Schilling, Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Leipzig 1900, S. 20, § 3.

der Parabel (15), so zeigt sich, daß nur solche Punkte abbildbar sind, die **innerhalb** oder **auf** der Parabel (15) liegen. Nur das Innere der Parabel genügt den oben über E gemachten Voraussetzungen. Es wird auf die gesamte E-Ebene abgebildet. Und zwar ist unterhalb der Geraden

$$M=0\left(\eta<\frac{\alpha}{2}\right)$$

die Funktionaldeterminante $M>0$, oberhalb der Geraden

$$M=0\left(\eta>\frac{\alpha}{2}\right)$$

ist $M<0$. Es zeigt sich, daß von jedem inneren Punkt zwei in bezug auf die Geraden $M=0$ symmetrische Bilder entstehen, und zwar ist unterhalb $M=0$ der Drehungssinn gewahrt, während er oberhalb $M=0$ in den entgegengesetzten übergeführt wird. In den Figuren sind stets die linken Halbebenen unterdrückt worden, die ja in bezug auf $x=0$ symmetrisch sind. Der Nullpunkt bildet sich ab in die Punkte $(0,0)$ und $(0,\alpha)$. Die Parabelschar (10) hat als Bild je eine Geradenschar durch den Punkt $(0,0)$ und $(0,\alpha)$. Beide Scharen sind in bezug auf $M=0$ symmetrisch. Die mit demselben Parameterwerte φ bezeichneten Geraden schneiden sich auf der Geraden $M=0$.

Es ist für die Einfachheit der Konstruktion und die Übersicht über die Tafel wesentlich, daß die Neigungswinkel der Geraden gegen die ξ-Achse gleich den dazu gehörigen Elevationswinkeln φ sind, d. h. gleich den Winkeln, die die Nullpunktstangenten der entsprechenden Parabeln mit der X-Achse bilden.

Will man den Einblick in den physikalischen Zusammenhang betonen, so werden die Teile

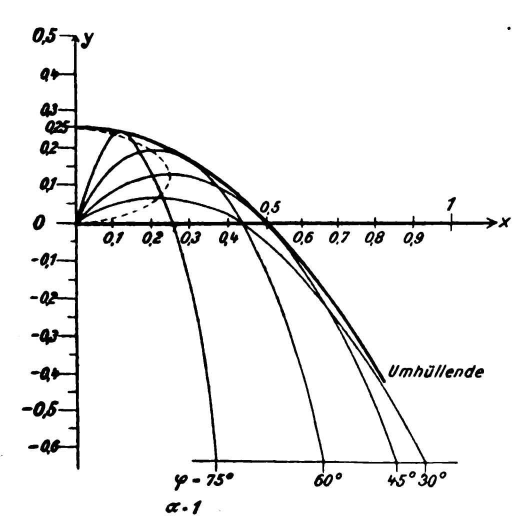


Fig. 6.

oberhalb $M=0$ unterdrückt, wie es in Fig. 7 geschehen ist.

Man kann sich vorstellen, daß die in Fig. 6 dargestellte Ebene E nach oben zu deformiert worden ist, bis die Umhüllungsparabel in die Gerade $M=0$ überging. Dabei wurden die Flächenelemente, die in weiterer Entfernung vom Nullpunkt lagen, näher an ihn herangerückt, wie sich auch aus den Teilungen in den Fig. 7 und 9 ergibt.

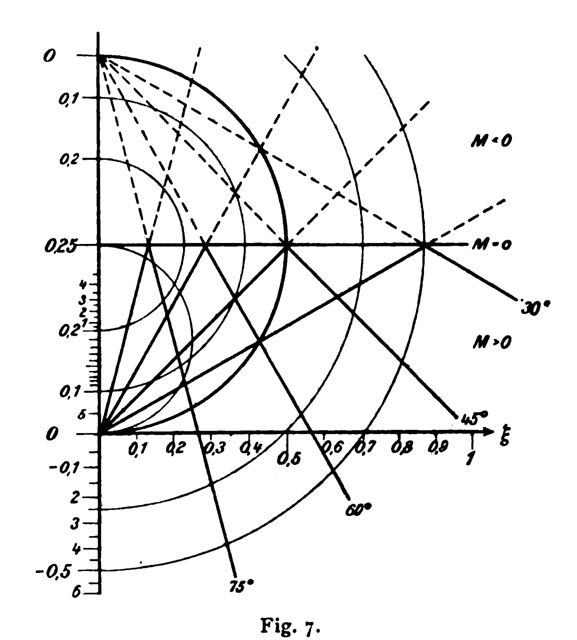


Fig. 7.

Bei einer Rechentafel zum praktischen Gebrauch wird man zwischen den Gebieten $M>0$ und $M<0$ dagegen keinen Unterschied machen, sondern alle von dem oberen Bildpunkt des Nullpunktes ausgehenden Strahlen unterdrücken, so daß sich Fig. 12 ergibt. Die in Fig. 6 angedeutete Scheitelellipse bildet sich in den in Fig. 7 eingezeichneten Halbkreis mit dem Halbmesser 0,25 ab. Dieser Halbkreis ermöglicht eine genaue Ablesung an den Stellen, bei denen die Geraden die Kreise berühren.

Mehr von theoretischem Interesse als von praktischen Nutzen ist die in den Fig. 8 und 9 dargestellte Kreisschar. Die Kreisschar (Fig. 8)

$$x^2+y^2+y\frac{2\varrho^2}{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha^2}\varrho^4-\varrho^2\right)=0 \qquad (16)$$

hat als Umhüllende dieselbe Parabel (15), wie die Schar der Wurfparabeln:

$$\alpha y=\frac{\alpha^2}{4}-x^2$$

Das Bild der Schar (16) ist

$$\xi^2+\eta^2=\varrho^2. \qquad (17)$$

Ein Kreis der Schar (16) hat die Mittelpunktskoordinaten

$$\left(0, -\frac{\varrho^2}{\alpha}\right)$$

und den Radius ϱ; sein Bild ist wieder ein

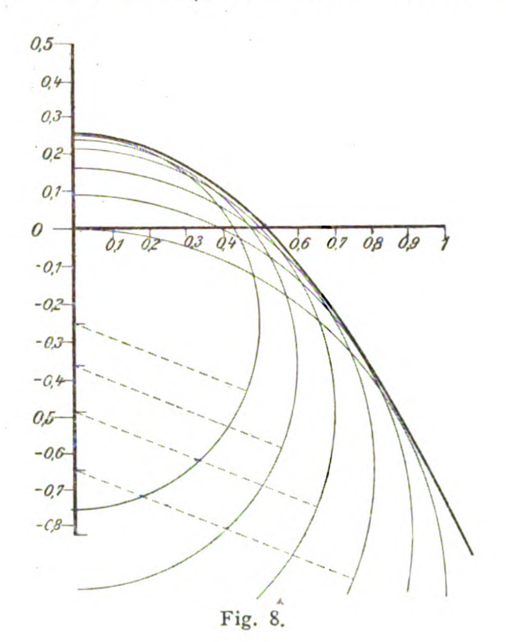


Fig. 8.

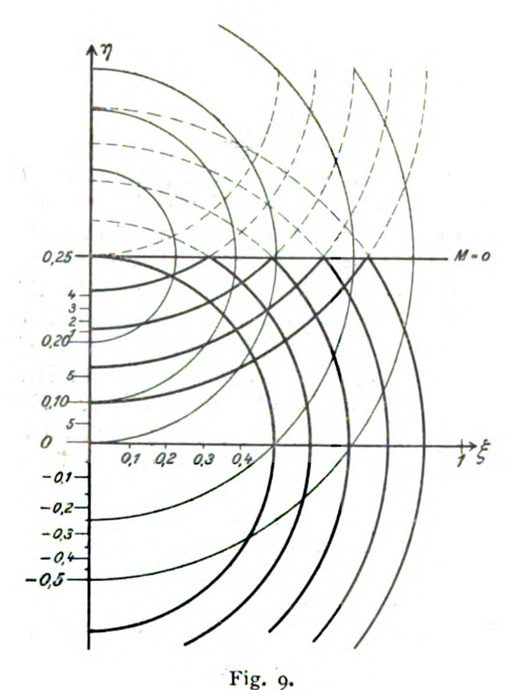


Fig. 9.

Kreis mit gleichem Radius, dessen Mittelpunkt im Nullpunkt liegt. Die Kreise bleiben bei der Abbildung in bezug auf ihre Größe invariant.

Die Zweideutigkeit der Abbildung soll noch auf folgende Weise erörtert werden:

Bewegt man sich auf irgendeiner der Parabeln (10) vom Anfangspunkt o aus, so heißen alle Punkte, die vor der Berührung mit der Umhüllenden liegen, **frühere** Punkte, alle Punkte, die hinter der Berührung mit der Umhüllenden liegen **spätere** Punkte. Jeder Punkt der Ebene E kann als Schnittpunkt zweier Parabeln (10) aufgefaßt werden, und zwar er-

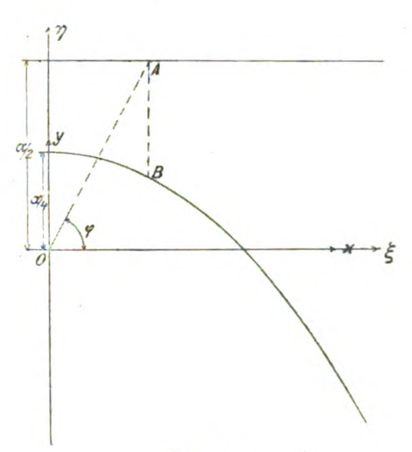


Fig. 10.

scheint er als früherer Punkt der einen und als späterer Punkt der anderen. (Z. B. ist der Punkt (0,43; 0) in Fig. 6 früherer Punkt der Parabel $\varphi = 30^0$ und späterer Punkt der Parabel $\varphi = 60^0$.)

Die Ebene E ist also als doppelt belegt anzusehen, und es ist leicht zu erkennen, daß die Abbildung die beiden Belegungen trennt,

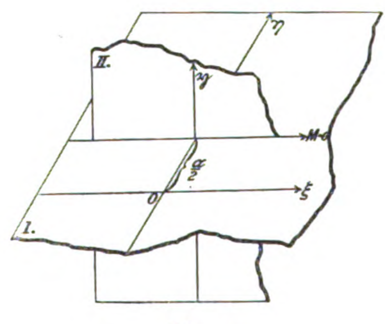


Fig. 11.

indem sie alle früheren Punkte im Gebiet $M > 0$, alle späteren Punkte im Gebiet $M < 0$ darstellt. Eine gleiche Betrachtung gilt für die Schar der Kreise (16).

Fig. 10 zeigt eine sich aus der Abbildung ergebende Konstruktion der Berührungspunkte zwischen Parabelschar und Umhüllungsparabel, wenn entweder die Umhüllende oder eine Wurfparabel gegeben ist.

Durch die Gleichungen (11) werden noch verschiedene interessante, für die Praxis aber weniger wichtige Beziehungen zwischen den Ebenen bewirkt, die hier keine Erwähnung finden sollen. Eine Erweiterung, die unter Umständen von Nutzen sein kann, möge nur kurz angedeutet werden:

Alle Punkte der (x, y) Ebene, die außerhalb der Parabel (15) liegen, bilden sich in imaginäre Punkte ab, die aber alle von der Form sind:

$$\xi = \text{reell}$$
$$\eta = \frac{a}{2} \pm i\mathfrak{y},$$

worin $\mathfrak{y}$ eine reelle Strecke bedeutet. Die imaginären Bilder kann man in einer reellen $(\xi, \mathfrak{y})$-

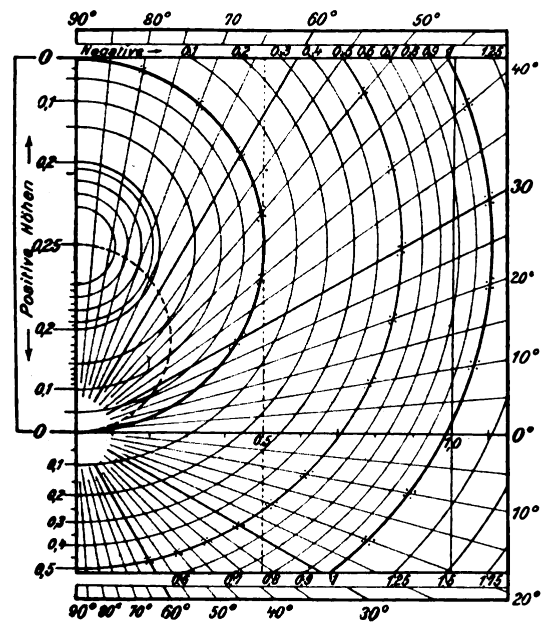


Fig. 12.

Ebene (II-Ebene) deuten, die die (ξ, η)-Ebene (I-Ebene) (unter beliebigem Winkel) in der Geraden $M = 0$ schneidet, wie es Fig. 11 zeigt. Soll jetzt eine Abbildung der gesamten (x, y)-Ebene auf die E-Ebene hergestellt werden, so genügt es, von der $(\xi, \mathfrak{y})$-Ebene nur den Teil $M > 0$ zu betrachten und die II-Ebene umzulegen, bis sie mit der I-Ebene sich deckt. Die in Fig. 7 gezeichneten Kreise setzen sich dann oberhalb $M = 0$ in Hyperbeln fort.

Zusammenfassung.

Nach einleitenden Sätzen über die graphische Darstellung wird eine neue Methode zur Herstellung von Rechentafeln angegeben. Jede darzustellende Beziehung $F(x, y, p) = 0$ wird im rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensystem (x, y) als Kurvenschar in bezug auf den Parameter p gedeutet. Diese (x, y)-Ebene wird auf eine (ξ, η)-Ebene abgebildet. Für den Fall der geometrischen Anamorphose ergibt sich dabei der wesentliche Vorteil, daß die Darstellung an die Wahl einer einzigen Funktion (u') geknüpft ist. Dies wird an den Beispielen der gebräuchlichen Multiplikationstafeln gezeigt. Die allgemeine Anamorphose wird durch eine neue Tafel der Wurfparabeln erläutert.

(Eingegangen 25. Dezember 1916.)

Kinetische Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit.

Von A. March.

I.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit chemischer Reaktionen sind rein thermodynamische Überlegungen nicht ausreichend, da die Zeit in die Gleichungen der Thermodynamik nicht eingeht und außerdem die Geschwindigkeit nicht bloß von der Natur der sich umsetzenden Körper, sondern auch noch von gewissen Reibungswiderständen abhängt, die der Thermodynamik nicht erfaßbar sind. Eine Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit ist also auf die Methoden der kinetischen Gastheorie angewiesen und hat die Thermodynamik nur dahin zu berücksichtigen, daß die für die beiden Geschwindigkeiten einer Reaktion gefundenen Temperaturfunktionen an der Gleichung der Reaktionsisochore nachzuprüfen sind. Geht nämlich die Reaktion nach dem Schema vor sich

$$\nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \ldots \rightarrow \nu_1' A_1' + \nu_2' A_2' + \ldots \quad (1)$$

d. h. setzen sich ν_1 Moleküle des Stoffes A_1 usw. um in ν_1' Moleküle des Stoffes A_1' usw., so ist die Geschwindigkeit des Vorganges in der Richtung nach rechts gegeben durch

$$-\frac{dc_1}{dt} = k c_1^{\nu_1} c_2^{\nu_2} \ldots - k' c_1'^{\nu_1'} c_2'^{\nu_2'} \ldots \quad (2)$$

und nach der Gleichung der Reaktionsisochore besteht zwischen den beiden Geschwindigkeitskoeffizienten k und k' die Beziehung

$$\frac{d\lg k}{dT} - \frac{d\lg k}{dT} = \frac{q}{RT^2} \ldots \quad (3)$$

wobei q die Wärmetönung und R die Gaskonstante bedeutet. Dieser Beziehung müssen die von der Theorie gefundenen Ausdrücke für k und k' genügen.

Wir beschränken uns auf gasförmige Systeme

und betrachten im folgenden stets den einfachen Fall unimolekularer Reaktionen, bei denen nur eine einzige Molekülart eine Konzentrationsänderung erfährt. Um an ein besonders einfaches Beispiel anzuknüpfen, denken wir uns den Fall eines dissoziablen Gases, das plötzlich aus einem Zustand sehr großen in einen solchen sehr kleinen Druckes versetzt wird. Im ersten Zustand soll der Druck so groß sein, daß das Gas nahezu undissoziiert ist, im zweiten so klein, daß fast vollkommene Dissoziation eintritt. Ist die Zahl der Dissoziationsprodukte gleich zwei, so geht die Reaktion nach der Gleichung vor sich

$$A \rightarrow A_1 + A_2 . \qquad (1')$$

Bedeutet c die Konzentration von A, c' die von A_1 und A_2, so ist

$$-\frac{dc}{dt} = kc - k'c'^2 . \qquad (2')$$

Ersetzen wir die Konzentration c durch die Zahl der Moleküle im cm^3 und bezeichnen diese Zahl mit n und n', so wird

$$-\frac{dn}{dt} = kn - k'n'^2 , \qquad (2'')$$

kn ist die Zahl der Moleküle A, die im cm^3 in der Zeiteinheit durch Dissoziation verschwinden, $k'n'^2$ die der Molekülpaare A_1 und A_2, die sich in der Sekunde wieder zu einem Molekül A zusammenschließen. Diese beiden Ausdrücke sind zu bestimmen. Dabei möge vorausgesetzt sein, daß der Zerfall der Moleküle lediglich durch die Wärmebewegung verursacht sei und daß beschleunigende Fremdkörper (Katalysatoren) nicht vorhanden sind.

Der Zustand eines Moleküls A sei bestimmt durch μ generalisierte, voneinander unabhängige Koordinaten und Momente $p_1\, p_2 \ldots p_\mu\, q_1\, q_2 \ldots q_\mu$. Mit V bezeichnen wir die Kraftfunktion der intramolekularen Kräfte, von denen angenommen sei, daß sie lineare Funktionen der $p_1 \ldots p_\mu$ sind; die Koordinaten können dann immer so gewählt werden, daß V eine homogene quadratische Funktion derselben wird, von der Form:

$$V = {}^1/_2 (\alpha_1 p_1^2 + \ldots + \alpha_\mu p_\mu^2) . \qquad (4)$$

Das undissoziierte Molekül kann nicht alle möglichen Zustände $p_1 \ldots q_\mu$ annehmen, da sonst Dissoziation niemals eintreten könnte. Gewisse Wertekombinationen der $p_1 \ldots q_\mu$ entsprechen also dem in seine Teile zerfallenen Molekül und der ganze 2μ dimensionale Zustandsraum zerfällt demnach in zwei Gebiete, von welchen der eine alle undissoziierten, der andere alle dissoziierten Zustände umfaßt, so daß immer Dissoziation eintritt, wenn der Zustandspunkt eines Moleküls aus dem ersten in das zweite Gebiet übertritt.

Es kommt jetzt darauf an, durch Zuhilfenahme gewisser Hypothesen die Trennungsfläche dieser beiden Gebiete zu bestimmen. Die Überlegungen nun, die zur Aufstellung einer solchen Hypothese führen, können kaum von einer andern Annahme ausgehen als der, daß die inneren Kräfte, durch welche die Atome des Moleküls zusammengehalten werden, nur auf gewisse Entfernungen reichen und plötzlich auf Null sinken, sobald diese Entfernungen überschritten werden. Ein Molekül z. B., das aus zwei Atomen zusammengesetzt ist, soll nur solange zusammenhalten, als die beiden Atome sich nicht über einen gewissen kritischen Abstand hinaus voneinander entfernen. Von den 6 Koordinaten des Moleküls sollen also 5 alle möglichen Werte annehmen können, während die sechste einen bestimmten Maximalwert nicht überschreiten darf. Die Verallgemeinerung dieses Falles führt zur Vorstellung, daß es beim Zerfall eines Moleküls auf gewisse Koordinaten ankommt, die der Kürze halber als „Bindungskoordinaten" bezeichnet seien und daß Dissoziation immer dann eintritt, wenn die Bindungskoordinaten $p_i, p_k \ldots$ gewisse kritische Werte $\bar{p}_i, \bar{p}_k \ldots$ überschreiten. Diese Hypothese soll den folgenden Berechnungen zugrunde gelegt werden.

Die vorhin erwähnte Trennungsfläche des Zustandsraumes ist also gegeben durch die Gleichungen $p_i = \bar{p}_i$, $p_k = \bar{p}_k \ldots$ Bei der absoluten Temperatur T entfällt auf jede Koordinate eine gewisse potentielle Energie im Durchschnittsbetrag von ${}^1/_2\, \alpha_i p_i^2 = {}^1/_2\, kT$, so daß der Durchschnittswert einer Koordinate $\sqrt{\frac{kT}{\alpha_i}}$ ist. Doch werden sich immer Moleküle finden, deren Bindungskoordinaten ihre Mittelwerte weit übersteigen und nahe den Grenzwerten $\bar{p}_i$. $\bar{p}_k$ usw. sind. Diese Moleküle, die wir die „gefährdeten" Moleküle nennen wollen, werden gesprengt werden, wenn die potentielle Energie ihrer Koordinaten noch um ein weniges gesteigert wird. Da mit zunehmender Temperatur die Moleküle immer näher an die kritische Grenzfläche gedrückt werden, so wird die Zahl der in der Zeiteinheit zerfallenden Moleküle rasch zunehmen.

2.

Berechnen wir jetzt unter den gemachten Voraussetzungen die Zahl der in der Sekunde im cm^3 dissoziierten Moleküle A. Der auf einen Freiheitsgrad eines Moleküls entfallende Betrag an potentieller Energie ist nicht konstant, sondern fortwährenden Schwankungen unterworfen,

so daß er bald ober- bald unterhalb des der Temperatur entsprechenden Mittelwertes liegt. Den Durchschnittswert aus den absoluten Beträgen dieser Schwankungen, denen die Energie eines Freiheitsgrades im Zeitelement dt unterliegt, bezeichnen wir mit $\overline{dE}$. Beschränken wir uns vorerst auf den Fall einer einzigen Bindungskoordinate, der wir den Index 1 geben, so können in der Zeit dt nur jene Moleküle sich dissoziieren, deren Energiebetrag $\frac{1}{2}\alpha_1 p_1^2$ zu Beginn des Zeitelements zwischen $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha_1 \overline{p}_1^2$ und $\varepsilon - \overline{dE}$ liegt; da die Schwankung ebensogut positiv wie negativ sein kann, wird die Hälfte dieser Moleküle zerstört werden.

Die Anzahl der Moleküle im cm^3, deren Koordinaten und Momente zwischen den Grenzen p_1 und $p_1 + dp_1, \ldots q_\mu$ und $q_\mu + dq_\mu$ liegen, ist

$$A\, e^{-\frac{E}{kT}} dp_1 \ldots dp_\mu\, dq_1 \ldots dq_\mu, \tag{5}$$

wobei E die gesamte Energie des Moleküls bezeichnet. Um die Zahl der gefährdeten Moleküle zu bestimmen, hat man diesen Ausdruck über alle möglichen Werte der $p_2 \ldots p_\mu\, q_1 \ldots q_\mu$ zu integrieren, das Integrationsgebiet von p_1 aber so zu wählen, daß $\frac{1}{2}\alpha_1 p_1^2$ zwischen $\varepsilon - \overline{dE}$ und ε liegt. Bezeichnen wir $\frac{1}{2}\alpha_1 p_1^2$ mit V_1, so ist

$$\alpha_1 p_1\, dp_1 = dV_1,$$

also

$$dp_1 = \frac{dV_1}{\alpha_1 p_1} = \frac{\overline{dE}}{\alpha_1 \overline{p}_1};$$

die Zahl dn der dissoziierten Moleküle wird also

$$dn = \frac{A}{2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \frac{\overline{dE}}{\alpha_1 \overline{p}_1} \int e^{-\frac{E'}{kT}} dp_2 \ldots dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu. \tag{6}$$

Dabei ist in E' von der Gesamtenergie die potentielle Energie des ersten Einheitsgrades abgezogen.

Die Gesamtzahl n der Moleküle im cm^3 ist

$$n = A \int_{-\overline{p}_1}^{+\overline{p}_1} e^{-\frac{\alpha_1 p_1^2}{2kT}} dp_1 \int e^{-\frac{E'}{kT}} dp_2 \ldots dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu \tag{7}$$

Somit wird

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = k = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot \frac{\overline{dE}}{dt}}{2\alpha_1 \overline{p}_1 \int_{-\overline{p}_1}^{+\overline{p}_1} e^{-\frac{\alpha_1 p_1^2}{2kT}} dp_1.}\quad ^{1)}$$

Im Nennerintegral benutzen wir

$$\sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}\, p_1$$

als Variable und bedenken, daß $\frac{1}{2}\alpha_1 \overline{p}_1^2 = \varepsilon$ einen sehr großen Wert hat, so daß

$$\int_{-\overline{p}_1\sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}}^{+\overline{p}_1\sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}} e^{-\frac{\alpha_1 p_1^2}{2kT}} \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}\, dp_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \sqrt{\pi k T}\cdot$$

Es wird also

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = k = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot \frac{\overline{dE}}{dt}}{2\sqrt{2\alpha_1}\,\overline{p}_1 \sqrt{\pi k T}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot \frac{\overline{dE}}{dt}\, T^{-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{\varepsilon \pi k}} \tag{8}$$

wegen

$$\overline{p}_1 = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha_1}}.$$

Es ist noch der Geschwindigkeitskoeffizient k' der entgegengesetzten Reaktion zu bestimmen. Von den Molekülen A_1 und A_2 ist die Anzahl derjenigen Paare zu berechnen, die sich innerhalb dt zu einem Molekül A vereinigen. Die Anzahl dieser Paare bezeichnen wir mit dn', während n' die Gesamtzahl der überhaupt im cm^3 vorhandenen Paare bedeuten soll. Wir fassen jedes der Moleküle A_1 mit jedem der Moleküle A_2 zusammen und erhalten n'^2 Paare. Jedes dieser Paare kann aufgefaßt werden als ein Molekül A, dessen Bindungskoordinate $p_1 > \overline{p}_1$, so daß nach Voraussetzung die chemische Anziehungskraft nur mehr sehr kleine Werte hat. Die potentielle Energie des ersten Freiheitsgrades ändert sich also für $p_1 > \overline{p}_1$ nur mehr wenig und kann für alle Werte von p_1 gleich ε gesetzt werden. Mit $\overline{dp}_1$ bezeichnen wir die durchschnittliche absolute Änderung von p_1 im Zeitelement dt; da die Anziehungskraft noch immer eine lineare Funktion von p_1 sein soll, ist $\overline{dp}_1$ proportional $\overline{dE}$, also

$$\overline{dp}_1 = \beta \cdot \overline{dE}.$$

In der Zeit dt werden sich nun die Hälfte jener Molekülpaare (A_1, A_2) vereinigen, deren Bindungskoordinate zwischen $\overline{p}_1$ und $\overline{p}_1 + dp_1$ liegt. Das sind

$$dn' = \tfrac{1}{2} A' e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot dp_1 \int e^{-\frac{E'}{kT}} dp_2 \ldots dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu. \tag{9}$$

Die Anzahl der gesamten Molekülpaare ist

$$n'^2 = A' \int_{\overline{p}_1}^{p_1 \max} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} dp_1 \int e^{-\frac{E'}{kT}} dp_2 \ldots dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu, \tag{10}$$

wenn mit $p_1^{\max}$ der größte innerhalb des ge-

---

1) Der Buchstabe k bedeutet das eine Mal den Geschwindigkeitskoeffizienten, das andere Mal die Boltzmannsche Konstante.

gebenen Raumes erreichbare Wert von p_1 bezeichnet wird. Es wird also

$$\frac{dn'}{n'^2 dt} = k' = {}^1/_2 \frac{\overline{\frac{dp_1}{dt}}_{max}}{\int\limits_{\bar{p}_1} dp_1} = \frac{\overline{dE}}{dt} \cdot \text{const.} \tag{11}$$

3.

Die gefundenen Ausdrücke sind jetzt an der Gleichung der Reaktionsisochore auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Es muß werden

$$\frac{d \lg \frac{k}{k'}}{dT} = \frac{q}{RT^2}$$

wobei q die Wärmetönung der Dissoziation bezogen auf ein Grammolekül bedeutet.

Beim absoluten Nullpunkt ist ε die Arbeit, die bei der Dissoziation gegen die chemische Anziehungskraft geleistet werden muß. Der Wärmeinhalt des undissoziierten und des dissoziierten Moleküls A bei der absoluten Temperatur T ergibt sich aus der Überlegung, daß beim Zerfall des Moleküls die Anzahl der Freiheitsgrade zwar nicht geändert wird, daß aber im dissoziierten Molekül auf den ersten Freiheitsgrad keine potentielle Energie entfällt. Der Energieinhalt von A_1 und A_2 zusammen ist also um ${}^1/_2 kT$ kleiner als der von A. Das aus zwei gegeneinander beweglichen Atomen zusammengesetzte Molekül z. B. hat einen Wärmeinhalt von ${}^7/_2 kT$; ${}^3/_2 kT$ entfallen auf die kinetische Energie des Schwerpunktes, ${}^2/_2 kT$ auf die Bewegung der Achse und weitere ${}^2/_2 kT$ auf die kinetische und potentielle Energie des Atomabstandes. Im dissoziierten Zustand aber ist der Wärmeinhalt nurmehr ${}^6/_2 kT$. Bezeichnen W und W' den Wärmeinhalt von A und $A_1 + A_2$, so ist

$$\frac{q}{N} = -W + \varepsilon + W' \tag{12}$$

$$W = W' + {}^1/_2 kT \quad \text{und wegen}$$

$$\frac{q}{N} = \varepsilon - {}^1/_2 kT$$

oder

$$q = N\varepsilon - {}^1/_2 RT. \tag{13}$$

Es muß also werden

$$\frac{d \lg \frac{k}{k'}}{dT} = \frac{N\varepsilon - {}^1/_2 RT}{RT^2}.$$

In der Tat ist nach (8) und (11)

$$\frac{k}{k'} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} T^{-1/2} \cdot \text{const}$$

also

$$\lg \frac{k}{k'} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} - {}^1/_2 \lg T + \lg \text{const}$$

und

$$\frac{d \lg \frac{k}{k'}}{dt} = \frac{\varepsilon}{kT^2} - \frac{1}{2T} = \frac{N\varepsilon - {}^1/_2 RT}{RT^2}.$$

Es ist unschwer die Rechnung für den Fall zweier oder mehrerer Bindungen zu verallgemeinern. Ist die Zahl der Bindungen gleich zwei, so müssen im Augenblick der Dissoziation entweder gleichzeitig $p_1 = \bar{p}_1$ und $p_2 = \bar{p}_2$ sein, oder $p_1 = \bar{p}$ und $p_2 > \bar{p}_2$ oder $p_1 > \bar{p}_1$ und $p_2 = \bar{p}_2$. Die Anzahl der Dissoziationen der ersten Art während des Zeitelements dt ist unendlich klein von zweiter Ordnung, die der übrigen aber beträgt

$$dn = \frac{A}{2} e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} \frac{\overline{dE}}{\alpha_1 \bar{p}_1} \int\limits_{\bar{p}_2}^{p_2 \max} e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}} dp_2 \int e^{-\frac{E''}{kT}} dp_3 \ldots dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu + \frac{A}{2} e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}} \frac{\overline{dE}}{\alpha_2 \bar{p}_2} \int\limits_{\bar{p}_1}^{p_1 \max} e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} dp_1 \int e^{-\frac{E''}{kT}} dp_3 \ldots dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu.$$

In E'' ist von der Gesamtenergie die potentielle Energie der beiden ersten Freiheitsgrade abgezogen. Führen wir die Abkürzungen ein:

$$\int\limits_{\bar{p}_1}^{p_1 \max} dp_1 = c_1$$

und

$$\int\limits_{\bar{p}_2}^{p_2 \max} dp_2 = c_2,$$

so wird

$$dn = \frac{A}{2} e^{-\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{kT}} \overline{dE} \cdot \left(\frac{c_2}{\alpha_1 \bar{p}_1} + \frac{c_1}{\alpha_2 \bar{p}_2} \right) \int e^{-\frac{E''}{kT}} dp_3 \ldots dp_\mu dq_1 \ldots dq_\mu. \tag{14}$$

Für die undissoziierten Moleküle ist entweder gleichzeitig $p_1 < \bar{p}_1$ und $p_2 < \bar{p}_2$ oder es ist nur eine der beiden Koordinaten kleiner als der kritische Wert. Die Gesamtzahl der undissoziierten Moleküle setzt sich also aus drei Teilen zusammen und beträgt

$$n = A \left\{ \int\limits_{-\bar{p}_1}^{+\bar{p}_1} e^{-\frac{\alpha_1 p_1^2}{2kT}} dp_1 \cdot \int\limits_{-\bar{p}_2}^{+\bar{p}_2} e^{-\frac{\alpha_2 p_2^2}{2kT}} dp_2 + \int\limits_{-\bar{p}_1}^{+\bar{p}_1} e^{-\frac{\alpha_1 p_1^2}{2kp}} dp_1 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_2}{ki}} \cdot c_2 + \int\limits_{-\bar{p}_2}^{+\bar{p}_2} e^{-\frac{\alpha_2 p_2^2}{2kT}} dp_2 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} \cdot c_1 \right\}.$$

$$\int e^{-\frac{E'}{kT}}\, dp_3 \ldots dp_\mu\, dq_1 \ldots dq_\mu$$

oder

$$n = A\left\{\frac{2}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\,\pi k T + \sqrt{\frac{2}{\alpha_1}\,\pi k T}\cdot e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}}\cdot c_2 + \sqrt{\frac{2}{\alpha_2}\,\pi k T}\cdot e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}\cdot c_1\right\}\int e^{-\frac{E''}{kT}}\, dp_3 \ldots dp_\mu\, dq_1 \ldots dq_\mu \tag{15}$$

Da die ε immer sehr groß sind, so kann in diesem Ausdruck das zweite und dritte Glied gegenüber dem ersten vernachlässigt werden, so daß

$$n = A\,\frac{2}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\,\pi k T \int e^{-\frac{E}{kT}}\, dp_3 \ldots dp_\mu\, dq_1 \ldots dq_\mu$$

und

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = k = \frac{1}{4}\, e^{-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{kT}}\cdot\frac{dE}{dt}\,\frac{\frac{c_2}{\alpha_1\bar{p}_1}+\frac{c_1}{\alpha_2\bar{p}_2}}{\pi k T}\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$$

$$= e^{-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{kT}}\,\frac{dE}{dt}\cdot T^{-1}\cdot \text{const} \tag{16}$$

für k' aber ergibt sich, wie man sich leicht überzeugt, ein Ausdruck, der proportional ist $\frac{dE}{dt}$ und die Temperatur nicht enthält. Es wird also

$$\frac{k}{k'} = e^{-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{kT}}\, T^{-1}\cdot \text{const};$$

und

$$\frac{d \lg \frac{k}{k'}}{dt} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{kT^2} - \frac{1}{T} = \frac{N(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - RT}{RT^2}. \tag{17}$$

Da für den Fall zweier Bindungen die Wärmetönung gleich $N(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - RT$ ist, so ist also wiederum die Gleichung der Reaktionsisochore erfüllt. —

Vergleichen wir noch die gefundenen Ausdrücke mit den Formeln, die im Anschluß an die Thermodynamik für den Geschwindigkeitskoeffizienten k vorgeschlagen wurden. Arrhenius setzte

$$\frac{d\lg k}{dT} = \frac{A}{T^2}$$

van 't Hoff

$$\frac{d\lg k}{dT} = \frac{A}{T^2} + B$$

und Kooy

$$\frac{d\lg k}{dT} = \frac{A}{T^2} + \frac{B}{T},$$

wobei A, B, C Konstante bedeuten. Nach (8) und (16) ist:

$$\frac{d\lg k}{dT} = \frac{A}{T^2} + \frac{B}{T} + \frac{d\lg\frac{dE}{dt}}{dT}$$

ein Ausdruck, der für $\frac{dE}{dt} = \text{const}$ in die Formel von Kooy übergeht.

4.

Man hat sich vielfach an die Auffassung gewöhnt, die Geschwindigkeit einer chemischen Reaktion werde durch die treibende Kraft der Affinität hervorgebracht, der ein gewisser nicht weiter erfaßbarer „chemischer Widerstand" entgegenwirke und hat demnach die Geschwindigkeit durch den Quotienten aus Affinität und Widerstand darzustellen versucht. Eine solche Auffassung ist nur bei kondensierten Systemen berechtigt, nämlich dann, wenn der Prozeß an sich mit unendlich großer Geschwindigkeit verläuft und nur durch Reibungswiderstände verlangsamt wird. Keineswegs darf aber die Meinung entstehen, daß eine solche Darstellungsweise allgemein berechtigt wäre; bei gasförmigen Systemen kann von irgendeinem Widerstand nicht gesprochen werden, ohne daß deshalb die Reaktionsgeschwindigkeit unendlich werden muß.

Nach der in Nr. 1 aufgestellten Hypothese tritt Zerfall eines Moleküls mit einer Bindung immer dann ein, wenn $p_1 = \bar{p}_1$ wird. Da nun bei der absoluten Temperatur T der Mittelwert von p_1 gegeben ist durch $\frac{1}{2}\alpha_1 p_1^2 = \frac{1}{2}kT$, so folgt, daß es eine Temperatur T_0 geben muß, für welche der Durchschnittswert von $p_1 = \bar{p}_1$ ist, bei der also ein Zusammenhalt der Moleküle nicht mehr möglich ist. Diese kritische Temperatur ergibt sich aus $kT_0 = \alpha_1\bar{p}_1^2 = 2\varepsilon$. Es existiert also für jede Verbindung eine kritische Temperatur T_0, oberhalb welcher die Verbindung bei keinem noch so starken Druck existenzfähig ist.

Nehmen wir, um von der Höhe dieser kritischen Temperaturen eine Schätzung zu erhalten, als einfaches Beispiel die Reaktion $K + J = KJ$. Die Wärmetönung dieser Reaktion ist ungefähr 80000 Kal. pro Gramm Molekül KJ. Um ε zu finden, hätten wir an dieser Zahl nach (13) eine Korrektur anzubringen, die aber gegenüber der großen Zahl nicht ins Gewicht fällt. Für T_0 ergibt sich also $RT_0 = 2.80000$ oder $T_0 = 80000^0$.

Man schätzt die Temperatur der heißesten Heliumsterne auf etwa 25000^0. Sie würde also noch keineswegs hinreichen, um die Existenz von Verbindungen auf der Oberfläche des Sternes unmöglich zu machen. Doch mögen im Innern der Sterne Temperaturen bestehen, bei denen Verbindungen auch unter den dort herrschenden ungeheuren Drucken nicht mehr existenzfähig sind.

5.

Über die durchschnittliche Energieänderung $\frac{d\overline{\dot{E}}}{dt}$ sind ohne Zuhilfenahme spezieller Hypothesen keine bestimmten Aussagen möglich. Bei photochemischen Prozessen wird durch die Einwirkung des Lichtes dE vergrößert, indem das Molekül aus der umgebenden Lichtstrahlung durch Resonanz Energie aufnimmt und dadurch in seinem Zerfall gefördert wird. Vielleicht daß auch bei gewissen Arten von katalytischen Vorgängen eine ähnliche Auffassung möglich ist, nämlich jenen, bei welchen Ionen, insbesondere Wasserstoffionen auf die Geschwindigkeit eines Prozesses beschleunigend einwirken. Es seien im folgenden die Überlegungen, die man für eine solche Vermutung vorbringen könnte, angedeutet.

Denken wir uns, um eine zweckmäßig vereinfachte Vorstellung zu gewinnen, die (elektrische) Bindung des Moleküls, auf deren Zerreißung es ankomme, ersetzt durch einen Resonator, bestehend aus zwei entgegengesetzt geladenen Polen; die Eigenfrequenz des Resonators sei mit ν_0 bezeichnet und der Resonator möge die Eigenschaft haben, daß seine potentielle Energie den kritischen Betrag ε nicht überschreiten kann, ohne in seine Pole zu zerfallen. Dieser Resonator wird sich mit der umgebenden Strahlung ins Gleichgewicht setzen und dabei einen von der Intensität dieser Strahlung abhängigen Mittelwert von Energie annehmen; denn der Resonator wird fortwährend Energie absorbieren und gleichzeitig durch Ausstrahlung wieder verlieren, so daß die Energie um einen gewissen Mittelwert hin- und herschwankt. Dieser Mittelwert wird, falls nur Wärmestrahlung vorhanden ist, lediglich von der Temperatur abhängen.

Es seien jetzt Ionen mit einer gewissen Konzentration vorhanden. Dann wird das Molekül bei jedem Zusammenstoß mit einem Ion in ein starkes elektrisches Feld geraten und die in die Achse des Resonators fallende Komponente der elektrischen Feldstärke wird positive oder negative Arbeit leisten. Bezeichnen wir diese Komponente mit X, so wird sich X in höchst unregelmäßiger Weise mit der Zeit ändern. Aber wie unregelmäßig auch immer dieser Wechsel stattfinden möge, stets kann man nach Fourier X als zusammengesetzt ansehen aus einer sehr großen Zahl von regelmäßigen Sinus- und Cosinus-Schwingungen, so daß

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n t}{\tau} + b_n \sin\frac{2\pi n t}{\tau}, \tag{18}$$

wobei über alle positiven ganzen Zahlen von n zu summieren ist und die Konstanten a_n und b_n sich von Glied zu Glied beliebig ändern. Quadriert man (18) und bildet den Mittelwert von X^2 durch Integration über einen großen Zeitraum, so wird

$$\overline{X^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{19}$$

Nun ist aber X^2 immer dann von Null verschieden, solange sich der Resonator im Wirkungsbereich des Ions befindet; also bei jedem Zusammenstoß durchschnittlich eine gewisse Zeit Δt. In der Zeit zwischen zwei Zusammenstößen ist X^2 gleich Null. Bedeutet $\overline{(X^2)}$ den Mittelwert von X^2 innerhalb des Anziehungsbereiches, so ist demnach

$$\overline{X^2} = \frac{N \cdot \overline{(X^2)} \cdot \Delta t}{\mathfrak{T}} \tag{20}$$

wenn mit N die Zahl der Zusammenstöße innerhalb der großen Zeit $\mathfrak{T}$ bezeichnet wird. Sind c und c' die Konzentrationen von Molekül und Ion, so ist N und demnach auch $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ proportional dem Produkt $c \cdot c'$.

Aus der Zerlegbarkeit der Kraft X in eine Fouriersche Reihe folgt eine Resonanzwirkung des beständig sich ändernden elektrischen Feldes auf das Molekül. Nehmen wir die Bindung des Moleküls von quasielastischer Art an, so ist die Energie des Oszillators gegeben durch einen Ausdruck von der Form

$$\tfrac{1}{2} L x^2 + \tfrac{1}{2} K \dot{x}^2, \tag{21}$$

wenn mit x die Entfernung der schwingenden Pole voneinander bezeichnet wird. Die Eigenschwingungszahl des Oszillators ist dann gegeben durch

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{L}}.$$

Die Wirkung der Kraft X besteht in

$$X\,dx = Lx\,dx + K\ddot{x}\,dx$$

oder

$$X = Lx + K\ddot{x} = \sum_1^{\infty}{}' \left(a_n \cos 2\pi n \frac{t}{\tau} + b_n \sin 2\pi n \frac{t}{\tau}\right) \tag{23}$$

die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$x = \sum \frac{a_n}{L\,4\pi^2\left(\nu_0^2 - \frac{n^2}{\tau^2}\right)}\left(\cos 2\pi \frac{nt}{\tau} - \cos 2\pi\nu_0 t\right) \tag{24}$$

$$+ \frac{b_n}{L\,4\pi^2\left(\nu_0^2 - \frac{n^2}{\tau^2}\right)}\left(\sin 2\pi n \frac{t}{\tau} - \frac{n}{\tau\nu_0}\sin 2\pi\nu_0 t\right).$$

Es treten also in erster Linie jene Glieder von (18) in Wirksamkeit, deren Frequenz $2\pi\frac{n}{\tau}$ nahe mit der Eigenfrequenz des Resonators übereinstimmen. Aus der Theorie der Resonanz ergibt sich nun für die hervorgerufene Änderungsgeschwindigkeit der Energie $\frac{dE}{dt}$ ein Ausdruck, der proportional ist $a_0^2 + b_0^2$, wenn a_0^2 und b_0^2 die Mittelwerte seiner a_n^2 und b_n^2 bedeuten, deren zugehörige Frequenzen in der Nachbarschaft der Eigenfrequenzen des Resonators liegen.

Nach dem Frühern ist $\Sigma a_n^2 + b_n^2$ proportional der Zahl der Zusammenstöße. Daraus ist freilich noch nicht zu schließen, daß auch $a_0^2 + b_0^2$ dieser Zahl proportional sein muß; denn es ist durch die Zahl der Zusammenstöße selbst eine gewisse Periodizität gegeben, wodurch unter den a_n und b_n gewisse Werte ausgezeichnet werden. Diese ausgezeichneten Werte verschieben sich mit zunehmender Zahl der Zusammenstöße nach der Seite der größeren Frequenzen. Man kann aber annehmen, daß die Eigenfrequenzen eines Moleküls so groß sind, daß sie von dieser Änderung nicht betroffen werden; denn offenbar ist die Zahl der Eigenschwingungen des Moleküls in den weitaus meisten Fällen viel größer als die der Zusammenstöße. Dann wird aber $a_0^2 + b_0^2$ proportional der Konzentration c' der Ionen.

Ist $\frac{d\overline{E}}{dt}$ ohne Vorhandensein von Ionen verschwindend klein, so wird also

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = a \cdot c'$$

und die Anzahl dn der dissoziierten Moleküle wird im Falle einer einzigen Bindung nach (8)

$$dn = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} T^{-1/2} \cdot c' \cdot \text{const.}, \qquad (25)$$

also proportional der Anzahl der Ionen.

(Eingegangen 15. Januar 1917.)

Fragen der Pyro- und Piezoelektrizität der Kristalle. III. Über die experimentelle Bestimmung der permanenten zentrisch-symmetrischen Momente.

Von W. Voigt.

1. In zwei früheren Arbeiten[1]) habe ich Erscheinungen besprochen, die bei Kristallen, deren Volumenelemente elektrische Momente zweiter Ordnung (von zentrischer Symmetrie also) besitzen, auftreten können, wenn dieselben Temperaturänderungen oder Deformationen unterworfen werden. Ich habe dabei auch über meine älteren Versuche berichtet, die jene zentrisch-symmetrischen pyro- und piezoelektrischen Erregungen als wirklich vorkommend erwiesen zu haben scheinen. Die Vergleichung der zentrischen mit den früher allein untersuchten azentrischen oder polaren Erregungen ließ manche auffallenden Gegensätze hervortreten; ein besonderes Interesse erweckte von diesen der folgende.

Die zentrische, wie die azentrische elektrische Erregung geschieht auf eine doppelte Weise. Im ursprünglichen (homogenen) Zustande sind die inneren elementaren oder molekularen Momente durch eine auf dem Kristall influenzierte Oberflächenladung bezüglich ihrer Wirkung kompensiert. Bei der thermischen oder mechanischen Deformation ändern sich rein geometrisch die Verhältnisse derartig, daß jene Kompensation nicht länger erhalten bleibt, und die innern Momente wirksam werden. Daneben tritt aber durch die genannten Einwirkungen auch noch eine physikalische Änderung jener innern Momente ein, deren Effekt sich dem ersteren superponiert.

Es entsteht die Frage, die namentlich gegenüber der modernen Theorie der Kristallstruktur Wichtigkeit gewinnt, ob es möglich ist, durch die Beobachtung von pyro- oder piezoelektrischen Erscheinungen die beiden Vorgänge zu trennen, insbesondere, ob es möglich ist, auf eine solche Weise Schlüsse auf die Art und Größe der ursprünglichen oder dauernden molekularen Momente zu ziehen. Die in der zweiten zitierten Arbeit mitgeteilte Berechnung ergab, daß dies bei den azentrischen oder polaren Vorgängen nicht angeht, daß bei ihnen vielmehr beide Wirkungen dieselben formalen Gesetze befolgen, — daß demgemäß ihre Parameter immer in gleicher Weise kombiniert auftreten und sich somit durch die Beobachtung nicht trennen lassen. Die Untersuchung ergab aber weiter, daß die zentrischen Erregungen sich in der genannten Richtung anders verhalten, daß hier nämlich die Trennung beider Vorgänge prinzipiell möglich erscheint, wenn dies auch keineswegs bei jeder Art der Deformation ausführbar ist. Es blieb a. a. O. schließlich vorbehalten, bei bestimmten, sowohl der Theorie als der Beobachtung zugänglichen Anordnungen diese Verhältnisse im einzelnen aufzuklären.

Einen Schritt in der hiermit bezeichneten Richtung will die nachstehende Untersuchung tun. Nachdem in der vorigen Arbeit gezeigt

1) W. Voigt, diese Zeitschr. 17, 287 u. 307, 1916.

war, daß der (einfachste) Fall eines homogen deformierten Kristallpräparates zu einer Trennung der beiden Effekte nicht führt, sind hier die bez. Rechnungen für den Fall der längs der Achse gleichförmigen Biegung oder Drillung eines Kreiszylinders durchgeführt, wobei der Zylinder aus einem beliebigen Kristall in beliebiger Orientierung herausgeschnitten zu denken ist. Dieser Fall zeichnet sich dadurch aus, daß für ihn nicht nur das elastische Problem einfach zu lösen ist, sondern daß auch das Potential der durch die bez. Deformation bewirkten elektrischen Erregung einfach und relativ streng berechnet werden kann. Mit letzterem hängt dann auch die leichte Ermittelbarkeit der Dichte der kompensierenden Oberflächenschicht im ursprünglichen und im deformierten Zustande zusammen. Das Problem hat also eine Reihe von günstigen Eigenschaften, die es der Bearbeitung empfehlen. Es wird sich zeigen, daß die behandelten Deformationen und elektrischen Erregungen zu denen gehören, welche Rückschlüsse auf die permanenten Momente der Kristalle gestatten.

2. Die Achse des Kreiszylinders sei zur Z-Achse gewählt; sie, wie die X- und die Y-Achse seien beliebig gegen den Kristall orientiert. „Gleichförmig längs der Z-Achse deformiert“ nennen wir den Zylinder, wenn die Deformations- und Spannungskomponenten nicht von z abhängen. Solche Zustände treten durch Einwirkungen ein, die nur allein auf die Grundflächen des Zylinders ausgeübt werden; es sind von ihnen drei Gattungen zu unterscheiden: 1. eine Längsdehnung, bewirkt durch eine normale Zugkraft, 2. eine Biegung, bewirkt durch ein Drehungsmoment um eine Querrichtung, 3. eine Drillung, bewirkt durch ein Moment um die Längsachse des Zylinders. (Im allgemeinen rufen übrigens die Momente der ersten Art neben der Biegung sekundär eine geringe Drillung, diejenigen zweiter Art neben der Drillung sekundär eine geringe Biegung hervor.) Nur Biegung und Drillung kommen für uns hier in Betracht; die Längsdehnung fällt unter die oben erwähnte speziellere homogene Deformation, die bereits in der vorigen Arbeit erledigt worden ist.

Die allgemeinen Ansätze für die Verrückungskomponenten u, v, w, der Punkte des Zylinders, welche von z unabhängige Deformationen liefern, lauten:[1])

$$\begin{aligned} u &= U + z(f_1 - hy) - \tfrac{1}{2} z^2 g_1, \\ v &= V + z(f_2 + hx) - \tfrac{1}{2} z^2 g_2, \\ w &= W + z(g_1 x + g_2 y + g_3). \end{aligned} \qquad (1)$$

1) W. Voigt, Gött. Abh. 1887 S. 56; Kristallphysik, Leipzig u. Berlin 1910, S. 622.

In ihnen stellt h die spezifische Drillung um die Z-Achse dar, g_1 und g_2 sind die reziproken Krümmungsradien der Projektionen der materiellen Linie, die ursprünglich in der Z-Achse lag, auf die XZ- und YZ-Ebene; g_3 mißt die Längsdilatation dieser materiellen Linie und verschwindet in den uns allein interessierenden Fällen der gleichförmigen Biegung oder Drillung. U, V, W stellen Funktionen von x und y allein dar, die im Falle eines kreisförmigen Querschnittes und gleichförmiger Biegung oder Drillung vom zweiten Grade sind. Die Konstanten f_1 und f_2 bestimmen sich aus den Befestigungsbedingungen, und gleiches gilt für einen Teil der Parameter von U, V, W.

Als Befestigungsbedingungen wählen wir, daß für $x = y = z = 0$ gelten soll

$$\begin{aligned} &u = v = w = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Die erste Bedingung hält den Punkt, der anfangs in den Koordinatenanfang fiel, an seiner Stelle fest, die zweite verhindert eine Drehung des dem Koordinatenanfang benachbarten Raumelementes des Zylinders um die Z-Achse, die dritte fordert die Erhaltung der Richtung des ebenda liegenden Elementes der ursprünglich in die Z-Achse fallenden materiellen Linie.

Diese Bedingungen ergeben die Beziehungen, daß für $x = y = 0$

$$U = V = W = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad (3)$$

sein muß; dazu

$$f_1 = f_2 = 0.$$

Für die Deformationsgrößen folgen nunmehr die Ausdrücke

$$\begin{aligned} &x_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad z_z = g_1 x + g_2 y, \\ &y_z = \frac{\partial W}{\partial y} + hx, \quad z_x = \frac{\partial W}{\partial x} - hy, \\ &x_y = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}; \end{aligned} \qquad (4)$$

ferner für die Drehungen um die Koordinatenachsen die Werte

$$\begin{aligned} \lambda &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial y} + g_2 z - \tfrac{1}{2} hx, \\ \mu &= -\tfrac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial x} - g_1 z - \tfrac{1}{2} hy, \\ \nu &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + hz. \end{aligned} \qquad (5)$$

Setzen wir an

$$
\begin{aligned}
U &= {}^1/_2\, a_1 x^2 + b_1 xy + {}^1/_2\, c_1 y^2,\\
V &= {}^1/_2\, a_2 x^2 + b_2 xy + {}^1/_2\, c_2 y^2,\\
W &= {}^1/_2\, a_3 x^2 + b_3 xy + {}^1/_2\, c_3 y^2,
\end{aligned} \tag{6}
$$

so sind damit die Beziehungen (3) identisch erfüllt. Bezeichnet man die 21 Elastizitätsmoduln des Kristalles mit s_{hk}, so folgt aus den allgemeinen elastischen Grundformeln für den Fall der Einwirkung von Drehungsmomenten L, M, N um die Koordinatenachsen auf die positive Endfläche des Kreiszylinders das System von Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
a_1 Q\varkappa^2 &= -s_{13}M + {}^1/_2 s_{14}N,\\
b_2 Q\varkappa^2 &= -s_{23}M + {}^1/_2 s_{24}N,\\
g_1 Q\varkappa^2 &= -s_{33}M + {}^1/_2 s_{34}N;\\
b_1 Q\varkappa^2 &= +s_{13}L - {}^1/_2 s_{15}N,\\
c_2 Q\varkappa^2 &= +s_{23}L - {}^1/_2 s_{25}N,\\
g_2 Q\varkappa^2 &= +s_{33}L - {}^1/_2 s_{35}N;\\
(b_3+h) Q\varkappa^2 &= -s_{43}M + {}^1/_2 s_{44}N,\\
a_3 Q\varkappa^2 &= -s_{53}M + {}^1/_2 s_{54}N,\\
(b_1+a_2) Q\varkappa^2 &= -s_{63}M + {}^1/_2 s_{64}N,\\
c_3 Q\varkappa^2 &= +s_{43}L - {}^1/_2 s_{45}N,\\
(b_3-h) Q\varkappa^2 &= +s_{53}L - {}^1/_2 s_{55}N,\\
(c_1+b_2) Q\varkappa^2 &= +s_{63}L - {}^1/_2 s_{65}N.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Dabei stellt $Q\varkappa^2$ das Trägheitsmoment des Zylinderquerschnittes um einen Durchmesser dar, ist also beim Kreis vom Radius R speziell

$$= {}^1/_4\, \pi R^4.$$

Durch das System (7) sind alle 12 Parameter a_h, b_h, c_h und g_1, g_2, h durch die auf den Zylinder ausgeübten Momente bestimmt. Die Ausdrücke (4) und (5) werden jetzt zu

$$
\begin{aligned}
&x_x = a_1 x + b_1 y,\ y_y = b_2 x + c_2 y,\ z_z = g_1 x + g_2 y,\\
&y_z = (b_3+h)x + c_3 y,\ z_x = a_3 x + (b_3-h)y,\\
&x_y = (a_2+b_1)x + (b_2+c_1)y;
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda &= {}^1/_2 (b_3-h)\, x + {}^1/_2\, c_3 y + g_2 z,\\
\mu &= -{}^1/_2\, a_3 x - {}^1/_2 (b_3+h)\, y - g_1 z,\\
\nu &= {}^1/_2 (a_2-b_1)\, x + {}^1/_2 (b_2-c_1)\, y + hz.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Die Drillungswinkel λ, μ, ν enthalten also mit z proportionale, aber von x und y unabhängige Terme, was für das Folgende bedeutungsvoll ist.

Die räumliche Dilatation δ ist definiert durch

$$\delta = x_x + y_y + z_z, \tag{10}$$

die lineäre Dilatation Δ in einer durch die Richtungskosinus α, β, γ bestimmten Richtung durch

$$\Delta = x_x\alpha^2 + y_y\beta^2 + z_z\gamma^2 + y_z\beta\gamma + z_x\gamma\alpha + x_y\alpha\beta. \tag{11}$$

Die Flächendilatation ϑ normal zur Richtung α, β, γ ist allgemein gegeben durch

$$\vartheta = \delta - \Delta; \tag{12}$$

handelt es sich nur um Richtungen, für die $\gamma = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ist, so wird spezieller

$$\vartheta = x_x\beta^2 + y_y\alpha^2 + z_z - x_y\alpha\beta. \tag{13}$$

Hiermit sind die Beziehungen der Elastizitätstheorie, auf die wir uns zu stützen haben, für unser Problem zusammengestellt.

3. Bezeichnet wieder allgemein Π das Tensortripel der Momente zweiten Grades der Volumeneinheit, dann ist nach früherem die Potentialfunktion ψ eines mit derartigen Momenten behafteten Körpers gegeben durch

$$\psi = \int\left(\Pi \cdot \operatorname{grad}^2 \frac{1}{r}\right) dk, \tag{14}$$

ein Ausdruck, der durch ein- bzw. zweimalige teilweise Integration auf die Formen

$$\psi = \int\left([\Pi \cdot \mathfrak{n}] \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) do - \int\left(\operatorname{div} \Pi \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) dk \tag{15}$$

und

$$\psi = \int\left([\Pi \cdot \mathfrak{n}] \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) do - \int \operatorname{div}_n \Pi \frac{do}{r} + \int \operatorname{div}^2 \Pi \frac{dk}{r} \tag{16}$$

gebracht werden kann. Dabei bezeichnet $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor in der Richtung der äußern Normalen n auf do; es sind also

$$\mathfrak{n}_x = \alpha,\ \mathfrak{n}_y = \beta,\ \mathfrak{n}_z = \gamma \tag{17}$$

die Richtungskosinus von n.

Weiter sind $[\Pi \cdot \mathfrak{n}]$ und $\operatorname{div} \Pi$ Vektoren mit den Komponenten

$$
\begin{aligned}
[\Pi \cdot \mathfrak{n}]_x &= \Pi_{xx}\alpha + \Pi_{xy}\beta + \Pi_{xz}\gamma, \ldots\\
\operatorname{div}_x \Pi &= \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial z}, \ldots
\end{aligned} \tag{18}
$$

und es ist kurz gesetzt: $\operatorname{div} \operatorname{div} \Pi = \operatorname{div}^2 \Pi$.

Die letzten beiden Integralen in (16) sind Newtonsche Potentiale von flächenhaften und räumlichen Ladungen; das erste Integral kann als die Wirkung einer gewissen Doppelbelegung der Oberflächen gedeutet werden.

Bezeichnen x, y, z die Koordinaten der Elemente do, bzw. dk, auf die sich die Operatoren div und grad beziehen, sind dagegen X, Y, Z diejenigen des Punktes, für den ψ gilt, dann kann man die Formel (15) auch schreiben

$$\psi = -\operatorname{Div}\int [\Pi \cdot \mathfrak{n}] \frac{do}{r} + \operatorname{Div}\int \operatorname{div} \Pi \frac{dk}{r}; \tag{19}$$

dabei bezieht sich der Operator Div auf XYZ, und unter diesem Symbol steht je ein Vektorpotential. Analog läßt sich der Ausdruck (14) in der Form geben

$$\psi = \operatorname{Div}^2 \int \Pi \frac{dk}{r}, \tag{20}$$

und es steht dabei unter dem Operator Div^2 ein Tensorpotential.

Handelt es sich um einen Körper in Form eines gegen seine Querdimensionen langen Zylinders, dessen Achse wir zur Z-Achse wählen, so ist zu erwarten, daß bei von z unabhängiger Erregung die Newtonschen Potentiale sich in logarithmische umwandeln werden. In der Tat wird, wenn man nach (14) setzt

$$\psi = J_1 + J_2,$$

$$J_1 = \int\left(\Pi_{xx}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \Pi_{yy}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + 2\Pi_{xy}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y}\right)\partial k,$$

$$J_2 = \int\left(2\Pi_{xz}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + 2\Pi_{yz}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + \Pi_{zz}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)dk \tag{21}$$

und mit $\mathfrak{Div}$ die nur auf X und Y bezügliche Divergenz bezeichnet,

$$J_1 = -\,\mathfrak{Div}^2 \!\int \Pi \ln(r^2)\, dq, \tag{22}$$

wobei Π nur die drei Komponenten Π_{xx}, Π_{yy} und Π_{xy} hat, und J_2 wird mit wachsendem Abstand der Grundflächen des Zylinders vom Aufpunkt verschwindend klein. Denn man kann bilden

$$J_2 = \int dq \left| \Pi_{zz}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right|_{-z_1}^{+z_1} - \int dq \left| \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial x} + 2\frac{\partial \Pi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zz}}{\partial z}\right)\right|_{-z_1}^{+z_1}$$

$$+ 2\int ds \left| \frac{1}{r}\left(\Pi_{xz}\alpha + \Pi_{yz}\beta\right)\right|_{-z_1}^{+z_1}$$

$$- 2\int\!\!\int \frac{ds\,dz}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Pi_{xz}\alpha + \Pi_{yz}\beta\right) \tag{23}$$

$$+ \int \frac{dk}{r}\left(2\frac{\partial^2 \Pi_{xz}}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 \Pi_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Pi_{zz}}{\partial z^2}\right),$$

und hierin ist das erste Integral das Newtonsche Potential von Doppelbelegungen der beiden Endquerschnitte des Zylinders, das folgende ein solches von einfachen Belegungen; das dritte stellt das Potential einer Randbelegung der Endquerschnitte dar. Diese Potentiale verschwinden — endliche Belegdichten vorausgesetzt — sämtlich, wenn die Endquerschnitte in unendliche Ferne rücken. Die letzten beiden Glieder enthalten von den Momenten nur Differentialquotienten nach z und verschwinden daher stets, falls die Momente von z unabhängig sind.

In dem Fall, der im Eingang charakterisiert ist, trifft die letztere Annahme nun aber im allgemeinen nicht zu; die Momente $\Pi_{xx}, \ldots$ enthalten dabei vielmehr u. U. ein additives Glied, das mit z proportional, aber von x und y unabhängig ist. Bezeichnen wir dasselbe in Π_{xz}, Π_{yz}, Π_{zz} bzw. mit $f_1 z$, $f_2 z$, $f_3 z$, dann gibt die letzte Formel die von den f_h abhängigen Glieder J_2' in J_2 zu

$$J_2' = f_3 \int dq \left| z\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right|_{-z_1}^{+z_1} + 2\int ds \left| \frac{z}{r}(f_1\alpha + f_2\beta)\right|_{-z_1}^{+z_1}$$

$$- 2\int\!\!\int \frac{ds\,dz}{r}(f_1\alpha + f_2\beta). \tag{24}$$

Rücken nun die Endquerschnitte des Zylinders in sehr große Entfernung, so verschwindet das erste Integral; das zweite wird (da z/r gegen $\pm$ Eins konvergiert) zu einer Konstanten, die in einem Ausdruck für ein Potential irrelevant ist. Das letzte Integral gibt das logarithmische Potential einer Kurvenbelegung, so daß geschrieben werden kann

$$J_2' = +\,2\int ds\,(f_1\alpha + f_2\beta)\ln(r^2), \tag{25}$$

falls r jetzt die Entfernung des in der XY-Ebene liegenden Aufpunktes XY von dem ebenda befindlichen Linienelement ds bezeichnet. Dies J_2' ist aber keine Konstante und muß demgemäß in Rechnung gesetzt werden. Hiernach kann man für den vorausgesetzten Fall, daß Π_{xz}, Π_{yz}, Π_{zz} additive in z multiplizierte Glieder enthalten, das Endresultat für J_2 bei unendlicher Länge des Zylinders schreiben

$$J_2 = 2\int ds\left(\frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial z}\alpha + \frac{\partial \Pi_{yz}}{\partial z}\beta\right)\ln(r^2). \tag{26}$$

Haben Π_{xx}, Π_{yy}, Π_{xy} die analoge Natur wie Π_{xz}, Π_{yz}, Π_{zz} so verlangt auch das Integral J_1 eine genauere Betrachtung, und der Ausdruck (22) gilt zunächst nur für die von z unabhängigen Glieder. Im übrigen schreiben wir

$$J_1 = \frac{\partial^2}{\partial X^2}\int \Pi_{xx}\frac{dk}{r} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\int \Pi_{yy}\frac{dk}{r} + 2\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}\int \Pi_{xy}\frac{dk}{r} \tag{27}$$

und knüpfen die Betrachtung an ein beliebiges dieser drei Newtonschen Raumpotentiale an. Ein mit z proportionales Glied in einer der drei Komponenten Π_{xx}, Π_{yy}, Π_{xy} führt auf ein Integral von der Form

$$\zeta = \int dq \int_{-z_1}^{+z_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \tag{28}$$

$$= \int dq \left\{\sqrt{r^2 + z_2^2} - \sqrt{r^2 + z_1^2}\right\},$$

wobei r den Abstand des Aufpunktes von dem Querschnittselement dq bezeichnet. Ist r klein neben z_1 und z_2, so wird in zweiter Annäherung

$$\zeta = \int dq\,(z_2 - z_1)\left(1 - \frac{r^2}{2\,z_1 z_2}\right) = (z_2 - z_1)\left\{Q - \frac{1}{2\,z_1 z_2}\int r^2\,dq\right\}. \qquad (29)$$

Rechnet man z, bzw. Z, von der Mitte der Zylinderachse aus, setzt also bei Einführung der Zylinderlänge l

$$z_2 = {}^1/_2\, l - Z,\quad z_1 = {}^1/_2\, l + Z$$

und vernachlässigt in dem Glied zweiter Ordnung Z^2 neben ${}^1/_4\, l^2$, so erhält man schließlich

$$\zeta = -2ZQ\left(1 - \frac{2}{Ql^2}\int r^2\,dq\right). \qquad (30)$$

ζ wird hiernach proportional mit Z, verschwindet also in der XY-Ebene, läßt sich aber im übrigen nicht durch Vergrößerung der Zylinderlänge l herabdrücken. Die Berücksichtigung der zweiten Annäherung gibt in dem Faktor von Z ein von X und Y abhängiges Glied, das indessen durch Vergrößerung von l immer unmerklich gemacht werden kann.

Nun stehen aber die Glieder von der Form (28) in dem Ausdruck (27) unter den Differentialzeichen nach X und Y; sie sind demnach ohne Wirkung auf ψ, falls die Endquerschnitte des Zylinders hinreichend fern sind.

Demgemäß gelangen wir zu dem Endresultat, daß für den Fall alle Komponenten $\Pi_{xx}, \ldots$ additive in z multiplizierte, aber von x und y unabhängige Glieder enthalten, dann geschrieben werden kann:

$$\psi = J_1 + J_2 = -\mathrm{Div}^2 \int \Pi \ln(r^2)\,dq + 2\int \frac{\partial}{\partial z}\left(\Pi_{xz}\alpha + \Pi_{yz}\beta\right)\ln(r^2)\,ds. \qquad (31)$$

4. Wir wollen nun von dem ursprünglichen Zustand des Kreiszylinders ausgehen, in welchem alle Momente $\Pi_{xx}, \ldots$ konstant $= \Pi_{xx}{}^0, \ldots$ waren, und ihre Wirkung nach außen durch eine influenzierte Oberflächenladung kompensiert wurde. Hier liefert (31)

$$\psi_0 = -Q\left[\Pi_{xx}{}^0 \frac{\partial^2}{\partial X^2}\ln(P^2) + \Pi_{yy}{}^0 \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\ln(P^2) + 2\,\Pi_{xy}{}^0 \frac{\partial^2}{\partial X\,\partial Y}\ln(P^2)\right],$$

wobei $P^2 = X^2 + Y^2$. Dies gibt

$$\psi_0 = \frac{2\pi R^2}{P^4}\left\{(\Pi_{xx}{}^0 - \Pi_{yy}{}^0)(X^2 - Y^2) + 4\,\Pi_{xy}{}^0 XY\right\} = 2\pi\left(\frac{R}{P}\right)^2\left\{(\Pi_{xx}{}^0 - \Pi_{yy}{}^0)\cos 2\Omega + 2\,\Pi_{xy}{}^0 \sin 2\Omega\right\} \qquad (32)$$

bei $X = P\cos\Omega$, $Y = P\sin\Omega$. Der homogen erregte Kreiszylinder gibt sonach stets ein Feld mit zwei zueinander normalen Symmetrielinien, innerhalb von Quadranten wechselweis entgegengesetzten Verhaltens.

Eine Oberflächenladung von der Dichte

$$\sigma^0 = L\alpha^2 + M\beta^2 + N\alpha\beta \qquad (33)$$

bei $\alpha = \cos\omega$, $\beta = \sin\omega$ würde eine Potentialfunktion

$$\psi_\sigma{}^0 = -\pi R\left\{L\left[\ln(P^2) - {}^1/_2\left(\frac{R}{P}\right)^2 (X^2 - Y^2)\right] + M\left[\ln(P^2) + {}^1/_2\left(\frac{R}{P}\right)^2 (X^2 - Y^2)\right] - N\left(\frac{R}{P}\right)^2 XY\right\} \qquad (34)$$

liefern. Damit σ^0 die Wirkung des Momentes Π^0 kompensiere, ist somit erforderlich, daß

$$L = -M = -\frac{2}{R}(\Pi_{xx}{}^0 - \Pi_{yy}{}^0),\quad N = -\frac{8}{R}\Pi_{xy}{}^0. \qquad (35)$$

Nach der Deformation, welche jedes Flächenelement im Verhältnis $1 + \vartheta : 1$ vergrößert, kommt die Dichte σ^0 nur in der reduzierten Stärke $\sigma' = \sigma^0(1 - \vartheta)$ zur Wirkung; daneben hat der Kreiszylinder seine Form geändert. Aber dieser letztere Umstand, der natürlich in Rechnung zu setzen wäre, wenn es sich allein um die Wirkung von σ^0 handelte, kann bei dem vorliegenden Problem, wo es sich um das Zusammenwirken der Oberflächenladungen und der räumlichen Momente Π handelt, außer Betracht bleiben. In der Tat: Im ursprünglichen Zustand wurde die Wirkung der inneren Momente durch die Oberflächenladung kompensiert. Im deformierten Zustande ist dies nicht mehr der Fall; aber wir betrachten die wirksamen Veränderungen (wie die sie veranlassenden Deformationen selbst) als Größen erster Ordnung und vernachlässigen ein für allemal Terme von höherer als dieser Ordnung. Der Einfluß der Gestaltänderung auf die Wirkung des unkompensierten Teiles der Oberflächenladung würde aber von zweiter Ordnung sein. Darum können wir, wenn wir das Potential der Oberflächenladung berechnen, von der Gestaltänderung absehen; natürlich besitzt aber der so gewonnene Ausdruck keine selbständige Bedeutung und darf nur zusammen mit dem Potential der räumlichen Momente angewendet werden.

Bei dieser Einschränkung der Bedeutung kann man die Potentialfunktion der Oberflächenladung σ' nach der Deformation schreiben

$$\psi_\sigma' = \frac{2}{R}\int\left\{(\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0)(\alpha^2 - \beta^2) + 4\Pi_{xy}^0\alpha\beta\right\} \cdot (1 - \vartheta)\ln(r^2)\,ds. \quad (36)$$

Für ϑ liefert die Kombination der Formeln (13) und (8) den Ausdruck

$$\vartheta = R\,[g_1\alpha + g_2\beta + b_2\alpha^3 + (c_2 - a_2 - b_1)\alpha^2\beta + (a_1 - b_2 - c_1)\alpha\beta^2 + b_1\beta^3]; \quad (37)$$

eine einfache Umformung führt davon zu

$$\vartheta = R(d_1\cos\omega + d_2\sin\omega - e_1\cos 3\omega + e_2\sin 3\omega)$$

bei (38)

$$\alpha = \cos\omega,\ \beta = \sin\omega$$

$$d_1 = g_1 + {}^1/_4(2b_2 + a_1 - c_1), \quad (39)$$
$$d_2 = g_2 + {}^1/_4(2b_1 + c_2 - a_2),$$
$$e_1 = {}^1/_4(a_1 - c_1 - 2b_2),\ e_2 = {}^1/_4(c_2 - a_2 - 2b_1).$$

Für ψ_σ' ergibt sich hiermit

$$\psi_\sigma' = \psi_\sigma^0 - 2\int[(\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0)\cos 2\omega + 2\Pi_{xy}^0\sin 2\omega] \quad (40)$$
$$\cdot(d_1\cos\omega + d_2\sin\omega - e_1\cos 3\omega + e_2\sin 3\omega)\ln(r^2)\,ds.$$

Die Ausrechnung führt auf Integrale von der Form

$$-\int\cos n\omega\ln(r^2)\,ds = \frac{2\pi R}{n}\left(\frac{R}{P}\right)^n\cos n\Omega = 2\pi R C_n, \quad (41)$$
$$-\int\sin n\omega\ln(r^2)\,ds = \frac{2\pi R}{n}\left(\frac{R}{P}\right)^n\sin n\Omega = 2\pi R S_n$$

für $n > 0$, wobei C_n, S_n Abkürzungen sind. Bei ihrer Benutzung erhält man als Potentialfunktion der durch die Deformation veränderten Oberflächenladung σ'

$$\psi^{\sigma'} = \psi_\sigma^0 + 2\pi R\cdot\{(\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0)[(d_1 - e_1)C_1 + (e_2 - d_2)S_1 + d_1C_3 + d_2S_3 - e_1C_5 + e_2S_5] + 2\Pi_{xy}^0[(d_2 + e_2)C_1 + (d_1 + e_1)S_1 - d_2C_3 + d_1S_3 - e_2C_5 - e_1S_5]\}. \quad (42)$$

Dies Resultat stellt das Feld der deformierten Ladung σ' dar als die Superposition von drei Feldern verschiedener Symmetrie, die je durch das Auftreten von Ω_1 $3\Omega_2$ und 5Ω unter den trigonometrischen Funktionen charakterisiert sind.

5. Wir wollen nun den Anteil an der Potentialfunktion berechnen, den das ursprüngliche Moment Π^0 nach der Deformation liefert; letzteres gelangt dabei, wie früher gezeigt, mit Komponenten zur Geltung, die gegeben sind durch

$$(\Pi^0)_{xx} = \Pi_{xx}^0(1 - \delta) + 2(\Pi_{zx}^0\mu - \Pi_{xy}^0\nu),$$
$$(\Pi^0)_{yy} = \Pi_{yy}^0(1 - \delta) + 2(\Pi_{xy}^0\nu - \Pi_{yz}^0\lambda),$$
$$(\Pi^0)_{zz} = \Pi_{zz}^0(1 - \delta) + 2(\Pi_{yz}^0\lambda - \Pi_{zx}^0\mu),$$
$$(\Pi^0)_{yz} = \Pi_{yz}^0(1 - \delta) + (\Pi_{yy}^0 - \Pi_{zz}^0)\lambda + \Pi_{zx}^0\nu - \Pi_{xy}^0\mu, \quad (43)$$
$$(\Pi^0)_{zx} = \Pi_{zx}^0(1 - \delta) + (\Pi_{zz}^0 - \Pi_{xx}^0)\mu + \Pi_{xy}^0\lambda - \Pi_{yz}^0\nu,$$
$$(\Pi^0)_{xy} = \Pi_{xy}^0(1 - \delta) + (\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0)\nu + \Pi_{yz}^0\mu - \Pi_{zx}^0\lambda.$$

Diese Ausdrücke sind also nun in die Formel (31) statt der allgemeinen $\Pi_{xx}, \ldots$ einzusetzen; es dürfen dabei aber nach dem in § 3 allgemein Gezeigten in dem ersten Integral J_1 die mit z proportionalen Terme von vornherein fortbleiben.

Setzt man kurz nach (10) und (8)

$$\delta = (a_1 + b_2 + g_1)x + (b_1 + c_2 + g_2)y = ax + by,$$

so wird der erste Teil J_1 von ψ zu

$$J_1 = -\frac{\partial^2}{\partial X^2}\int\Big\{\Pi_{xx}^0(1 - (ax + by)) - \Pi_{zx}^0(a_3x + (b_3 + h)y) - \Pi_{xy}^0((a_2 - b_1)x + (b_2 - c_1)y)\Big\}\ln(r^2)\,dq$$
$$- \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\int\Big\{\Pi_{yy}^0(1 - (ax + by)) + \Pi_{xy}^0((a_2 - b_1)x + (b_2 - c_1)y) - \Pi_{yz}^0((b_3 - h)x + c_3y)\Big\}\ln(r^2)\,dq \quad (44)$$
$$- 2\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y}\int\Big\{\Pi_{xy}^0(1 - (ax + by)) + (\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0)\,{}^1/_2((a_2 - b_1)x + (b_2 - c_1)y) - \Pi_{yz}^0\,{}^1/_2(a_3x + (b_3 + h)y) - \Pi_{zx}^0\,{}^1/_2((b_3 - h)x + c_3y)\Big\}\ln(r^2)\,dq.$$

Hierin liefern die drei konstanten Glieder in den Klammern das Potential ψ_0 vor der Deformation; wir schreiben daher bei Einführung von sogleich erkennbaren Abkürzungen

$$J_1 = \psi_0 + \frac{\partial^2}{\partial X^2}\int(A_1x + B_1y)\ln(r^2)\,dq + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\int(A_2x + B_2y)\ln(r^2)\,dq + 2\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y}\int(A_3x + B_3y)\ln(r^2)\,dq. \quad (45)$$

Nun ist aber für einen kreisförmigen Querschnitt

$$\int(Ax + By)\ln(r^2)\,dq = -\frac{\pi R^4}{2P^2}(AX + BY), \quad (46)$$

somit resultiert bei Einsetzen der Werte A_h und B_h sowie der Abkürzungen C_3 und S_3 nach (41) schließlich

$$J_1 = \psi_0 - 3\pi R \{[(\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0) a' - 2\Pi_{yz}^0 b_3 + \Pi_{zx}^0 (a_3 - c_3) - 2\Pi_{xy}^0 b'] C_3 + [(\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0) b' + \Pi_{yz}^0 (a_3 - c_3) + 2\Pi_{zx}^0 b_3 + 2\Pi_{xy}^0 a'] S_3\}, \quad (47)$$

wobei

$$a' = a_1 + 2b_2 - c_1 + g_1, \; b' = c_2 + 2b_1 - a_2 + g_2.$$

Für den zweiten Teil J_2 von ψ erhält man nach (43) und (9)

$$J_2 = 2\int \Big\{\Big[-(\Pi_{zz}^0 - \Pi_{xx}^0) g_1 + \Pi_{xy}^0 g_2 - \Pi_{yz}^0 h\Big] \alpha + \Big[(\Pi_{yy}^0 - \Pi_{zz}^0) g_2 + \Pi_{zx}^0 h + \Pi_{xy}^0 g_1\Big] \beta\Big\} \ln(r^2) ds \quad (48)$$

und nach Ausrechnung bei Einführung der Abkürzungen C_1 und S_1 nach (41)

$$J_2 = -4\pi R \cdot \{[-(\Pi_{zz}^0 - \Pi_{xx}^0) g_1 + \Pi_{xy}^0 g_2 - \Pi_{yz}^0 h] C_1 + [(\Pi_{yy}^0 - \Pi_{zz}^0) g_2 + \Pi_{zx}^0 h + \Pi_{xy}^0 g_1] S_1\}. \quad (49)$$

Das Potential der durch Deformation geometrisch modifizierten räumlichen Momente

$$\psi'_0 = J_1 + J_2$$

ist hiernach zusammengesetzt aus dem Potential ψ_0 der ursprünglichen Momente, welches durch σ^0 kompensiert war, und aus zwei Zusatzgliedern von verschiedenen Symmetrien, welche bzw. durch das Auftreten von Ω und von $3\,\Omega$ unter den trigonometrischen Funktionen charakterisiert sind.

6. Schließlich sind noch die die Momente direkt beeinflussenden Umstände in Rechnung zu setzen. Diese mögen ausgedrückt werden durch die folgenden Ansätze für Zusatzmomente Π'

$$\Pi_{xx}' = t_1 + t_{11} x_x + t_{12} y_y + \ldots + t_{16} x_y,$$
$$\Pi_{yy}' = t_2 + t_{21} x_x + t_{22} y_y + \ldots + t_{26} x_y, \quad (50)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Pi_{xy}' = t_6 + t_{61} x_x + t_{62} y_y + \ldots + t_{66} x_y,$$

in denen die t_h Funktionen der Temperaturänderung allein, die t_{hk} aber Konstanten bezeichnen. Die ersteren Glieder drücken die (wahre) pyro-, die letzteren, uns in erster Linie interessierenden, die piezoelektrische Erregung aus. Der allgemeine Ansatz vereinfacht sich für Kristalle mit Symmetrien bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems, ähnlich wie der formverwandte für die elastischen Druckkomponenten. Doch besteht der Unterschied, daß im allgemeinen t_{hk} und t_{kh} voneinander verschieden sind.

Da in unserem Fall die $x_x, \ldots$ sämtlich lineär homogen in x und y sind, so gilt gleiches von den in sie multiplizierten Termen. Formel (31) reduziert sich auf

$$\psi' = -\frac{\partial^2}{\partial X^2}\int \Pi_{xx}' \ln(r^2) dq - \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\int \Pi_{yy}' \ln(r^2) dq - 2\frac{\partial^2}{\partial X\,\partial Y}\int \Pi_{xy}' \ln(r^2) dq \quad (51)$$

wobei nun nach (50) und (8) ist

$$\Pi_{xx}' = t_1 + x[a_1 t_{11} + b_2 t_{12} + g_1 t_{13} + (b_3 + h) t_{14} + a_3 t_{15} + (a_2 + b_1) t_{16}] + y[b_1 t_{11} + c_2 t_{12} + g_2 t_{13} + c_3 t_{14} + (b_3 - h) t_{15} + (b_2 + c_1) t_{16}], \quad (52)$$

und ähnliche Ausdrücke Π_{yy}' und Π_{xy}' darstellen. Der Bau von ψ' ist demnach ganz dem von J_1 in (44) bzw. (45) entsprechend, und die Ausführung der Rechnung führt auf ein dem dort für J_1 abgeleiteten analoges Resultat. ψ' stellt sich also dar als die Summe zweier Glieder, von denen das erste, von den t_h abhängende (pyroelektrische) lineär homogen in C_2 und S_2, das zweite, von den t_{hk} abhängende (piezoelektrische) ebenso in C_3 und S_3 gebaut ist; das erste ist also durch das Auftreten von $2\,\Omega$, das zweite durch dasjenige von $3\,\Omega$ unter den trigonometrischen Funktionen charakterisiert.

7. Das Potential (ψ) der faktisch zur Geltung kommenden Wirkung ist die Summe

$$(\psi) = \psi_\sigma' + \psi_0' + \psi'$$

aus den drei Anteilen, die bzw. von der geometrisch veränderten Oberflächenladung, von den geometrisch und von den physikalisch veränderten räumlichen Momenten herrühren. Sehen wir dabei von dem Pyroanteil in ψ' ab, so ist letzteres Potential durch die Symmetrie $3\,\Omega$ charakterisiert; ψ_σ' und ψ_0' enthalten außerdem auch Ω und $5\,\Omega$. Die mit $3\,\Omega$ behafteten Glieder darin verschmelzen mit den in ψ' enthaltenen, und die beiderseitigen Parameter sind untrennbar verknüpft; auch die Benutzung beliebig verschiedener Orientierungen der Zylinderachse kann nicht zu einer Trennung führen, da die beiderseitigen Glieder, als von gleicher Natur, sich auch gleichmäßig auf andere Koordinatensysteme transformieren.

Die Ω und $5\,\Omega$ enthaltenden Glieder in ψ_σ' und ψ_0' hingegen stehen für sich allein; sie lassen sich wegen ihrer abweichenden Gesetzmäßigkeiten isoliert von den mit $3\,\Omega$ behafteten durch Beobachtung bestimmen, und da ihre

Parameter die ursprünglichen Momente Π^0 enthalten, so sind auf diese Weise Schlüsse über die Π^0 möglich. Allerdings nur in einem beschränkten Maße, da von den Komponenten von Π^0 nur die Kombinationen $\Pi_{yy}^0 - \Pi_{zz}^0$, $\Pi_{zz}^0 - \Pi_{xx}^0$, $\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0$ und Π_{yz}^0, Π_{zx}^0, Π_{xy}^0 auftreten.

Das ideale Ziel würde offenbar sein, alle drei Hauptmomente, d. h. die drei Konstituenten des Tensortripels des Momentes Π^0 nach Richtung und Größe zu bestimmen. Der auf die Richtung bezügliche Teil der Aufgabe ist dabei ganz oder zum Teil im voraus erledigt, wenn der Kristall Symmetrien besitzt, wie das bei den interessierenden Objekten stets stattfindet. Nun drücken sich die Komponenten nach einem beliebigen Achsenkreuz XYZ durch die Hauptmomente Π_{I}, Π_{II}, Π_{III}, bekanntlich so aus, daß, wenn das System der Richtungskosinus durch das Schema

	X	Y	Z
Π_{I}	α_1	β_1	γ_1
Π_{II}	α_2	β_2	γ_2
Π_{III}	α_3	β_3	γ_3

(53)

gegeben ist, gilt

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= \Pi_{\mathrm{I}}\,\alpha_1^2 + \Pi_{\mathrm{II}}\,\alpha_2^2 + \Pi_{\mathrm{III}}\,\alpha_3^2, \\ \Pi_{yy} &= \Pi_{\mathrm{I}}\,\beta_1^2 + \Pi_{\mathrm{II}}\,\beta_2^2 + \Pi_{\mathrm{III}}\,\beta_3^2, \\ &- - - - - - - - - - - \\ \Pi_{xy} &= \Pi_{\mathrm{I}}\,\alpha_1\beta_1 + \Pi_{\mathrm{II}}\,\alpha_2\beta_2 + \Pi_{\mathrm{III}}\,\alpha_3\beta_3. \end{aligned} \tag{54}$$

Man sieht hieraus sogleich, daß, wenn für beliebig viele und beliebig orientierte Achsenkreuze XYZ die Kombinationen $\Pi_{xx} - \Pi_{yy}, \ldots$ und $\Pi_{xy}, \ldots$ bekannt sind, daraus die Π_{I}, Π_{II}, Π_{III} nur bis auf eine gemeinsame additive Konstante bestimmbar sind. Denn fügt man eine solche Konstante zu Π_{I}, Π_{II}, Π_{III} hinzu, so ändern jene Kombinationen ihre Werte nicht.

Aber auch bei dieser Einschränkung der Ergebnisse haben dieselben doch eine Bedeutung, und Beobachtungen unter ihrer Anleitung könnten eventuell zu einer Kontrolle irgendwelcher Annahmen über die Konstitution von Kristallen dienen. In bezug hierauf mögen noch einige allgemeine Bemerkungen angeschlossen werden.

8. Unsere Formeln betreffen den Fall eines beliebig niedrig symmetrischen Kristalles und eines dagegen beliebig orientierten Zylinders, setzen auch die gleichzeitige Einwirkung biegender und drillender Drehungsmomente voraus. Die Formeln sind also von höchster Allgemeinheit und dem entsprechend kompliziert. Sie vereinfachen sich in speziellen Fällen beträchtlich, häufig aber auch so, daß gerade die für unsere Schlußfolgerungen maßgebenden Glieder mit Ω und $5\,\Omega$ in Wegfall kommen.

Solche Fälle sind also für Aufschlüsse über die Momente Π_{I}, Π_{II}, Π_{III} unbrauchbar.

Reguläre Kristalle, bei denen nach Symmetrie die Hauptmomente einander gleich sind, bei denen die $\Pi_{xx}^0 - \Pi_{yy}^0, \ldots$ und $\Pi_{xy}^0, \ldots$ also für jedes Koordinatensystem verschwinden, fallen von vornherein vollkommen aus. Ebenso sind bei niedriger symmetrischen Kristallen gelegentlich die Richtungen von Symmetrieachsen als Achsen des Kreiszylinders nicht brauchbar.

Handelt es sich z. B. um einen Kristall des rhombischen Systems, dessen Hauptachsen mit XYZ zusammenfallen, so ist

$$\begin{aligned} s_{14} &= s_{24} = s_{34} = s_{64} = 0, \\ s_{15} &= s_{25} = s_{35} = s_{45} = 0, \\ s_{16} &= s_{26} = s_{36} = s_{56} = 0, \end{aligned}$$

und

$$\Pi_{xx}^0 = \Pi_{\mathrm{I}},\ \Pi_{yy}^0 = \Pi_{\mathrm{II}},\ \Pi_{zz}^0 = \Pi_{\mathrm{III}},$$
$$\Pi_{yz}^0 = \Pi_{zx}^0 = \Pi_{xy}^0 = 0.$$

Ein biegendes Moment M um die Y-Achse liefert nach (7) die Parameterwerte

$$a_1 Q\varkappa^2 = -s_{13}M,\ b_2 Q\varkappa^2 = -s_{23}M,$$
$$g_1 Q\varkappa^2 = -s_{33}M;$$
$$b_1,\ c_2,\ g_2,\ b_3+h,\ a_3,\ b_1+a_2,\ c_3,\ b_3-h,\ c_1+b_2$$

verschwinden, es ist also

$$c_1 Q\varkappa^2 = s_{23}M.$$

Analog liefert das biegende Moment L um die X-Achse

$$b_1 Q\varkappa^2 = s_{13}L,\ c_2 Q\varkappa^2 = s_{23}L,$$
$$g_2 Q\varkappa^2 = s_{33}L;$$
$$a_1 b_2,\ g_1,\ b_3+h,\ a_3,\ b_1+h_2,\ c_3,\ b_3-h,\ c_1+b_2$$

verschwinden; es ist also

$$a_2 Q\varkappa^2 = -s_{13}L.$$

Man erkennt leicht, daß bei diesen Werten in ψ_σ' und ψ_0' Terme mit Ω und $5\,\Omega$ erhalten bleiben, daß die vorausgesetzten Anordnungen also zu dem bezeichneten Zweck brauchbar sind.

Ein drillendes Moment N führt hingegen auf

$$2b_3 Q\varkappa^2 = \tfrac{1}{2}(s_{44}-s_{55})N,\ 2hQ\varkappa^2 = \tfrac{1}{2}s(_{44}+s_{55})N,$$

während alle a_h, b_h, c_h, g_h verschwinden; damit fallen aber die von Ω und $5\,\Omega$ in ψ_σ' und ψ_0' abhängenden Glieder fort. Die bez. Anordnung ist somit unbrauchbar.

Ein allgemeiner Fall, in dem die Drillung mit Erfolg benutzbar sein würde, ist der, daß die Zylinderachse normal zu einer zweizähligen

kristallographischen Symmetrieachse liegt, ohne selbst Symmetrieachse zu sein. Legt man die X-Richtung in die Symmetrieachse, so würde hier gelten

$$s_{15} = s_{25} = s_{35} = s_{45} = 0,$$
$$s_{16} = s_{26} = s_{36} = s_{46} = 0,$$
$$\Pi_{xy}^0 = \Pi_{xz}^0 = 0,$$

und man kann leicht erkennen, daß bei solchen Werten die Glieder mit Ω und $5\,\Omega$ aus ψ_σ' und ψ_0' nicht verschwinden. Diese Andeutungen müssen genügen.

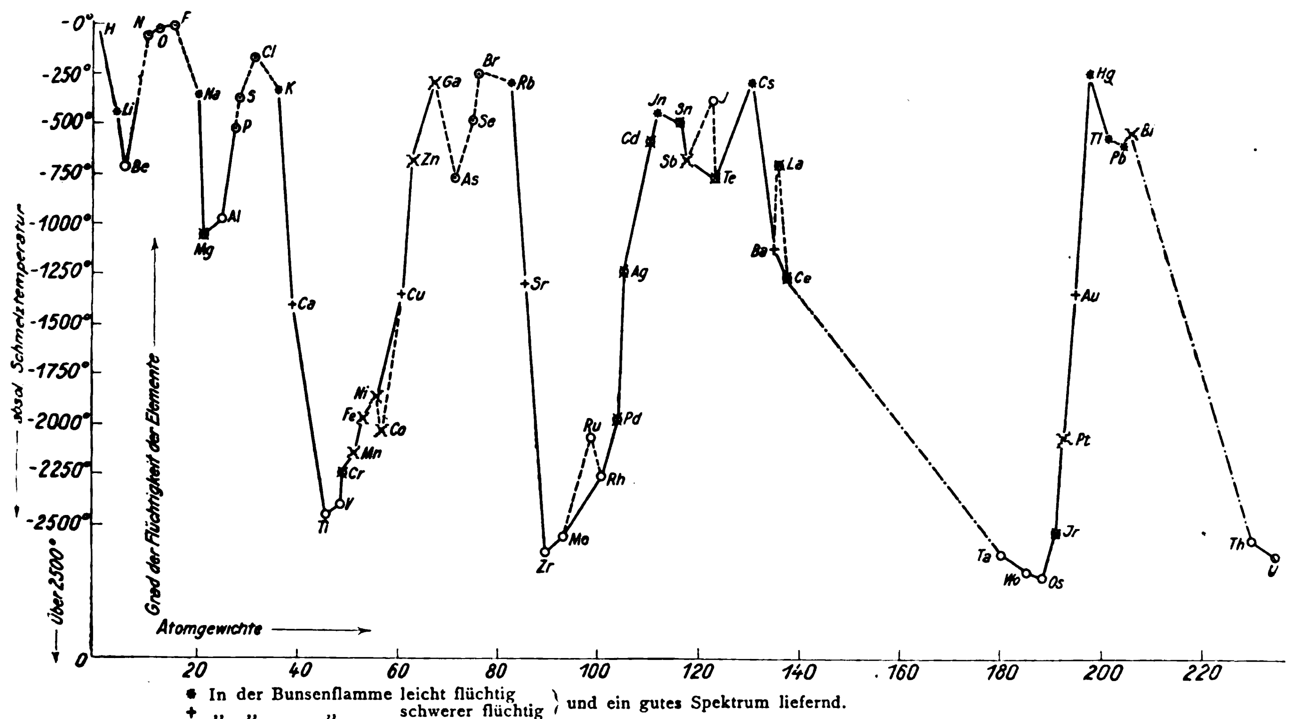
Zusammenfassend mag gesagt werden, daß nach den vorstehenden Entwicklungen Beobachtungen über die Erregung zentrisch-symmetrischer Piezoelektrizität an gebogenen und gedrillten Kreiszylindern die drei Konstituenten des permanenten räumlichen elektrischen Momentes eines Kristalles bis auf eine ihnen gemeinsame additive Konstante zu bestimmen gestatten. Damit ist die in der vorigen Arbeit aus allgemeinen Betrachtungen gezogene prinzipielle Folgerung in einem speziellen Falle realisiert. Die zentrisch-symmetrischen Erregungen verhalten sich hiernach durchaus abweichend von der früher allein in Betracht gezogenen polaren Piezoelektrizität, bei der keinerlei Beobachtungen Rückschlüsse auf die im Kristall vorhandenen permanenten räumlichen Momente gestatten.

Göttingen, Dezember 1916.

(Eingegangen 5. Januar 1917.)

Berichtigung

zur Notiz von V. Kutter, diese Zeitschrift **18**, 17, 1917. Die Figur ist durch die nachstehende zu ersetzen.



● In der Bunsenflamme leicht flüchtig } und ein gutes Spektrum liefernd.
+ „ „ „ schwerer flüchtig }
X „ „ „ kein brauchbares Spektrum liefernd, wohl aber mit dem Funken.
■ Nur mit dem einfachen Funken ein Spektrum liefernd.
o Erst mit dem Flaschenfunken ein Spektrum liefernd. Hierher gehört auch *Jr*, das in der Figur fälschlicherweise mit ⊠ bezeichnet wurde.
● Elemente, die nicht in den Bereich unsrer Betrachtung fallen. Hierher gehört auch *J*.

BESPRECHUNGEN.

W. C. Röntgens grundlegende Abhandlungen über die *X*-Strahlen. Zum siebzigsten Geburtstage des Verfassers herausgegeben von der Physikalisch-Medizinischen Gesellschaft in Würzburg. gr. 8°. 43 S. mit 1 Bildnis. Würzburg, Curt Kabitzsch. 1915. M. —.70.

Es ist mit Freude zu begrüßen, daß die grundlegenden Arbeiten W. C. Röntgens über die *X*-Strahlen von der Würzburger Physik.-Med. Gesellschaft, in der sie Röntgen zuerst vorgetragen, zum 70. Geburtstage des Entdeckers in äußerst wohlfeiler und guter Ausstattung herausgegeben worden sind. In den drei Abhandlungen aus den Jahren 1895—1897 findet man die Geschichte der Entdeckung der *X*-Strahlen, die von Röntgen selbst mit bewundrungswürdiger Energie und Klarheit in fast allen ihren wesentlichen Eigenschaften schon damals erforscht worden sind.

H. Rausch von Traubenberg.

G. Scheffers, Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik, eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. 3. verbesserte Auflage. gr. 8. X u. 752 S. mit 438 Figuren. Leipzig, Veit & Co. 1916. Geh. M. 20.—, geb. M. 22.—

Der Verfasser hat sich zur Aufgabe gemacht, ein Lehrbuch zu schreiben für solche, denen die Mathematik nur Hilfswissenschaft ist; da der Verfasser nicht einmal das voraussetzt, „was der Leser eigentlich wissen müßte, sondern wirklich weiß", wird der Stoff mit epischer Breite behandelt und an zahlreichen Zahlenbeispielen diskutiert. Sehr gute Figuren tragen dabei zur Erleichterung des Verständnisses bei.

Nach Ansicht des Referenten dürfte sich das Buch, falls man es gewissenhaft durcharbeitet, dazu eignen, dem Leser ein gutes Rüstzeug für die praktische Handhabung der behandelten mathematischen Operationen zu geben. Bedauerlich ist, daß das Buch, trotz seines Umfanges, keine Differentialgleichungen bringt.

H. Rausch von Traubenberg.

W. Bahrdt, Physikalische Meßmethoden. (Sammlung Göschen Nr. 301.) 2. verbesserte Auflage. 47 S. mit 54 Figuren. Berlin u. Leipzig, G. J. Göschen. 1915. Geb. M. 1.—

Dieser kleine billige Leitfaden der praktischen Physik kann bei Schülerübungen, aber auch im physikalischen Anfängerpraktikum beim Hochschulunterricht besonders den Studierenden der Naturwissenschaften und Medizin empfohlen werden.

H. Rausch von Traubenberg.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Eidgen. Technischen Hochschule in Zürich Dr.-Ing. Emil Wirz für elektrische Meßtechnik, an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Friedrich L. Hahn für Chemie.

Berufen: Der ord. Professor an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Johannes Stark zum ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Greifswald.

Gestorben: Der Abteilungsvorstand für Wettertelegraphie, Küstenmeteorologie und Sturmwarnungswesen der Deutschen Seewarte in Hamburg Professor Dr. Louis Großmann, der ord. Professor für Chemie an der Technischen Hochschule Lemberg Dr. Bronislaus Pawlewski.

Bemerkungen für die Herren Mitarbeiter!

1. Die **Briefbezeichnung der Schriftleitung** ist Göttingen, Nikolausberger Weg 20.

2. Die Physikalische Zeitschrift will vor allem einer rasch aufklärenden und anregenden Berichterstattung dienen. Die Mitteilungen müssen daher **auf das Wesentliche beschränkt** und **in möglichst knapper Form** abgefaßt sein. Sie sollen im allgemeinen den Umfang von etwa 8 Spalten nicht überschreiten.

3. Die **Abhandlungen** müssen druckfertig eingeliefert werden. Im Interesse rascher Erledigung liegt es, sie auf **einseitig** und deutlich, am besten mit **Schreibmaschine** geschriebenen Blättern einzuliefern.

4. **Zitate** bitten wir in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form zu geben; auch bitten wir, die vom Ausschuß für Einheiten und Formelzeichen (AEF) vorgeschlagenen Bezeichnungen zu berücksichtigen.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag der Physikalischen Zeitschrift.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 4. | 15. Februar 1917. Redaktionsschluß für No. 5 am 24. Februar 1917. | 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Resonanzerregung durch periodisch wiederholte Impulse.

Von E. Budde.

§ 1. Impulse im strengen Sinne des Wortes. Gegeben sei ein beweglicher Punkt von einem Freiheitsgrad, dem wir, weil die Masse im folgenden keine prinzipielle Rolle spielt, die Masse 1 zuschreiben. Seine Koordinate heiße x, seine Dämpfungskonstante $2b$, die Elastizitätskonstante sei $-q^2$, die Zeit t, so daß die Differentialgleichung seiner natürlichen Schwingung lautet

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + q^2x = 0\,. \tag{1}$$

Setzt man

$$q^2 - b^2 = p^2\,,$$

so sind ihre Integrale, wie bekannt,

$$x = e^{-bt}\left\{M\sin pt + N\cos pt\right\}, \tag{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-bt}\left\{-(bM+pN)\sin pt + (pM - bN)\cos pt\right\}, \tag{3}$$

wo M und N die Integrationskonstanten sind. Es werde nun diesem Punkt zum erstenmal zur Zeit Null und dann in regelmäßigen Zeitabständen τ ein Impuls erteilt, der ihm in unendlich kurzer Zeit je einen Geschwindigkeitszuwachs u gibt. Unter der Wirkung dieser wiederholten Impulse wird sich offenbar nach langer Zeit eine Art von erzwungener Schwingung des Punktes herausstellen; die Gleichung dieser schließlichen Schwingung soll ermittelt werden.

Der Anfangszustand werde ganz allgemein dahin angenommen, daß die Konstanten M und N zur Zeit Null die Werte A und B haben; man erhält also die Gleichungen des Anfangszustandes nach dem ersten Impuls, wenn man in (2) und (3) $t = 0$, $M = A$, $N = B$ setzt und auf der rechten Seite von (3) den Impuls u zufügt. So ergibt sich für den Augenblick nach dem Impuls

$$x_0 = B\,, \tag{4}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = pA - bB + u\,. \tag{5}$$

Für die Zeit $t = 0$ bis $t = \tau$ bestimmten also (4) und (5) den Anfangszustand, und aus ihnen sind M und N zu berechnen. Nach (2) und (3) ist nun für den Augenblick $t = 0$

$$x_0 = N\,,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = pM - bN\,.$$

Es ergibt sich also

$$N = B,\ pM - bN = pA - bB + u\,.$$

$$M = A + \frac{u}{p}\,,$$

und damit wird die Schwingung während der Zeit 0 bis τ beschrieben durch die Gleichungen

$$x = e^{-bt}\left\{\left(A + \frac{u}{p}\right)\sin pt + B\cos pt\right\},$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-bt}\left\{-\left(bA + pB + \frac{bu}{p}\right)\sin pt + (pA - bB + u)\cos pt\right\}.$$

Nun folgt zur Zeit $t = \tau$ der zweite Impuls. Ist derselbe erteilt, so sind die Gleichungen für den neuen Anfangszustand im Augenblick $t = \tau$

$$x_\tau = e^{-b\tau}\left\{\left(A+\frac{u}{p}\right)\sin p\tau + B\cos p\tau\right\},$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_\tau = e^{-b\tau}\left\{-\left(bA+pB+\frac{bu}{p}\right)\sin p\tau\right.$$

$$\left.+(pA-bB+u)\cos p\tau\right\}+u,$$

und wenn man hieraus wieder M und N bestimmt, so erhält man für die ungestörte Schwingung in dem Zeitraum τ bis 2τ die Werte

$$M = A+\frac{u}{p}\left(1+e^{b\tau}\cos p\tau\right), \tag{6}$$

$$N = B-\frac{u}{p}\cdot e^{b\tau}\sin p\tau. \tag{7}$$

Dieses Rechnungsverfahren läßt sich beliebig wiederholen und führt zu dem Ergebnis: Für die ungestörte Schwingung, welche auf den Moment $t=n\tau$ (n eine positive ganze Zahl) folgt, haben M und N die Werte

$$M = A+\frac{u}{p}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} e^{b\lambda\tau}\cos p\lambda\tau, \tag{8}$$

$$N = B-\frac{u}{p}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} e^{b\lambda\tau}\sin p\lambda\tau. \tag{9}$$

Beweis. Die Gleichungen (6) und (7) stimmen, wie man leicht sieht, mit diesen Formeln überein. Der allgemeine Beweis für die Richtigkeit von (8) und (9) kann also mittels des $(n+1)$-Verfahrens geführt werden. Wir nehmen an, zur Zeit $n\tau$ seien (8) und (9) erfüllt, nachdem der zugehörige Impuls erfolgt ist. Wir schreiben abkürzend

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} e^{b\lambda\tau}\cos p\lambda\tau = R,$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} e^{b\lambda\tau}\sin p\lambda\tau = S;$$

dann lauten die Gleichungen für die ungestörte Schwingung in der Zeit von $n\tau$ bis $(n+1)\tau$

$$x = e^{-bt}\left\{\left(A+\frac{u}{p}R\right)\sin pt\right.$$

$$\left.+\left(B-\frac{u}{p}S\right)\cos pt\right\},$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-bt}\left\{\left(-bA-pB-\frac{bu}{p}R+uS\right)\sin pt\right.$$

$$\left.+\left(pA-bB+uR+\frac{bu}{p}S\right)\cos pt\right\}.$$

Zur Zeit $(n+1)\tau$ ist also nach Zusatz des Impulses

$$x_{(n+1)\tau} = e^{-b(n+1)\tau}\left\{\left(A+\frac{u}{p}R\right)\sin p(n+1)\tau\right.$$

$$\left.+\left(B-\frac{u}{p}S\right)\cos p(n+1)\tau\right\}, \tag{10}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(n+1)\tau} = e^{-b(n+1)\tau}$$

$$\left\{\left(-bA-pB-\frac{bu}{p}R+uS\right)\sin p(n+1)\tau\right.$$

$$+\left(pA-bB+uR+\frac{bu}{p}S\right)\cos p(n+1)\tau$$

$$\left.+ue^{b(n+1)\tau}\right\}. \tag{11}$$

Der Inhalt der geschweiften Klammer auf der rechten Seite von (10) werde abkürzend mit F, derjenige der Klammer von (11) mit G bezeichnet. Dann ergeben sich zur Bestimmung von M und N für die ungestörte Schwingung zwischen $(n+1)\tau$ und $(n+2)\tau$ die Gleichungen

$$M\sin p(n+1)\tau + N\cos p(n+1)\tau = F,$$

$$M\left[-b\sin p(n+1)\tau + p\cos p(n+1)\tau\right]$$

$$-N\left[p\sin p(n+1)\tau + b\cos p(n+1)\tau\right] = G,$$

und damit findet sich leicht

$$pM = F\left[p\sin p(n+1)\tau + b\cos p(n+1)\tau\right]$$

$$+G\sin p(n+1)\tau,$$

$$pN = F\left[-b\sin p(n+1)\tau + p\cos p(n+1)\tau\right]$$

$$-G\cos p(n+1)\tau.$$

Die Ausrechnung ergibt

$$M = A+\frac{u}{p}R+\frac{u}{p}e^{b(n+1)\tau}\cos p(n+1)\tau,$$

$$N = B-\frac{u}{p}S-\frac{u}{p}e^{b(n+1)\tau}\sin p(n+1)\tau.$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von R und S ist das

$$M = A+\frac{u}{p}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n+1} e^{b\lambda\tau}\cos p\lambda\tau,$$

$$N = B-\frac{u}{p}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n+1} e^{b\lambda\tau}\sin p\lambda\tau,$$

und damit sind die Gleichungen (8) und (9) bewiesen. Für die ungestörte Schwingung,

welche mit dem Augenblick $t = n\tau$ beginnt, folgt also

$$x = e^{-bt}\left\{\left[A + \frac{u}{p}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\left(e^{b\lambda\tau}\cos p\lambda\tau\right)\right]\sin pt + \left[B - \frac{u}{p}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\left(e^{b\lambda\tau}\sin p\lambda\tau\right)\right]\cos pt\right\}. \quad (12)$$

Das t, für welches diese Gleichung gilt, liegt zwischen $n\tau$ und $(n+1)\tau$; versteht man also unter ε einen variablen echten Bruch, so kann man statt e^{-bt} schreiben $e^{-b(n+\varepsilon)\tau}$ und damit formt sich die vorstehende Gleichung um in

$$x = e^{-\varepsilon b\tau}\left\{\left[Ae^{-nb\tau} + \frac{u}{p}e^{-nb\tau}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}e^{b\lambda\tau}\cos p\lambda\tau\right]\sin pt + \left[Be^{-nb\tau} - \frac{u}{p}e^{-nb\tau}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}e^{b\lambda\tau}\sin p\lambda\tau\right]\cos pt.\right.$$

Der Spezialfall, auf den sich das Hauptinteresse konzentriert, ist nun der, daß die Periode τ der Impulse mit derjenigen der ungestörten Schwingung unseres Punktes übereinstimmt, das heißt der Fall $p\tau = 2\pi$. Tritt dieser ein, so sind alle in den beiden vorstehenden Summen Σ vorkommenden Cosinus $= 1$, alle Sinus $= 0$. Zugleich ist $pt = 2n\pi + p\varepsilon\tau$, und $\varepsilon\tau$ ist die vom letzten Impuls ab gezählte Zeit. Bezeichnen wir diese mit T, so wird demnach

$$x = e^{-bT}\left\{(A+B)e^{-nb\tau} + \frac{u}{p}\left[e^{-nb\tau} + e^{(1-n)b\tau} + \ldots \ldots e^{-b\tau} + 1\right]\right\}\sin pT. \quad (13)$$

Läßt man hierin n unendlich werden, so verschwindet der Faktor von $A+B$, und wenn man zugleich die in der eckigen Klammer enthaltene Reihe von rechts nach links liest, so bleibt

$$x = e^{-bT}\frac{u}{p}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}e^{-\nu b\tau}\cdot\sin pT. \quad (14)$$

Die Reihe

$$\sum e^{-\nu b\tau}$$

ist offenbar absolut konvergent und hat den Wert

$$\frac{1}{1-e^{-b\tau}}.$$

Schließlich ergibt sich also

$$x = \frac{e^{-bT}}{1-e^{-b\tau}}\frac{u}{p}\sin pT. \quad (15)$$

Aus dieser Gleichung ist n verschwunden. Sie gilt demnach von einem sehr großen Wert von n ab für jede folgende Einzelschwingung zwischen zwei Impulsen, und, wie man sieht, ist sie jedesmal identisch mit der Gleichung einer gewöhnlichen gedämpften Schwingung von der Anfangsamplitude

$$\frac{u}{p(1-e^{-b\tau})}.$$

Es ist aber nicht zu vergessen, daß sie eben nur den Zustand für die einzelne ungestörte Schwingung darstellt, welche auf jeden Einzelimpuls folgt. Die in dem Faktor e^{-bT} ausgedrückte Dämpfung kommt also nur für je eine Schwingung in Betracht, und, nachdem diese vorübergegangen, beginnt eine neue Schwingung mit dem alten Anfangszustand der Amplitude

$$\frac{u}{p(1-e^{-b\tau})}.$$

Ist $b\tau$ nicht groß, so kann man die Dämpfungswirkung während der Einzelperiode τ vernachlässigen; sie wird durch jeden neuen Impuls wieder vernichtet, und dann ergibt sich

$$x = \frac{u}{p(1-e^{-b\tau})}\sin pT, \quad (16)$$

wo nunmehr T von einem beliebigen (großen) n ab gezählt werden kann. Demnach stellt sich die Wirkung der periodisch wiederholten Impulse in Gestalt einer gewöhnlichen Resonanzgleichung dar.

§ 2. **Periodischer Antrieb durch eine Reihe stark gedämpfter Schwingungen.** An die Stelle des in Strenge unendlich kurzen Impulses, der im vorigen Paragraphen behandelt wurde, möge nun ein kurzer Zug von stark gedämpften Wellen kleiner Periode treten, die erregend auf den beweglichen Punkt wirken. Die Dämpfung derselben sei so groß, daß man annehmen kann, nach wenigen Schwingungen sei ihre Wirkung praktisch erschöpft. Dann kann die Gesamtheit dieser erregenden Wellen offenbar als ein Impuls behandelt werden, dessen Integralbetrag festzustellen ist. Wir wollen annehmen, die Kraft, welche der erregende Wellenzug auf den beweglichen Punkt ausübt, beginne zur Zeit Null mit der Elongation Null und sei im Anfang positiv gerichtet. Dann läßt er sich darstellen durch die Formel $Ee^{-kt}\sin mt$ und seine Integralwirkung ist offenbar auszudrücken durch

$$u = E\int_0^\infty e^{-kt} \sin mt\, dt\ . \qquad (17)$$

Die unbestimmte Integration dieses Ausdrucks ergibt sich leicht, wenn man den Sinus als Exponentialfunktion ausdrückt, und liefert

$$-\frac{E\, e^{-kt}}{m^2 + k^2}[m \cos mt + k \sin mt]\,. \qquad (18)$$

Setzt man die Grenzen ein, so ergibt sich

$$u = \frac{mE}{m^2 + k^2}\,. \qquad (19)$$

Ein gedämpfter Wellenzug liefert also tatsächlich einen angebbaren Integralimpuls. Das ist auch leicht geometrisch einzusehen, Man denke sich eine Achse der Zeit aufgezeichnet und den Wert der Kraft als Ordinate über und unter derselben aufgetragen. Beginnt die Figur der gedämpften Sinusoide mit einem positiven Ausschlag nach oben, so sind die positiven Flächen, welche zwischen der Achse und den über ihr liegenden Kurventeilen liegen, sämtlich größer als die auf sie folgenden negativen. Die Differenz zwischen dem Gesamtinhalt der positiven und der negativen Flächen bildet den in Gl. (19) angegebenen Integralantrieb, der, wenn er kurz genug ist, annäherungsweise als Impuls behandelt werden kann.

Natürlich ist nicht erforderlich, daß die erregende Welle mit der Elongation Null anfängt. Es sind auch Erregungen denkbar (z. B. durch explosionsartige Vorgänge), die mit größerer Annäherung dargestellt werden durch einen Wellenzug, der mit maximaler Elongation (Verdichtungswelle) beginnt. Sie werden besser dargestellt, indem man dem Integral in Gl. (17) die untere Grenze $\pi/2m$ gibt. Dann erhält man offenbar für den Impuls den Wert

$$u = E e^{-\frac{k\pi}{2m}} \cdot \frac{k}{m^2 + k^2}\,. \qquad (20)$$

Zur Vervollständigung ist noch die Frage aufzuwerfen, wie weit ein gegebener Antrieb der hier besprochenen Art als „kurz“ behandelt werden kann. M. a. W., es ist die Frage zu stellen: Welcher Anteil des in Gl. (17) oder (20) ausgedrückten Antriebes wird vernachlässigt, wenn man als obere Grenze statt ∞ eine endliche Zeit t_1 einsetzt? Es wird genügen, dieses für Gl. (17) zu erörtern. Bis auf den Faktor E ist der vernachlässigte Teil offenbar

$$\int_{t_1}^\infty e^{-kt} \sin mt\, dt\,,$$

und dies ist mit (18)

$$\frac{e^{-kt_1}}{m^2 + k^2}(m \cos mt_1 + k \sin mt_1).$$

Stellt man sich die Figur der gedämpften Sinusoide vor; so sieht man leicht, daß die vernachlässigte Größe ein relatives Maximum erreicht, wenn t_1 gerade in das Ende einer vollständigen oder einer halben Periode fällt. Wir setzen etwa

$$t_1 = \lambda \frac{2\pi}{m}\,,$$

wo λ eine ganze Zahl ist. Dann ist die gesuchte Größe

$$\frac{m}{m^2 + k^2} e^{-\frac{2\pi\lambda k}{m}}\,.$$

Sie ist mit dem Gesamtbetrag

$$\frac{m}{m^2 + k^2}$$

der Gl. (17) zu vergleichen. Sie ist offenbar der $e^{\frac{2\pi\lambda k}{m}}$ te Teil davon. Ist nun $\frac{1}{\zeta}$ ein echter Bruch und soll die Amplitude in der Zeit einer ganzen Schwingung auf das $\frac{1}{\zeta}$-fache ihres Betrages herabgehen, so haben wir zur Bestimmung von k die Gleichung

$$e^{-\frac{2\pi k}{m}} = \frac{1}{\zeta}\,,$$

also

$$k = \frac{m}{2\pi} \log \operatorname{nat} \zeta\,,$$

und damit ergibt sich für den fraglichen Bruch der Wert $e^{-\lambda \log \operatorname{nat} \zeta}$. Nimmt man also beispielsweise an, die Dämpfung sei so groß, daß die Amplitude nach einer Schwingung auf $^1/_{10}$ reduziert ist, so ist der vernachlässigte Anteil nach drei Schwingungen $e^{-3 \log \operatorname{nat} 10} = e^{-6,9}$, das ist rund $^1/_{1000}$. Setzt man $\zeta = 2$, so wird derselbe Wert nach rund zehn Schwingungen erreicht. Die Zahlen geben einen ungefähren Anhalt für den Begriff der Kürze beim fraglichen Wellenzug.

§ 3. **Anwendungen.** Eine bekannte, auf die Erfahrung gestützte Erwägung von **Helmholtz** besagt: „Ist ein stationärer Ton von der Schwingungszahl n gegeben und wird derselbe in der Art unterbrochen, daß p mal in der Sekunde eine endliche Strecke des Wellenzuges in das Ohr gelangt, so hört man nicht den Unterbrechungston von der Schwingungszahl p, sondern den primären Ton von der Schwingungszahl n.“ Dieser Satz hat aber zur Vor-

aussetzung, daß der primäre Ton n stationär sei. Ist derselbe sehr stark gedämpft, so zeigen die vorstehenden Betrachtungen, daß er seine Gültigkeit verliert. Fälle, wie die folgenden, stehen also nicht im Widerspruch mit der Helmholtzschen Resonanztheorie des Hörens, sondern ordnen sich ihr unter:

a) Das Summen eines Teekessels. Der Kessel summt, solange an einer Stelle desselben zahlreiche kleine Dampfbläschen sich in regelmäßiger Reihenfolge von der Kesselwand losreißen und sofort nach dem Abreißen wieder kondensiert werden. Der Prozeß des Abreißens und Verschwindens liefert für jedes Bläschen eine stark gedämpfte Schwingung, die wohl hauptsächlich deshalb hörbar wird, weil ihr die Kesselwand als Resonanzboden dient. Nun hat zwar diese Kesselwand sicherlich eine eigene Schwingungszeit, aber die Schwingung, welche dem einzelnen Ton entspricht, ist durch das aufliegende Wasser stark gedämpft, und somit ist es ganz der Theorie gemäß, wenn in diesem Fall der Unterbrechungston als Summen zur Wahrnehmung kommt.

b) Eine ganz analoge Betrachtung gilt für die Baumgartenschen Reflexionstöne. In einem oben offenen Gange oder Hohlweg, der seitlich durch zwei parallele Wände begrenzt ist, liefert jeder Fußtritt einen sehr stark gedämpften Wellenzug, der, von den Wänden hin- und hergeworfen, als periodischer Impuls auf das Ohr wirkt.

c) Soviel mir bekannt, ist der folgende Versuch noch nicht gemacht, der Erfolg desselben wird aber von der Theorie gefordert: Man lasse an einer Stelle des Raumes in der Sekunde p kurze elektrische Funken überschlagen; dann muß ein Ton von der Schwingungszahl p hörbar werden. (Natürlich handelt es sich dabei nicht um langsame elektrische Schwingungen, sondern um knallende, wenn auch vielleicht kleine Funken von so kurzer Dauer, daß der Schalleffekt des ersten Funkens zu Ende ist, ehe der zweite an die Reihe kommt.)

d) Ferner gehört hierher das Kartenblatt, welches an die Zähne eines rotierenden Zahnrades anschlägt, und ähnliche Mittel zur Erzeugung eines mehr oder weniger dauernden Tones.

(Eingegangen 29. Januar 1917.)

Über die jährliche Periode der mikroseismischen Bewegung.

Von Otto Meißner.

Während man der täglichen Periode der mikroseismischen Bewegung bisher wenig Aufmerksamkeit geschenkt hat[1]), ist ihre jährliche Periode lange bekannt, aber, soweit ich sehen kann, doch noch nicht genauer untersucht. Da aber die Monatsmittel mehrerer Jahre schon einen ziemlich regelmäßigen Verlauf zeigen, schien mir eine Berechnung der harmonischen Konstituenten des jährlichen Ganges nicht unangebracht. Benutzt sind die Stationen Upsala, Hamburg, Potsdam, Graz; das Nähere ist aus Tabelle I ohne weiteres ersichtlich.

Berechnet man nun die Koeffizienten der jährlichen und halbjährlichen Periode, so erhält man die in Tabelle II niedergelegten Ergebnisse.

Hierzu ist bezüglich der Phase noch zu bemerken: i. a. rechnet man: Januar $= 0^0$, Februar $= 30^0$ usw. und der Bequemlichkeit wegen habe ich dies bei der Rechnung ebenso gemacht,

Tabelle I.

Monatsmittel der Amplitude der mikroseismischen Bewegung in μ.

Ort, Zeitraum	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Upsala 1907 1912	0,90 ± 0,07	0,71 ± 0,11	0,41 ± 0,08	0,28 ± 0,05	0,06 ± 0,01	0,05 ± 0,01	0,03 ± 0,01	0,09 ± 0,02	0,26 + 0,04	0,38 ± 0,04	0,45 ± 0,05	0,45 ± 0,04
Hamburg 1909 1911	7,0 + 0,2	5,2 ± 0,9	3,3 ± 0,5	2,6 ± 0,3	1,1 ± 0,0	0,6 ± 0,1	0,5 ± 0,0	0,5 ± 0,1	1,8 ± 0,4	3,4 ± 0,2	4,1 ± 0,7	4,8 ± 0,2
Potsdam 1905 1909*)	1,31	1,10	0,56	0	0	0	0	0	0	0,34	0,70	1,62
Potsdam 1913 1916	0,76 ± 0,14	0,71 ± 0,11	0,58 ± 0,13	0,54 ± 0,12	0,20 + 0,07	0,12 ± 0,06	0,07 ± 0,02	0,19 ± 0,12	0,37 ± 0,07	0,58 ± 0,26	0,70 ± 0,24	0,60 ± 0,19
Graz 1907 1915**)	0,68 ± 0,07	0,56 + 0,06	0,29 ± 0,05	0,09 ± 0,02	0,02 ± 0,01	0,00 ± 0,00	0,00 ± 0,00	0,00 + 0,00	0,03 + 0,01	0,11 ± 0,01	0,25 ± 0,03	0.40 ± 0,05

*) Wegen anderer Berechnungsweise mit den übrigen Tabellenwerten nicht streng vergleichbar.
**) Jahr 1914 fällt aus.

1) Vgl. meine Bemerkung darüber diese Zeitschr. 17, 400—402, 1916.

in Tabelle II aber dem Januar 15°, Februar 45° usw. zugeordnet, was nach A. Schmidt[1]) „sicherlich das Natürlichste" ist, da ja doch die Mittelwerte der mikroseismischen Bewegung (an sich Integralwerte für keinen Zeitpunkt, sondern den Zeitraum Januar 1—31!) der Mitte des betr. Monats zugeordnet werden müssen und man doch wohl dem Jahresanfang die Phase 0° geben wird!

Was, um mit dem weniger Wichtigen anzufangen, die halbjährliche Periode betrifft, so zeigt sie an den einzelnen Stationen keine große Übereinstimmung, aber die Darstellung wird, wie die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler zeigt, bei Mitnahme der $^1/_2$ jährlichen Periode ($[\varepsilon\varepsilon]_2$) bedeutend kleiner als ohne diese ($[\varepsilon\varepsilon]_1$); immerhin dürfte sie nur von örtlicher Bedeutung sein.

Die Phase der jährlichen Periode stimmt dagegen bei allen Stationen sehr gut überein, insbesondere, wenn man bedenkt, daß die Zeiträume für die Stationen verschieden (und auch ungleich lang) sind; die Abweichung vom Mittelwerte 9° beträgt nur ± 4 bis 5°: Anfang (in Graz Mitte) des Jahres ist das Maximum der mikroseismischen Bewegung. Diese bemerkenswerte Übereinstimmung der Phase bei Stationen, die sich über 20° in Breite unterscheiden und teils dem Weltmeere nahe, teils im Binnenlande liegen, läßt die Verallgemeinerung, daß die Phase der mikroseismischen Bewegung in ganz Nord- und Mitteleuropa gleich ist, als nicht zu kühn erscheinen. Ihr Ursprung kann also unmöglich örtlicher Natur sein; die Amplitude ist in der Küstenstation Hamburg viel größer als im Binnenlande, aber ich habe mehrfach an anderer Stelle gezeigt, daß ein direkter Zusammenhang mit dem Seegang gleichwohl nicht anzunehmen ist. —

Die Periode der einzelnen Wellen der mikroseismischen Bewegung, die ich hier zur Vermeidung von Unklarheiten als „Wellenperiode" bezeichnen will, hängt nun, wie übrigens lange bekannt ist, von der Amplitude ab, und zwar

Tabelle II.

Station	Zeitraum	a_0	a_1	φ_1	a_2	φ_2	$[\varepsilon\varepsilon]_1$	$[\varepsilon\varepsilon]_2$
Upsala	1907—1912	0,34 μ	0,33 μ	9°	0,09 μ	82°	0,1225	0,0750
Hamburg	1909—1911	2,89	2,80	9	0,33	30	3,16	2,61
Potsdam	1905—1909	0,47	0,52	2	0,29	11	0,8787	0,3791
Potsdam	1913—1916	0,45	0,32	7	0,08	185	0,0598	0,0262
Graz	1907—1915	0,20	0,30	17	0,12	45	0,0959	0,0179

Mikroseismische Bewegung $= a_0 + a_1 \cos(30t - \varphi_1) + a_2 \cos(60t - \varphi_2)$; Januar $t = {}^1/_2$, Februar $t = 1\,{}^1/_2$ usw.

Tabelle III.

Monatsmittel der Wellenperiode der mikroseismischen Bewegung in Sekunden.

Ort, Zeitraum	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Upsala 1907/1912	5,30 ±0,12	5,12 ±0,13	4,95 ±0,13	4,70 ±0,05	4,55 ±0,19	4,60 ±0,15	4,20 ±0,10	4,02 ±0,14	4,58 ±0,14	4,60 ±0,09	4,63 ±0,11	4,85 ±0,09
Hamburg 1909/1911	6,2 ±0,0	5,9 ±0,1	5,6 ±0,2	5,5 ±0,0	5,1 ±0,2	4,7 ±0,2	4,8 ±0,2	4,5 ±0,3	5,3 ±0,2	5,5 ±0,1	5,5 ±0,2	5,9 ±0,1
Potsdam 1913/1916	4,97 ±0,31	4,94 ±0,31	4,52 ±0,05	4,63 ±0,17	4,29 ±0,08	4,34 ±0,05	4,26 ±0,11	4,39 ±0,09	4,39 ±0,12	4,75 ±0,21	4,83 ±0,18	4,73 ±0,09

Tabelle IV.

Station	Zeitraum	t_0	t_1	$[\varepsilon\varepsilon]$	a_0	a_1	φ_1	$[\varepsilon\varepsilon]$
Upsala	1907—1912	4,29ˢ	1,13ˢ	0,35 (sec²)	4,68ˢ	0,44ˢ	31°	0,25 (sec²)
Hamburg	1909—1911	4,69	0,23	0,23	5,38	0,70	27	0,53
Potsdam	1913—1916	4,16	0,95	0,08	4,59	0,32	3	0,13

Wellenperiode $T = t_0 + t_1 A$ (Amplitude in μ). $T = a_0 + a_1 \cos(30t - \varphi)$.

1) Ergebnisse der magn. Beobachtungen in Potsdam und Seddin 1900—1910, S. 41.

wächst sie mit dieser. Sie muß infolgedessen gleichfalls einen jährlichen Gang haben; das ist auch der Fall, wie Tabelle III zeigt.

Will man diese Beziehungen der Rechnung unterwerfen, so kann man einmal die Wellenperiode T (in Sekunden) als lineare Funktion der Amplitude A (in $\mu = 0{,}001$ mm) ausdrücken; man kann aber auch den jährlichen Gang der Wellenperiode selber in der Form $T = a_0 + a_1 \cos (30\,t - \varphi)$ berechnen, wobei wieder wie oben für Januar, Februar ... $t = {}^1/_2,\ 1^1/_2$ ... zu setzen ist. (Eine halbjährliche Periode ist hier kaum vorhanden.) Die Ergebnisse zeigt Tabelle IV.

Die Abhängigkeit der Wellenperiode von der Amplitude der mikroseismischen Bewegung ist hiernach in Potsdam und Upsala etwa gleich groß, in Hamburg viel geringer; dort ist auch der jährliche Gang der Wellenperiode verhältnismäßig schwächer als der der Amplitude. Was den jährlichen Gang der Wellenperiode selbst betrifft, so weicht seine Phase zwar von der der Amplitude ab, aber ein Schluß kann hieraus wohl kaum gezogen werden; für Potsdam, wo die Abweichungen „Beobachtung — Rechnung" am kleinsten sind, stimmen auch die Phasen am besten überein.

Zusammenfassung. Der jährliche Gang der mikroseismischen Bewegung stimmt bezüglich seiner Phase in Upsala, Hamburg, Potsdam und Graz, also wohl in ganz Nord- und Mitteleuropa, überein: er zeigt ein Maximum kurz nach Jahresanfang. Die Mitnahme eines halbjährlichen Gliedes verbessert die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung merklich, doch ist dies Glied offenbar örtlich bedingt. Auch die Wellenperiode zeigt einen jährlichen Gang, wie das nicht anders sein kann, da sie eine lineare Funktion der Amplitude ist.

Geodät. Institut Potsdam, 3. Februar 1917.

(Eingegangen 10. Februar 1917.)

Über die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes bei sehr hohen Stromdichten.

Von Heinrich Rausch von Traubenberg.

Die Frage nach der Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes in metallischen Leitern bei sehr hohen Stromdichten ist schon früher Gegenstand experimenteller Untersuchungen gewesen.

In der neueren Zeit wurde von Lecher[1]) die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes bei dünnen Silberdrähten bei sehr starker Strombelastung geprüft; er setzte solche Drähte von 0,03 mm Durchmesser in schnell fließendem Wasser Stromstärken bis zu 10 Amp. aus und erreichte auf diese Weise Stromdichten bis $1{,}4 \cdot 10^4$ Amp./qmm.

Da sich eine Erwärmung der Drähte nicht völlig vermeiden ließ, trat der quantitative Zusammenhang zwischen Strom und Spannung (wegen des Temperaturkoeffizienten des Materials) und der ungenau definierten Temperatur des Drahtes nicht sehr exakt zutage.

Nach der Elektronentheorie der metallischen Leitung würden allerdings Abweichungen vom Ohmschen Gesetz erst bei ganz wesentlich größeren Stromdichten bzw. Feldstärken zu erwarten sein. J. J. Thomson[1]) hat berechnet, wann die von Drude und anderen gegebene, dem Ohmschen Gesetz entsprechende Beziehung zwischen Stromdichte j und Feldstärke x

$$j = \frac{1}{2} n \frac{e^2}{m} x \frac{\lambda}{v} \qquad (I)$$

aufhört Gültigkeit zu haben (dabei bedeutet n die Anzahl Elektronen pro Volumeinheit, e und m ihre Ladung und Masse, λ ihre freie Weglänge, v ihre Geschwindigkeit infolge der Temperaturbewegung).

Ist nun die elektrische Kraft so groß, daß die Geschwindigkeit, die das Elektron auf einer freien Weglänge erfährt, groß wird im Vergleich zur thermischen Geschwindigkeit, so geht der Ausdruck (I) über in:

$$j = n e \sqrt{\frac{e x \lambda}{2 m}}, \qquad (II)$$

d. h. die Stromdichte ist nicht mehr der Feldstärke bzw. Spannung, sondern ihrer Quadratwurzel proportional. Bei $n = 10^{21}$ Elektronen pro ccm und $\lambda = 10^{-7}$ cm würde das bei einer Feldstärke von 10^6 Volt/cm eintreten.

Die Erreichung dieser extremen Grenze erscheint allerdings experimentell hoffnungslos; da aber die in Berechnung eingehenden Größen (n und λ) sehr unsicher sind, außerdem der Mechanismus der metallischen Leitung noch sehr hypothetisch ist, so war eine weitere Prüfung des Ohmschen Gesetzes bei großen Stromdichten nicht unnötig. Im folgenden wird eine Methode zur Erreichung dieses Zieles gegeben.

Die Strombelastbarkeit ließ sich nach der Lecherschen Methode trotz hydrodynamisch rationell konstruierter Strömungsdüse nicht mehr wesentlich steigern; es wurde deswegen auf eine künstliche Kühlung überhaupt verzichtet, und die Stromwärme $keit$ bei großem e und i möglichst klein gemacht, dieses ließ sich durch

1) Lecher, Berichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, 1907.

1) J. J. Thomson, Korpuskulartheorie der Materie, Braunschweig 1908, S. 52.

Ersatz des stationären Stromes durch sehr kurzdauernde gedämpfte elektromagnetische Schwingungen ohne weiteres erreichen.

Die maximale Stromamplitude I_0 (Amp.) in einem Schwingungskreise von der Kapazität C (Farad), Entladespannung V_0 (Volt) und Frequenz N, ist bei kleiner Dämpfung gegeben durch:

$$I_0 = 2\pi N C V_0 = \frac{V_0}{2\pi N L}, \qquad \text{(III)}$$

ist die Dämpfung groß, so besteht dieser einfache Zusammenhang nicht mehr, sondern muß ersetzt werden durch

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{(\mathfrak{w} - L\delta)^2 + (2\pi N L)^2}}, \qquad \text{(IV)}$$

hierin bedeutet $\mathfrak{w}$ den effektiven Ohmschen Widerstand, L den Selbstinduktionskoeffizenten der Strombahn und δ den Dämpfungsfaktor.

Schaltet man nun in die Strombahn eines Schwingungskreises einen Ohmschen Widerstand $\mathfrak{w}$ ein, so muß bei Durchgang des Stromes I_0 eine maximale Spannungsamplitude $I_0\mathfrak{w} = V$ auftreten.

Falls $I_0\mathfrak{w}$ und V gemessen werden können, kann die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes auch bei diesen kurzdauernden Strömen ermittelt werden.

Fig. 1 zeigt die Schaltung des Schwingungskreises:

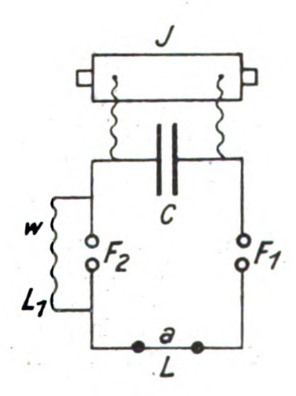


Fig. 1.

Der Induktor J lud die Kapazität C (zwei mittlere Leydener Flaschen) zur Einsatzspannung V_0, die am Funkenmikrometer F_1 eingestellt werden konnte, auf; das Funkenmikrometer F_2 war mit dicken kurzen Verbindungen parallel zum Ohmschen Widerstand $\mathfrak{w}$ angebracht. Die beiden sehr exakten Funkenmikrometer — deren genauere Beschreibung gesondert gegeben werden soll, — hatten Kugeln von 1 cm Radius mit Magnesiumkalotten und waren so aufgestellt, daß der Entladungsfunke bei F_1 den bei F_2 belichtete, um den Entladungsverzug zu unterdrücken; durch diese Aufstellung erreichte ich, daß das Funkenmikrometer F_2, welches ja die maximale $I_0 \times \mathfrak{w}$-Spannung an den Enden von $\mathfrak{w}$ anzeigte, auf wenige Hundertstel nun genau ansprach. Nun mißt man mit der Funkenstrecke F_2 nicht allein die Ohmsche Spannung an den Enden des Widerstandes $\mathfrak{w}$, sondern, da die Zuleitungen und der Widerstand selbst eine gewisse Selbstinduktion L_1 besitzen, die resultierende Reaktanzspannung

$$V_R = I_0 \sqrt{(\mathfrak{w} - L_1\delta)^2 + (2\pi N L_1)^2}\,.$$

Bei einem Selbstinduktionskoeffizenten $L_1 < 1{,}30 \cdot 10^{-7}$ Henry bei einer Frequenz $N = 1.46 \cdot 10^6$, $\mathfrak{w} = 2{,}90\ \Omega$ und einem logarithmischen Dekrement $\vartheta = 0{,}60$, erhalten wir für

$$\sqrt{(\mathfrak{w} - L_1\delta)^2 + (2\pi N L_1)^2} = 3{,}03\ \Omega$$

statt $2{,}90\ \Omega$, wir können somit bei unserer nicht sehr weitgehenden Meßgenauigkeit die am Funkenmikrometer F_2 abgelesene Spannung als reine Ohmsche Spannung in Rechnung setzen, da auch der Skineffekt bei dem hier verwendeten Material (Konstantan, bei Drahtdurchmessern $\leq 0{,}1$ mm) und Frequenzen nicht in Frage kam.

Wählen wir (z. B.) $C = 0{,}454 \cdot 10^{-8}$ Farad, $N = 1{,}46 \cdot 10^6$, $V_0 = 5$ mm $= 17800$ Volt, so wird $I_0 = 742$ Amp.; diese Stromstärke müßte an einem Widerstande von $2{,}90\ \Omega$ eine Spannung $I_0 \times \mathfrak{w} = 2140$ Volt ergeben, also eine gut meßbare Schlagweite von 0,34 mm. Der Versuch ergab nur 0,285 mm $=$ 1900 Volt. Nun ist aber nach Formel (IV) I_0 nicht völlig unabhängig vom effektiven Widerstand der Strombahn; um diesen Einfluß zu demonstrieren, wurde außer dem Widerstand $\mathfrak{w}$ noch ein veränderlicher Widerstand a in die Strombahn eingeschaltet. Der Widerstand a bestand ebenso wie der Widerstand $\mathfrak{w}$ aus einer Legierung mit möglichst kleinem Temperaturkoeffizienten.

Die am Widerstand $\mathfrak{w}$ auftretende Spannung wurde bei verschiedenen Werten von a gemessen; es ergaben sich bei $C = 0{,}454 \cdot 10^{-8}$ Farad, $N = 1{,}46 \cdot 10^6$; $V_0 = 17800$ Volt die folgenden Werte:

Tabelle I.

a	$\mathfrak{w}$	$I_0\,\mathfrak{w}$	I_0
0,	2,90	1900	652
4,61	2,90	1700	585
10,0	2,90	1450	500
12,0	2,90	1400	482

Wie wir sehen, sinkt die Spannung $I_0 \cdot \mathfrak{w}$ mit wachsendem Widerstand a, und demgemäß

die zunächst unter der Voraussetzung des Ohmschen Gesetzes berechnete maximale Stromamplitude

$$I_0 = \frac{I_0 \mathfrak{w}}{\mathfrak{w}}.$$

Nun waren aber a und $\mathfrak{w}$ nicht die einzigen Widerstände im Schwingungskreis, er enthielt noch den Widerstand des Funkens, der Zuleitungen usw. Um den Gesamtwiderstand der Strombahn $\mathfrak{W}$ zu ermitteln, wurde die Dämpfung ϑ des Schwingungskreises bei verschiedenen Widerständen a nach der Bjerknes-Methode aufgenommen und der resultierende Gesamtwiderstand $\mathfrak{W}$ aus der Beziehung

$$\vartheta = \frac{C \mathfrak{W}}{\lambda} 6{,}6 \cdot 10^{-3}$$

berechnet.

Ich erhielt die Werte der Tabelle (II) bei der gleichen Kapazität, Frequenz und Einsatzspannung wie bei Tabelle 1.

Tabelle II.

a	$\mathfrak{w}$	ϑ	$\mathfrak{W}$	$I_0 \cdot \mathfrak{w}$	I_0
0	2,90	0,60	4,80	1850	639
2,30	2,90	0,93	7,10	1650	570
4,6	2,90	1,27	10,3	1550	535

Trägt man nun I_0 als Funktion von $\mathfrak{W}$ graphisch auf Fig. 2, so erhält man für $\mathfrak{W} = 0$ einen extrapolierten Wert für I_0; dieser Wert $I_0 = 725$ Amp. stimmt mit dem nach Formel (III) berechneten Wert 742 Amp. genügend gut überein.

Die Einschaltung von Widerstand ergibt dabei nach den Versuchen der Tabelle (II) einen größeren Einfluß wie nach Formel (IV) rechnerisch zu erwarten war.

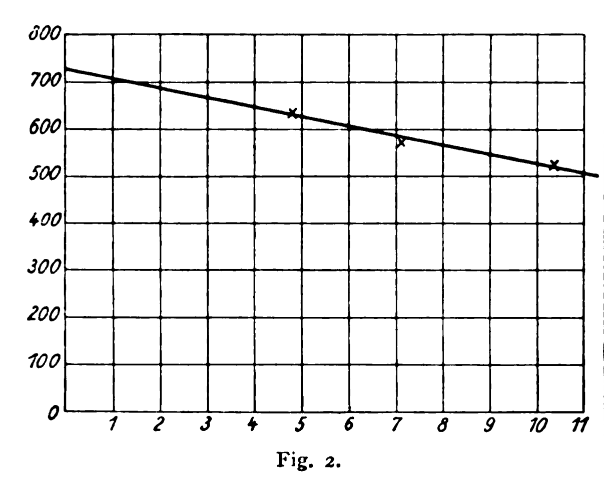


Fig. 2.

Bei $N = 1{,}46 \cdot 10^6$, $\mathfrak{L} = 2{,}57 \cdot 10^{-6}$ Henry, $\mathfrak{W} = 4{,}80\ \Omega$, $V_0 = 17800$ Volt, erhalten wir nach Formel (IV) $I_0 = 730$ Amp.; der experimentell sich ergebende stärkere Einfluß des Widerstandes (639 statt 730) kann vielleicht in der Funkencharakteristik seine Erklärung finden.

Jedenfalls legt uns die gute Übereinstimmung des durch Extrapolation für $\mathfrak{W} = 0$ gefundenen Wertes mit dem nach Formel III berechneten die Schlußfolgerung nahe, daß das Ohmsche Gesetz auch bei den hier erreichten hohen Stromdichten ca. $8 \cdot 10^4$ Amp./qmm innerhalb der Meßgenauigkeit erfüllt ist.

Die hier erreichten Stromdichten bedeuten eine erhebliche Steigerung gegenüber den Lecherschen Werten. Beim Silberdraht von Lecher ($\Phi = 0{,}03$ mm) wurde die Stromdichte j bei 10 Amp. $= 1{,}4 \cdot 10^4$ Amp./qmm; die Spannung pro cm betrug bei ihm ca. 2,3 Volt/cm, die im cm Draht umgesetzte Leitung = 23 Watt.

In unserm Fall wurde bei einem Konstantandraht von 0,1 mm Durchmesser $j = 8{,}1 \cdot 10^4$ Amp./qmm. Die Spannung pro cm

$$= \frac{1900}{4{,}7} = 400 \text{ Volt/cm}$$

und die Leistung in cm $= 639 \cdot 400 = 25{,}5 \cdot 10^4$ Watt.

Um die hier erreichten Werte noch weiter zu erhöhen, muß man $2\pi N C V_0$ vergrößern, das kann man natürlich auf verschiedene Weise bewerkstelligen. Zunächst wurde bei N und C = Konstanz die Einsatzspannung V_0 vergrößert bzw. variiert; ich erhielt dabei an einem Widerstand $w = 10\ \Omega$, bei einer Kapazität $C = 4{,}5 \cdot 10^{-9}$ Farad, die Werte der Tabelle III.

Es wurde ein Widerstand von 10 Ω gewählt um bei den kleineren Stromstärken nicht mit zu kleinen $I_0 \mathfrak{w}$-Spannungen am Widerstande arbeiten zu müssen, deren Ablesung am Funkenmikrometer zu unsicher ausgefallen wäre.

Tabelle III.

V_0	$I_0 \mathfrak{w}$	$\frac{V_0}{I_0 \mathfrak{w}}$	Bemerkung
4760	1400	3,40	
8300	2400	3,45	
11600	3250	3,57	
14700	4100	3,57	
17800	5000	3,56	
20800	5850	3,56	
23600	6750	3,50	
26400	7400	3,56	Rotglut des Drahtes[1]).
29000	8250	3,50	

1) Versuche mit Gleichstrom hatten ergeben, daß bei beginnender Rotglut der Draht eine Widerstandsvermehrung von 5—10 Proz. aufwies.



Wie man sieht, bleibt das Verhältnis $\frac{V_0}{I_0 \mathfrak{w}}$ leidlich gut konstant, und da V_0 proportional I_0 ist, muß auch $\mathfrak{w}$ konstant bleiben, wir haben somit beim Konstantandraht trotz beginnender Rotglut angenäherte Konstanz des Widerstandes bis zu der gemessenen Stromstärke von 825 Amp.

Bei einer Länge des Drahtes von ca. 15 cm und einem Durchmesser von 0,1 mm bekommen wir eine maximale Spannung von 550 Volt cm und eine Stromdichte von $10{,}5 \cdot 10^4$ Amp./qmm. Der experimentelle Befund spricht auch bei diesen Werten (wegen der beobachteten Konstanz von $\mathfrak{w}$) für die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes.

Einige orientierende Versuche, die ich mit Konstantandrähten verschiedener Dicke, und mit Kruppindraht von 0,05 mm Durchmesser anstellte, ergaben mit dem Ohmschen Gesetze durchaus verträgliche Resultate; dabei erreichte ich beim Kruppin eine Spannung bis 1500 Volt pro cm. Auch Quecksilber in dünnen Glaskapillaren (ca. 13 cm Länge und 8,4 Ω Widerstand) verhielt sich normal.

Die Versuche wurden im Göttinger Phys. Institut (Exp. Abteilung) ausgeführt.

(Eingegangen 9. Februar 1917.)

Beiträge zur Kenntnis der Triboluminescenz.

Von A. Imhof.

Einführung.

Die Erscheinung der Triboluminescenz ist immer noch ziemlich wenig bekannt geblieben, trotzdem in den letzten 17 Jahren viele dieses Gebiet behandelnde Veröffentlichungen erschienen sind. Ich erachte es deshalb für angebracht, mit wenigen Sätzen das bisher Erreichte darzustellen. Eine nur angenähert vollständige Behandlung würde mich an dieser Stelle zu weit führen; genauere Studien mögen durch die ziemlich zahlreichen Literaturanlagen erleichtert werden. Eine schon das Wesentlichste enthaltende Zusammenstellung wurde von M. Trautz[7]) im Jahre 1905 gegeben und in holländischer Sprache 1911 von Van Eck[21]). Recht interessant ist die aus beträchtlichem Beobachtungsmaterial (auch über andere Lumineszenzerscheinungen) resultierende Arbeit von P. Heinrich aus dem Jahre 1820, betitelt: „Die Phosphoreszenz der Körper nach allen Umständen untersucht und erläutert", und etwa gleich alt ist die preisgekrönte Schrift von Dessaignes. Ein guter Auszug dieser beiden Abhandlungen findet sich in Gmelins Handbuch der anorg. Chemie 1852. (V. Aufl. Bd. I.)

Einige Untersuchungen galten in der Hauptsache der Bestimmung von Stoffen, welche triboluminescent sind, d. h. beim Zertrümmern momentan, selten kurze Zeit andauernd, lumineszieren. Darnach soll die Triboluminescenzfähigkeit bei organischen, kristallisierten Stoffen stark verbreitet sein, bei den anorganischen nach Lindener sehr häufig unter den Mineralien, nach Gernez auch bei den anorganischen Kunstkristallen nicht selten. Die Erscheinung kann sehr gut an Zucker, den man im Dunkeln mit einem Hammer zertrümmert, besonders schön aber an Urannitrat oder an Bergkristallen beobachtet werden, wenn man nur die Vorsicht gebraucht, sich vorher schon einige Minuten im Dunkeln aufzuhalten. Sie kommt hauptsächlich kristallisierten Stoffen zu, wurde aber auch an amorphen, z. B. Glas, Porzellan, Opal beobachtet und auch bestritten, indem deren Leuchten nicht als Lumineszenz betrachtet wurde. Die meisten Untersuchungen hatten den Zweck, Gruppen von Substanzen mit besonderer physikalischer oder chemischer Eigenart aufzusuchen, um voraussagen zu können, ob Tl.[24]) auftritt oder nicht. Solche mehr oder weniger sicher geltende Regeln und Gesetze sind in ziemlich großer Zahl aufgefunden und zum Teil von dritter Seite bestätigt worden.

Nur einige der wichtigsten seien hier erwähnt: „Sämtliche tl.[24]) Mineralien sind elektrische Isolatoren." (Man kann ergänzend sagen: Sämtliche tl. Substanzen sind elektrische Isolatoren.)

„In Reihen isomorpher Mineralien wird bei allen Gliedern Tl. beobachtet oder bei allen nicht" (B. Lindener[15]).

„Die Tl. tritt vorzugsweise bei Kristallen auf, die keine Symmetriezentren haben." (B. Lindener[16]; Ostromisslensky[18]).

„Nur solche Kristalle zeigen Tl., deren Oberfläche polare Vektoren aufweisen" (W. Wernadski 1910[17]).

„Optische Antipoden zeigen entweder beide Tl., oder sie fehlt beiden" (Andreocci 1899).

„Aktive, optische Isomere, die Nichtantipoden sind, verhalten sich hinsichtlich ihrer Eigenschaft, Tl. zu zeigen oder nicht, ungleich" (Andreocci 1899).

„Wenn ein Glied einer Gruppe chemischer Verbindungen, die untereinander feste Lösungen geben, tl., so tun dies auch alle andern Glieder derselben Gruppe" (Ostromisslenski[18]).

„Permanente tl. Kristalle geben keine festen Lösungen mit nicht tl. Stoffen; oder wenn die eine Komponente einer festen Lösung mit derselben Kristallform tl., so tut dies auch die feste Lösung" (Ostromisslenski[18].)

Die Mehrzahl der weiteren Gesetze betreffen

einzelne organische Gruppen. Eine ausgedehnte Arbeit, die namentlich im Aufsuchen der nötigen Beispiele bestehen muß, wird noch zu leisten sein, um alle die genannten und andere Sätze zu sichern Tatsachen zu stempeln.

Im Jahre 1905 erhielt das Gebiet der Tl. durch Trautz[6,7]) und Schorigin[4,6]), Gernez[11,12,13]) und Guinchant[10]) insofern einen beträchtlichen Zuwachs an Erscheinungen, als der sichere Nachweis erbracht wurde, daß auch die Erscheinung der Kristallolumineszenz ein Spezialfall der Tl. ist. Das früher rätselhafte und schwer herbeizuführende Leuchten beim Kristallisieren gewisser Stoffe wird zurückgeführt auf ein Licht, das beim gegenseitigen Reiben und Bersten der eben neu gewachsenen Kristalle entsteht. Es genügen dabei noch sehr kleine Kräfte, während bei den ältern Kristallen gewöhnlich viel bedeutendere Materialverschiebungen verursacht werden müßten. Wir kommen damit auf die interessante, wohl zuerst von W. J. Pope an Saccharin und von M. Trautz später an vielen andern Substanzen beobachtete Erscheinung der temporären Tl. Es gibt nämlich viele Stoffe, die ohne sichtbare Veränderung ihre Fähigkeit zur Tl. nach einiger Zeit verlieren oder stark einbüßen. Eine Beobachtung von Gernez ist in dieser Beziehung jedenfalls sehr beachtenswert: „Läßt man die Schmelze eines sonst nur temporär tl. Stoffes sehr langsam abkühlen, so bleibt die Tl. erhalten, wenn auch nicht in gleicher Intensität."

Über den Einfluß des umgebenden Mediums auf die Tl. kann noch nichts Sicheres gesagt werden. Einige Autoren, die sich damit befaßt haben, verneinen jeden Einfluß, während andere bei gewissen Substanzen eine deutliche Wirkung beobachtet haben wollen. Übereinstimmend sind die Angaben, daß es gleichgültig ist, in welchem Gas die Zertrümmerung erfolgt. Ich beabsichtige, diese Frage noch einer experimentellen Prüfung zu unterziehen.

Es liegen Beispiele vor, namentlich bei mikrokristallinen Schmelzen und Mineralien, wo kleine Verunreinigungen (in fester Lösung) von entscheidender Wirkung sind.

J. Burke hat zuerst das tl. Licht spektroskopisch untersucht. Er fand für Zucker ein kontinuierlich von der Linie F nach der violetten Seite hin sich ausdehnendes Spektrum. Gegenwärtig kennt man einige solche Spektren.

Die bisher aufgestellten Vermutungen über die Ursache der Tl. sind noch sehr wenig durch Tatsachen gestützt; es ist nicht unwahrscheinlich, daß die Ursache nicht in allen Fällen dieselbe sei (daher vielleicht auch die Widersprüche über den Einfluß des umgebenden Mediums). Ich kann hier nur auf die Literatur verweisen.

Der Hauptzweck vorliegender Arbeit soll darin bestehen, das noch sehr lückenhafte und teilweise unsichere Beobachtungsmaterial etwas zu ergänzen und wo sich Möglichkeiten zeigten, auch auszuwerten. Untersucht wurden hauptsächlich folgende Fragen: Der Einfluß der Kristallkorngröße, der Temperatur, des Kristallwassers, der chemischen Zusammengehörigkeit der Stoffe. des amorphen Zustandes; eine größere Zahl von anorganischen Substanzen wurde auf die Fähigkeit zur Tl. geprüft und ferner eine Zusammenstellung fast aller von andern und mir beobachteten Tl. Farben und Spektren gegeben.

Minimale Größe des lumineszierenden Körpers.

Daß nicht jede tl. Substanz in Pulverform noch tl., ist erkannt worden, aber nur Trautz[7,8]) hat in seinen Arbeiten angegeben, in welchem Größenzustande die geprüften Substanzkörnchen waren. Wir werden sehen, daß man schon bei der Beobachtung der Tl. irgendeiner Substanz, die in beliebig großen Kristallen vorliegt, sicher schließen kann, ob sie auch als Pulver noch lumineszierte oder nicht.

Für mehrere Stoffe habe ich versucht, die kleinste Größe der Kristallkörner festzustellen, die beim Zertrümmern ein eben noch genügend helles Licht emittieren, daß die Empfindlichkeitsschwelle des normalen, 15—20 Minuten in völliger Dunkelheit geruhten Auges überschritten wird. Es geschah dies ursprünglich mit der Absicht, ein genaueres Vergleichsmaß für die Lumineszenzstärke zu erhalten, als dies bei bloßer Abschätzung möglich ist. Denn ein stark lumineszierender Körper wird offenbar schon in kleinerer Menge sichtbar strahlen, als ein nur schwach lumineszierender. Freilich ist nicht jedes „normale" Auge gleich empfindlich, auch nicht ein und dasselbe Auge zu jeder Zeit. Noch mehr Fehlerquellen treten aber bei der Helligkeitsschätzung (Vergleichung mit Normalsubstanzen nach Tschugaeff[1]) auf, da die Dauer des absolut äußerst schwachen Lichtes sehr kurz ist (Größenordnung $^1/_{100}$ sec) und die Proben gleich dimensioniert und gleich vollständig zertrümmert werden müßten, wie die Normsubstanz; endlich auch die Farbverschiedenheiten die Schätzung erschweren.

Ich benenne fortan der Kürze wegen das kleinste, aproximativ als kugelförmig angenommene Stoffteilchen, dessen Tl. eben noch sichtbar ist, mit Minimalkorn (M. K.) Man wird dieses mit Hilfe von Sieben verschiedener Feinheit am einfachsten ermitteln, bei sehr großem M. K. ev. (genauer) durch Zerschneiden. Die empfindlichste Weise, ein Pulver auf seine Tl.-

Fähigkeit zu prüfen, besteht nach meinen Erfahrungen darin, dieses in einer kleinen, weithalsigen Glasflasche mit einer abgestumpften Elfenbein- (oder Glas-)Spitze zu zerreiben.

Man könnte einwenden, daß es offenbar nicht gleichgültig sei, ob man ein einziges Korn zertrümmere oder deren viele zusammen. Durch eine sehr interessante Feststellung, die schon dadurch bemerkenswert erscheint, als sie keiner andern Lumineszenzart zukommt, wird aber die Widerlegung gegeben.

Eine größere Zahl von Versuchen hat nämlich gezeigt, daß das M. K. nicht nur den Schwellenwert der Lumineszenzhelligkeit bedingt, sondern sehr wahrscheinlich überhaupt das kleinste Stoffteilchen darstellt, das beim Zertrümmern noch Licht emittiert.

Dieser Satz ist indes noch mit einiger Vorsicht aufzunehmen, da alle diesbezüglichen Versuche zwar für die Richtigkeit sprechen, aber nicht einwandfrei beweiskräftig sind.

Zertrümmert man z. B. Kupfervitriolkristalle von ca. $^1/_3$—$^1/_2$ mm Durchmesser, so bemerkt man kein Licht, einerlei, ob man ein Teilchen oder deren fünfzig gleichzeitig zerschlägt. Führt man denselben Versuch aus mit Kristallen von 1,5—2 mm Durchmesser, so findet man bei sorgfältiger Prüfung, daß ein einziger tl. Ähnlich verhält es sich mit Kristallsoda, deren M. K. viel größer ist, ferner mit Flußspat u. a. Zerreibt man grobes Quarzpulver (von Bergkristallen), so bemerkt man Licht, nicht aber, wenn man sehr feines Pulver zerreibt. Schmilzt man Flußspatpulver mit dem für die Tl. indifferenten Kolophonium zusammen, so entsteht eine steinharte Masse, die nicht tl. Sie tut dies aber, sobald sie gröbere Körner enthält. Beim Ritzen mit einer Nadel tl. nur stark tl. Substanzen.

Bevor ich Messungen der M. K. ausführte, bestimmte ich durch sehr oft wiederholte Vergleichsschätzungen die Reihenfolge der Helligkeiten von mehreren verschiedenen Stoffen. Es ergab sich dann tatsächlich, daß die Helligkeiten in derselben Reihenfolge abnehmen, wie die M. K. an Größe zunehmen (mit Ausnahme der dunkel gefärbten Kristalle, die wegen der starken Lichtabsorption etwas zu schwach lumineszent erscheinen, z. B. $CuSO_4 \cdot 5H_2O$.) Die M. K. aller Substanzen müssen also bei ihrer Zertrümmerung ungefähr gleich hell leuchten.

In der folgenden Tabelle sind einige M. K.-Größen zusammengestellt; deren Reihenfolge ist zugleich die Helligkeitsfolge:

1. Zinksulfid, (geglüht, *Mn*- u. *Mg*-haltig)	0,001—0,003	mm
2. Willemit	0,002—0,007	„
3. Urannitrat, Quarz	0,06 —0,13	„
4. Zucker	0,14 —0,22	„
5. Borax	0,25 —0,50	mm
6. Kupfervitriol, Flußsp. (weiß)	0,70 —1,20	„
7. Aluminiumammoniumsulf.	0,80 —1,50	„
8. Kristallsoda	2,5 —3,0	„
9. Zinkammoniumsulfat	3,5 —4,0	„

Unter den anorganischen Salzen ist es eine große Seltenheit, eine zu den Nummern 1—3 zu finden, die Nummern 4—6 sind noch nicht häufig (ziemlich häufig bei den organischen Stoffen), die meisten gehören zu Nr. 7—9.

Einfluß der Temperatur.

Eigentümlicherweise wurde bis dahin keine Untersuchung gemacht, welche den Temperatureinfluß studierte, obwohl dieser von besonderem Interesse sein dürfte. Nur einzelne diesbezügliche Bemerkungen findet man in ältern und neuern Arbeiten.

Heinrich erwähnt, daß die Lebhaftigkeit des durch den Stoß entwickelten Lichtes mit der Temperaturerhöhung zunehme; ferner daß Salmiak, Salpeter, Alaun und Kupfervitriol nur nach dem Trocknen, noch warm aneinander gerieben, triboluminescieren. Dessaignes kommt zu ähnlichen Resultaten, nach ihm ist „die Stärke des Lichtes bei demselben Körper umso größer, je mehr er zuvor erwärmt wurde. Nur wenn der Körper bis zum Rotglühen erhitzt ist, zeigt er kein Leuchten mehr. Ein stark erkalteter Körper zeigt auf den Stoß gar kein oder nur schwaches Leuchten".

In neuerer Zeit findet man einzelne Angaben in den Arbeiten von M. Trautz[7]). Unter dem Abschnitt über Kristallolumineszenz wird erwähnt, daß die Helligkeit der Tl. bei tieferer Temperatur bei Bariumchlorat, Bariumbromat, Strontiumbromat, Kalziumbromat, Magnesiumbromat, Kaliumnatriumsulfat und Arsentrioxyd eher zuzunehmen schien, wenn man nur einzelne sichtbare Funken betrachtete.

Ferner: „Die erstarrte Masse von geschmolzenem Kaliumazetat war schwach triboluminescent, verlor aber diese Eigenschaft unter ca. 70°. Wieder bis zum Schmelzen erhitzt, zeigte sie wieder etwas Tribolumineszenz, aber schwach. Natriumazetat und Lithiumazetat sind noch bei gewöhnlicher Temperatur tribolumineszent, stärker bei höherer Temperatur." Ebenda: „Bei Fällung oder Erstarrung von Schmelzen nimmt die Helligkeit (der Kristallolum.), sowie die Tl. mit der Temperatur zu, während bei Kristallisation aus Lösung die Tl. mit der Temperatur meist sehr rasch abnimmt." Noch weitere ähnliche Angaben erwähne ich nicht mehr, da sie auch die Kristallolumineszenz angehen. Diese ist zwar von Trautz und von Gernez als identisch mit der Tl. erkannt worden, aber man hat zu bedenken, daß sich mit der Temperatur

auch die Kristallisationsgeschwindigkeit und die Konzentration ändern. Van Eck[21]) beobachtete 1911 eine Erhöhung der Lichtstärke mit der Temperatur. Es war mir leider nicht möglich, diese Originalarbeit zu verschaffen.

Während also die älteren und neuesten Beobachtungen eine Zunahme der Lichtintensität mit steigender Temperatur feststellen — im Gegensatz zu meinen Ergebnissen — lassen die Angaben von M. Trautz das eine Mal an eine Zunahme, das andere Mal an eine Abnahme glauben. Diese Widersprüche erklären sich zum Teil durch die Schwierigkeit der Helligkeitsmessung, da die Lichter nicht nur äußerst schwach, sondern auch von sehr kurzer Dauer (Größenordnung gew. 0,01—0,1 sec) sind, ferner aus der gewichtigen Rolle, welche die Größe des benützten Kristalls spielt. Auch gleich große Kristalle ergeben nicht bei jedem Schlag gleich helles Licht, da die Zertrümmerung nicht immer gleich vollständig ist. Die erwähnten Beobachtungen waren übrigens stets nur nebenbei gewonnene Resultate.

Im folgenden seien meine Beobachtungen mitgeteilt:

a) Triboluminescenz bei höheren Temperaturen.

Die erwähnten Fehlerquellen lassen sich nicht ausschließen. Um immerhin sichere Resultate zu erhalten, machte ich eine große Zahl von Beobachtungen für dieselbe Substanz.

Bei Zimmertemperatur luminesziert weißer, kristallisierter Quarz stark. Die Lumineszenz ist noch sichtbar bei schwacher Glut, sie übertrifft dann also diese an Helligkeit. Durch schnell aufeinander folgendes Zertrümmern von ungefähr gleich großen Stücken, kalt und auf 350° erhitzt, wurde eine schwache Abnahme der Lichtintensität wahrgenommen, mehr noch bei höherer Temperatur.

Flußspat zeigt bekanntlich sehr schöne Fluoreszenz und Thermolumineszenz. Verschiedentlich wurde die Thermolumineszenz als Ursache seiner Tl. angesehen. Durch die Temperaturuntersuchungen ergab sich nun einwandfrei, daß es sich um zwei durchaus unabhängige Erscheinungen handelt.

Erhitzt man Flußspat längere Zeit auf etwa 150°, so verliert er seine Thermolumineszenzfähigkeit, wie bekannt, fast gänzlich und erlangt diese Eigenschaft erst wieder durch neue Belichtung oder radioaktive Bestrahlung. Läßt man aber den lange erhitzten Kristall wieder erkalten, so zeigt er durchaus ungeschwächte Tl. Schon dadurch fällt also die erwähnte Hypothese dahin. Grünen Flußspat konnte man tl. sehen, während er noch schwach grün thermolumineszierte (bei ca. 60°). Weißer oder schwach grüner Flußspat von anderer Quelle, der erst grün, dann violett und schließlich wieder grün thermolumineszierte, tl. in jeder dieser 3 Stufen ungefähr gleich stark, auch nach dem Abklingen der Thermolumineszenz heiß und kalt. Die Lichtintensität nahm mit der Temperatur nicht zu, wurde aber auch kaum schwächer.

Zucker tl. heftig. Als Ergebnis von etwa 20 einzelnen Vergleichsbeobachtungen, bei welchen stets schnell aufeinander folgend je $^1/_4$ eines Würfelzuckers kalt und auf 100° bis 130° erhitzt, zertrümmert wurden, ergab sich eine deutliche Helligkeitsabnahme schon bei 100°, mehr noch kurz vor dem Schmelzpunkt. Meine sehr einfachen Vorrichtungen erlaubten mir leider nicht eine genügend genaue Temperatureinstellung, um in die äußerste Nähe des Schmelzpunktes zu gehen. Zucker, welcher unter gesättigter Lösung bei 10° zertrümmert wird, zeigt bedeutend heftigere Tl., als wenn man ihn in ebensolcher Lösung bei etwa 100° zertrümmert, auch dann, wenn in der kalten Lösung der Zusammenhang der einzelnen feinen Kriställchen schlechter geworden ist, als in der heißen.

Ganz einwandfrei möglich ist die Helligkeitsschätzung mit β-Naphtol. Diese weiche Substanz luminesziert bei ca. 15° stark mit grünem Licht, bei ca. 55° aber nur noch äußerst schwach, so schwach, daß man die Lichtfarbe nicht mehr angeben kann.

Viele Beobachtungen an Kupfersulfat ($5 H_2O$) und Urannitrat führten zu denselben Ergebnissen; namentlich bei heißem Kupfervitriol wurde nie das geringste Licht beobachtet. Vorsichtshalber lege ich aber hierauf kein großes Gewicht, da diese Kristalle, wenigstens teilweise, schnell Wasser verlieren.

Die erwähnten Beobachtungen sind bloße Helligkeitsschätzungen, die freilich wegen der Häufigkeit der Beobachtungen ziemlich zutreffend sein dürften. Ihre Richtigkeit wird aber besonders durch einen Versuch bestätigt, den ich zuletzt mit manganhaltigem Zinksulfid ausgeführt habe und der nicht nur zeigte, daß die Lichtintensität mit wachsender Temperatur tatsächlich abnimmt, sondern geradezu die Aufnahme einer Kurve ermöglichte. Diese Substanz, die Herr Prof. Dr. K. Egli kurze Zeit vorher darstellte und mir in zuvorkommendster Weise überließ, tl. in frischem Zustande noch als feinstes Pulver so hell, daß man das orangefarbige Licht beim Zerreiben mit einer Messerklinge in der Nähe eines hell glühenden Auerstrumpfes sehen kann. Ein glattes (zwar nicht poliertes) Messingblech, auf dem das Pulver einmal verrieben wurde, wird durch gutes Abreiben mit

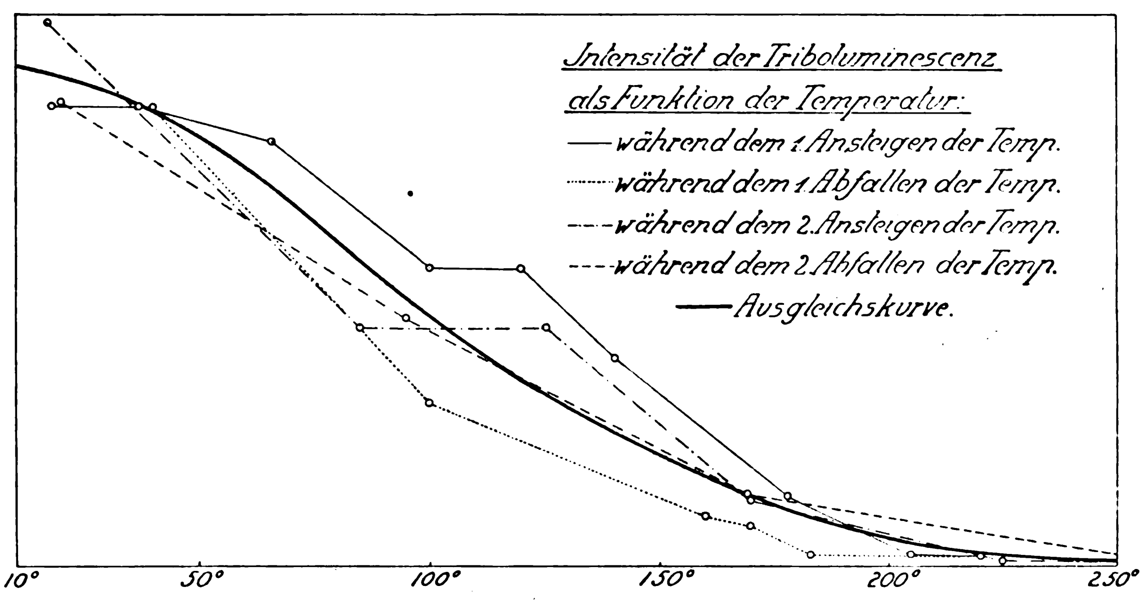


Fig. 1.

trockenen und feuchten Lappen nicht rein genug, um nicht im Dunkeln beim Reiben wieder zu leuchten. Dieses Pulver wurde auf einem Eisenblech gerieben und eine möglichst konstant gehaltene Petroleumlichtquelle (ähnliche Lichtfarbe) von ca. 10 H. K. Lichtstärke horizontal bei verschiedenen Blechtemperaturen soweit weggeschoben, bis die Lumineszenz des Pulvers nicht mehr wahrgenommen wurde. Folgende Tabellen zeigen die zu jeder gemessenen Temperatur mit Hilfe der Distanzen anf die (relativen) Flächenhellen der nächsten Umgebung umgerechneten Werte. Der Koeffizient der diffusen Reflexion brauchte nicht berücksichtigt zu werden, da es sich ja nicht um eine absolute Messung handelte. Vernachlässigt wurde die Veränderlichkeit des Einfallswinkels der Lichtstrahlen (von Petrollicht), was nur einen etwas steileren Abfall der in Fig. 1 gezeichneten Kurve zur Folge hätte; durch die geringe, aber doch vorhandene diffuse Reflexion von der Zimmerdecke her wird dieser Einfluß ungefähr kompensiert. Dasselbe Pulver fand bei ansteigender und abnehmender Temperatur Verwendung. Die Kurve fällt zwischen 60° und 170° steil ab und läuft dann asymptotisch der Temperaturachse entlang aus. Versuche bei 350°—650° zeigten tatsächlich nur noch eine relativ sehr schwache Tl. Immerhin sei erwähnt, daß bei ca. 250° die Intensität noch etwa von derselben Größenordnung ist, die man bei andern Substanzen als „sehr helle Tl." bezeichnet. Der Anfang der Kurve ist so gewählt worden, daß er mit den Resultaten, die bei tiefern Temperaturen gewonnen wurden, in Einklang steht; die Kurve

Temperatur	Relative Lumin. Intens.	Temperatur	Relative Lumin. Intens.
18°	10,00	100°	3.35
37°	10,00	30°	10.00
66°	9,25	17°	11,81
110°	6,51	85°	5.21
120°	6,51	125°	5.21
140°	4.55	170°	1,43
178°	1,52	225°	0,10
205°	0,26	265°	0.07
220°	0,25	169°	1.57
183°	0,27	95°	5.40
170°	0,88	20°	10,08
160°	1,08		

strebt einem bei ca. — 50° liegenden Maximum zu.

Wohl sind die gegenseitigen Abweichungen der Meßreihen groß (sie könnten bei weitern Aufnahmen noch größer werden), aber der ganz allgemeine Charakter der Ausgleichskurve, um den es sich ja nur handeln kann, wird dadurch nicht stark geändert.

Die entsprechende Kurve ist nun sicher nicht bei allen Substanzen von ähnlicher Form, sie fällt gewöhnlich sehr langsam ab, um dann kurz vor dem Schmelzpunkt rasch gegen diesen zu auf Null zu sinken. Dieser letzte Abfall kann freilich, wenn auch unkontrollierbar, bei ZnS nech stattfinden.

Die für das Zinksulfid in Anwendung gebrachte, eigentlich sehr primitive Methode zur Messung äußerst kleiner Lichtstärken kann natürlich sehr vervollkommnet werden. Ich will denn auch später versuchen, damit absolute Messungen durchzuführen.

b) Tribolumineszenz bei tiefern Temperaturen.

Mit Kältemischungen wurden die Kristalle, die in Stanniol eingewickelt oder in kleinen Blechgefäßen waren, erst auf — 18° bis — 20°, dann auf — 30° abgekühlt. Die sämtlichen untersuchten Substanzen lumineszierten soviel stärker, als bei Zimmertemperatur, daß die wenigen Beobachtungen sichere Angaben ermöglichen. Ließ ich Zucker bei 15° in dem nicht ganz vollständig verdunkelten Raum aus ca. 50 cm Höhe fallen, so beobachtete ich nie Licht, bei — 20° aber schon beim Fallenlassen aus 13—15 cm Höhe. Dasselbe gilt von Kupfervitriol, der sonst beim Fallen aus 1 m Höhe nicht tl. Bei — 30° verhält sich auch Quarz so. Die sonst schwach tl. Kristallsole tl. bei — 30° stark.

Folgende Substanzen wurden mit Kohlensäureschnee und Äther auf — 80° abgekühlt, indem sie, an einen Faden gebunden, direkt in die Kältemischung eingetaucht wurden. Die Zertrümmerung erfolgte mit einem zwangsläufig geführten starken Eisenstab. Dieser und die eiserne Unterlage wurden stets auch gekühlt.

Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Substanz	Helligkeit bei —80°	Lichtfarbe	
		bei —15°	bei —80°
Bergkristall	+ + (15)	gelb	blau
	+ (—30)		
Flußspat (weiß) . . .	= (15)		
Zucker	+ (15)	blau-	blau-
„ (Kandis)	= (—20)	weiß	weiß
Kupfersulfat	+ (15)		
	= (—20)		
Urannitrat	= (15)	gelbgrün	grün
Natriumkarbonat . .	+ (15)	weiß	weiß
10 H_2O	= (—30)		
Nickelammoniumsulfat	— (15)		
Natriumsulfantimoniat	o		
Zinksulfid, *Mn* u. *Mg*-haltig, geglüht . .	= (15)	orange	orange

Zeichenerklärung:
+ + ( ) = viel heller, als bei der in der Klammer angegebenen Temp.,
+ ( ) = heller als „
= ( ) = gleich hell wie „
— ( ) = weniger hell als „
o = keine Lum. mehr.

Ich bin überzeugt, daß mehrere Substanzen, namentlich Quarz, Flußspat, Urannitrat, Zucker usw. noch bei viel tieferer Temperatur tl. würden. Leider mußte ich diese Versuche einstweilen aufschieben.

Was die Tl.-Intensität anbetrifft, kann man also folgendes sagen: Das Temperaturintervall, innerhalb welchem die Substanzen tl. sind, ist je nach der Substanz ein anderes; wenn der Schmelzpunkt nicht unter Glühtemperatur liegt, so sind sie bei schwacher Glühtemperatur noch nachweisbar tl. Viele Substanzen tl. noch bei — 80° und sehr wahrscheinlich bei noch bedeutend tieferer Temperatur, einige aber schon bei — 80° nicht mehr.

Mit wachsender Temperatur nimmt die Tl.-Helligkeit bei den meisten Substanzen etwas ab, mit sinkender Temperatur zu, um dann in einem größern oder kleinern Intervall ungefähr konstant zu bleiben und endlich bei den einen (bei zwei Substanzen nachgewiesen) bald auf Null zu sinken, bei den andern wahrscheinlich bei sehr tiefer Temperatur auch.

Jede Substanz tl. mit einer ganz bestimmten Farbe. Für einige Substanzen wurden von unabhängigen Beobachtern bis auf geringe Verschiedenheiten dieselben Farben wahrgenommen. Wenn sich die Angaben von A. Karl[20]), daß nicht die reinen Substanzen, sondern nur feste Lösungen mit einer sehr verdünnten Komponente tl., in Zukunft bestätigen, so dürften bei ein und derselben (nicht absolut reinen) Substanz auch verschiedene Lichtfarben beobachtet werden. Nach Karl variiert nämlich die Farbe mit der Natur des Lösungsmittels und des gelösten Stoffes.

Interessant ist das Ergebnis, daß sich diese Farbe mit der Temperatur etwas verändert, und zwar habe ich beim Erhitzen und beim Abkühlen Verschiebungen nach der kurzwelligen, als auch nach der langwelligen Seite hin beobachtet. Besonders deutlich kann man die Farbänderung bei Quarz wahrnehmen, der bei — 20° gelb, bei — 80° blau lumineszierit; Urannitrat leuchtet bei — 80° in sattem Olivgrün, bei — 20° gelbgrün; Zinksulfid tl. zwischen — 80° und etwa — 200° orangefarbig, bei — 300 — 400° blaugrün. (Nach Becquerel beobachtet man auch bei der Phosphoreszenz solche Farbänderungen.)

In den großen Verschiedenheiten der Funktion, welche zwischen Temperatur und Intensität der Lumineszenz besteht, könnte man vielleicht auch ein Zeichen dafür erblicken, daß es mehr als eine Ursache der Tl. gebe. Es ist noch eine weitere Versuchsserie nötig, um sicher festzustellen, ob es nicht vielleicht auch einige Substanzen gibt, bei denen die Tl. mit wachsender Temperatur zunimmt.

Die triboluminesziernden Substanzen.

Möglicherweise tl. alle Substanzen, welche zur Kristallisation fähig sind, wenn sie eine gewisse Komponente in fester Lösung besitzen; wir wissen das nicht. In diesem Falle würde sich die Aufzählung der tatsächlich als tl. befundenen nur insofern berechtigen, als diese auf Grund ihrer Fabrikation oder ihres Ursprunges immer die Komponente enthalten würden,

welche zum Lumineszenzvermögen nötig ist. Es ist aber ebensowohl möglich und wahrscheinlich, daß es Substanzen gibt, die nicht tl., welche andere Substanz sie auch in fester Lösung enthalten und auch solche, welche in reinem Zustande tl. Dann hätte die Aufzählung ihren Zweck und wäre einfach noch insofern unvollständig, als sie eben nur die Lösungsmittel enthielte.

Die bisher und im folgenden als tl. bezeichneten Stoffe haben die Eigenschaft, sichtbares Licht zu emittieren und es mußte einstweilen angenommen werden, daß diese Eigenschaft den genannten Substanzen selbst zukomme, da man über die oben angedeuteten Komplikationen noch viel zu wenig unterrichtet ist.

Unter den anorganischen Stoffen wurden nach Trautz[7]) bis 1905 285 auf Tl. geprüft, unter den organischen 542. Sie umfassen fast sämtliche frühern Beobachtungen (erste Beobachtung 1660, dann Boyle 1663, Vedgevoud, Dessaignes, P. Heinrich 1820, Tschugaeff 1901). Von den anorganischen zeigten 33 = 11,5 Proz. Tl., unter diesen 15 = 4,2 Proz. temporäre Tl.

Von Gernez[11]) wurden fast gleichzeitig 74 weitere, zu einem großen Teil neue tl. anorganische Salze aufgezählt, wodurch die Prozentzahl vergrößert würde. Er gibt leider nicht an, wieviele Verbindungen er überhaupt geprüft hat.

B. Lindener[16]) (1910) hat unter 110 Mineralien sehr viele tl. gefunden. Eine bestimmte Zahl läßt sich hierbei nicht angeben, weil nicht selten ein und dasselbe Mineral je nach seiner Vorgeschichte usw. lumineszieren kann oder nicht. Betr. der Tl. der Mineralien verweise ich auch auf die interessante Arbeit von A. Karl[20]).

Unter den organischen Substanzen kennt man gegenwärtig nicht weniger als ca. 590, welche tl. (bis 1905 nach Trautz 40 Proz. der untersuchten Fälle; Arbeiten von Tschugaeff, Trautz, Gernez, Van Eck).

In folgender Tabelle sind meine eigenen Beobachtungen zusammengestellt. Die schon früher bekannten sind mit * bezeichnet. (Wiederholungen sind verursacht durch frühere Unkenntnis einiger Arbeiten; sie wurden immerhin erwähnt, da eine Bestätigung nur nützlich sein kann.) Die tl. Substanzen sind gesperrt gedruckt. Ohne die Resultate von Gernez bezweifeln zu wollen, sei doch erwähnt, daß es nicht gerade einwandfrei ist, die Zertrümmerung in einem Glasmörser vorzunehmen, da Glas selbst bei der kleinsten Verletzung tl. Ich habe einen Glaspistill zu je einem Vorversuch verwendet; das Ergebnis aber stets mit einem zwangläufig geführten Eisenhammer nachgeprüft. Vorprüfungen mit Glaspistillen geben wenigstens schon die negativen Resultate an (ein Hammer verdeckt oft das Licht), so daß man sich Material ersparen kann.

Bedeutung der Abkürzungen:

st. = stark; z. = ziemlich,
mst. = mittelstark, s. = sehr,
schw. = schwach, Kr. = Kristalle.

Anorganische Salze.

Aluminiumammoniumsulfat, große Kr., z. st. blau,
Aluminiumkaliumsulfat (gew. Alaun), 2 bis 6 mm Kr., z. st. blau,
*Aluminiumnitrat, 4—9 mm Kr., z. st. blauviolett,
Ammoniumkarbonat, 2—4 cm Kr., schw.,
Ammoniumchlorid, 1,5—4 cm Kr.,
Ammoniummolybdat, 5—8 mm Kr., mst.,
Ammoniumnitrat, geschmolzen zu Stangen (rhombisch),
Ammoniumnitrat, geschmolzen, auf 100° erhitzt (rhomboedr.),
Ammoniumsulfat, geschmolzen, 1 cm Stücke,
Bleinitrat, 1—6 mm Kr., schw.,
Borfluorkalium, zusammengeb. Pulver,
Borsäure, Blättchen und geschmolzen,
Calciumbromid, weiße, sehr poröse Stücke,
Calciumchlorid, geschmolzen zu 7 mm Stangen, wasserfrei, mst.,
Calciumchlorid, $6 H_2O$, 5—12 mm Kr.,
„ „ $6 H_2O$, geschmolzen,
Calciumchloridammoniak, 3—7 mm Stücke,
Calciumnitrat, $^1/_2$—$2^1/_2$ mm Kr., z. schw. blaugrün,
*Cadmiumsulfat, $^3/_8 H_2O$, 5 mm Kr. mst. gelb mit etwas violett,
Ceriumnitrat, 2—5 mm Kr.,
Chromalaun (Ammoniak), 1—4 mm Kr.,
Chromalaun (Kali), 1—3 cm Kr.,
Chromnitrat, 3—5 mm Kr.,
Chromsulfat, feinkrist.,
Eisenammoniumchlorid, $^1/_4$—$3^1/_2$ mm Kr.,
Eisenammoniumsulfat (Alaun), 1—3 cm Kr., z. st.,
Eisensulfat, 3—15 mm Kr.,
Kaliumbichromat, 3—15 mm Kr.,
Kaliumchromat, 2—4 mm Kr., schw.,
Kaliumkarbonat (Potasche) i. Kr. Wasser geschm. u. m. H_2SO_4 getrocknet,
Kaliumchlorat, geschm. in 5 mm Stangen,
Kaliumpermanganat, 1—3 mm kr.,
Kobaltkaliumsulfat, 2—4 mm Kr., s. schw.,
Kupferammoniumsulfat, 3—8 mm Kr. s. schw.,
Kupferkaliumsulfat, $6 H_2O$, 3—6 mm Kr., schw.,
Kupferkaliumchlorid, 1—6 mm Kr.,

*Kupfersulfat, 5 H_2O 1/2—2 cm Kr., mst.,
Lithiumchlorid, 2—5 mm Stücke aus sehr feinen Kriställchen,
Lithiumnitrat, 5 mm dicke Tafeln,
Magnesiumammoniumarseniat, Pulver,
*Magnesiumammoniumsulfat, 6 H_2O 2 bis 4 mm Kr., z. st.,
Magnesiumammoniumsulfat, krist. anderer Herkunft, s. schw.,
Magnesiumnatriumsulfat, 3—15 mm Kr., mst. grün,
Magnesiumchlorid, feinkrist. (naß),
Magnesiumnitrat, 1/2—2 mm Kr.,
Manganammoniumsulfat, 2—8 mm Kr., s. schw.,
Mangankaliumsulfat, 1—4 mm Kr., z. st. gelb,
Mangandioxyd, 5—6 mm Stücke,
Mangansulfit, (Oxydul) 3—9 mm Kr., z. st. grünlich,
*Natriumammoniumphosphat, gr. Kr. z. st.,
Natriumammoniumsulfat, 1—2 mm Kr., z. schw.,
Natriumarseniat, 2—6 mm Kr., feucht, z. st. blauviolett,
Natriumbisulfat, 5—15 mm Kr., z. st.,
Natriumbisulfat, geschmolzen, wasserfrei, 4 mm Tafeln, s. schw.
Natriumchlorat, 1/2—3 mm Kr., s. schw.,
*Natriumchlorid, natürl. Steinsalz, gr. Kr., schw.,
Natriumchlorid, Kochsalz, 1—1 1/2 mm Kr.,
*Natriumchlorid, geschmolzen zu Tafeln, s. st. blauweiß,
Natriumkarbonat, 10 H_2O, gr. Kr. schw. weiß,
Natriumkarbonat, 1 H_2O, Kristallklumpen,
Natriumkarbonat, 0 H_2O, geschmolzen zu Tafeln,
Natriumphosphat, 2-basisch, 4—8 mm Kr., z. st.,
Natriumsulfat, wasserfrei, geschmolzen zu Tafeln,
Natriumsulfat, feinkrist.,
Natriumsulfantimoniat, (9 H_2O) 3—15 mm Kr., schw.,
Natriumnitrat, 1/2 mm Kr.,
*Natriumtetraborat, 10 H_2O, gr. Kr., st.,
Natriumtetraborat, 5 H_2O, feinkrist.,
Natriumtetraborat, 0 H_2O, geschmolzen 5 mm Scherben,
Natriumthiosulfat, 3—4 mm Kr.,
*Nickelammoniumsulfat, 4—12 mm Kr., mst.,
Nickelammoniumsulfat, 4—15 mm Kr., von anderer Quelle, alt, nicht tl.,
Phosphorwolframsäure, feinkrist.,
Quecksilberammoniumchlorid, harte 3—5 mm Stücke,
Quarz, geschmolzen, zu Röhrchen, st.,
Schwefel, rhomb., 5—15 mm Kr.,
Schwefeleisen FeS, gegossen in Platten,
Strontiumchlorid, feinkrist.,
*Uranylnitrat, 2—4 mm Kr., st. hellgrün,
*Uranylkaliumsulfat, 3 mm Stücke und Pulver, s. st. tl. grünblau,
Wolframsaures Calcium, Pulver (für Schirme), schw. blaugrün,
Zinkammoniumsulfat, 2—5 mm Kr., z. st.,
Zinkkarbonat, 1—3 mm Kr., z. schw.,
Zinkkaliumchlorid, 1/2 mm Kr. u. geschmolzen,
*Zinkkaliumsulfat, 3—10 mm Kr., st. bläulich,
*Zinksulfid, mangan- und mangnesiumhaltig, geglüht, Pulver, s. st. orange,
Zinnsulfid, SnS_2 geglüht (Musivgold), grobes Pulver.

Mineralien.

Apophyllit, schw.,
Asbest (grün),
Epidot, edler, dunkelgrün,
Epidot, grün, z. schw. rotviolett,
Granat (Pyrop.),
Marienglas (Kaliglimmer),
Serpentin $H_4Mg_3Si_2O_9$,
Turmalin, grün,
Talk (weiß) $H_2Mg_3Si_4O_{12}$,
Vesuvian
*Willemit (grüne Kr.) Zn_2SiO_4 s. st.,
*Bergkristall, s. st. gelb,
*Chalcedon, s. st. gelb,
Halbopal,
Rutil TiO_2 große Kristalle,
Anatas, TiO_2, 1—3 mm Kr.,
Faseriger Brauneisenstein $2\,Fe_2O_3\;3\,H_2O$,
*Kalkspat, s. schw.,
Kalksinter, z. schw.,
Aragonit, z. schw.,
Strontianit,
Eisenspat, $FeCO_3$,
*Kryolith, $3\,NaF\,AlF_3$ z. schw.,
*Flußspat, grün, st.,
*Flußspat, weiß und grünlich, m. st.,
*Steinsalz, schw.,
Alaun,
*Fasergips, schw.,
*Anhydrit,
Wavellit, $3\,Al_2O_3\,2\,P_2O_5 + 12\,H_2O$, grün, strahlig, s. schw.,
Apatit, $3\,Ca_3P_2O_8 + Ca\,(Cl, F)_2$ s. st. ca. 1/10 sec nachleuchtend,
Pyrit, FeS_2.

Amorphe Substanzen.

*Glas, einige verschiedene Sorten, mst. auch in verd. Säure, blau und violett.
Kupolofenschlacke, dunkelgrün bis schwarz (aus Gießerei für Grauguß), rote u. violette Funken, an einzelnen Punkten konzentriert.

Abspringen rot leuchtender (glühender?) Teilchen; wahrscheinlich Wärmefunken,
*Chalcedon, s. st.,
Quarz, geschmolzen, s. st.,
Halbopal,
*Porzellan,
Weißer Ton, gebrannt,
Serpentin,
Borax, geschmolzen zu 5-mm-Platten, wasserfrei,
Borsäure, geschmolzen zu 4-mm-Scherben,
Arsenige Säure, glasig in $^1/_2$ bis 1 cm Stücken,
Retortenkohle, Kolophonium (bei 6^0), Leim.
Steinkohlenkoks,
Zucker, geschmolzen.

Die Tabellen gestatten nun, einige Konsequenzen zu ziehen:

Die Zahl der anorganischen von mir geprüften Salze beträgt 75 (ohne Mineralien), bzw. 87, wenn solche mit verschiedenem Kristallwassergehalt als verschiedene Salze betrachtet werden. Davon tl. deren 38, bzw. 41, das sind 51 Proz., bzw. 47 Proz. Läßt man die Doppelsalze beiseite, so tl. ca. 25 Proz. der einfachen Salze.

Von den 22 geprüften Doppelsalzen tl. deren 16; dabei fällt folgendes auf: Fast alle anorganischen Doppelsalze, welche Sulfate sind von Kalium oder Ammonium (wahrscheinlich auch der andern Alkalimetalle) und eines andern Metalls tribolumineszieren, und alle, welche Chloride der genannten Metalle sind, tl. nicht.

Außer den in der Tabelle enthaltenen Sulfaten führe ich noch einige Beispiele an, die Gernez gefunden hat: Sulfat von Li und K; Mg und K; Ni und K; Uranyl und K; Zn und Tl.

Die wenigen Ausnahmen waren entweder gepulvert oder fein kristallisiert, oder es sind Chromalaune. Chrom scheint aber, wie kaum ein anderes Element, der Tl. ungünstig zu sein. Unter den genannten Sulfaten sind nicht etwa nur die Alaune, bei denen eine Übereinstimmung im Verhalten viel eher erwartet würde, sondern auch andere Sulfate von der angegebenen Zusammensetzung. Nun ist Kaliumsulfat für sich allein stark tl., nicht aber die Sulfate von Ammonium und Natrium; ferner ist Kaliumchlorid für sich tl. Diese Regelmäßigkeiten im Lumineszenzvermögen der Doppelsalze erklären sich also nicht, wie man wohl erwartet hätte, dadurch, daß das eine Glied tl. würde; es ist dies ein ziemlich merkwürdiges Resultat.

Wenn man nach solchen Gesetzmäßigkeiten sucht — für die organischen Substanzen sind schon einige bekannt —, so ist die Zahl der untersuchten Fälle immer noch zu klein. Bei vielen Salzen ist auch die Tl. nur nicht wahrgenommen worden, so daß eine Reihe von Beobachtungen wiederholt werden müssen. Das größte Hindernis liegt aber darin, daß nur sehr stark tl. Substanzen auch fein kristalliert oder gar pulverförmig noch tl. und doch kristallisieren viele Salze nie in großen Kristallen. In einigen solchen Fällen habe ich die erstarrten Schmelzen (H_2O-haltige im Kristallwasser geschmolzen) geprüft, aber es gibt gerade unter den schwer auskristallisierenden Salzen nicht wenige, deren Schmelzen bald unter dem geringsten Schlag wieder in feine Kriställchen zerfallen oder sie verlieren H_2O und man erreicht nichts damit. Noch andere Salze verraten ihr Geheimnis nicht, weil sie sehr stark hygroskopisch sind oder in einem Bimstein ähnlichen, porösen Zustand (z. B. $CaBr_2$). Weitere Täuschungen können etwa durch die nicht seltene temporäre Tl. verursacht werden.

Ich habe diese Bemerkungen eingeschaltet, weil man sonst an der Richtigkeit mancher vielleicht begründeter Gesetzmäßigkeit — wegen der Häufigkeit der Lücken — zweifeln müßte. Wirkliche Ausnahmen gibt es aber, sicher wenigstens in den noch folgenden Gruppen, auch ohne daß man Gründe angeben könnte.

Eine große Zahl aller Mineralien kann man z. B. nicht durch ihre Eigenschaft der Tl. kennzeichnen, da unter ihnen die größte Unbestimmtheit beobachtet wird. Während ich z. B. Willemit als die am zweitstärksten tl. Substanz befunden habe (auch andere beobachteten Tl.), bemerkte B. Lindener gar nichts; ähnliche, weniger krasse Fälle gibt es mehr (Kalkspat, Gips, Asbest usw.). Anderseits gibt es Mineralien, wie z. B. Bergkristall, Flußspat u. a., von denen mit großer Sicherheit jeder Kristall leuchtet (CaF_2 je nach Farbe verschieden stark, aber, wie ich durch Vergleichung meiner Beobachtungen mit denen von Lindener u. a. fand, besteht zwischen den Exemplaren gleicher Farbe Übereinstimmung).

Außer der oben genannten Gesetzmäßigkeit konnte ich eine weitere feststellen, die viel eher erwartet werden mußte. Man kann im allgemeinen sagen, daß wenn anorganische Salze chemisch nahe verwandt sind, sie sich hinsichtlich der Tl. gleich verhalten[25]). Die beweisendsten Gruppen sind in Tabellenform zusammengestellt. Ich habe diese Form der Darstellung gewählt, weil sie sehr übersichtlich ist und sofort zeigt, wo noch Lücken vorhanden sind. Zum Teil wird es gelingen, diese auszufüllen.

Die Gruppen mit den meisten bis jetzt bekannten Vertretern sind die der Allkalimetall-

	K	Na	Li	NH_4	Ba	Sr	Ca	Mg
F	○	●	?	●	?	?	●	?
Cl	●	●	○	●	●	●	●	○
Br	●	●	?	?	●	○	○	?
J	●	●	?	?	○	○ G	○	?
ClO_3	○	●	?	?	●	●	○	○
BrO_3	●	●	?	?	●	●	●	●
JO_3	●	○	?	?	○	○	○	?
CO_3	○	●	○	●	○	○	●	○
HCO_3	●	●	?	?	?	?	?	?
NO_3	●	○	○	○	●	●	●	○
MoO_4	●	●	?	●	?	?	●	●

Zeichenerklärung:

● tribolumineszent.
○ nicht tribolumineszent, Tl. jedoch nicht ausgeschlossen, weil noch keine großen Kristalle untersucht.
$\overline{●}$ oder $\overline{○}$ wasserfrei.
? noch nicht auf Tl. geprüft.

Fig. 2.

Halogenide, der Erdalkalimetall-Halogenate und Nitrate.

Die Sulfate, welche bei den Doppelsalzen wegen ihres gleichmäßigen Verhaltens auffielen, zeigen hier keine Regelmäßigkeit. Sie gehören zu der großen Zahl der Verbindungen, bei denen man aus ihrer Verwandtschaft nicht auf die Tl. schließen kann. Gruppen, in welchen gar kein Salz tl., sind seltener. Hierher gehören z. B. die Bichromate von K, Na, Li, NH_4; die Chlorüre von Fe, Co, Ni ....

Es scheint ziemlich sicher zu sein, daß die Elemente nicht die Fähigkeit der Tl. besitzen, sei es, weil nur Verbindungen diese Eigenschaft haben können oder weil die Großzahl der Elemente fester Formart elektrisch leitend sind. Brugnatelli will zwar bei Schwefel Licht bemerkt haben. Andere und ich selbst konnten nichts bemerken. Auch der Diamant soll tl. (Heinrich, Dessaignes). Hierbei kann es sich aber nicht um die eigentliche Tl. handeln, sondern nur um bloße Funkenentladungen, denn nur vereinzelte Exemplare mit feinen inneren Rissen geben nach längerem Reiben Funken. M. Trautz erwähnt, daß das metallische Bor etwas tl., bemerkt aber dazu mit Begründung, daß es höchstwahrscheinlich Wärmefunken seien.

In ganz besonders schöner Weise wurde die scheinbar sehr kräftige, am Tage sichtbare Tribolumineszenz des metallischen Urans von Herrn Prof. Dr. K. Egli als Verbrennung entpuppt. Schüttelt man nämlich nach seinem Vorgehen etwa bohnengroße Uranstücke während einiger Minuten in einer kleinen Glasflasche (weithalsig), so folgt eine Staubexplosion mit heftiger Feuererscheinung, welche den lose aufgesetzten Pfropfen abhebt. Das Experiment ist gut reproduzierbar. Nach der Explosion sieht man kein Leuchten mehr, wenn man nicht wieder Luft zutreten läßt.

Man kann sich fragen, wie sich ein verschiedener Kristallwassergehalt in bezug auf die Tl. bemerkbar machen werde (bei den Salzen, die mit verschiedener Molekelzahl H_2O kristallisieren, oder welche zu wasserfreien Platten gegossen werden können). Die in der Tabelle enthaltenen Resultate ergeben, wie zu erwarten, folgendes: Salze von im übrigen gleicher chemischer Zusammensetzung, aber verschiedenem Kristallwassergehalt sind hinsichtlich der Tl. als durchaus verschiedene Substanzen aufzufassen. In den meisten Fällen ist das höchste Hydrat tl., so z. B. Kristallsoda mit $10 H_2O$ (nicht mit $1 H_2O$ oder geschm. mit $0 H_2O$), Natriumtetraborat mit $10 H_2O$ (nicht mit $5 H_2O$ oder geschm. mit $0 H_2O$); Natriumphosphat Na_2HPO_4 zweibasisch mit $12 H_2O$ (nicht mit $7 H_2O$); Fasergips (nicht der Anhydrit). Es gibt andere, etwas weniger häufige Beispiele, wo das Salz mit verschiedenem H_2O Gehalt tl., so das Natriumbisulfat, das mit $1 H_2O$ ziemlich stark tl., geschmolzen, wasserfrei, immer noch schwach, ferner (nach Trautz) auch ganz gleich die Acetate von K und Na, (nach Van Eck), die wasserhaltige und wasserfreie Phthalsäure. Endlich kommt noch der umgekehrte Fall vor, wo der wasserhaltige Kristall nicht leuchtet, wohl aber das wasserfreie Salz. Ein Beispiel hierfür ist das Kalziumchlorid, welches, wie ich mich mehrmals überzeugte, mit $6 H_2O$ nicht tl., dagegen ganz deutlich in wasserfreien, geschmolzenen Stangen.

Das sog. Dekrepitationswasser gehört zwar nicht hierher. Wegen einer auffallend starken Wirkung, die ihm vielleicht beim Natriumchlorid zuzuschreiben ist, sei darauf Bezug genommen. Gewöhnliches Steinsalz tl. nämlich nicht hell, während nach übereinstimmenden Beobachtungen von M. Trautz[7]) und mir das geschmolzene Salz sehr heftig tl., auch als Pulver; die Erscheinung ist noch glänzender als bei Bergkristall.

Man findet unter allen Kristallsystemen viele

tl. Substanzen (wenige im quadratischen und asymmetrischen System, jedoch nicht relativ, da in diesen Systemen bekanntlich nicht sehr viele Salze kristallisieren). Interessant wäre zu wissen, wie sich die Polymorphie in der Tl. äußert. In Anlehnung an andere Eigenschaften polymorpher Salze müßte man annehmen, daß sich solche auch hier wie verschiedene Substanzen verhielten. Ich beschränke mich an dieser Stelle darauf, eine kleine Beoachtungstabelle zusammenzustellen, da ich noch nicht über genügende Beispiele verfüge, um ein sicheres Resultat angeben zu können (man beachte immerhin die Übereinstimmung). Die Mineralien sind eben, wie schon erwähnt, unzuverlässig.

Formel	triboluminescent	nichttribolum.	Krist. Syst.
SiO_2	Bergkristall		hexagonal
SiO_2	Tridymit		rhombisch
$CaCO_3$	Kalkspat		hexagonal-rhomboedr.
$CaCO_3$	Aragonit		rhombisch
TiO_2		Rutil	quadratisch (Prismen)
TiO_2		Anatas	quadratisch (Pyramiden)
NH_4NO_3		Ammonium-nitrat	10^0 rhombisch
NH_4NO_3			100^0 rhomboedr.

Gegen die wahrscheinlich nicht durchwegs richtige Behauptung von Van Eck 1911, daß amorphe Substanzen nicht tl., stelle ich folgende Tabelle auf.

Substanz	Lichtfarbe	Helligkeit
Quarz, geschmolzen . . .	gelb	s. st.
Chalcedon	gelb	s. st.
Onyx	rot	st.
Opal	rot	st.
Serpentin (?).		
Glas	violett u. blau	m. st.
Schlacke (v. Grauguß) . . (wahrsch. Temp.-Strahlg.)	rot u. violett	m. st.
Porzellan . . . . (wahrsch. Temp.-Strahlg.)	rot u. blau	

Betr. die Tl. des Glases wurde schon die Vermutung ausgesprochen, daß es sich vielleicht bloß um glühende Teilchen oder elektrisches Reibungslicht handle. Letzteres ist wohl nicht der Fall, denn in verdünnter Schwefelsäure in metallenem Gefäß und Ableitung ist das Leuchten ganz ungeschwächt. Ob im kalten Wasser eine Blauglut der Teilchen ebensogut wie in Luft möglich wäre, ist auch nicht wahrscheinlich. Eine kaum bestreitbare Luminescenz liegt besonders bei geschmolzenem Quarz vor. Bei Serpentin konnte ich nichts bemerken (Exemplare von 2 verschiedenen Fundorten und Farben verwendet), während P. Heinrich bei dunkelgrünen Stücken Tl. beobachtet haben will. Wir können also zusammenfassend feststellen: Die Tl. ist nicht auf den Kristallzustand beschränkt, sondern zeigt sich auch bei einer freilich sehr geringen Zahl von amorphen Stoffen, aber alle tl. amorphen Stoffe sind (nach bisheriger Erfahrung) auch im Kristallzustand bekannt (im Gegensatz zu Harzen, Leimsubstanzen, usw.). Die Lichtfarben deuten jedoch darauf hin, daß es sich bei der größern Zahl der amorphen Substanzen wahrscheinlich um ein Glühen kleiner Teilchen handelt (also nicht um eine Luminescenz). Ich werde darüber weiteren Aufschluß suchen.

Die Bemühungen, Gesetze für die tl. Farben anzugeben, hatten bis dahin keinen Erfolg. Um in dieser Richtung eine Erleichterung zu schaffen, gebe ich eine Zusammenstellung der gegenwärtig ziemlich zahlreich vorliegenden diesbezüglichen Beobachtungen, worin ich die selbst beobachteten Fälle mit * bezeichne.

Es tl. bei Zimmertemperatur:

1. Violett (v), blauviolett (bv), violettweiß (vw).

Kadmiumsulfat (vw), Aluminiumnitrat* (bv), Natriumarseniat* (bv), Arsentrioxyd (bv), Anilinchlorhydrat (v), Salophen (v), Euchinin (v), Salizylsaures Chinin (v).

2. Blau (b), bläulich (bl), blauweiß (bw), grünblau (grb).

Aluminiumammoniumsulfat* (b), Aluminiumkaliumsulfat* (b), Mangankaliumsulfat* (b), Zinkkaliumsulfat* (bl), Natriumchlorid* (bw), Natriumbromid (bw), Natriumjodid (bw), Kaliumchlorid (bw), Kaliumbromid (b), Strontiumbromat (bw), Uranylkaliumsulfat* (grb), [Diamant (b)], Korund Al_2O_3, farbloser und blauer (bl), Wollastonit (b), Baritokalzit von Cumberland (b), Guanajuatit von Chile (b), Kryolit (b), Kryolitionit (b), Chiolith vom Ilmengebirge (bl), Glas (b), Saccharose (bl), Zucker (bl), Salophen (b), Acenaphten (b), Chinasäure (b), *m*-Oxybenzoesäure (b), Aconitin (b), Atropin (b), Chinchonamin (b), Salzsaures Chinchonin (b), Salzsaures Cytisin (b), Salzsaures Orexin (b), Jodwasserstoffsaures Chinin (b), Meconin (b), Orexin (b), *O*-Kresol (bw), Phenolphtalein (b), Pikrotoxin (b), Schwefelsaures Chinidin (b), Schwefelsaures Chinchonin (b), Chinintartrat (b), Chinchonintartrat (b).

3. Grün (g), grünlich (gl), blaugrün (bg), grünweiß (gw).

Magnesiumnatriumsulfat* (g), Mangansulfit* (gl), Uranylnitrat* (g), Kalziumnitrat* (bg), Wolframsaures Kalzium* (bg), Kaliumjodid (gw), β-Naphtol* (g), Pentadecyl-p-tolylketon (g), Hippursäure (g), Schwefelsaures Chinin (gl), Thallin (g).

4. Gelb (ge), blaugelb (bg).

Quarz* (gew. Quarz, Bergkrist. und geschm.) (ge), künstl. Masse von W. S. Andrews ($ZnCO_3 + S +$ Spur $Mn(SO_4)_2$, geglüht) (ge), Mangankaliumsulfat* (ge), Kadmiumsulfat* (ge mit etwas violett), Opiansäure (ge), Phthalsäure (ge), Wasserfreie Phthalsäure (ge), Anthrazen (ge), Cascarillin (ge), Colchicein (ge), Colchicin (ge), Corydalin (bg), Bromwasserstoffsaures Chinchonin (ge), Schwefelsaures Chelidonin (ge), Schwefelsaures Conchinamin (bg), Anthrachinon (ge).

5. Orange (o), goldfarbig (gf).

Zinksulfid, Mn- und Mg-haltig, geglüht* (o), Zunyit, Formel nach Groth $Al_2(SiO_4)_3[Al(OH)F_1Cl_2]_3$ (gf), Tremolit vom Gotthard und Vesuv (gf), Leikofan (gf), Prosopit $2Al(F, OH)_3Ca(F, OH)_2$ (gf).

6. Rot (r), rosa (ra), blutrot (br), karminrot (kr).

Arsenopyrit FeS_2FeAS_2 (br), Korund vom Ural (ra), Rubin (kr), Dolomit (r) (wahrscheinlich Temp.-Strahlg.).

7. Weiß.

Natriumkarbonat*, Cumarin.

Spektren: Zucker, kontin., brechbares Ende bis Linie F; Saccharose gleich wie Zucker; Hippursäure (grün), kontin., brechbares Ende.

Die Zusammenstellung zeigt, daß das Licht in den weitaus häufigsten Fällen blau (ca. 47 Proz.), nicht selten auch gelb oder orange (ca. 25 Proz.), dagegen seltener violett und besonders rot und weiß ist. Das Rot kommt nur bei den Mineralien vor, so daß man sich fragen kann, ob es sich dabei nicht um eine Temperaturstrahlung handle. Ein anschauliches Bild der ungefähren Farbenhäufigkeit über dem sichtbarem Spektrum gibt Fig. 2. Es ist dies natürlich eine Darstellung von Wahrscheinlichkeitswerten, welche aber durch die ziemlich große Beobachtungszahl gerechtfertigt erscheint. In Verbindung damit zeichnete ich eine Schätzungskurve der durchschnittlichen Lichtstärke ein, sie hat ungefähr die Form der Empfindlichkeitskurve des Auges. (Die maximale Lichtstärke würde etwa zusammenfallen mit dem Kulminationspunkt, aber auch im grünen und blauen Teil treten Maxima auf.

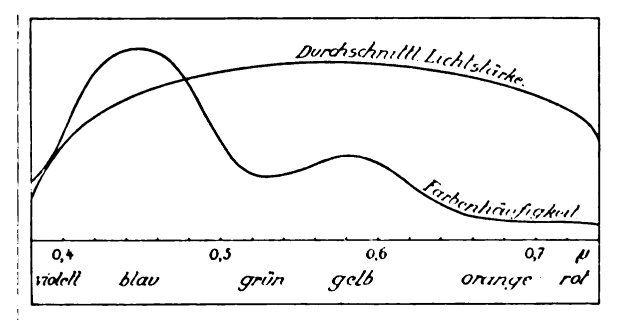


Fig. 3.

Durch was die Farbe, die, wie aus übereinstimmenden Beobachtungen hervorgeht, für ein und dasselbe Material (mit Ausnahme weniger Mineralien) spezifisch ist, bedingt wird, ist nicht ersichtlich, sicher nicht durch das Kation. Ich habe schon mitgeteilt, daß sie von der Temperatur abhängig ist, freilich nicht in dem eindeutigen Sinne, wie dies bei der Temperaturstrahlung der Fall ist. Diese Frage soll durch ausgedehntere Versuche noch genauer beantwortet werden. Van Eck hat mit dem blauen Licht des Salophens die photographische Platte schwärzen können.

Ich benütze zum Schlusse die Gelegenheit, eine Beobachtung mitzuteilen, die zwar in ein Nachbargebiet der Tl. gehört: Flußspat zeigt bekanntlich eine sehr schöne Thermolumineszenz. Der eine, den ich untersuchte (weiß oder hellgrün) zeigte die normale Farbwechselerscheinung, gleichgültig, ob die Temperatur etwas im Ansteigen oder Fallen begriffen war; er wurde erst graugrün, dann violett und nach einiger Zeit (Dauer verschieden, je nach Kristallgröße) wieder grün. Ein anderer aber, von anderem Fundort, von grüner Farbe, wurde stets während der Temperatursteigerung prächtig rubinrot und während des Sinkens der Temperatur ebenso schön smaragdgrün, das sehr oftmals hintereinander. Eine ähnliche Beobachtung wurde meines Wissens nirgends angegeben.

Meinem hochverehrten ehem. Lehrer, Herrn Prof. Dr. K. Egli danke ich für seine zahlreichen fördernden Ratschläge, vielen Literaturangaben und das rege Interesse, mit dem er meine Arbeit stets verfolgt hat, dann auch für die zuvorkommendste Überlassung mancher Materialien. Ebenfalls sehr zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Prof. Dr. A. Bistrzycki für die freundliche Zustellung von Literatur, meinem Freunde Herrn A. Winiger für manche Mithilfe bei den Experimenten und Herrn E. Kotliar für die Übersetzungen aus dem russischen Text.

Zusammenfassung.

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zu den Kenntnissen der Tribolumineszenz im allgemeinen. Die Resultate, welche nach kurzer Einführung in das Gebiet durch eigene Versuche mit gelegentlicher Zuhilfenahme bekannter Beobachtungen mitgeteilt werden, sind folgende:

1. Für jede Substanz gibt es eine spezifische kleinste Kristallgröße, bei welcher sie noch tribolumineszіert. Diese ist um so kleiner, je größer die Lumineszenzhelligkeit und liegt zwischen den ungefähren Grenzen von 0,002—4 mm Durchmesser.

2. Die Tribolumineszenz-Intensität ist eine Funktion der Substanztemperatur in dem Sinne, daß die Helligkeit bei höherer Temperatur geringer ist, als bei tiefer, bei einer gewissen tiefen Temperatur aber wieder abnimmt (Kurve). Die Helligkeitsunterschiede sind bei den verschiedenen Substanzen von ganz verschiedener Größe. Das beobachtete Temperaturintervall liegt zwischen Rotglut und — 80°.

3. Die Tribolumineszenz ist bei phosphoreszierenden Substanzen kaum geschwächt auch dann vorhanden, wenn die Phosphoreszenz durch Erwärmung nahezu verschwunden ist.

4. Es wurden ca. 87 anorganische Stoffe auf Tribolumineszenz geprüft und 25 Proz. als tribol. befunden; ferner wurden eine Anzahl Mineralien und amorphe Substanzen auf dieselbe Eigenschaft hin untersucht.

5. Fast alle anorganischen Doppelsalze, welche Sulfate sind von Kalium oder Ammonium (wahrscheinlich auch der andern Alkalimetalle) und eines andern Metalles tribolumineszieren, und alle, welche Chloride der genannten Metalle sind, tribolumineszieren nicht.

6. Im allgemeinen gilt die Regel, daß wenn anorganische Salze chemisch nahe verwandt sind, sie sich hinsichtlich der Tribolumineszenz gleich verhalten. Eine Anzahl solcher Gruppen wurde zusammengestellt.

7. Elemente tribolumineszieren wahrscheinlich nicht.

8. Salze von im übrigen gleicher chemischer Zusammensetzung, aber verschiedenem Kristallwassergehalt, sind hinsichtlich der Tribolumineszenz als durchaus verschiedene Substanzen zu betrachten. Am häufigsten ist das höchste Hydrat tribolumineszent, aber auch andere Fälle kommen vor.

9. Die Tribolumineszenz ist nicht auf den Kristallzustand beschränkt, sondern zeigt sich auch bei einer sehr kleinen Zahl von amorphen Substanzen, welche auch im kristallisierten Zustand bekannt sind (Tabelle dazu).

10. Eine Zusammenstellung von 88 Substanzen mit den zugehörenden tribolum. Farben wurde gegeben. Das Licht ist in ca. 47 Proz. aller Fälle blau, in 25 Proz. gelb oder orange, seltener violett, sehr selten rot oder weiß; rot nur bei den Mineralien (Kurve der Farbenhäufigkeit und durchschnittl. Lichtstärke als Funktion der Wellenlänge). Die durchschnittliche Lichtstärke ist am größten im Gelb, am kleinsten im Violett (vielleicht Empfindlichkeit des Auges).

11. Die Tribolumineszenz-Farbe ist abhängig von der Temperatur in der Weise, daß sich die Wellenlänge je nach der Substanz in verschiedenem Sinne mit der Temperatur ändert.

12. Es wird ein Fall erwähnt, wo die Thermolumineszenz-Farbe bei ansteigender Temperatur stets gleich bleibt (rot) und sofort bei sinkender Temperatur in eine andere, während des Sinkens auch gleich bleibende Farbe (grün) umschlägt.

Eine neuere Literaturübersicht wird gegeben. Betr. einiger Einzelheiten muß auf den ausführlichen Bericht verwiesen werden.

Literatur und Anmerkungen.

Die ältere Literatur soll nicht wiederholt werden, da sie schon in verschiedenen leicht zugänglichen Arbeiten aufgezählt ist. Diejenigen der hier erwähnten Veröffentlichungen, welche selbst wiederum eine große Zahl von Literaturangaben enthalten, sind mit * bezeichnet. Von 1905 an enthält das folgende Verzeichnis wohl alles, was für die Tribolumineszenz irgendwie von Bedeutung ist.

1) L. Tschugaeff, Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. **34,** 1820, 1901.

2) H. Grüne, „Über phosphoreszierendes Zinksulfid". Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. **15**, 3983, 1904.

3) A. Bistrzycki u. J. Gyr, „Über den tribol. Stammkohlenwasserstoff des Rosanilins". Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. **15,** 3697, 1904.

4) P. Schorigin, „Die Lichterscheinungen während der Kristallisation und die temporäre Tribol.; Über chem. Lumineszenz". Diss. Freiburg i. B. 1905 (Speyer & Kaerner).

5) Eakle u. Scharwood, Eng. and. Min. Journal **77,** 1000, 1904. (Ist ein Bericht über ein bes. schönes Vorkommen der Tribol. an mineral. Zinksulfid.)

6) Trautz u. Schorigin, „Kristallolum. u. Tribolum.". Zeitschr. für wissenschaftl. Photogr., Photochemie usw. **3,** 80, 1905; II, S. 1010.



7) *M. Trautz, Zeitschrift für phys. Chemie 1905, Heft 1 (zusammenfassende größere Arbeit u. Literaturangaben).
8) M. Trautz, „Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Gernez". Diese Zeitschrift **10**, 15/4 (16/3), S. 255—58, 1909.
9) *M. Trautz, Ion. II. S. 77—128, Mai (7/2), Freibg. i. B. (Zusammenfassender Bericht über die Tribo-, Kristallo-, Kryo- u. Lyolum. und Literaturübersicht).
10) Guinchant, Comptes rendus **140**, 1170, 1905.
11) D. Gernez, „Tribolum. des composés métalliques". Comptes rendus. Ac. Ps. **140**, 1905, I, S. 1337—1339.
12) D. Gernez, „Sur la lumière émise par les cristaux d'acide arsénieux", loc. cit. S. 1134.
13) D. Gernez, Annales de chim. et de phys. **15** (8), 516, 1908.
14) D. Gernez, „Sur la tribolum. du sulfate de potassium". Comptes rendus. Ac. Ps. **140**, 1905 I, S. 1234.
15) *B. Lindener, „Tribol. d. Mineralien". Bull. de l'Acad. des sciences de St. Pétersbourg 1910, S. 999—1022 (russ. Spr.).
16) B. Lindener, „Kristallo-, Tribo- u. Pyrolum. v. $KNaSO_4$".
17) W. Wernadski, „Zur Frage nach d. Tribol. (Ref. z. d. 1. Arb. v. Lindener), Bull. Acad. St. Pétersbourg 1037—41, 1910.
18) Ostromisslenski, „Über die Natur der Tribol.". Journal Russ. Phys. Chem. Ges. **42**, 591—606, 10/6.
19) Adrien Karl, „Über die Tribolum. v. zinkhalt. Substanzen". C. r. de l'Acad. des sciences **144**, 841—43 (22/4).
20) Adrien Karl, „Über die Tribolum. von Mineralien". C. r. de l'Acad. des sciences **146**, 1104—6 (25/5).
21) *Van Eck, Pharmaceutisch Weekblad **48**, 581—88 27/5, 611—14 3/6, 654—65 10/6, Febr. 1911 (holländ. Sprache).
22) E. F. Farnau, „Luminescence". The Journal of phys. chem. 1041, 1913.
23) E. F. Farnau, Le Radium **11**, 168-76, 1914.
24) Tl. = Abkürzung für Triboluminieszenz; ferner tl. für triboluminieszieren oder triboluminieszent.
25) Wurde wahrscheinlich schon von M. Trautz vermutet, da seine Zusammenstellung der Salze den Eindruck erweckt, man habe nach Gruppen gesucht.

Zürich, den 27. Januar 1917.

(Eingegangen 3. Februar 1917.)

BESPRECHUNGEN.

W. Capelle, Berges- und Wolkenhöhen bei griechischen Physikern (*Στοιχεῖα*, Studien zur Geschichte des antiken Weltbildes und der griechischen Wissenschaft. V). gr. 8°. III u. 47 S. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1916. M. 2.—

Die ersten Messungen von Bergeshöhen hat der Aristotelesschüler Dikaiarchos von Messene ausgeführt, und zwar um zu zeigen, daß sie gegen den Durchmesser der Erde verschwindend klein seien. Er bediente sich offenbar eines trigonometrischen Verfahrens. Als höchsten Berg fand er den Pelion, dem er eine Höhe von 10 Stadien = 1575 m gab (gegen die wahre Höhe von 1618 m). Er oder seine Nachfolger verallgemeinerten dies Resultat, indem sie 10 Stadien als Höchstgrenze von Bergeshöhen ansahen. Später, als man die Alpen kennen lernte, wurde man gezwungen, die Grenze hinaufzuschieben; sie schwankt von da ab: Poseidonios (1. Jahrh. v. Chr.) nahm 15 Stadien (2362 m) an. — Das ganze Altertum glaubte, Aristoteles folgend, die Region der Winde und Wolken liege unterhalb jener Maximalhöhe, auf Grund eines einzigen Arguments, das der Verf. in die Zeit der alten Peripatetik setzt, daß nämlich die Opferasche auf Bergesgipfeln von Jahr zu Jahr von Wind und meteorologischen Einflüssen unberührt sei. Bergbesteigungen, um diese Verhältnisse zu klären, sind im Altertum nicht unternommen. Aristoteles verdankt seine märchenhaften Angaben über Bergeshöhen und sonstiges geographisches Material, wie der Verf. glaubhaft macht, dem Ktesias oder vielmehr durch diesen dem Hekataios von Milet. — Die Abhandlung ist nicht nur als Quellenstudie wertvoll; der Verf. verfolgt die Behandlung einer naturwissenschaftlichen Einzelfrage im Altertum und gibt dadurch ein Beispiel antiker naturwissenschaftlicher Methode, das auch den Physiker interessieren wird.

Wollenberg.

J. Dolder, Die Fortpflanzung des Lichtes in bewegten Medien. gr. 8°. 22 S. mit 9 Abb. Bern, Akademische Buchhandlung von Max Drechsel. 1916. M. 1.—

Im Gegensatz zur Theorie von Einstein betrachtet die vorliegende Theorie die Längen- und Zeitmaße wieder als Absolutwerte. Sie verwirft auch die Einsteinsche Annahme über die Ausbreitungsform der von einem bewegten leuchtenden Punkt erzeugten Lichtwellen und ersetzt sie, sich stützend auf das bekannte von Fresnel formulierte und von Fizeau experimentell bestätigte Gesetz über die Lichtbewegung in fließenden Flüssigkeiten, durch die neue Annahme, daß das genannte Gesetz auch für die Relativbewegung im freien Äther ($n = 1$) gelten solle. Mit der weiteren Annahme, daß die vom Leuchtpunkt auslaufenden Wellen auch in gleichförmig bewegten Körpern kugelförmig seien, folge nun, daß bei gleichförmiger Translation eines Leuchtpunktes im freien Äther die von

ihm erzeugten Wellen kugelförmig seien und konzentrisch zu der wandernden Lichtquelle.

„Nach dem Gesagten ist nun ersichtlich, daß die bekannten Paradoxien der Theorie von Einstein durch die erwähnte, den bisherigen Anschauungen entsprechende Annahme über die Ausbreitung des Lichtes bedingt sind. Da nach dieser Annahme die Lichtwellen keine Translation besitzen können, so wird die Translation, die in der Natur offenbar den Wellen zukommt, in der Theorie von Einstein mit den Längen- und Zeitmaßen verknüpft, indem diese Maße zu Relativwerten gemacht werden, die von der Translation abhängig sind."

Verf. erklärt dann den Versuch von Michelson sowie die Aberration und das Dopplersche Prinzip.

K. Uller.

Aus Natur und Geisteswelt. Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen. 8. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner.

558. u. 559. Bd.: N. Schmitt, Aufgaben aus der technischen Mechanik. I: Bewegungslehre, Statik. IV u. 62 Seiten; II: Dynamik. IV u. 68 Seiten. Mit zahlreichen Figuren im Text. Geheftet je M. 1.20, geb. M. 1.50.

Die vorstehenden populärwissenschaftlichen Bändchen der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt" enthalten eine Zusammenstellung von fast 300 leichten, zumeist der Maschinenlehre entnommenen und mit Lösungen versehenen Aufgaben aus der technischen Mechanik. Vorausgesetzt werden nur ganz elementare mathematische Kenntnisse sowie eine gewisse Vertrautheit mit den ersten Grundlagen der Mechanik, deren wichtigste Lehrsätze allemal ohne Beweise kurz vorangestellt sind. Die Auswahl der Aufgaben ist offenbar sehr sorgfältig getroffen und recht vielseitig; insbesondere ist es zu begrüßen, daß die Statik und Dynamik der Flüssigkeiten mit einbezogen wurde; vielleicht hätten auch einige einfache Aufgaben aus der Festigkeitslehre beigefügt werden dürfen. Die Lösungen sind zum Teil durchaus originell und geeignet, den Leser ihrerseits zu weiterem Nachdenken anzuregen. Für eine etwaige Neuauflage wäre zu wünschen, daß gerade in einer für Anfänger berechneten Schrift überall die größte Mühe auf sorgfältigsten und eindeutigsten Ausdruck verwendet würde, um jede Irreführung des noch unbewanderten Lesers auszuschließen.

R. Grammel.

Technisches Hilfsbuch von Schuchardt & Schütte. 3. Auflage. 8⁰. XI u. 396 S. m. Abbild. Berlin, J. Springer. 1916. Geb. M. 2.—

Das von der bekannten Werkzeugmaschinenfirma jetzt schon in dritter Auflage herausgegebene technische Hilfsbuch enthält außer den üblichen Tafeln mathematischer, physikalischer, chemischer und technisch wichtiger Zahlenwerte eine kurze, aber äußerst lehrreiche Werkstattkunde. Die einzelnen, mit besonderen Zahlentafeln und kleinen, aber sehr scharfen Abbildungen ausgestatteten Abschnitte derselben, z. B. über Zahnräder, Bohren, Drehen, Fräsen, Schleifen und a. m., beruhen sichtlich auf großer praktischer Erfahrung und lassen das Buch zum Gebrauch in den Mechanikerwerkstätten aller physikalischen und chemischen Hochschullaboratorien geeignet erscheinen.

H. Lorenz.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Zürich Dr. Johannes Brentano (Berichtigung des Namens zu 17, 626, 1916) für Physik, Dr. Ferdinand Gonsetz für Mathematik, speziell höhere Geometrie, an der Technischen Hochschule Graz Dr. Julius Donau für Chemie.

Ernannt: Der Hauptobservator am Astrophysikalischen Observatorium bei Potsdam Geh. Regierungsrat Professor Dr. Gustav Müller zum Direktor dieser Anstalt, der a. o. Professor an der Universität Leipzig Dr. Wilhelm Blaschke zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg.

Rücktritt vom Lehramt: Der Privatdozent für Physik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Ludwig Zehnder mit Schluß des Wintersemester 1916/17.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der analytischen Chemie an der Universität Upsala Dr. Oscar Widman.

Gestorben: Der frühere ord. Professor für Ingenieur-Mechanik, Elastizitätslehre, Wärmetheorie und Aeromechanik an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Jakob v. Weyrauch, der Privatdozent für Chemie an der Universität Berlin, Dozent für Nahrungsmittelchemie, sowie für chemisch-technische Analyse an der Technischen Hochschule in Berlin und Vorstand der Kaiserlichen Technischen Prüfungsstelle Wirklicher Geheimer Oberregierungsrat Professor Dr. Karl von Buchka, der a. o. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Zürich Dr. Emil Joseph Constam, der Direktor der chemischen Laboratorien am Institut National Agronomique in Paris Professor Karl Müntz, Mitglied der Académie des Sciences, der ord. Professor der höheren Geometrie an der Universität (Sorbonne) und ständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften in Paris Gaston Darboux, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Bonn Geh. Regierungsrat Dr Franz London, der emer. ord. Professor der Ingenieurwissenschaften an der Technischen Hochschule Darmstadt Geh. Baurat Dr.-Ing. Eduard Sonne im 89. Lebensjahre, der ord. Professor für Pharmakognosie und pharmazeutische Chemie an der Technischen Hochschule in Zürich Dr. Carl Hartwich.

Angebote.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 5. | 1. März 1917. Redaktionsschluß für No. 6 am 18. März 1917. | 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Konstitution der Mischkristalle.

Von L. Vegard und H. Schjelderup.

Wie bekannt, besitzen eine Reihe von Substanzen die Fähigkeit Mischkristalle zu bilden. Solche Substanzen sind gewöhnlich isomorph. Doch scheint die Verbindung zwischen Isomorphie und Mischbarkeit keine ganz einfache zu sein, und sie ist im Laufe der Zeit der Gegenstand vieler Diskussionen gewesen.

Einerseits findet man Stoffe, die einander kristallographisch fern stehen, die aber imstande sind Mischkristalle zu bilden, während anderseits unzweifelhaft isomorphe Substanzen diese Eigenschaft nicht oder nur für begrenzte Mischungsverhältnisse besitzen.

Auch in bezug auf die Konstitution der Mischkristalle sind die Meinungen geteilt gewesen.

Einige, wie Retgers[1]), fassen sie als Mischungen von rein mechanischer Art auf. Nach ihm muß man sich die Mischkristalle aus dünnen aufeinander gelagerten homogenen Schichten bestehend denken.

Nun haben aber Untersuchungen von Wulf[2]), Goßner[3]) und Tutton[4]) gezeigt, daß die Größe des Molekularvolumens für die Bildung der Mischkristalle eine entscheidende Rolle spielt. Es muß als eine notwendige Bedingung der Mischbarkeit betrachtet werden, daß die Molekularvolumina der beiden Stoffe nicht große Unterschiede aufweisen.

Dies und auch andere Verhältnisse, die für die Bildung und Eigenschaften der Mischkristalle maßgebend sind, haben Goßner zu der Annahme einer innigeren Verbindung der beiden Komponenten geführt.

1) Zeitschr. f. phys. Chemie **3**, 554, 1889.
2) Zeitschr. f. Krist. **42**, 558, 1906.
3) Zeitschr. f. Krist. **43**, 130, 1907.
4) Crystalline Structure and Chemical Constitution. London 1910.

Obwohl aber Goßner wichtige Gründe für die Annahme einer solchen innigeren Verbindung gibt, kennen wir doch die Art dieser Verbindung nicht näher, und da wir nicht die Eigenschaften der Stoffe, wenn sie in sehr dünnen aufeinander gelagerten Schichten auftreten, so genau kennen, ist es auch nicht ausgeschlossen, daß eine Auffassung ähnlich derjenigen von Retgers den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen könne.

Mit Hilfe der experimentellen Mittel, die uns die Röntgenstrahlenanalyse zur Verfügung gestellt hat, ist es indessen jetzt möglich die Struktur der Mischkristalle näher zu erforschen.

Bauten sie sich durch eine Aufeinanderlagerung dünner homogener Schichten der beiden Stoffe auf, so müßte eine solche Konstitution durch den Charakter der Röntgenspektra dadurch erkennbar sein, daß jeder Stoff seine eigenen Maxima mit der für ihn charakteristischen Intensitätsverteilung geben müßte. Das Spektrum des Mischkristalls wäre als eine Superposition der Spektra der beiden Komponenten zu betrachten.

Die andere Möglichkeit dagegen, daß die Mischkristalle als einheitliche Kristalle reflektieren, würde bedeuten, daß die Atome der beiden Komponenten in dasselbe Atomgerüst hineingelagert wären. — In diesem Falle wäre es möglich, daß für gewisse Mischungsverhältnisse die Einlagerung von einer solchen Regelmäßigkeit wäre, daß für gewisse Netzebenen ganz neue Reflexionsmaxima auftreten könnten.

Mit der Absicht die Konstitution der Mischkristalle aufzuklären, haben wir im Physikalischen Institut in Christiania eine Reihe von Versuchen angefangen, und wollen im folgenden einen kurzen Bericht über die Bestimmung der Konstitution einiger Systeme geben.

Bei diesen Versuchen haben wir wie in

einigen früheren Arbeiten[1]), die Braggsche Reflektionsmethode in Anwendung gebracht.

Bis jetzt haben wir die folgenden vier Mischkristalle untersucht:

I. 3 Mol. KBr, 97 Mol. KCl
II. 50 „ „ , 50 „ „
III. 89 „ „ , 11 „ „
IV. 67,5 „ „ , 32,5 „ NH_4Br.

Die Kristalle wurden nicht chemisch analysiert, sondern ihre Zusammensetzung wurde mit Hilfe der von A. Fock gegebenen Kurve[2]) aus der Konzentration der Lösung bestimmt. Dies Verfahren gibt für unsern jetzigen Zweck eine genügende Genauigkeit.

Eine Zusammenstellung der beobachteten Spektra ist in der folgenden Tabelle gegeben. Zum Vergleich sind auch die berechneten Winkel für die reinen Substanzen angeführt:

Substanz	Kristallebene		Intensitätsverteilung
KCl	(100)	5^0 34′	normal
3 KBr, 97 KCl . .	(100)	5^0 34′	66, 27, 9, 2,6
50 KBr. 50 KCl .	(100)	5^0 27′,5	16, 6, 2
	(110)	7^0 39′	13,5, 3,5
	(111)	4^0 42′	2, 22,5, 0,5
89 KBr, 11 KCl . .	(100)	5^0 18′	24, 7,5, 1,8
KBr, ...	(100)	5^0 18′	normal
67,5 KBr, 32,5 NH_4Br	(100)	5^0 17′	28, 12, 4, 1,5
NH_4Br, ...	(100)	5^0 19′,5	normal

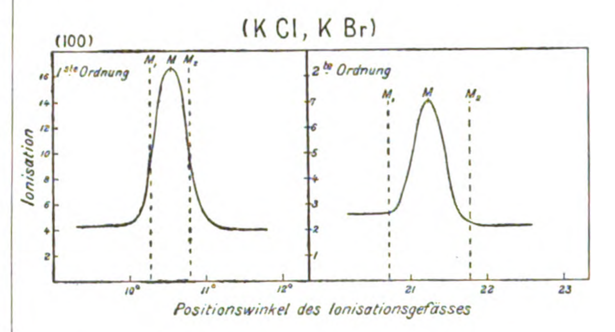
Aus den Zahlen der Tabelle sehen wir, daß die Mischkristalle wie einheitliche Kristalle reflektieren.

Die Flächen (100) und (110), für welche die reinen Komponenten eine normale Intensitätsverteilung geben, zeigen auch bei den Mischkristallen „normale" Spektra. Die Anordnung der Atome im Mischkristall muß also eine solche sein, daß die Netzebenen (100) und (110) gleichwertig und äquidistant sind.

Von besonderem Interesse ist ein Vergleich zwischen den Spektren des Mischkristalls II (Zusammensetzung: 50 Mol. KBr, 50 Mol. KCl) und den Spektren der beiden Komponenten.

Der Verschiedenheit der Molekularvolumina von KBr und KCl entspricht ein Unterschied der Reflexionswinkel, der im Vergleich mit dem möglichen Fehler der Winkelbestimmung ziemlich groß ist. Wäre der Mischkristall aus mechanisch aufeinandergelagerten Schichten der beiden Komponenten zusammengesetzt, müßte man also in seinem Spektrum jedes der beiden Spektra der Komponenten erkennen können. Für den Mischkristall würde man nicht einfache, sondern doppelte Maxima erhalten. — In den beobachteten Spektren finden wir aber keine doppelten, sondern nur einfache Maxima mit Reflexionswinkeln, die zwischen denjenigen der beiden Komponenten liegen.

Nun wäre es indessen denkbar, daß die beobachteten einfachen Maxima dadurch zustande kämen, daß die Maxima der einzelnen Komponenten nicht die für eine Trennung beider genügende Schärfe hätten. — Daß aber eine solche Deutung der Versuchsergebnisse ausgeschlossen ist, geht aus der Figur hervor. Die Kurven



geben die Variation des Ionisationsstroms als Funktion des Reflexionswinkels in der Nähe der Maxima von erster und zweiter Ordnung des Spektrums der Fläche (100). Die punktierten Linien geben die Lage, welche die Spektra der reinen Substanzen haben würden. M_1 und M_2 sind die Lagen der Maxima von KBr bzw. KCl. — Wir sehen sofort aus der Figur, daß die Maxima für den Mischkristall einfach sind. Wir können also das Spektrum des Mischkristalls nicht als eine Superposition der Spektra der beiden Komponenten betrachten.

Dies Ergebnis führt uns zur folgenden Vorstellung über die Konstitution der Mischkristalle:

Die Raumgitter der Kristalle der reinen Komponenten bauen sich aus einer bestimmten Anzahl von Elementargittern auf. In unserem Falle haben wir vier Elementargitter von Alkaliatomen und vier Elementargitter von Halogenatomen. In einem Mischkristall haben wir nun dieselbe Anzahl von Gittern jeder Atomgattung; aber die Elementargitter bestehen jetzt nicht mehr aus derselben Atomsorte, sondern einige Atome der einen Komponente sind durch entsprechende Atome der andern ersetzt. — Durch diese Substitution wird sich das Volumen des Elementargitters ändern. Die Molekularvolumina der beiden Komponenten gleichen sich unter der Wirkung der Atomkräfte (Kristallisationskräfte) aus. In unserm Falle muß sich also das Gitter von KCl ausdehnen, dasjenige von KBr dagegen sich zusammenziehen. Das Gleichgewicht bestimmt sich nach den Untersuchungen von Retgers in der Weise, daß sich das Vo-

1) L. Vegard, Phil. Mag. XXXI, p. 83, XXXII 65, 505, 1916.
2) Zeitschr. f. Kristall. 28, Heft 4 u. 5, 1897.

lumen annähernd additiv aus denjenigen der isomorphen Bestandteile zusammensetzt.

Es ist weiter eine Frage, wie sich die eingelagerten Atome anordnen. Es wäre ja denkbar, daß in gewissen Fällen eine solche Regelmäßigkeit der Anordnung entstehen könnte, daß dadurch neue Reflexionsmaxima aufträten.

Wäre dies der Fall, so sollte man erwarten, besonders einfache Verhältnisse in dem Falle zu bekommen, daß im gemischten Gitter eine gleiche Anzahl der beiden Atomsorten vorhanden wäre. Wir haben deshalb den Mischkristall 50 KCl, 50 KBr sorgfältig untersucht, um möglichst neue Maxima, die einer größeren Gitterkonstante entsprächen, zu finden. Solche neuen Maxima haben wir aber vergebens gesucht.

In unserem Falle würde schon die einfachste regelmäßige und kubische Anordnung für gewisse Netzebenen neue Maxima geben.

Diese Anordnung würde darin bestehen, daß in den Punktreihen parallel den Koordinatenachsen (Seiten des Elementarkubus) die Cl- und Br-Atome regelmäßig abwechselten. Wäre die Seitenlänge des Elementargitters einer der reinen Komponenten a, so würde also der Mischkristall durch Elementargitter von annähernd der doppelten Seitenlänge aufgebaut, und zwar müßten 16 Cl- und 16 Br-Gitter ineinander gesteckt sein. — Die Anordnung der beiden Atomsorten wäre gleich. Wir brauchen deshalb nur die Anordnung der einen Gattung zu betrachten.

Je vier von den 16 Elementargittern setzen sich zu flächenzentrierten Raumgittern zusammen. Wir müssen also vier flächenzentrierte Gitter kubisch anordnen.

Vier Gitter werden kubisch angeordnet, wenn die vier Konstruktionspunkte die Ecken eines Tetraeders bilden. Wählen wir den Konstruktionspunkt eines der vier Gitter als Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, so sind die gesuchten Konstruktionspunkte also durch die folgenden Koordinaten bestimmt:

$$(0, 0, 0), \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right), \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right), \left(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right).$$

Für ein flächenzentriertes Gitter mit Seitenlänge a des Elementargitters wird die Gitterkonstante d einer Netzebene mit Indizes $(h\,k\,l)$ durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$d_e = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \qquad (1a)$$

(wenn h, k, l alle unpaarzählig sind),

$$d = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \qquad (1b)$$

(wenn nicht alle unpaarzählig sind).

Die Gitterkonstante eines flächenzentrierten Gitters mit Seitenlänge des Elementargitters (2a) wird dann:

$$d_e = \frac{2a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \qquad (2a)$$

(wenn h, k und l unpaarzählig), sonst

$$d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}. \qquad (2b)$$

In der betrachteten Richtung haben wir nun die Netzebenen der vier flächenzentrierten Gitter zu superponieren, und es fragt sich, wie dadurch die Gitterkonstanten geändert werden.

Wie sich die Netzebenen der vier Gitter zusammenlagern, sieht man am besten, wenn man die Konstruktionspunkte auf die Normale der Netzebenen projiziert. Die vier Projektionspunkte geben dann die gegenseitige Lage der Netzebenen der vier Raumgitter an.

Der eine Punkt fällt mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammen. Den Abstand von diesem Punkte zu den drei andern nennen wir d_0', d_0'' und d_0''' und bekommen

$$\left.\begin{aligned} d_0' &= \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \frac{h+k}{2} \\ d_0'' &= \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \frac{h+l}{2} \\ d_0''' &= \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \frac{k+l}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Fall A: h, k, l, alle unpaarzählig:
Dann ist d_e durch Gleichung (2a) bestimmt und

$$h = 2n_1 + 1,\ k = 2n_2 + 1,\ l = 2n_3 + 1$$

$$d_0' = \frac{d_e}{2}(n_1 + n_2 + 1)$$

$$d_0'' = \frac{d_e}{2}(n_1 + n_3 + 1)$$

$$d_0''' = \frac{d_e}{2}(n_2 + n_3 + 1).$$

Wie leicht zu beweisen ist, können die drei Größen in den Parenthesen nicht gleichzeitig alle paarzählig sein. Die Netzebenen der vier Gitter können deshalb nicht alle zusammenfallen.

Da d_0 jedesmal ein Multiplum von $\frac{d_e}{2}$ ist, können auch nicht die Ebenen sämtlicher vier Gitter alle getrennt auftreten.

Es gibt dann nur zwei Möglichkeiten: 1. Die Netzebenen der vier Gitter fallen paarweise zusammen. 2. Drei fallen zusammen, und eine liegt allein.

Im ersten Falle ist der Abstand zwischen

zwei gleichwertigen Netzebenen, also die Gitterkonstante:

$$d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}.$$

Dies ist nach (1a) der Ausdruck für die Gitterkonstante einer der Komponenten.

Der Fall (1) ist aber nicht möglich. Denn in diesem Falle müßte eine der Parenthesen paarzählig sein, zwei unpaarzählig sein. Also könnte man setzen:

$$n_1 + n_2 + 1 = 2\alpha + 1$$
$$n_1 + n_3 + 1 = 2\beta + 1$$
$$n_2 + n_3 + 1 = 2\gamma$$

wo α, β, γ ganze Zahlen bedeuten. Durch Elimination von n bekommen wir aber:

$$n_2 - n_3 = 2(\alpha - \beta)$$
$$n_2 + n_3 + 1 = 2\gamma$$

oder es müßte $2n_2 = 2(\alpha - \beta + \gamma) + 1$ sein, was unmöglich ist.

Wir kommen also zu dem folgenden Resultat: Nur der Fall ist möglich, für welchen drei Netzebenen zusammenfallen und eine vereinzelt bleibt. Durch die Aufeinanderlagerung der vier flächenzentrierten Gitter wird die Gitterkonstante nicht geändert. Für alle Netzebenen mit Indizes h, k, l, die alle unpaarzählig sind, würde also die angenommene regelmäßige Anordnung für den Mischkristall die folgende Gitterkonstante geben:

$$d = \frac{2a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}},$$

während für dieselbe Ebene die Gitterkonstante der einen Komponente durch (1a) bestimmt ist.

Fall B: h, k, l sind nicht alle unpaarzählig. Als Indizes können nicht alle paarzählig sein. Von den drei Größen der Gleichung (3):

$$h + k,\ h + l,\ k + l$$

müssen deshalb zwei unpaarzählig und eine paarzählig sein. Durch die Zusammenlagerung der vier flächenzentrierten Gitter werden folglich die Gitterkonstanten halbiert, und wir bekommen für den Mischkristall den Ausdruck:

$$d_{hkl} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}.$$

Wir gelangen demnach zu folgendem Satze: Sehen wir von der Änderung des Molekularvolumens ab, so würde die angenommene regelmäßige Substitution von Cl durch Br die Gitterkonstanten aller derjenigen Reflexionsebenen unverändert lassen, für welche die Indizes h, k, l nicht alle unpaarzählig sind, sonst würde durch die Substitution eine Verdoppelung der Gitterkonstanten eintreten.

Von den von uns untersuchten Flächen ist es nur die (111)-Fläche, für welche eine Verdoppelung der Gitterkonstante eintreten sollte. Die dadurch bedingten neuen Maxima haben wir aber nicht beobachten können. Da sie aber der Theorie nach für Mischkristalle von KCl und KBr sehr schwach sein müßten, ist es dennoch nicht ganz ausgeschlossen, daß sie wirklich vorhanden, aber nur zu schwach für die Beobachtung seien. Eine endgültige Entscheidung der Frage, ob für gewisse Flächen der Mischkristalle neue Maxima auftreten können, ist deshalb künftigen Untersuchungen, die wir über andere Mischkristalle vornehmen zu können hoffen, vorbehalten.

Sollte es sich durch diese bestätigen, daß wirklich keine neuen Maxima aufträten, so würde dies darauf hindeuten, daß die Annahme einer regelmäßigen kubischen Substitution aufgegeben werden müßte. Die Substitution müßte nur eine statistisch gleichmäßige sein, derart daß ein jedes ausgewähltes Punktelement (Punktreihe, Netzebene) von Cl-Atomen nach der Substitution durchschnittlich die gleiche Anzahl Cl- und Br-Atome enthielte.

Christiania, Physikalisches Institut, 8. Februar 1917.

(Eingegangen 15. Februar 1917.)

Zur Quantelung der Hohlraumstrahlung.

Von A. Rubinowicz.

Debye[1]) hat für das Plancksche Strahlungsgesetz eine überaus elegante Ableitung gegeben, die auf die Mitwirkung von Resonatoren vollständig verzichtet. Er betrachtet die in einem blanken Jeansschen Würfel eingeschlossene elektromagnetische Strahlung und macht die Annahme, daß der auf die einzelnen Freiheitsgrade des Vorganges entfallende Energiebetrag gleich einem ganzzahligen Vielfachen eines Energiequantums $h \cdot \nu$ ist. Für den Fall der maximalen Entropie wird dann die spektrale Energieverteilung im Würfel durch die Plancksche Formel gegeben.

In der vorliegenden Note möchte ich nun zeigen, daß die von Debye gebrauchte Vorstellung der Energiequanten sich bei der Hohlraumstrahlung aus den Annahmen der neuesten,

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 33, 1427, 1910.

von Sommerfeld[1]) und Planck[2]) für mehrere Freiheitsgrade ausgebauten Quantenlehre ergibt und daß demnach die Debyeschen Überlegungen auch von diesem neuen Standpunkte aus gesehen als durchaus einwandfrei und völlig beweiskräftig zu gelten haben.

Der Weg, den wir im folgenden gehen müssen, ist uns durch Sommerfeld[1]) und Epstein[3]) eindeutig vorgezeichnet. Es sind zunächst jene kanonischen Veränderlichen q_i, p_i aufzusuchen, in denen sich die zu unserem Problem gehörige Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung durch Separation der Variablen integrieren läßt. Die tatsächlich stattfindenden Vorgänge sind dann dadurch ausgezeichnet, daß für sie die den einzelnen Koordinaten entsprechenden Phasenintegrale $\int p_i dq_i$ einem ganzzahligen Vielfachen des Wirkungsquantums h gleich werden. Für die Integrationsgrenzen gilt dabei die Vorschrift, daß eine jede Koordinate q_i den zur eindeutigen Bezeichnung der Zustände des Systems erforderlichen Bereich zu durchlaufen hat.

Kanonische Variable und Hamiltonsche Funktion lassen sich nun für die Hohlraumstrahlung im blanken Würfel ohne Schwierigkeiten angeben[4]). Es kann hier nämlich jeder elektromagnetische Vorgang als eine Überlagerung der durch das nachstehende System von Gleichungen dargestellten Eigenschwingungen aufgefaßt werden[5]):

$$E_x = (\alpha q + \alpha^* q^*) \cos\frac{a\pi x}{l} \sin\frac{b\pi y}{l} \sin\frac{c\pi z}{l}$$

$$E_y = (\beta q + \beta^* q^*) \sin\frac{a\pi x}{l} \cos\frac{b\pi y}{l} \sin\frac{c\pi z}{l}$$

$$E_z = (\gamma q + \gamma^* q^*) \sin\frac{a\pi x}{l} \sin\frac{b\pi y}{l} \cos\frac{c\pi z}{l}$$

$$H_x = \left(\frac{\alpha^*}{2\pi\nu}\dot{q} + \frac{\alpha}{2\pi\nu}\dot{q}^*\right) \sin\frac{a\pi x}{l} \cos\frac{b\pi y}{l} \cos\frac{c\pi z}{l}$$

$$H_y = \left(\frac{\beta^*}{2\pi\nu}\dot{q} + \frac{\beta}{2\pi\nu}\dot{q}^*\right) \cos\frac{a\pi x}{l} \sin\frac{b\pi y}{l} \cos\frac{c\pi z}{l}$$

$$H_z = \left(\frac{\gamma^*}{2\pi\nu}\dot{q} + \frac{\gamma}{2\pi\nu}\dot{q}^*\right) \cos\frac{a\pi x}{l} \cos\frac{b\pi y}{l} \sin\frac{c\pi z}{l}$$

1) A. Sommerfeld, Münchn. Ber. S. 425 u. 459, 1915; S. 131, 1916; Ann. d. Phys. 51, 1 u. 125, 1916.

2) M. Planck, Verh. d. Deutsch. phys. Ges. 17, 407 u. 438, 1915.

3) P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 50, 489 u. 51, 168, 1916. Siehe auch K. Schwarzschild, Berl. Ber. S. 548, 1916.

4) H. A. Lorentz, Nuovo Cimento, Serie V, Vol XVI, 1908 oder auch dessen Vortrag auf dem Solvay-Kongreß 1911.

5) Vgl. M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung, 2. Aufl. S. 175, Leipzig 1913.

Dabei sind als Koordinatenachsen die drei Würfelkanten genommen, und es bedeutet: l die Länge dieser Kanten, a, b, c irgend drei positive ganze Zahlen,

$$\nu = \frac{c}{2l}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$q = A \cos 2\pi\nu(t - t_0) \text{ und}$$

$$q^* = A^* \sin 2\pi\nu(t - t_0).$$

α, β, γ und α^*, β^*, γ^* sind die Richtungskosinus zweier Richtungen, die aufeinander und auf der durch a, b, c bestimmten Richtung senkrecht stehen. ν ist die Schwingungszahl der durch die obige Partiallösung dargestellten Eigenschwingung. Die ihr entsprechenden Normalkoordinaten q und q^* sollen im folgenden durch q_i allein bezeichnet werden.

q und q^* sind nun bereits die gesuchten Koordinaten der Hohlraumstrahlung. Denn wird jetzt die elektrische bzw. magnetische Energie unserer Strahlung berechnet:

$$U = \tfrac{1}{2}\int\int\int_0^l \mathfrak{E}^2\, dx\,dy\,dz = \frac{l^3}{16}\Sigma q_i^2$$

$$T = \tfrac{1}{2}\int\int\int_0^l \mathfrak{H}^2\, dx\,dy\,dz = \frac{l^3}{16}\Sigma \frac{\dot{q}_i^2}{4\pi^2\nu^2}$$

so zeigen die beiden so erhaltenen Ausdrücke eine weitgehende Analogie[1]) mit der potentiellen bzw. kinetischen Energie, indem sie (wie sich dies aus der analytischen Darstellung von q und q^* sofort ergibt) den Lagrangeschen und mithin auch den übrigen Gleichungen der Mechanik formell genügen. Wir sind demnach imstande, mit Hilfe der Koordinaten q_i den ganzen elektromagnetischen Vorgang durch die Gleichungen der Mechanik zu beschreiben. Dies legt die Annahme nahe, daß die Quantelung unserer Hohlraumstrahlung durch die Vermittelung der Koordinaten q_i ebenso wie die eines mechanischen Systems zu geschehen hat.

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung ist jetzt unmittelbar in der Form

$$(H)\quad \frac{4}{l^3}\Sigma^i\, 4\pi^2\nu^2\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 + \frac{l^3}{16}\Sigma^i q_i^2 = \text{const}$$

hinzuschreiben, indem man in der Energiegleichung $T + U = \text{const}$ die Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ durch die Impulse

1) Die Analogie zwischen der elektrischen und magnetischen Energie einerseits und der potentiellen und kinetischen andererseits wird noch eindringlicher durch ein dem Hamiltonschen Prinzip verwandtes elektromagnetisches Variationsprinzip vor Augen geführt, worauf hier nicht näher eingegangen werden kann. (Siehe z. B. H. A. Lorentz, Enz. d. Math. Wiss., V, 13, oder auch oben loc. cit.)

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{l^3}{8} \cdot \frac{\dot{q}_i}{4\pi^2 \nu^2}$$

eliminiert und hierauf p_i durch $\frac{\partial S}{\partial q_i}$, d. h. durch die entsprechende Ableitung der Jacobischen Wirkungsfunktion S ersetzt. Da sich (H) schon in den Variablen q_i separieren läßt, sind auch in den gleichen Koordinaten die Quantenbedingungen $\int p_i dq_i = n \cdot h$ anzuschreiben, wobei die Integration offenbar über die ganze Periode der Schwingung zu erstrecken ist. Für den Fall $q_i = q = A \cos 2\pi\nu(t-t_0)$ muß also

$$\int p_i dq_i = \int p_i \dot{q}_i dt = \int_0^{1/\nu} \frac{l^3}{8} \frac{\dot{q}_i^2}{4\pi^2\nu^2} dt = \frac{l^3}{16} \frac{A^2}{\nu} = n \cdot h$$

werden. Daraus folgt aber, daß die der Koordinate $q_i = q$ entsprechende Energie gleich

$$E = \frac{l^3}{16}\left(q_i^2 + \frac{\dot{q}_i^2}{4\pi^2\nu^2}\right) = \frac{l^3}{16} A^2 = n \cdot h\nu$$

ist[1]). Die den einzelnen q_i (d. h. den einzelnen Freiheitsgraden der Hohlraumstrahlung) entsprechende Schwingungsenergie kann nur in Energiequanten auftreten.

Schließlich sei noch erwähnt, daß diese Betrachtungen sich auch für beliebig gestaltete Hohlräume durchführen lassen. Das elektromagnetische Feld braucht nun nur nach den Eigenfunktionen[2]) des Hohlraumes entwickelt zu werden, dann stellen die entsprechend normierten Zeitfunktionen, als Normalkoordinaten betrachtet, wiederum die elektrische und magnetische Energie des Feldes ebenso einfach dar wie beim Würfel.

1) Die Rechnung verläuft hier ebenso wie bei einem Planckschen Resonator und demgemäß ist hier das Resultat das gleiche. Vgl. A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **51**, 10, 1916.

2) F. Hasenöhrl, diese Zeitschr. **7**, 37, 1906.

München, Institut f. theoret. Physik.

(Eingegangen 24. Februar 1917.)

Bemerkung zur Ionisierung der Gase durch Wärmebewegung.

Von F. v. Hauer.

In einer kürzlich erschienenen Mitteilung[1]) habe ich an der Hand einer daselbst abgeleiteten Formel gezeigt, daß die in Gasen auch bei Abwesenheit radioaktiver Stoffe bestehende Restionisierung nicht durch Stoßionisierung (im gebräuchlichen Sinne des Wortes) infolge der Wärmebewegung der Atome erzeugt sein kann, sondern auf andere Umstände zurückgeführt werden muß. Herr Prof. Simon hatte die Güte mich darauf aufmerksam zu machen, daß eine mit der obengenannten gleichbedeutende Formel schon früher von Herrn Grotrian[1]) für die Ionisierung im elektrischen Lichtbogen abgeleitet wurde, worauf ich daher noch ausdrücklich hinweisen möchte.

Herr Wolfke hat daraufhin seine seinerzeit[2]) entwickelten und von mir kritisierten Vorstellungen in dankenswerter Weise näher ausgeführt[3]) und insbesondere betont, daß er bei der Einführung seiner Bedingung einer oberen Grenze für die „radiale" Geschwindigkeit der Molekel, die befähigt sind durch ihren Zusammenstoß zu ionisieren, an eine andere, von der experimentell beobachteten verschiedene Art der Ionisierung durch Stoß gedacht habe. Das ist natürlich eine mögliche Annahme. Herr Wolfke weist dann des weiteren darauf hin, daß die Stabilität des Atoms es möglich machen kann, daß in verschiedenen Stoßrichtungen eine verschiedene Energie zur Abtrennung eines Elektrons aus dem Atome notwendig ist. In der Tat ist ja durch die Annahme einer oberen Grenze für die radiale und einer unteren Grenze für die tangentiale Geschwindigkeit (wie dies Kingdon weiterführte) eine Auswahl in bezug auf die Stoßrichtungen getroffen.

Aber die Einführung einer oberen Grenze für die radiale Geschwindigkeit bedeutet dann mehr als die Auswahl einer Richtung, denn demnach könnte von zwei Stößen in der gleichen Richtung unter Umständen der schwächere wohl ionisierend wirken, aber der stärkere nicht; wenn nämlich die radiale Geschwindigkeitskomponente dabei die obere Grenze überschreitet. Und damit wird eine weitere und wie mir scheint, solange sie nicht experimentell begründet ist, überflüssige Bedingung eingeführt, denn die von Herrn Wolfke stammende Annahme, es könne eine Ionisierung durch Stoß bei bestimmten Stoßrichtungen auch eintreten, wenn die Energie des stoßenden Teilchens weit unter dem gewöhnlichen Schwellenwert der Stoßenergie ist, genügt vollständig, um damit eine beliebig intensive, von der Temperatur nicht so stark abhängige Ionisierung zu begründen. Nehmen wir etwa an, daß alle Stöße, die in einer bestimmten Richtung erfolgen, ionisierend wirken, so ist ihre Anzahl einfach

$$\Gamma = A\nu,$$

1) Diese Zeitschr. **17**, 583, 1916.

1) W. Grotrian, Der Gleichstromlichtbogen großer Bogenlänge. Inauguraldissertation, Göttingen 1915.

2) M. Wolfke, Le Radium **10**, 265, 1913.

3) Diese Zeitschr. **18**, 34, 1917.

wo ν die Anzahl aller Zusammenstöße und A ein von der Temperatur unabhängiger Faktor ist. (Denn durch die Temperaturänderungen werden keine Stoßrichtungen bevorzugt.) Nehmen wir nun noch, wie dies plausibel erscheint, eine untere Grenze für die zur Ionisierung notwendige Energie und mehrere mögliche Richtungen für die ionisierenden Stöße an, so erhalten wir unter Berücksichtigung der l. c. gegebenen Formel die Zahl der ionisierenden Zusammenstöße zu

$$\Gamma = A_1 \nu \left(1 + {}^3/_2 \frac{\Theta_1}{T}\right) e^{-{}^3/_2 \frac{\Theta_1}{T}} + A_2 \nu \left(1 + {}^3/_2 \frac{\Theta_2}{T}\right) e^{-{}^3/_2 \frac{\Theta_2}{T}} + \dots,$$

wo die Größen A wieder temperaturunabhängig sind, und Θ die unteren Schwellenwerte gibt. ν ist bei konstantem Druck verkehrt proportional zu $\sqrt{T}$. Wenn die Werte für Θ klein gegen T sind, so variiert die hierdurch gegebene Anzahl der pro cm^3/sec gebildeten Ionen ebenfalls nur wenig mit der Temperatur. (Natürlich ließe sich in diese Formel ohne weiteres auch eine obere Grenze einsetzen.)

Freiburg i. Uechtland, Februar 1917.

(Eingegangen 20. Februar 1917.)

Widersprüche gegen die Wellenkinematik; ihre Auflösungen. I.

Von Karl Uller.

Der Nachweis der Existenz eines Feldes des Wellennormalenpaars in einer skalaren oder vektoriellen Welle von elementarer Schwingungsform zieht den Beweis der Unumkehrbarkeit dieser Welle nach sich[1]), d. h., kehrt man überall in der Welle das Wellennormalenpaar um, so geht die Welle nicht in derselben Gestalt rückwärts, meist nicht einmal über denselben Weg. Das gilt, welche Beziehungen zwischen Raum und Zeit im Felde auch zu erfüllen sind, falls sie nur linear und homogen sind. Die Unumkehrbarkeit muß natürlich auch in einer Welle von beliebiger Schwingungsform bestehen und erst recht in Wellen, die wie die hydrodynamischen, nichtlineare Wellengleichungen zu befriedigen haben. Wir können schließlich sagen: „Fortpflanzungserscheinungen in Feldern beliebiger Art sind unumkehrbar". An diesem Satz ändert nichts die Art und Weise, wie der Körper in der ihn durchsetzenden Fortpflanzung mitwirkt; er gilt auch, wenn der Körper die Wellenenergie nicht angreift, also wenn er konservativ ist.

Damit tritt aber unser Satz in Widerspruch zu einer bisher üblichen Überlegung, die zu dem entgegengesetzten Ergebnis führt, nämlich, daß Wellen, soweit sie in konservativen Körpern verlaufen, umkehrbar seien. Wenn man — so heißt es in der Thermodynamik der Strahlung[1]) — in den Maxwell-Hertzschen Feldgleichungen der Elektromagnetik überall — t statt t schreibt und außerdem das Vorzeichen der magnetischen Feldstärke umkehrt, so bleiben die Gleichungen unverändert, falls man alle Energie zerstreuende Leitungsströme ausschließt. Daraus folgt, daß, wenn bei irgendeinem elektromagnetischen Vorgang in konservativen Körpern die magnetische Feldstärke überall plötzlich umgekehrt wird, während die elektrische ihren Wert behält, der ganze Vorgang in umgekehrter Richtung verlaufen muß.

Wir merken, daß der Widerspruch gegen unsere These sich sogleich löst, wenn wir von den beiden geforderten Umkehrungen sowohl im Raume als auch in der Zeit die nur in Gedanken mögliche zeitliche Umkehrung des Vorganges fallen lassen.

Gehen wir aber zunächst einmal weiter auf dem geschilderten Gedankengange. Sind Leitungsströme da, die proportional der elektrischen Feldstärke sind, so tritt in den Feldgleichungen ein Glied hinzu, von dem wir sagen können, daß es von der nullten Potenz des Zeitelementes dt abhängig sei. Dringen wir in die Molekularvorgänge ein und machen wir uns die Vorstellungen der Drudeschen Elektronentheorie zu eigen, so tritt in den Gliedern, die Energiezerstreuung anzeigen, auch noch eins hinzu mit der zweiten Potenz von dt. Da nun Vorgänge, die mit Energiezerstreuung verbunden sind, thermodynamisch unumkehrbar sind, so kommt der Gedanke, zu sagen: Die Fortpflanzung ist umkehrbar oder unumkehrbar, je nachdem neben Gliedern mit ungerader Potenz des Zeitelementes noch Glieder mit gerader Potenz einschließlich der nullten, fehlen oder auftreten.

Diese Überlegung ist aber nicht haltbar. Denn nach der Wellenkinematik ist die Unumkehrbarkeit der Fortpflanzung gar nicht abhängig von der Ordnung der Differentialquotienten der Zeit. Aber eines können wir doch aus der Elektromagnetik schließen. Ihr ist nämlich eigentümlich, daß die Strahlungsumkehrung durch bloße Richtungsumkehrung einer der beiden Feldstärken bewirkt werden kann. Soll nun die Fortpflanzung unumkehrbar sein, wie

1) K. Uller, Grundlegung der Wellenkinematik. II. Diese Zeitschr. 17, 610, 1916.)

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung (2. Aufl. Leipzig 1913, S. 181).



sich aus der Wellenkinematik erschließen läßt, dann müssen die Grundgleichungen der Elektromagnetik nach Umkehrung des einen Feldes ihren Bau ändern, und zwar selbst in konservativen Körpern. Daraus folgt aber, daß das Zeitelement dt nur positiv genommen werden darf. Sehr wahrscheinlich gilt ganz allgemein in der Physik der Satz: *Auch in Gedanken-Experimenten muß die Zeit wie im wirklichen Naturgeschehen unablässig wachsen; es gibt kein Zurück in die Vergangenheit.* Im andern Fall würden wir schon in der *Newton*schen Mechanik auf eine Schwierigkeit stoßen. Die gedankliche Zeitumkehr würde nämlich dem Grundbegriff der Mechanik, der Geschwindigkeit, zwei Richtungen beilegen: die Raumrichtung und die Zeitrichtung, welch letztere sich allerdings auf alle Geschwindigkeiten eines Massenpunktsystems gleichsinnig erstrecken würde. Logisch ließe sich gegen diese Begriffserweiterung schwerlich etwas vorbringen. Doch würde wohl die Physik sie als unnatürlich abstoßen. Thermodynamisch steht unserm Satze nichts entgegen. Denn dort versteht man unter Richtung eines Vorganges eine einsinnige Fortschreitung in einer Zustandskette, und unter Umkehrung des Vorganges die Umkehrung dieses Fortschreitungssinns, Begriffe, die mit der Zeit direkt nichts zu tun haben.

Zur Frage der räumlichen Umkehrbarkeit der Fortpflanzung ist es überhaupt unmöglich, aus ihren Grundgleichungen etwas Bestimmtes herauszulesen, und das deutet wieder auf etwas anderes hin, das andernorts noch hervorgehoben werden soll. Es gibt keinen andern Weg, der zur Entscheidung dieser Frage führt, als den von mir aufgefundenen: den wellenkinematischen. Das beweist indirekt sogar die andersartige *Newton*sche Mechanik.

Elastische Wellen sind der Wellenkinematik zufolge unumkehrbar. Wenn sich das für die Mechanik zusammenhängender Massenverteilung bei Abwesenheit von Fernkräften erweisen läßt, so sollte man meinen, daß es auch für diskrete Massenverteilung unter der Einwirkung von Fernkräften gelten würde. Das ist aber offenbar nicht der Fall. Unleugbar ist in der reinen Mechanik des Massenpunktsystems Umkehrung möglich — man denke nur an die *Newton*sche Theorie der Planetenbewegung —, auch wenn man zeitliche Umkehrung aus dem Spiel lassen muß. Wie ist dies Herausfallen aus einer anscheinend allgemeinen Gesetzlichkeit zu erklären? Es ist kein geringer Beweis für die tiefwurzelnde und weitreichende Bedeutung der Wellenkinematik, daß sie selbst diese Anomalie, dies Rätsel, das der Erklärung zu spotten scheint, auflösen kann und uns als Grenzfall erkennen läßt. Darnach haben wir nämlich die Gleichungen der klassischen Mechanik als entartete Spannungsgleichungen aufzufassen.

Stellen wir uns vor, daß die Massen umgeben und durchdrungen seien von einem widerstandslosen Mittel, daß sich in diesem die Spannungen fortpflanzen, die an den Massen als scheinbare Fernkräfte wirksam werden, eben jene Kräfte, welche die Mechanik des Massenpunktsystems allein kennt. In jeder dieser Spannungswellen herrscht das Feld eines Wellennormalenpaares, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit endlich ist. *Sollen die Kräfte momentan wirken, wie es diese Mechanik voraussetzt, dann müssen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit überall unendlich groß annehmen, also dem Wellennormalenpaar dieser Wellen den Grenzwert Null beilegen. Damit nähert sich aber auch der Grad der Unumkehrbarkeit dieser Wellen dem Grenzwert Null!*

Wenn es wahr ist, daß die Naturvorgänge in einem stetig zusammenhängenden Mittel — oder auch mehreren — sich abspielen, so daß also zeitlich-räumliche Differentialgleichungen auch den adäquaten Ausdruck der Wirklichkeit bilden können, wenn es ferner wahr ist — was mit wachsendem Umfang unserer Erkenntnisse immer deutlicher zu werden scheint —, nämlich daß in Wirklichkeit alle Naturvorgänge ausnahmslos mehr oder minder ausgeprägt unumkehrbar sind, also auch die sogenannten mechanischen und molekularen, dann ergibt jetzt die umgekehrte Schlußfolge, daß jene Vorstellung vom Wesen der Mechanik mehr als eine solche ist, daß die allgemeine Gravitation wirklich ein Fortpflanzungsvorgang in einem Mittel sein muß. Dann kann es überhaupt in der ganzen Natur keine unvermittelte und momentane Fernwirkungen und Fernkräfte geben. Dann ist der bedeutungsvolle Beweis erbracht, daß der innere Sinn der Unumkehrbarkeit jeglichen veränderlichen Vorgangs in einem Mittel nicht in etwaiger Energievergeudung oder -zerstreuung zu suchen ist, sondern daß die Unumkehrbarkeit im Wesen der Fortpflanzung selber liegt.

Somit sind Temperaturwellen nicht deshalb unumkehrbar, weil die Temperatur proportional ist dem Wärmeinhalt der Volumeneinheit und die Wärme eine Form der Energie ist, sondern weil Temperaturen sich mit der Zeit im Raum ausbreiten.

Es ist noch anführenswert, daß in unseren allgemeinen Schlüssen hier das Maß der erworbenen Naturkenntnisse sowie der Grad der mehr oder minder großen Richtigkeit und Genauigkeit der erlangten Grundgleichungen keine Rolle spielen.

Gießen, Januar 1917.

(Eingegangen 17. Januar 1917.)

Das Interferenzprinzip.

Von Karl Uller.

Das stationäre Strömungsbild, das uns zwei stationäre Quellen in einer Flüssigkeit außerhalb der Quellen gewähren, ist für jeden Punkt ein vollkommen einheitliches: wir gewahren nicht zwei unterscheidbare Erscheinungen, von denen wir behaupten könnten, die eine rühre her von der einen Quelle, die andere von der andern.

Anders, wenn die zwei Quellen zeitlich veränderlich sind. Dann beobachten wir zwei Erscheinungen, von denen wir mit Bestimmtheit sagen: die eine rührt von der einen Quelle her, die andere von der andern Quelle. Das trifft zu, mögen die Erregungen in den Quellen gleiche Schwingungsform haben oder nicht, gleichen Rhythmus oder nicht, mögen sie kohärent erfolgen oder nicht, mögen die Erscheinungen sich gegenseitig beeinflussen oder nicht. Unter allen Umständen treten zwei Fortpflanzungserscheinungen auf, die sich durchdringen, die „interferieren“, so daß wir sagen müssen: Die Ausbreitungserscheinung, die von einem räumlich zusammenhängenden Quellgebiet ausläuft, bildet ein besonderes zeitlich-räumliches Gebilde. Wir nennen es Welle und bringen damit zu begrifflichem Ausdruck, daß zwischen einem stationären Felde und einem nichtstationären ein Wesensunterschied besteht. — Die Vorgänge innerhalb der Quellgebiete lassen wir einstweilen außer Betracht. Die Welle kann auch eine fortgesetzte sein, wie es z. B. bei Brechung und Zurückwerfung der Fall ist.

In einem nichtstationären Felde, also in sich kreuzenden Wellen, herrscht ein eigentümliches Prinzip, das wir Interferenzprinzip heißen. Es ist scharf zu unterscheiden von dem Prinzip der Überlagerung ohne gegenseitige Störung. Während dieses ein physikalisches Prinzip ist, das einen gewissen Geltungsbereich in der Natur hat, ist das Interferenzprinzip ein rein kinematisches Prinzip, das in zeitlich-räumlichen Feldern schrankenlos herrscht. Eigentlich merkwürdig, daß dieses so überaus wichtige und vor unsern Augen liegende Prinzip bis heute nicht herausgearbeitet und sein mathematischer Ausdruck nicht aufgesucht worden ist, der allerdings nicht an der Oberfläche liegt. Neben der irrtümlichen Irreführung durch Young und Fresnel sind es zwei Hindernisse, die dem entgegenstehen: Die mathematische Physik liegt noch im Bann der stationären Potentiale, die additionsfähig sind, und weiter paßt sie stets die allgemeine Wellengleichung den Bedingungen an, welche die Aufgabe zu erfüllen gebietet.

Wir wollen seinen Ausdruck zunächst für Wellen von elementarer Schwingungsform aufsuchen. In solchen — seien es Skalarwellen

$$\Omega = {}^1/_2 \{\omega \cdot e^{i\Phi} e^{i\nu t} + \omega^* \cdot e^{-i\Phi^*} e^{-i\nu^* t}\}$$

oder seien es Vektorwellen

$$\mathfrak{V} = {}^1/_2 \{\mathfrak{v} \cdot e^{i\Phi} e^{i\nu t} + \mathfrak{v}^* \cdot e^{-i\Phi^*} e^{-i\nu^* t}\}$$

— herrscht der folgende kinematische Satz[1])

A) In jeder Welle von elementarer Schwingungsform besteht das Feld eines zeitlich unveränderlichen Vektorpaars $(\mathfrak{w}'; \mathfrak{w}'')$, des Wellennormalenpaars. Es ist in einer Skalarwelle unabhängig vom Wellenskalar ω, in einer Vektorwelle unabhängig vom Betrage des Wellenvektors $\mathfrak{v}$.

Dieser Satz, in dem sich ein zunächst namenloses Wellenprinzip ausspricht, wirkt sich in allen Bedingungen aus, welche die betreffende Welle zu erfüllen hat. Auf Grund desselben wollen wir nun zwei Wellenausdrücke von elementarer Schwingungsform mathematisch addieren. Das ist physikalisch erlaubt, da diese Schwingungsform nur auftreten kann, wenn der betreffende Naturvorgang das Überlagerungsprinzip befolgt. Dann aber beeinflussen sich solche Wellen in keiner Hinsicht, also auch nicht in der Schwingungsform. Wir dürfen daher die Frage aufwerfen: Unter welchen Bedingungen haben beide Wellen eine Resultierende?

Da wir schreiben können

$$\Phi_1 = {}^1/_2(\Phi_1 + \Phi_2) + {}^1/_2(\Phi_1 - \Phi_2)$$
$$\Phi_2 = {}^1/_2(\Phi_1 + \Phi_2) - {}^1/_2(\Phi_1 - \Phi_2)$$

und entsprechend für die Zeitfaktoren ν_1 und ν_2, haben wir als Ausführung

$$\begin{aligned} \omega_1 \cdot e^{i\Phi_1 + i\nu_1 t} + \omega_2 \cdot e^{i\Phi_2 + i\nu_2 t} = \\ \{\omega_1 \cdot e^{i/2(\Phi_1 - \Phi_2) + i/2(\nu_1 - \nu_2)t} \\ + \omega_2 \cdot e^{-i/2(\Phi_1 - \Phi_2) - i/2(\nu_1 - \nu_2)t}\} \\ \times e^{i/2(\Phi_1 + \Phi_2) + i/2(\nu_1 + \nu_2)t} = \omega \cdot e^{i\Phi + i\nu t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Nach dem Satz A muß $\mathfrak{w} = {}^1/_2 \cdot (\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2)$ unabhängig befunden werden von

$$\omega = \omega_1 \cdot e^{i/2(\Phi_1 - \Phi_2) + i/2(\nu_1 - \nu_2)t} + \omega_2 \cdot e^{-i/2(\Phi_1 - \Phi_2) - i/2(\nu_1 - \nu_2)t}.$$

Das ist aber unmöglich, es sei denn, daß $\nu_1 = \nu_2$ und $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}$, also $\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_2$ ist. Das gilt auch für Vektorwellen. Zwei der vorausgesetzten Wellen überlagern sich also nur dann zu einer gleichartigen Welle, wenn sowohl ihre Zeitfaktoren ν gleich sind als auch ihre Wellennormalenpaare $\mathfrak{w}$ nach Größe und Richtung. Das ist aber infolge der Gültigkeit des Überlagerungsprinzips ein so nichtssagender Fall, daß es theoretisch durchaus unangebracht wäre, ein allgemeines Gesetz wie das gleich folgende durch

1) K. Uller, Grundlegung der Wellenkinematik usw. § 5. Diese Zeitschr. 17, 610, 1916; — Die Gültigkeitsgrenze des Fermatschen Prinzips usw. Ebenda 18, 35, 1917.

eine solch triviale Ausnahme auch nur im geringsten scheinbar zu beschränken. In einer Welle, die aus der Überlagerung von Wellen gleicher Zeitfaktoren und gleicher Wellennormalenpaare hervorgegangen ist, sind die Komponenten ununterscheidbar; wir können sie bloß aus ihrer Herkunft erschließen. Hierher gehört auch die Zerlegung einer Welle nach den Koordinaten. Somit kommen wir zu dem kinematischen Gesetz für Wellen von elementarer Schwingungsform:

B) Wellen lassen sich nicht überlagern zu einer Welle; eine Welle läßt sich nicht zerlegen in Wellen.

Dies auf Grund des Satzes A analytisch gewonnene Ergebnis deckt sich, wie wir sehen, mit dem obigen der Erfahrung abgewonnenen Prinzip der Interferenz von Wellen. Wir müssen daher umgekehrt das dem Satz A zugrundeliegende, bisher namenlose Wellenprinzip das Interferenzprinzip benennen!

Der kinematische Ausdruck des Interferenzprinzips für Wellen von elementarer Schwingungsform ist der Satz A.

Der Satz B hat aber eine ganz allgemeine Bedeutung. Um diese zu finden, werfen wir zunächst folgende Frage auf: Läßt sich eine Summe von unendlich vielen Wellen von elementaren Schwingungsformen mit stetig veränderlichen Parametern zu einer Welle vereinigen? Der Beantwortung dient die Betrachtung folgenden Unterfalls. Zwei Skalar-Kugelwellen, die beispielsweise die Wellengleichung

$$a(\omega e^{i\psi}) + \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,(\omega e^{i\psi}) = 0 \qquad (2)$$

für homogene Körper zu befolgen haben, für die also nach dem Verfahren in § 5 der genannten Grundlegung das Gleichungssystem besteht

$$a - \mathfrak{w}^2 - i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} = 0, \qquad (3')$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\omega - i\,2(\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\,\omega) = 0, \qquad (3'')$$

mögen bis auf ihre Wellenskalare ω gleich sein, und ihre Quellpunkte von einem Punkte P gleichen Abstand haben. Dann ist $\mathrm{div}\,\mathfrak{w}_1 = \mathrm{div}\,\mathfrak{w}_2$ und nach (3′) auch $\mathfrak{w}_1{}^2 = \mathfrak{w}_2{}^2$. Es seien nun die beiden Quellpunkte unendlich nahe, so daß $\mathfrak{w}_2 = \mathfrak{w}_1 + \delta\,\mathfrak{w}_1$ zu setzen ist. Dann müßte nach dem Satz A wegen (3′) sein $(\mathfrak{w}_1\,\delta\,\mathfrak{w}_1) = 0$. Das wäre jedoch nur möglich, wenn $\mathfrak{w}_1{}^2 = a - i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}_1$ unveränderlich wäre in der Umgebung von P, wenn mithin $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}_1$ verschwände, was aber unmöglich ist. Ist $\nu_1 \neq \nu_2$; also $a_1 \neq a_2$, dann liefern erst recht nicht die beiden unendlich benachbarten Quellpunkte eine resultierende Welle in P. Wenn schon in diesem weitgehenden Unterfall eine resultierende Welle unmöglich ist, so ist klar, daß wir die aufgeworfene Frage mit Nein beantworten müssen. Die Verneinung erstreckt sich erst recht auf Wellen, die das Überlagerungsprinzip nicht befolgen, wie die hydrodynamischen Wellen.

Es ist somit auf logischem Wege bewiesen, daß der Satz B in universeller Bedeutung existiert. Er ist der oberste Satz der Wellenkinematik.

Sein kinematischer Ausdruck ist der auf Wellen von beliebiger Schwingungsform erweiterte Satz A.

Die Schwingungsform liefert die Quelle; bei fortgesetzten Wellen, wie in der Brechung, die Stammwelle.

Eine Folge von A ist, daß niemals das Wellennormalenpaar einer Welle zur geometrischen Addition mit dem in einer anderen Welle kommen kann. Wie umgekehrt niemals ein Wellennormalenpaar in Wellennormalenpaare zerlegt werden kann.

Wellen haben den Charakter von Individuen: sie gehen, addiert, nicht auf in etwas Gleichartigem; sie bleiben Wellen und interferieren bloß. Ja, eine Welle interferiert sogar mit sich selbst, nämlich wenn Teile von ihr sich begegnen, wie hinter einem Hindernis. Daraus ergibt sich für die mathematische Physik die unumstößliche Vorschrift, daß sie bei Interferenzen mehrerer Wellen niemals bei der allgemeinen Wellengleichung stehen bleiben darf. Die Einwendungen dagegen werden einzeln in späteren Abhandlungen besprochen werden. Soviel kann hier schon gesagt werden: Die bisherige mathematische Behandlung von Interferenzen mehrerer Wellen bringt nicht die Unterscheidung zwischen Überlagerungsprinzip und Interferenzprinzip zum Ausdruck. Wohl kann man eine Summe von Wellen, die das Überlagerungsprinzip befolgen, in einem mathematischen Ausdruck — der auch eine Reihe sein kann — zusammenfassen, niemals aber zu einer die Summe der Wellen vertretenden Welle. Wohl kann man umgekehrt mathematisch eine Welle durch eine Summe von Wellenausdrücken darstellen, aber man darf nicht vermeinen, daß dadurch eine Welle ersetzt sei durch die Summe der Wellen, die durch die Wellenausdrücke etwa wiedergegeben sind.

Der Tatsachen, die dem von Young (1802) ausgesprochenen „Interferenzprinzip" zugrunde liegen, sind zwei, nämlich die Wellennatur des Lichtes sowie die störungsfreie Überlagerungsfähigkeit seiner Wellen. Wir sehen jetzt, daß diese Bezeichnung unglücklich gewählt war und von dem Interferenzproblem ablenken mußte. Interferieren heißt nicht: sich störungsfrei überlagern. Die genannte Bezeichnung muß daher umgeändert werden. Ich schlage vor, das

Youngsche Prinzip: Wellenüberlagerungsprinzip zu nennen.

Auch gedachte Wellen können der Wellennatur nicht entraten, müssen also unvereinbar sein. Der Gedanke, den Fresnel vor jetzt hundert Jahren empfangen hatte und der fest eingebürgert ist, durch Elementarkugelwellen, die von jedem Punkt einer Welle auslaufend die Welle wiedergeben sollen, muß, weil er Quellpunkte und Interferenzen fordert, wo keine sind, verworfen werden.

Auch eine bewegte Quelle liefert keine Interferenzerscheinung.

Bringt man den Satz A in der Wellengleichung irgendeiner physikalischen Welle zum Ausdruck, so findet man, daß die Welle mehr oder minder unumkehrbar ist.

Die Unumkehrbarkeit einer jeglichen physikalischen Fortpflanzungserscheinung in Mitteln, die in beliebiger Bewegung sind, ist eine Folge des kinematischen Interferenzprinzips und somit unabhängig von der Natur des Vorgangs.

Gießen, 6. Februar 1917.

(Eingegangen 8. Februar 1917.)

BERICHTE.

Hauptversammlung der Deutschen Bunsen-Gesellschaft für angewandte physikalische Chemie vom 20. bis 22. Dezember in Berlin.

Von A. Coehn.

Die Bunsen-Gesellschaft hat auch während des Krieges ihre regelmäßigen Jahresversammlungen abhalten können. Sie fand diesmal wie im Vorjahre in Berlin statt unter Beteiligung von über hundert Mitgliedern. Der Vorsitzende, Prof. Dr. Hans Goldschmidt, machte in seiner Eröffnungsrede Mitteilung von der Gründung des Liebig-Stipendien-Vereins, der es sich zur Aufgabe stellt, Studierenden der Chemie die Möglichkeit zu gewähren, nach Abschluß ihrer Studien als Assistenten tätig zu sein. Die chemische Industrie hat für diesen Zweck bereits über eine Million zusammengebracht, die sich ebenso den Studierenden zur Vertiefung ihrer Studien nützlich erweisen wird, wie den Dozenten durch die Bereitstellung von Hilfskräften für die Durchführung ihrer Arbeiten.

Die Vorträge begannen mit der Demonstration einiger Apparate von A. Stock. Da diese sich für das Arbeiten mit Gasen allgemein als nützlich erweisen dürften, so sei ihre Beschreibung hier nach einem von Herrn Prof. Stock freundlichst erstatteten Selbstreferat wiedergegeben.

Prof. Dr. Alfred Stock-Berlin-Dahlem: Fettfreie Ventile für Arbeiten mit Gasen. (Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie.)

Fig. 1 veranschaulicht eine verbesserte Form des früher beschriebenen[1]) Schwimmerventils, welches beim Arbeiten mit Fett angreifenden Gasen die gewöhnlichen fettgedichteten Hähne ersetzt.

In den Glasrohren A_1 und A_2 befinden sich die beiden massiven Glasschwimmer B_1 und B_2, deren obere, spitz zulaufende Enden in Verengungen der Rohre B_1 und B_2 eingeschliffen sind. Steigt das im Rohr C stehende Quecksilber, so hebt es die Schwimmer, drückt sie gegen die Schliffe und bewirkt, da ihm ein weiteres

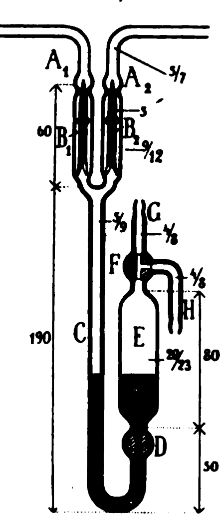


Fig. 1.

Vordringen durch die beiden Ventile verwehrt wird, einen gasdichten Abschluß zwischen A_1 und A_2. Läßt man das Quecksilber wieder sinken, so fallen auch die Schwimmer herab, und die Verbindung zwischen A_1 und A_2 ist wieder hergestellt.

Die Abmessungen, von deren genauer Einhaltung das befriedigende Arbeiten des Ventils abhängt, sind aus der Abbildung zu ersehen. Sie sind in Millimeter angegeben; die Doppelzahlen bedeuten Innen- und Außendurchmesser.

1) Stock und Prieß, Ber. d. D. Chem. Ges. **47**, 3112, 1914

Die 5 mm dicken Schwimmer tragen je drei längliche Füßchen und dünne Führungszäpfchen. Zwischen Schwimmer und Rohr muß möglichst viel Raum bleiben, damit der Schwimmer nicht durch einen starken Gasstrom unbeabsichtigterweise hochgerissen wird.

Dem Heben und Senken des Quecksilbers dienen Hahn D, Gefäß E und T-Hahn F[1]) mit den Ansatzrohren G und H. Herrscht in der mit dem Ventil bei A_1 und A_2 in Verbindung stehenden Apparatur genügender Unterdruck, so steigt das Quecksilber in C ohne weiteres beim Öffnen des Hahnes D unter der Wirkung des Atmosphärendruckes. Durch Evakuieren von E (Anschließen von H an eine

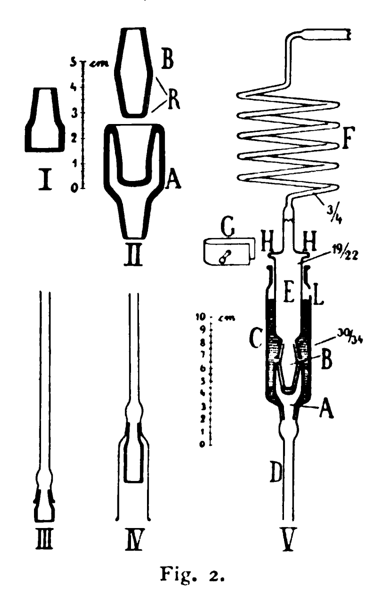


Fig. 2.

Wasserstrahlluftpumpe, Saugleitung) ist es wieder zum Fallen zu bringen. Wenn der Unterdruck in der Apparatur nicht genügt, so hebt man das Quecksilber, indem man in E, z. B. durch Verbinden von H mit einer Kohlensäureflasche, etwas Überdruck erzeugt. Wegen weiterer Einzelheiten sei auf die erwähnte frühere Veröffentlichung verwiesen.

Auch die in Fig. 2 dargestellten fettfreien Ventile dienen als Ersatz für Hähne beim Arbeiten mit Gasen. Ihre Wirkung beruht nach einem von Prytz angegebenen Prinzip auf der Anwendung eines porösen, für Gase, nicht aber für Quecksilber durchlässigen Materials[2]), als welches jetzt an Stelle der früher empfohlenen Schamotteplättchen eine neuerdings von der Berliner Königlichen Porzellan-Manufaktur hergestellte hochporöse Masse benutzt wird. Diese ist gleichmäßig porös, chemisch widerstandsfähig wie Porzellan und leicht zu schleifen. Die Manufaktur fertigt daraus auf meine Veranlassung drei Arten Ventilkörper (Fig. 2), 1. ein kurzes einfaches Ventil (I, III), 2. ein längeres einfaches Ventil (IV) und 3. ein Doppelventil (II, V).

Ventilkörper 1 (Fig. 2, I) hat die Form eines Fläschchens mit 1 mm starkem, außen eben abgeschliffenem Boden; beim gebrauchsfertigen Ventil[1]) (III) ist er in ein Glasrohr eingeschliffen. Ventilkörper 2 unterscheidet sich von 1 nur durch seine größere Länge. Fig. 2, IV zeigt ihn in einem fertigen Ventil, in ein zu einer Art Glocke verlängertes Glasrohr mittels eines Schliffes eingesetzt.

Die Ventile sind mannigfach zu verwenden. Befindet sich z. B. das einfache Ventil (III) an einem evakuierten Apparat, so schließt es gasdicht, solange es in Quecksilber taucht. Wenn man das Quecksilber entfernt, strömt Luft durch den porösen Ventilkörper in den Apparat ein. Das Glockenventil (IV) gestattet, in den evakuierten Apparat getrocknete Luft oder ein anderes Gas einzulassen, indem man das betreffende Gas unter die in Quecksilber tauchende Glocke leitet. Bringt man die ebenen Endflächen zweier Ventilkörper unter Quecksilber zur Berührung, so können Gase aus dem einen Ventil ins andere übertreten. Das Glockenventil (IV) stehe umgedreht (Glockenöffnung oben) in Verbindung mit einem evakuierten Apparat, die Glocke mit Quecksilber gefüllt. Wird nun ein kleines Ventil (III) in das Quecksilber getaucht, so daß die ebenen Ventilflächen aufeinanderliegen, so dringt Luft von außen durch beide Ventile hindurch in den Apparat ein. Diese Kombination zweier Ventile ersetzt einen Hahn. Allerdings erfolgt das Einströmen von Gas wegen der Kleinheit der Fläche, in welcher sich die beiden Ventile berühren, nur langsam. Weit wirksamer ist in solchem Falle das Doppelventil.

Das Doppelventil (II) besteht aus zwei ineinander passenden und eingeschliffenen Ventilkörpern (A, B), von denen der kleinere B in der Schliffläche eine $^1/_2$ mm tiefe Längsrille (R) trägt. Die Anordnung der beiden Ventilkörper zu einem gebrauchsfertigen Ventil ist aus (V) zu ersehen. A sitzt mittels eines Schliffes am Boden des mit Quecksilber gefüllten Gefäßes C[2]),

1) Zur Verhütung von Irrtümern bei der Handhabung des T-Hahnes ist es zweckmäßig, die Lage der seitlichen Bohrung am Hahngriff, etwa durch eine farbige Glaswarze, kenntlich zu machen.

2) Vgl. Stock, Ber. d. D. Chem. Ges. **40**, 4956, 1907; Verh. d. D. Physik. Ges. **10**, 19, 1908.

1) Alle hier beschriebenen Ventile sind von Warmbrunn, Quilitz & Co., Berlin NW. 40, Heidestr. 55/57, zu beziehen. Die Firma beabsichtigt, später für alle Ventile einen „Normalschliff" zu verwenden, so daß jeder Ventilkörper in jeden Schliff der Ventilglasteile paßt.

2) Das Loch L dient zum Einfüllen von Quecksilber in das fertige Ventil c.

an welches sich unten Rohr D anschließt; B ist eingeschliffen in das Ende des im Halse von C gleitenden Glasrohres E, das oben in die dünnwandige, leicht zusammendrückende Spiralglasfeder E übergeht. Berühren sich, wie es in der Figur dargestellt ist, die Schliffflächen beider Ventilkörper (beim Eindrücken von B in A entweicht das Quecksilber durch die an B angebrachte Rille), so läßt das Ventil Gase aus D nach E hindurch. Dagegen ist die Verbindung unterbrochen, sobald man B aus A unter Zusammendrücken der Glasfeder F[1]) herauszieht. Zum Feststellen des Ventiles in dieser zweiten Lage dient der Blechbügel G; er wird zwischen den Rand von C und den an E angebrachten Wulst H geschoben. Dieses Doppelventil arbeitet sehr zuverlässig, und zwar unabhängig von den Drucken, welche in den durch das Ventil getrennten Apparatteilen herrschen[2]).

Zum Befestigen[3]) der Ventilkörper in den Glasschliffen dient ein Tröpfchen eines geeigneten Kittes oder von Marineleim. Das notwendige quecksilberdichte Schließen wird in der Regel durch den Schliff ohne weiteres bewirkt[4]); erforderlichenfalls wird es durch Einreiben der Ventilschlifffläche mit etwas Talkum sicher erreicht. Schmutzig gewordene Ventilkörper sind durch Ausglühen (nicht zu schnell erhitzen, weil sonst Risse auftreten) zu reinigen. Da die poröse Masse nicht sehr hart, wesentlich weicher als Glas ist, muß sie mit etwas Vorsicht behandelt werden.

Die Anführung einiger Versuche über die Gasdurchlässigkeit der Ventile gebe ein Bild von der Porosität der Ventilkörpermasse. Selbstverständlich ist die Durchlässigkeit sehr abhängig von der Wandstärke der Ventilkörper und wechselt deshalb von Stück zu Stück. Die nachstehenden Zahlen sind die beobachteten Niedrigst- und Höchstwerte der Luftmengen, welche durch die Ventile aus der Atmosphäre in ein Vakuum hinein minutlich einströmten:

1. Kleines einfaches Ventil (III): 870 bis 1200 ccm.
2. Langes einfaches Ventil (IV): über 3000 ccm.
3. Zwei kleine einfache unter Quecksilber gegeneinander gedrückte Ventile: 39 bis 52 ccm.
4. Innenstück (B) des Doppelventils (II). 800 ccm.
5. Doppelventil (V): 198 (120) bis 252 (180) ccm: Die eingeklammerten Werte sind beim einfachen Einsetzen von B in das becherförmige Stück A erhalten, die nicht eingeklammerten, wenn die Berührung durch leichtes Eindrehen von B in A inniger gemacht wurde. Dauerndes stärkeres Gegeneinanderdrücken der Ventilteile nach dem Einsetzen ist zwecklos. Das Wiedertrennen beider Stücke macht auch dann keine Schwierigkeit, wenn ein Teil evakuiert, der andre mit Gas gefüllt ist. — Trotz der Durchlässigkeit der porösen Masse erfordert das vollständige Evakuieren größerer Gefäße durch das Doppelventil hindurch natürlich längere Zeit. Der Druck in einem 1350 ccm fassenden Kolben[1]) sank von anfangs 760 mm nach

5	15	30 Min.,	1	2	6	8	10 Std. auf
391	189	73	20,5	3	0,15	0,002	0,0006 mm.

Er stieg beim Wiedereinlassen von Luft in den leeren Kolben durch das Doppelventil hindurch

nach 5	10	15 Min. auf
485	682	741 mm.

Eine störende Adsorption von Luft und anderen Gasen an der porösen Masse findet nicht statt, was für die Verwendung der Ventile im Hochvakuum von Vorteil ist.

Dr. R. Becker-Bergedorf: Zur Theorie der Detonation.

Auf allgemeiner thermodynamischer Grundlage werden — im Anschluß an spezielle Arbeiten von Jouguet und Crussard — Gesetzmäßigkeiten für das Fortschreiten einer chemischen Umsetzung durch eine reaktionsfähige Masse hindurch abgeleitet. In der Diskusion bestreitet Herr Nernst, daß die Ausführungen des Vortragenden die Erkenntnis des Vorganges der Detonation fördern und lehnt seine Theorie als eine rein formale ab.

Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Theodor Paul-München: Die Entsäuerung des Weines mit Dikaliumtartrat.

Die Entsäuerung des Weines mit Dikaliumtartrat beruht in erster Linie auf dem chemischen Gleichgewicht zwischen Weinsäure und Dikaliumtartrat. Obwohl sich die Einwirkung dieses Salzes auf die Weinsäure im allgemeinen nach der Reaktionsgleichung abspielt:

$$K_2C_4H_4O_6 + H_2C_4H_4O_6 = 2HKC_4H_4O_6,$$

wobei sich das Monokaliumtartrat nach Über-

---

1) Die erforderliche Beweglichkeit des Ventils kann auch ohne die Glasfeder durch Einschaltung eines Bleirohres, welches mit den Glasteilen durch Marineleim gasdicht verkittet ist, erzielt werden.

2) Natürlich dürfen diese Drucke nicht über Atmosphärendruck hinausgehen, da sonst die Gase durch die Ventilkörper nach außen entweichen würden.

3) Unnötig, wenn in der an das Ventil angeschlossenen Apparatur Unterdruck besteht.

4) Prüfen durch Evakuieren des in Quecksilber getauchten Ventils, z. B. mit der Wasserstrahlluftpumpe.

1) Der Kolben war an das untere Ventilstück (A) angeschlossen; B stand mit einer Gaedeschen Quecksilberluftpumpe in Verbindung.

schreitung seines Löslichkeitsproduktes aus der Lösung ausscheidet, gestaltet sich doch die Verminderung der Wasserstoffionen in der Lösung, auf die es hier ankommt, bei Zusatz steigender Mengen von Dikaliumtartrat wesentlich komplizierter. Da der Weinstein im Wasser ziemlich löslich ist (1 Liter reines CO_2-freies Wasser löst bei $+18^0$ 4,903 g = 0,02607 g-Mol $HKC_4H_4O_6$), so findet zunächst beim Hinzufügen des Dikaliumtartrats eine Anreicherung der Lösung an Monokaliumtartrat statt, die eine starke Rückdrängung der Wasserstoffdissoziation der Weinsäure zur Folge hat. Nachdem die Ausscheidung des Weinsteins begonnen hat, geht bei weiterem Zusatz von Dikaliumtartrat die Verminderung der Wasserstoffionen regelmäßiger vor sich. Die hierbei auftretenden Gleichgewichte wurden theoretisch und experimentell untersucht, wobei sich eine befriedigende Übereinstimmung ergab.

Die deutschen Weißweine enthalten im Durchschnitt 80 g Alkohol im Liter. Dieser Alkoholgehalt vermindert die Löslichkeit des Weinsteins sehr erheblich (1 Liter wässeriger Alkohol, der 80 g Alkohol im Liter enthält, löst bei $+18^0$ 2,935 g = 0,01560 g-Mol $HKC_4H_4O_6$), und infolgedessen verschieben sich die chemischen Gleichgewichte bei der Entsäuerung einer solchen alkoholhaltigen Weinsäurelösung mit Dikaliumtartrat gegenüber der wässerigen Lösung wesentlich. Dies hat u. a. zur Folge, daß die in der letzteren am Anfang beobachtete unverhältnismäßig starke Verminderung der Wasserstoffionen sich anders gestaltet. Auch diese Gleichgewichte wurden eingehend untersucht.

Obwohl der Wein bei seinem Werdegang infolge der Abscheidung von Weinstein zeitweise eine gesättigte Lösung von Monokaliumtartrat darstellt, vermag der fertige Wein im allgemeinen noch erhebliche Mengen davon aufzunehmen. So lösten sich in einem Moselwein (Thörnicher 1913er, vom Säuregrad 1,12 = 1,12 mg-Ion $H^\cdot$ in 1 Liter) 0,6950 g $HKC_4H_4O_6$, und in einem Pfalzwein (Deidesheimer Kieselberg 1913er, vom Säuregrad 0,611 = 0,611 mg-Ion $H^\cdot$ in 1 Liter) 0,8390 g $HKC_4H_4O_6$. Da der Wein bereits Weinstein gelöst enthält, so läßt sich erwarten, daß die in jenen Lösungsmitteln beobachtete anfängliche große Säuregradsverminderung erheblich geringer ist. Wie die an einigen naturreinen Weinen aus verschiedenen deutschen Weinbaugebieten mit Dikaliumtartrat angestellten Versuche lehrten, ist dies tatsächlich der Fall. Beim Wein gestalten sich die Verhältnisse insofern komplizierter, als er außer der Weinsäure noch andere Säuren, wie Milchsäure, Äpfelsäure, Bernsteinsäure und Essigsäure in geringen Mengen enthält.

Bei der Entsäuerung des Weines mit Dikaliumtartrat gelangen keine Fremdkörper in den Wein, da Weinsäure und Kalium in jedem Wein vorhanden sind. Außerdem werden diese Stoffe größtenteils wieder ausgeschieden. Vor der Entsäuerung mit kohlensaurem Kalk hat diese Methode den Vorteil, daß sie keinen so tiefen Eingriff in das Wesen des Weines bedeutet und keine längere Lagerung nach der Entsäuerung bedingt. Die Abscheidung des gebildeten Weinsteins geht wegen seiner Eigenschaft, gut zu kristallisieren, glatt und im wesentlichen ohne Auftreten von Trübungen vor sich, so daß der Wein alsbald trinkfertig ist. Von besonderem Interesse ist die Entsäuerung des Weines mit Dikaliumtartrat im Hinblick auf den während des gegenwärtigen Krieges bestehenden und in den nächsten Jahren zu erwartenden Zuckermangel. Da nach den derzeitigen gesetzlichen Bestimmungen diese Entsäuerung nicht zulässig ist, dürfte es zweckmäßig sein, das Dikaliumtartrat in die Zahl der Stoffe aufzunehmen, die bei der Kellerbehandlung (§ 4 des Weingesetzes vom 7. April 1909) dem Wein zugesetzt werden dürfen.

Im Anschluß an diesen Vortrag wurde während der Mittagspause eine interessante Versuchsreihe unter Mitwirkung der Teilnehmer durchgeführt. Ihr Zweck war, zu demonstrieren, daß der Säuregeschmack des Weines parallel geht der darin vorhandenen Konzentration der Wasserstoffionen. Dazu waren in einem besonderen Raum eine größere Anzahl von Gläserreihen aufgestellt, deren jede aus vier Gläsern bestand, die mit Buchstaben bezeichnet waren. Eines der vier Gläser enthielt den unvermischten — ziemlich sauren — Wein, während sich in den übrigen drei derselbe Wein, aber stufenweise mit Dikaliumtartrat entsäuert, befand. Jeder der Teilnehmer hatte die Reihenfolge der Weine nach der Stärke ihres sauren Geschmacks geordnet aufzuschreiben. Das Ergebnis war, daß — wenn man die Anordnung mit einer einzigen Fehlbestimmung noch als richtig gelten läßt — 86 Proz. zutreffende Angaben gemacht wurden. An aufgestellten Säurelösungen konnten die Feststellungen über die Säureempfindlichkeit unserer Geschmacksorgane geprüft werden. Lösungen, die weniger als 0,2 mg-Ion im Liter enthalten, schmecken kaum sauer, solche über 1,4 mg-Ion im Liter stark sauer. Der Säuregehalt der deutschen Weißweine schwankt im allgemeinen zwischen 0,17 und 1,61 mg-Ion Wasserstoff im Liter.

An den Vortrag schloß sich noch die Vorführung eines Apparates zur Polarisation bei verschiedenen Temperaturen, insbesondere von Zuckerlösungen während der Inversion.

Die Zuckerinversion hat sich als ein sehr



brauchbares und zuverlässiges Hilfsmittel zur Bestimmung der Wasserstoffionenkonzentration in wässerigen und wässerig-alkoholischen Lösungen erwiesen, und sie bietet insbesondere den Vorteil, daß man auch sehr kleine Konzentrationen mit genügender Genauigkeit messen kann. Da hierbei die Inversion bei höheren Temperaturen bis zu $+100^0$ vorgenommen werden muß, pflegte man bisher die Flüssigkeit auf verschiedene Röhrchen zu verteilen und diese in einen Thermostat einzustellen, der durch eine siedende Flüssigkeit auf konstanter Temperatur erhalten wurde. Dieses Verfahren ist mit mancherlei Schwierigkeiten verbunden, da die Siedetemperatur vom jeweiligen Luftdruck abhängig ist und außerdem der Inversionsvorgang beim Polarisieren unterbrochen werden muß. Außerdem kommt man vielfach mit einer Temperatur nicht aus, weil bei kleinen Säuregraden die Inversion zu langsam und bei größeren zu schnell verläuft.

Es wurde also ein Thermostat konstruiert, in welchem man die Inversionstemperatur mit einer elektrischen Heizvorrichtung beliebig wechseln und dabei bis auf einige hundertstel Grad konstant erhalten kann. Der Apparat erlaubt, den Inversionsvorgang fortlaufend messend zu verfolgen.

Prof. Dr. M. Bodenstein-Hannover: **Die physikalisch-chemischen Bedingungen der hüttenmännischen Zinkgewinnung.**

Die Reduktionen des Zinkoxyds und die des Kaliumkarbonats durch Kohlenstoff zu Zink bzw. Kalium und Kohlenoxyd lassen sich als analoge Vorgänge auffassen. Beide erfolgen bei heller Rotglut in der Weise, daß Druck und Temperatur einander bestimmen. Sie sind somit durchaus einer Verdampfung bzw. Sublimation zu vergleichen: Bei gegebenem Außendruck tritt die Reaktion bei der Temperatur ein, bei der die gasförmigen Reaktionsprodukte jenen Außendruck überwinden. Auffallend ist, daß die Bildungstemperaturen der beiden Metalle so nahe aneinander liegen, obwohl das Zink relativ viel edler ist als das Kalium, was ja auch in den Verbrennungswärmen der beiden Metalle zum Ausdruck kommt, die für äquivalente Mengen bei Zink 86000 cal und bei Kalium 281000 cal beträgt. Die Verhältnisse werden verständlich bei Anwendung des Nernstschen Wärmetheorems. Die Näherungsformel lautet

$$\log K_p = -\frac{Q}{4{,}571}T + \Sigma\nu\,1{,}75\,T + \Sigma\nu\,\mathfrak{C}$$

worin K_p die Konstante des chemischen Gleichgewichts bei konstantem Druck, Q die Wärmetönung der Reaktion, ν die algebraische Summe der reagierenden Moleküle und $\mathfrak{C}$ die chemischen Konstanten bedeutet. Die Betrachtung der beiden Reaktionsgleichungen $Zn + CO = ZnO + C + 89600$ cal und $2K + 3CO = K_2CO_3 + 2C + 235600$ cal zeigt, daß im ersten Fall in der Gasphase $\Sigma\nu = 2$, im zweiten $\Sigma\nu = 5$ ist. Man erkennt, daß daraus eine Kompensation des negativen Gliedes für die Wärmetönung erfolgen kann.

Gegenstand der Messungen war zunächst der Temperaturpunkt, bei dem das System $ZnO + C$ „siedet", d. h. lebhaft Kohlenoxyd und Zinkdampf entwickelt; Methode die thermische Analyse; Anheizen des Gemenges und Beobachtung der durch den Wärmeverbrauch der Reaktion bedingten Verzögerung des Temperaturanstiegs. Diese Messungen wurden unterstützt durch Beobachtung der Gasgeschwindigkeit mit dem Rotamesser. Ihr Ergebnis war:

Druck . . .	760	266	86	28 mm *Hg*.
Temperatur .	1012	982	946	905° C.

Sie waren gut reproduzierbar und wurden bestätigt durch Beobachtungen über die Geschwindigkeit der Gewichtsabnahme, die ein im elektrischen Ofen erhitzter leichter Graphittiegel mit $ZnO + C$ beim Temperaturanstieg bei konstantem Druck zeigte, erkennbar an der Änderung der Angaben einer Federwage, auf der er, durch Vermittlung eines langen leichten Stabes, stand, oder auch durch direkte Wägung nach Erhitzung auf verschiedene Temperaturen.

Berechnet man aus der Verschiebung dieses „Siedepunktes" mit dem Druck die Wärmetönung der Reaktion, so erhält man unmögliche Werte:

1012—982°,	982—946°,	946—905°.
—219300 cal,	—185660 cal,	—151300 cal.

Die Annahme, daß die gemessene Umsetzung nicht die angenommene sei, sondern diese

$$2ZnO + C = 2Zn + CO_2$$

(der dann die annähernde Einstellung des Kohlenoxyd-Kohlensäuregleichgewichtes nachträglich folgt), stimmt zwar zu Beobachtungen über das Auftreten von Kohlensäure in der Praxis auch bei diesen Versuchen, aber sie beseitigt den Widerspruch nicht. Daher wurde vermutet, daß die beobachteten Werte nicht Gleichgewichten entsprechen, sondern nur die Punkte darstellen, wo die Reaktion für die benutzten Meßmethoden hinreichend geschwind wird.

Messung wirklicher Gleichgewichtsdrucke gelang in einem kleinen Apparat von Quarzglas: ein Röhrchen von etwa 20 ccm, das lange Zeit auf definierte Temperaturen erhitzt wurde, enthielt ein Graphitbüchschen mit $ZnO + C$, das



darin entwickelte Gas drückte auf ein kurzes Manometer von geschmolzenem Blei, dessen Bewegung kompensiert wurde durch Stickstoff. Zur Erkennung der Einstellung diente ein auf der Stickstoffseite schwimmendes Zylinderchen von Graphit, dessen Stellung durch Vermittlung eines Quarzstabes vor einer oberhalb des Ofens befindlichen Skale abgelesen werden konnte. Diese Gleichgewichte stellen sich außerordentlich langsam ein, bisweilen erst nach Tagen, sind von beiden Seiten erreichbar und geben die Werte:

Temperatur	596	627	665	695	729	756	995° C.
Druck . .	4,6	10,3	24,9	55,4	160	387	1253 mm *Hg*.

Sie liefern für die Wärmetönung im Mittel —94000 cal, eine mit den für Zimmertemperatur gemessenen —86000 und den spezifischen Wärmen befriedigend übereinstimmende Zahl. Aber ihre genaue Durchrechnung ist zurzeit noch nicht möglich. Es gehen in diese zwei noch nicht hinreichend bekannte weitere Gleichgewichte ein: das von Kohlenoxyd, Kohle und Kohlendioxyd, weil bei den unerwartet niedrigen Temperaturen das letztere bereits in merklicher Menge auch im Gleichgewicht auftritt, und das des gesättigten Zinkdampfes. Denn schon von etwa 712° an erreicht der Druck des durch die Reaktion gebildeten Zinkdampfes den der Sättigung, bei den höheren Temperaturen ist also eine Phase mehr, das flüssige Zink, im System vertreten.

Für die Praxis der hüttenmännischen Zinkgewinnung ergibt sich aus diesen Messungen, daß es an sich möglich ist, auch ohne Anwendung von Überdruck, schon beim Atmosphärendruck auf flüssiges Zink zu arbeiten, daß aber leider die Geschwindigkeit der Umsetzung derart gering ist, daß ihre Durchführung wohl kaum in Frage kommt.

Prof. Dr. D. Holde-Berlin. **Über die Prüfung kolloidaler Graphite.**

Der Mangel an Schmiermitteln hat zur Heranziehung des Graphits in größerem Umfange geführt. Der Verfasser hat eine Reihe von Methoden zur Untersuchung natürlichen und künstlichen Graphits nachgeprüft. Hervorgehoben sei aus seinen Ergebnissen, daß die bisherige Angabe, die Ursache der gefürchteten Koagulierung der Graphitoleosole liege im Säuregehalt der Verdünnungsöle, wohl nur für wenige Fälle zutreffend ist, zumal die normalen raffinierten Maschinenöle säurefrei sind oder höchstens unschädliche Spuren organischer Säuren enthalten. In der Maschinentechnik kann man bis zu einem gewissen Grade den Schädigungen der Koagulierung durch Benutzung zähflüssiger Verdünnungsöle begegnen.

Prof. Dr. W. Böttger-Leipzig: **Herstellung fadenförmiger Kristalle (Kristalldraht für Glühlampen) nach dem Verfahren der Firma Julius Pintsch, A.-G.**

Die Bearbeiter des Verfahrens sind von der Erkenntnis ausgegangen, daß gespritzten Fäden aus Wolfram, die auch nach dem Brennen und Formieren äußerst zerbrechlich sind, durch Zusatz gewisser Oxyde, wie Thoriumoxyd, Knickbarkeit und Duktilität erteilt werden kann. Die genaue Aufklärung dieses Effekts hat zu dem in technischer wie auch in wissenschaftlicher Beziehung gleich bedeutsamen Fortschritte in der Glühlampenindustrie geführt. Die nähere Untersuchung derartiger Fäden in geeigneter Beleuchtung ließ erkennen, daß die Fäden aus zahlreichen Stücken mit glänzenden Flächen und scharfen Kanten bestehen. Die einzelnen Stücke besitzen eine alle Erwartungen übertreffende Knickbarkeit, während die Fäden an den Stellen, an denen derartige, deutliche Anzeichen kristallinischer Struktur aufweisende und in ihrer Längsrichtung gegeneinander gedrehte Absätze zusammenstoßen, bei dem Versuch, sie zu biegen, außerordentlich leicht durchbrechen.

Von dieser fundamentalen Feststellung ausgehend ergab sich die Aufgabe, Bedingungen herzustellen, unter denen die Ausbildung möglichst langer fadenförmiger Kristalle mit möglichst wenig Stoßstellen mit Sicherheit vor sich geht. Da, wie sich sehr bald herausstellte, die Verteilung des Thoriumoxyds eine entscheidende Rolle spielt, handelte es sich zunächst darum, das Thoriumoxyd in geeigneter Menge (am günstigsten wirkt ein Zusatz von 2 Proz.) dem Metall in höchst gleichmäßiger Weise einzuverleiben. Aus dem Metall wird unter Zusatz eines Bindemittels eine Paste geknetet und diese zu Fäden verspritzt. Diese Fäden sind zu brennen, gegebenenfalls zu entkohlen und zu formieren, d. h. es soll den Fäden ein festes Gefüge erteilt werden, so daß beim Brennen in der Lampe keine merkbare Verdichtung und damit Änderung der Dimensionen mehr eintritt. Diese nach bekannten Grundsätzen durchzuführenden Maßnahmen mußten in solcher Weise abgeändert werden, daß die durch den Thoriumzusatz ganz offenbar begünstigte Ausbildung kristallinischen Gefüges in einer ganz bestimmten Richtung und möglichst ohne Unterbrechung der einmal eingeleiteten Kristallbildung zur Entwicklung kommt. Es bestand im besonderen die Aufgabe, die Fäden nach Passieren einer Vorwärmzone, in der die Vorbereitung (Brennen usw.) derselben sowie Auflösung des Thoriumoxyds stattfindet, mit schroffem Anstieg der Temperatur durch eine Temperaturzone (2400 bis 2600°) zu leiten,

in der die Fertigformierung und die Kristallisation vor sich geht, in solchem Tempo, daß die Kristallisationsgeschwindigkeit die Geschwindigkeit der Durchführung des Fadens übertrifft. — Die Überwindung der außerordentlichen Schwierigkeiten ist schließlich mit einem sehr sinnreich konstruierten, nur wenige Zentimeter hohen Apparat gelungen, nachdem man zunächst mit einem mehrere Meter hohen Apparate das schwierige Problem in Angriff genommen hatte.

Daß der so gewonnene Draht tatsächlich kristallinisches Gefüge mit Individuen von zum Teil vielen Metern Länge bei nur einigen hundertstel Millimetern Durchmesser besitzt, läßt sich bei der Untersuchung angeätzter Fäden erkennen. Dabei bilden sich auch die äußeren Merkmale von Kristallen — die Begrenzung durch ebene Flächen — aus, was übrigens auch nach längerem Brennen in der Birne und bei manchen Kristallen schon nach dem Formieren eintritt. Der ursprünglich nahezu kreisförmige Querschnitt weist danach achteckige Begrenzung auf. — Von besonderem Interesse ist die noch nicht völlig geklärte Frage, ob das Thorium (-oxyd) in Gestalt einer festen Lösung im ausgebildeten Kristall vorhanden ist, und die nach dem Mechanismus der Kristallbildung in einer bestimmten Richtung, der Längsachse des Fadens.

Die Glühfäden aus Kristalldraht weisen gegenüber den gezogenen Fäden den sehr wesentlichen Vorzug auf, daß sie auch bei längerer Brenndauer nicht den Veränderungen unterliegen, die man als Rekristallisation bezeichnet. Beim gezogenen Draht tritt dies schon nach kurzer Zeit ein, mit dem Erfolg, daß die Fäden im kalten Zustande schon bei leichter Berührung zerbrechen, während der Kristalldraht als ein stabiles Gebilde dieser Zustandsänderung nicht ausgesetzt ist.

Das geschilderte Verfahren ist von den Herren Oberingenieur Otto Schaller und Dr. Orbig von der Julius Pintsch A.-G. ausgearbeitet worden.

Der Vortrag fand eine sehr willkommene und dankenswerte Ergänzung dadurch, daß die Firma Pintsch die Teilnehmer für den Tag nach der Versammlung in ihre Fabrik eingeladen hatte und dort die technische Durchführung des Verfahrens in großzügiger Weise bis in alle Einzelheiten besichtigen ließ.

Dr. J. Eggert und Dr. H. Schimank-Berlin: Einige Vorlesungsversuche zur Theorie der Explosivstoffe.

Über ihre schönen, im physikalisch-chemischen Institut der Universität Berlin ausgearbeiteten Versuche haben die Verfasser auf Bitte des Referenten nachfolgenden Bericht für die Physikal. Zeitschr. eingesandt.

Will man möglichst knapp die charakteristischen Eigenschaften der Explosivstoffe aufzählen, so kann man dies etwa durch die Definition tun: Explosivstoffe sind Systeme, die exothermer chemischer Umsetzung fähig sind, Sensibilität besitzen, d. h. bei denen der Reaktionsvorgang durch geeignete meist spezifische Mittel ausgelöst wird, und die bei hoher Reaktionsgeschwindigkeit lediglich oder vorwiegend gasförmige Reaktionsprodukte liefern.

Zur Demonstration der Gasentwicklung benutzt man statt des üblichen Schwarzpulvers vorteilhaft ein trägeres Pulver, das man durch innige Zusammenmischung von gut getrocknetem Ammonnitrat und Buchenholzkohle im Verhältnis 9:1 erhält. Stopft man mit 3 g dieser Mischung eine abgeschnittene Infanteriegewehrpatrone, zündet durch übergeschütteten Feuerwerksatz und läßt nun das Ganze in ein Reagensglas gleiten, welches man durch einen Stopfen mit Gasableitungsrohr schnell verschließt, so kann man die sich entwickelnden Gase (bis auf den Wasserdampf) bequem und fast quantitativ in einer pneumatischen Wanne auffangen.

Während bei Atmosphärendruck die Verbrennung also sehr milde verläuft, geht sie bei Drucksteigerung in eine Explosion über, das Pulver wird treibfähig. Man kann dies zeigen, wenn man nacheinander, z. B. aus einer sogenannten „Scheintodpistole" von 12 mm Kaliber, eine Pappatrone, die nur das Zündhütchen enthält, eine zweite, die darüber eine „Beiladung" von 0,25 g Schwarzpulver enthält, und eine dritte mit der zugefügten Hauptladung von 2 g Ammonsalpeterpulver verschießt. Die wachsende Stärke des Knalls macht den Effekt sehr deutlich.

Eine ähnliche Steigerung der Reaktionsgeschwindigkeit findet auch beim Schwarzpulver statt, nur ist für das Auge der Unterschied zwischen der Zeitdauer der Verpuffungsflamme und des Feuers vor der Mündung der Waffe nicht wahrnehmbar. Er wird es aber sogleich, wenn man die Flammenerscheinung zur Beleuchtung eines Sektorausschnittes benutzt, der mit einer Geschwindigkeit von 5 Umdrehungen in der Sekunde umläuft.

Wesentlich verschieden von den geschilderten Erscheinungen sind die Vorgänge bei der Detonation. Die Art der Auslösung spielt hierbei eine maßgebende Rolle, und während ein geeigneter Explosivstoff, z. B. ein Cheddit aus Kaliumchlorat und Milchzucker im Verhältnis 1:1, bei Zündung mit der Flamme ruhig abbrennt, detoniert er auf dem Amboß unter der

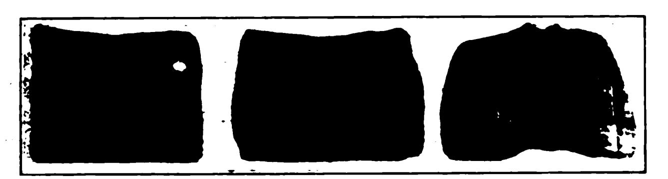


Fig. 3.

Wirkung eines Hammerschlags oder bei Anwendung einer Sprengkapsel. — Als angenähertes Maß der Wirkung der Detonation dient in der Praxis die Aufbauchung eines Trautzschen Bleiblockes. Bildet man einen solchen Block aus plastischem Ton nach, so läßt sich im Kleinen und ganz gefahrlos dasselbe zeigen. Fig. 3 zeigt links den Durchschnitt durch einen Tonblock, der nur das ursprüngliche Bohrloch enthält, in der Mitte die Aufbauchung dieser Bohrung durch die Sprengkapsel allein, rechts die bei weitem stärkere Wirkung, die man erhält, wenn das Bohrloch mit 0,5 g Cheddit mit eingesetzter Sprengkapsel beschickt wird. Die Sprengkapsel besteht aus einem Stück Zündschnur, um dessen eines Ende ein Streifen Stanniolpapier zwei- bis dreimal herumgewickelt ist, so daß sich ein kleiner, einseitig durch die Zündschnur geschlossener Hohlzylinder bildet. In diesen werden ungefähr 30 mg Silberazid (AgN_3) mit einem passenden Holzstäbchen sanft eingedrückt; darauf wird die Kapsel durch Umlegen des überstehenden Stanniolrandes verschlossen.

Die außerordentliche Brisanz der Initialsprengstoffe, deren Vertreter das Silberazid darstellt, läßt sich schließlich dadurch zeigen, daß man ein etwa hirsekorngroßes Stück Azid frei auf eine dünne Glasplatte, etwa eine abgewaschene photographische Platte legt, die hohl



Fig. 4.

auf einem Dreifuß ruht. Führt man nun durch Berühren mit einem glimmenden Holzspan die Detonation herbei, so wird die Platte durchschlagen, oftmals ohne daß von dem entstehenden Loch Sprünge weiter laufen. Fig. 4 gibt das Aussehen einer solchen durchschlagenen Glasplatte wieder.

Zusammenfassung.

Durch einige einfache und gefahrlose Versuche können folgende wesentlichste Eigenschaften der Explosivstoffe erläutert werden:

1. die Gasentwicklung bei langsam verlaufender chemischer Reaktion, wenn diese überhaupt einmal eingeleitet ist,
2. die verschiedene Reaktionsgeschwindigkeit, mit der bei verschiedenem Druck die chemische Umsetzung stattfindet,
3. der Unterschied bei der Verbrennung oder der Detonation eines Sprengstoffes,
4. Die brisante Wirkung eines Initialsprengstoffes.

Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. F. Förster-Dresden: Die Umwandlung von Hypochlorit in Chlorat in alkalischer Lösung.

Der Vortrag bietet ausschließlich chemisches Interesse. Ebenso der folgende des Geh. Reg.-Rats Prof. Dr. K. Elbs-Gießen: Beispiel für umkehrbare Reaktion und Komplexbildung.

Prof. Dr. R. Zsigmondy-Göttingen: Über Koagulation.

Wie bei Gasen Abweichungen vom Boyleschen Gesetz bei höheren Konzentrationen besonders auffällig sind, so konnte man Ähnliches auch bei kolloiden Lösungen und Suspensionen erwarten. In der Tat wurde Derartiges bei Rauchteilchen von R. Lorenz und Eitel und bei Gummiguttemulsionen von Costatin beobachtet, und die Art der Abweichung läßt auf Abstoßung der einander stark genäherten Teilchen schließen. Ebenso läßt sich aus zahlreichen Tatsachen folgern, daß auch bei normal elektrisch geladenen Kolloidteilchen der verdünnten Hydrosole Abstoßung eintritt, sobald die Teilchen durch die Brownsche Bewegung einander sehr stark genähert werden. Reine kolloide Goldlösungen würden nicht jahrelang haltbar sein, wenn deren Ultramikronen bei ihren Zusammenstößen bis zur Berührung kommen würden.

Umgekehrt macht es die nach Entladung der Teilchen sehr schnell eintretende weitgehende irreversible Koagulation derselben Goldhydrosole wahrscheinlich, daß zwischen den unelektrischen Teilchen Anziehungskräfte bestehen, welche die Koagulation beschleunigen.

Nimmt man an, daß die Teilchen (im isoelektrischen Gebiet) von Anziehungssphären umgeben sind, derart, daß jedes Teilchen, dessen Mittelpunkt in die Anziehungssphäre eines zweiten gelangt, sich momentan mit ihm vereinigt, so muß die Größe des Radius dieser Sphäre (R) von wesentlichem Einfluß auf die Koagulationsgeschwindigkeit sein. Die Koagulationszeit T (Zeit, die zur Verminderung der Teilchenzahl auf die Hälfte gebracht wird) wird dann bei vollständiger Entladung der Teilchen bestimmt sein von der ursprünglichen Teilchenzahl n_0, vom Diffusionskoeffizienten D der Brownschen Bewegung und von der Größe des Radius R. Eine neue, auf derartigen Grundlagen ruhende Theorie der Koagulation hat v. Smoluchowski gegeben und darüber in Göttingen vorgetragen[1]). Voraussetzung für die Prüfung seiner Formel, die aus der Änderung der Teilchenzahlen mit der Zeit den Radius der Attraktionssphäre berechnen läßt, ist allerdings, daß es gelingt, die Ultramikronen möglichst momentan zu entladen, und daß alle störenden Momente, die bei der langsamen Koagulation zuweilen beobachtet worden sind, durch geeignete Versuchsbedingungen ausgeschaltet werden.

Die Vorarbeit zu der eigentlichen ultramikroskopischen Untersuchung des Koagulationsvorgangs hat schon zu recht interessanten Resultaten geführt und überraschend einfache Gesetzmäßigkeiten erkennen lassen. Als Indikator für die bis zu einem bestimmten Grade vorgeschrittene Koagulation diente dabei der Farbenübergang der Flüssigkeit von Rot in eine leicht erkennbare Nuance von Violettrot. Die zugehörige Zeit wird als Koagulationszeit $t_{(VR)}$ bezeichnet.

Es zeigte sich, daß jede reine kolloide Goldlösung, die in bestimmter Konzentration zur Anwendung kommt, ein Gebiet kleinster Koagulationszeit besitzt, das bei mäßiger Elektrolytkonzentration schon erreicht wird und sich über weite Gebiete derselben erstreckt.

Die kleinste Koagulationszeit ist unabhängig von der Art des Elektrolyten, vorausgesetzt, daß man gewisse Vorsichtsmaßregeln anwendet und Umladung sowie Schutzwirkung durch Hydrolysenprodukte vermeidet.

Bei einem bestimmten Goldhydrosol wächst die Koagulationszeit annähernd umgekehrt proportional der Goldkonzentration.

Die ultramikroskopische Untersuchung des Koagulationsvorgangs hat zu einer Bestätigung der v. Smoluchowskischen Koagulationstheorie und zur Erkenntnis geführt, daß die entladenen Ultramikronen der Goldhydrosole sich auf kleine Entfernungen bereits anziehen, daß die berechneten Radien der Attraktionssphären aber von der Größenordnung der Teilchenradien sind und diese nur um das Zwei- bis Dreifache übertreffen.

1) Diese Zeitschr. **17**, 287—599, 1916; ausführlicher demnächst in der Zeitschrift für physikalische Chemie.

Prof. Dr. K. Arndt-Charlottenburg: Die Elektrochemie der Taschenlampenbatterien.

Unser jährlicher Verbrauch an Taschenlampenbatterien ist auf dreißig Millionen Stück zu schätzen. Als Lampen verwendet man jetzt fast durchgehends Osramlampen für 0,2 Amp. und 3,5 Volt, die von ausgezeichneter Güte und Gleichmäßigkeit sind. Dagegen schwankt die Güte der Batterien in weiten Grenzen. In den äußeren Abmessungen wird Einheitlichkeit gewährleistet durch den Verband der Fabriken von Taschenlampenbatterien in Deutschland E. V. Die Batterien bestehen aus drei kleinen Trockenelementen von der Leclanché-Art. Ein Zinkbecher bildet den negativen Pol des Elements, ein Kohlestäbchen den positiven, der mit einer feingepulverten Mischung aus Braunstein (Mangansuperoxyd) und — zur Erhöhung der Leitfähigkeit — Graphit umgeben ist. Das in Gaze gehüllte Gemisch füllt das Zinkbecherchen fast aus. Der enge ringförmige Zwischenraum enthält den Elektrolyten, eine Lösung verschiedener Salze, hauptsächlich Chlorammonium und Chlorzink in Wasser, welche durch Mehlzusatz zu einem Schleim verdickt ist. (Wie hier lediglich die roheste Empirie herrscht, mag daraus hervorgehen, daß die in der Diskussion gestellte Frage, welchen Zweck der Zusatz von Chlorzink haben solle, aus der Versammlung von Elektrochemikern nicht beantwortet werden konnte und die Ansicht am meisten Beifall fand, daß Chlorzink nur schädigend wirken könne.) Bei der Entladung geht weder die Auflösung des Zinks glatt vor sich noch die Sauerstoffabgabe von seiten des Mangansuperoxyds. Am Zink bildet sich eine graue Oxydschicht und aus dem Elektrolyten werden am Zink weiße Körner von basischen Zinksalzen ausgeschieden, die den inneren Widerstand des Elements auf das Doppelte bis Dreifache des Anfangswiderstands erhöhen. Diese störenden Einflüsse machen sich um so mehr geltend, je höher die Stromstärke ist und je weniger Ruhepausen man der Batterie gönnt. An der anderen Elektrode bewirkt die Trägheit des Depolarisators ein Sinken der Spannung während der Stromabgabe, welches während der Ruhepause zuerst mehr, dann weniger rückgängig gemacht wird, bis schließlich die Entladungsspannung unter die zulässige Grenze sinkt, lange bevor alles Mangansuperoxyd

verbraucht ist. Für die Prüfung der Batterien ist vom Verband Deutscher Elektrotechniker vorgeschrieben, daß sie durch einen Widerstand von 15 Ohm geschlossen werden und die Zeit bestimmt wird, innerhalb deren die Spannung auf 1,8 Volt absinkt. Die Verbandsbatterie soll bei dieser Prüfung eine Brenndauer von drei Stunden aufweisen, dem entspricht bei längeren Ruhepausen erfahrungsgemäß etwa $4\frac{1}{2}$ Stunden Brenndauer. Beim Lagern nimmt ebenfalls die Spannung der Batterie allmählich ab durch chemische Umwandlungen, welche sich in der offenen Batterie langsam vollziehen.

Messungen des Vortragenden an Taschenlampenbatterien haben ergeben, daß die Leistung bei $1/8$ kg Gewicht 2,3 Wattstunden beträgt. Die Strommessung und Berechnung des Materialverbrauchs nach dem Faradayschen Gesetz ergab, daß 25 Proz. zuviel an Mangansuperoxyd verbraucht war und an Zink sogar 50—80 Proz. Die nach der Entladung unausgenutzt zurückbleibenden Materialien sind rund zwei Drittel des ursprünglich vorhandenen Zinks und Mangansuperoxyds, außerdem der Graphit. Diese großen Mengen wertvoller Stoffe werden jetzt zumeist fortgeworfen. Man sieht, daß die Taschenlampenbatterien eine ganze Anzahl aussichtsvoller Aufgaben bieten.

Geh. Regierungsrat Prof. Dr. F. Mylius-Charlottenburg: Normierte Metalle.

Bei der experimentellen Erforschung der Eigenschaften metallischer Elemente, sowie bei ihrer Anwendung zu Normalbestimmungen, spielt der Reinheitsgrad eine ungemein wichtige Rolle. Metallische Präparate von absoluter Reinheit sind bekanntlich nicht herstellbar, solche vom höchsten erreichbaren Reinheitsgrade lassen sich meist nur in kleinen Mengen gewinnen. An ihrer Stelle können oft besonders reine technische Präparate angewandt werden, wenn sie nur analytisch sicher charakterisiert sind. Gleichartiges Material kann dabei den Vorteil haben, verschiedene wissenschaftliche Untersuchungen miteinander vergleichbar zu machen. Auf Veranlassung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt können derartige, von bestimmten Firmen nach besonderen Methoden hergestellte Metalle von jetzt ab, nach Bestimmung ihrer Verunreinigungen, unter Beigabe amtlicher Prüfungsscheine, als „normierte Metalle" in den Handel gebracht werden.

Als zulässige Grenze für die Massenverunreinigung ist dabei ein Maximalbetrag von 0,01 Proz. in Aussicht genommen (vierte Reinigungsstufe).

Mit dem von der Firma Kahlbaum zu beziehenden „normierten Zink" ist der Anfang gemacht worden; weitere normierte Metalle werden folgen.

Prof. Dr. F. Krüger-Danzig-Langfuhr: Gasanalyse durch Leitfähigkeitsmessung.

Die stärkste Leitfähigkeit in Gasen wird durch die α-Strahlen einer radioaktiven Substanz, z. B. Polonium erzielt. Bei völliger Absorption der α-Strahlen ist die Ionisation und damit der Sättigungsstrom von der Natur des Gases unabhängig. Wählt man jedoch die Länge des Ionisationsgefäßes, parallel zu der die α-Strahlen steigen, so groß, daß sie gleich der Reichweite der Strahlen in dem dichteren von zwei untersuchten Gasen ist, so werden die α-Strahlen bei Füllung des Gefäßes mit einem weniger dichten Gase nicht mehr völlig absorbiert, die Ionisation und der Sättigungsstrom sind also geringer. Die Messung des Sättigungsstroms in einem derartigen Gefäße gestattet also, den Prozentgehalt in einem Gemisch zweier gegebener Gase zu bestimmen. Die Messung der hier in Betracht kommenden Ströme von der Größenordnung 10^{-9} Amp. oder weniger geschieht in der Regel mit Blättchenelektrometern oder Saitenelektrometern, indem die Geschwindigkeit des Zusammenfalls mit der Uhr gemessen wird; man kann aber auch stationäre Ausschläge messen, wenn man einen hinreichend großen Widerstand zu dem Elektrometer parallel schaltet. Die bisher hierzu benutzten Bronsonwiderstände wie auch die Campbelschen Äthylalkohol-Benzolwiderstände sind wenig befriedigend, sie gehorchen teils dem Ohmschen Gesetz nicht, teils sind sie zeitlich veränderlich. Der Vortragende hat deshalb durch Niederschlagen von Platin durch Kathodenzerstäubung auf Bernsteinstäben hochohmige Widerstände konstruiert, die allen Anforderungen genügen dürften und von denen er eine Serie von 7 Stück in dem Intervall von $5 \cdot 10^8$ bis $3 \cdot 10^{13}$ Ohm demonstriert.

Der Vorteil dieser elektrischen Methode vor den sonstigen Methoden zur Bestimmung des Prozentgehalts von Gasgemischen ist einmal die Leichtigkeit und Schnelligkeit der Ablesung, welche sie gestattet, dann besonders aber die Möglichkeit, die Ablesung weit entfernt von dem Orte zu machen, an dem sich das Gasgemisch befindet. Durch Anwendung sehr starker radioaktiver Präparate dürfte sich vielleicht auch die Anwendung direkt geeigneter Glühstrominstrumente ermöglichen lassen. Der Vortragende gibt noch eine Differentialschaltung an, welche kleine Änderungen im Prozentgehalt, etwa bis $1/10$ bis $1/100$ Prozent zu messen gestattet.

Prof. Dr. H. von Euler-Stockholm: **Über Löslichkeitsbeeinflussung durch Salze.**

Berechnet man die äquivalente Löslichkeitsänderung AS, welche von Salzen auf Nichtelektrolyte ausgeübt wird, nach der Formel:

$$AS = \frac{1}{n} \cdot \frac{l_w - l_s}{l_w},$$

wo n die Konzentration der Salzäquivalente bedeutet, l_w die Löslichkeit des Nichtelektrolyten in Wasser und l_s seine Löslichkeit in der Salzlösung, so zeigt sich bekanntlich, daß die Reihenfolge der aussalzenden Wirkung unabhängig ist von der Natur der ausgesalzenen Nichtelektrolyte, daß also die äquivalente Löslichkeitsbeeinflussung eine additive Wirkung der beiden gelösten Substanzen ist.

Nach Untersuchungen an Salzgemischen und Stoffen, wie Quecksilbercyanid, sind die nichtdissoziierten Salzanteile an genannter Wirkung nicht beteiligt, und man kann also aus den Mittelwerten für AS die äquivalenten Löslichkeitsbeeinflussungen für die verschiedenen g-Ionen erhalten. Führt man eine solche Berechnung aus, so findet man u. a. für das NH_4-Ion einen negativen Wert, wonach also dieses Ion löslichkeitserhöhend wirkt.

In Verfolgung dieses Resultats hat der Verfasser auf seine alten Messungen an Aminen, besonders Anilinsalzen, zurückgegriffen, welche eine starke Löslichkeitserhöhung ergeben hatten.

Eine Erweiterung dieses Ergebnisses wurde in zwei Richtungen gesucht: 1. Ausgehend von dem Umstand, daß Anilinsalze die Oberflächenspannung des Wassers erniedrigen (während anorganische Salze, mit wenigen Ausnahmen, erhöhen). 2. Ausgehend von dem aromatischen Charakter des Anilins und dem bemerkenswerten Ergebnis E. Thorins, daß Äthyläther durch aliphatische Natriumsalze ausgesalzen, durch aromatische dagegen in Lösung gebracht wird.

Wie die Zahlen der Tabelle zeigen, wirken in den meisten Fällen diejenigen Salze, welche die Oberflächenspannung des Wassers erhöhen, aussalzend; diejenigen, welche die Oberflächenspannung erniedrigen, lösend. Indessen bestehen deutliche Ausnahmen von dieser Regel, von welchen hier Na-Butyrat und Na-Isovalerat aufgenommen sind.

Allgemeiner scheint die Regel Thorins zu gelten, wenigstens soweit es sich um nichtkolloide Stoffe handelt; in der Tabelle findet sich hiervon ein Ausnahmefall, nämlich die Löslichkeitserniedrigung von Na-Phtalat gegenüber Nitrobenzol.

Sowohl die hier behandelten Löslichkeitserhöhungen als die Löslichkeitserniedrigungen sind ausgesprochene Ionenwirkungen.

Tabelle.

Erhöhung der Löslichkeit und der Oberflächenspannung ist durch + bezeichnet, Erniedrigung durch —.

Elektrolyt	Änderung der Oberflächenspannung	AS		
		Anilin	Nitrobenzol	Äthyläther
1 n. Na Chlorid	+ 1,7	— 0,29	—	— 0,42
1 n. Na-Sulfit	+ 3,6	— 0,45	—	— 0,53
1 n. Na-Azetat	+ 1,7	— 0,36	—	— 0,53
1 n. Na-Butyrat	— 9,7	— 0,30	—	—
1 n. Na-Isovalerat	— 28,3	— 0,48	—	—
1 n. Anilin-Nitrat	— 22,8	+ 0,45	+ 0,55	—
1 n. Picolin Nitrat	— 10,0	—	+ 0,31	—
1 n. Na-Benzoat	— 12,0	+ 0,05	—	+ 0,05 (Thorin)
1 n. NH_4-Benzoat	— 8,1	+ 0,274	+ 0,61	—
1 n. Na-Salizylat	— 9,0	+ 0,98	—	+ 0,20 (Thorin)
1 n. Na-Phtalat	+ 1,5	—	— 0,28	+ 0,015 (Thorin)
0,1 n. Na-Pikrat	± 0	—	+ 0,38	—

Die Messungen von Thorin an Äthyläther beziehen sich auf 0,5 n. Lösungen.

Prof. Dr. Rothmund-Prag: **Über das sogen. Antozon.**

Die bei der Einwirkung von Ozon auf gewisse Reduktionsmittel, wie Jodide, schweflige Säure, entstehenden Nebel, in deren Auftreten G. Meißner den Beweis für die Existenz einer dritten Sauerstoffmodifikation, des von Schönbein angenommenen Antozons, gesehen hatte, wurden untersucht. Es zeigte sich, daß die Nebel nur dann auftreten, wenn das Ozon bei Gegenwart von Wasser mit einem flüchtigen Bestandteil der Lösung reagiert. Aus der Analyse der Nebel läßt sich auf Grund einer von Townsend ausgesprochenen Annahme über die Ursache ihrer Beständigkeit die Größe der Nebeltröpchen berechnen; dieselbe wurde im allgemeinen der Größenordnung nach übereinstimmend mit dem aus der Fallgeschwindigkeit abgeleiteten Werte gefunden. Nur bei saurer Jodkaliumlösung ergaben sich merklich größere Werte; dies erklärt sich wahrscheinlich dadurch, daß hier neben der Jodsäure Wasserstoffperoxyd gebildet wird. Die Salmiaknebel verhalten sich ganz ähnlich. Es scheint, daß bei ganz verschiedenartigen Vorgängen Nebel von gleichen Eigenschaften entstehen.

Fräulein Dr. Kornfeld-Prag: **Der Basenaustausch im Permutit.**

Aluminiumhaltige Silikate, nach Gans „Alu-

minatsilikate", haben die Fähigkeit, aus wässerigen Neutralsalzlösungen Kationen aufzunehmen und dafür andere Kationen in äquivalenter Menge abzugeben. Ein solches „Aluminatsilikat" ist auch der von Gans für technische Zwecke hergestellte Permutit. Dieser diente als Material für die von Herrn Professor Rothmund und der Vortragenden gemeinsam angestellten Untersuchungen.

Das zu untersuchende System besteht aus zwei Phasen, einer wässerigen mit zwei verschiedenen Kationen und einem Anion, und einer festen, der Permutitphase, worin im Gleichgewicht ebenfalls die beiden Kationen vorkommen. Die relative Menge des ausgetauschten Salzes, im Verhältnis zu der im ganzen austauschbaren Menge, ist im Gleichgewicht durch die Konzentration der Lösung an den beiden Salzen gegeben. Bezeichnet man mit n die austauschbare Menge der Äquivalente im Permutit, mit $\frac{a}{v}$ und $\frac{b}{v}$ die Anfangskonzentrationen der beiden Kationen in der Lösung, mit x die ausgetauschte Menge, so ist demnach

$$\frac{x}{n} = f\left(\frac{a-x}{v}, \frac{b+x}{v}\right). \qquad \text{(I)}$$

Für den Fall gleichwertiger Ionen in verdünnten Lösungen geht diese Gleichung über in

$$\frac{x}{n} = f\left(\frac{b+x}{a-x}\right). \qquad \text{(II)}$$

Es wird ausdrücklich betont, daß diese Unabhängigkeit von der Verdünnung nur aus den Gesetzen verdünnter Lösungen gefolgert wurde, ohne daß dabei über die Art des Vorgangs im Permutit eine Voraussetzung gemacht wurde. Die von Wiegner[1]) und Gans[2]) aufgestellten Formeln werden mit der Gleichung (II) verglichen. Die von Wiegner verwendete Freundlichsche Formel erweist sich als unzureichend, da darin nur ein Kation berücksichtigt wird; dies hat auch Gans bereits hervorgehoben. Die Gansche Formel für das Massenwirkungsgesetz läßt sich aus der Gleichung (II) dann ableiten, wenn der Permutit als eine feste Lösung betrachtet werden kann, für die die Gesetze verdünnter Lösungen Gültigkeit haben. Aber selbst unter dieser Voraussetzung gilt die Formel, wie Gleichung (II) überhaupt, nur für den Fall gleichwertiger Ionen.

Die eigenen Versuche wurden zunächst mit Natriumpermutit unternommen, der in feingepulvertem Zustande mit Silbernitratlösung und Natriumnitratlösung verschiedener Menge und Konzentration geschüttelt wurde. Das Gleichgewicht stellte sich binnen sehr kurzer Zeit ein; nach 5 Minuten dauerndem Schütteln wurde derselbe Punkt von beiden Seiten erreicht: das eine Mal wurden die beiden Lösungen gleichzeitig zugesetzt, das andere Mal erst die Silberlösung, dann geschüttelt, hierauf die Natriumlösung und wieder geschüttelt. Die ausgetauschte Menge wurde durch Bestimmung des Silbergehalts der Lösung nach der Volhardschen Methode ermittelt. Die Versuche erstreckten sich über ein Intervall, in dem das Verhältnis $\frac{b+x}{a-x}$ sich um den 500 fachen Betrag änderte. An diesen 18 Versuchen wurde nun zunächst die Gansche Formel, das einfache Massenwirkungsgesetz, erprobt, das aber keine Konstante ergab, sondern eine Zahl, die von 15 auf 208 stieg. Dagegen lassen sich die Versuche sehr gut durch folgende Formel wiedergeben:

$$\left(\frac{x}{n-x}\right)^p \cdot \frac{b+x}{a-x} = K, \qquad \text{(III)}$$

wobei K und p Konstanten sind und $p > 1$.

Für die weiteren Versuche wurde Silberpermutit verwendet. Es wurden die quantitativen Beziehungen beim Austausch gegen HN_4 und gegen Kalium nach Gleichung (III) ermittelt. Über den Austausch eines zweiwertigen gegen ein einwertiges Kation gibt die Versuchsreihe Aufschluß, die mit Silberpermutit und Bariumnitrat ausgeführt wurde.

Prof. Dr. Otto Hönigschmid-Prag: Über das Thoriumblei.

Auf Grund der modernen Anschauungen über den Zerfall radioaktiver Elemente war zu erwarten, daß das ThE, das anscheinend nicht mehr aktive Endprodukt der Thoriumreihe, ein Isotop des Bleies sei. Sein Atomgewicht ließ sich theoretisch zu 208,1 berechnen, also um eine Einheit höher als das des gewöhnlichen Bleies. Allerdings war nicht zu erwarten, daß es gelingen würde, reines ThE aus irgendeinem Thoriummineral zu isolieren, da letztere stets Uran in wechselnden Mengen enthalten, und infolgedessen das Endprodukt des radioaktiven Zerfalls dieses Elements, das Bleiisotop RaG vom At.-Gew. 206, in untrennbarer Mischung mit dem ThE vorliegen müßte. Das aus alten primären Thormineralien isolierte Blei müßte demnach ein Atomgewicht besitzen, das je nach dem Mischungsverhältnis der beiden Isotope zwischen 206 und 208 liegt. Soddy isolierte aus Ceylon-Thorit, der neben 61,95 Proz. ThO_2 nur 1,9 Proz. U_3O_8 und 0,39 Proz. PbO enthält, das Blei und be-

1) Journ. f. Landw. 60, 111—150, 197—222, 1912; Zentralblatt f. Min. u. Geol. 1914, S. 262—272.

2) Zentralbl. f. Min. u. Geol. 1913, 699—712, 728—741; 1914, S. 273—279, 299—306.

stimmte sein spez. Gew. Unter der Annahme, daß die Atomvolumina der Isotope gleich seien, berechnete er aus der gefundenen Dichte das Atomgewicht dieses „Thoriumbleies" zu 207,74, wenn gewöhnliches Blei mit dem modernen Atomgewicht $Pb = 207,2$ in Rechnung gesetzt wird. Eine direkte Atomgewichtsbestimmung dieses „Thorbleies" durch Analyse des Chlorids erschien sehr wünschenswert, da bei der indirekten Bestimmung dieser Konstante aus der Dichte, kleine Fehler bei der Ermittlung der letzteren beträchtliche Differenzen bei der Berechnung des Atomgewichts zur Folge haben.

Vortr. hatte Gelegenheit eine direkte Atomgewichtsbestimmung mit Hilfe des Soddyschen Originalmaterials durch Analyse des destillierten Chlorids auszuführen. Es wurden in üblicher Weise nach den von Th. W. Richards und seiner Schule ausgearbeiteten Methoden die beiden Verhältnisse $PbCl_2 : 2\,Ag$ und $PbCl_2 : 2\,AgCl$ bestimmt und dabei als Mittel von acht Bestimmungen für das Atomgewicht des „Thoriumbleies" der Wert 207,77 mit einer mittleren Abweichung vom Mittel von $+$ 0,014 ermittelt. Dieser Wert steht mit dem von Soddy erhaltenen in vollster Übereinstimmung. Es ist damit jedenfalls bewiesen, daß das Blei aus Thormineralien, falls diese uranarm sind, ein weit höheres Atomgewicht besitzt als das Plumbum commune. Aus den mittleren Lebensdauern von Thor und Uran läßt sich für das Blei aus Ceylon-Thorit auf Grund der von Soddy gegebenen Analyse desselben das Mischungsverhältnis der beiden vorhandenen Bleiisotope RaG und ThE berechnen und damit auch das erwartete Atomgewicht dieses „Thorbleies". Nach hinreichend langer Zeit sollte das Mengenverhältnis angenähert folgenden Werten entsprechen: 10 Proz. RaG und 90 Proz. ThE, woraus sich für dieses „Thorblei" der Wert 207,9 ergibt in Übereinstimmung mit der auf zwei verschiedenen Wegen experimentell ermittelten Zahl.

Dr. P. Günther-Berlin: Einige Studien zum elektromotorischen Verhalten des Bleies.

Man erhält bei der Messung elektromotorischer Kräfte die Potentiale des metallischen Bleies am besten in der Weise, daß man die Bleielektroden durch elektrolytisches Verbleien eines Platindrahtes aus sehr verdünnter Bleiazetatlösung mit sehr schwachen Strömen herstellt. Bei Anwendung derartiger Elektroden erhält man bei der Messung der Ketten

$$Pb \mid PbCl_{2\ \text{gesättigt}} \mid AgCl \mid Ag$$

und

$$Pb \mid PbCl_{2\ \text{gesättigt}} \mid Hg_2Cl_2 \mid Hg$$

Potentiale, die mit Rechnungen Brönstedts[1]) in guter Übereinstimmung stehen, und aus denen sich die Bildungswärme des Bleichlorids zu 85400 Kal. bzw. 85380 Kal. ergibt (85570 Kal. nach Koref und Braune[2]) auf kalorimetrischem Wege).

Prof. Dr. Lothar Wöhler-Darmstadt: Zur Bestimmung des heterogenen Wasserdampfgleichgewichts.

(Nach Versuchen mit W. Prager.)

Zur Bestimmung des heterogenen Wasserdampfgleichgewichts, über Metallen z. B. und deren Oxydationsprodukten, benutzt man konstanten Wasserdampfdruck und stellt die Wasserstoffkonzentration durch den Endgesamtdruck fest. Die Gleichgewichtseinstellung erfolgte bei den klassischen Versuchen von Deville über Eisen durch freiwillige Diffusion der Gase vom Wasser zum Metall, also sehr langsam. Preuner beschleunigte sie durch Schütteln, indem er den ganzen Apparat als Schaukel konstruierte.

Beschränkt man sich auf Wasserdampftensionen von Zimmertemperatur und darunter, so kann man in einfachster Apparatur ohne wesentliche Überwachung bei beliebiger Versuchsdauer und Temperatur des Metalls sich unabhängig machen von der freiwilligen Diffusion der Reaktionsgase und schon nach Minuten sicheres Gleichgewicht von beiden Seiten dadurch erreichen, daß man den Wasserstoff mit Hilfe fallenden Quecksilbers — ähnlich der Sprengel-Pumpe — durch das Wasser konstanter Temperatur hindurch über das Reaktionsmetall hinweg in dauerndem Kreislaufe bis zur Druckkonstanz treibt.

Die Apparatur wurde zunächst nur zur Bestimmung des Wasserdampfgleichgewichts über Eisen und Wolfram benutzt zwischen 700 und 1050°. Die gefundene Temperaturkurve der Konstanten für Eisen liegt ein wenig höher als die von Deville, bzw. Preuner, die von Wolfram liegt ganz in der Nähe und schneidet die des Eisens bei 840°.

1) Zeitschr. f. physikal. Chemie **56**, 665, 1906, und Zeitschr. f. Elektroch **19**, 754, 1913.
2) Zeitschr. f. Elektroch. **18**, 818, 1912.

(Eingegangen 12. Februar 1917.)

BESPRECHUNGEN.

W. Trabert, Meteorologie. (Sammlung Göschen Nr. 54.) 4. z. T. umgearb. Aufl. von Albert Defant. kl. 8⁰. 147 S. mit 46 Abb. u. Tafeln. Berlin u. Leipzig, G. J. Göschen. 1916. Geb. M. 1.—

Wenn ein naturwissenschaftlich Gebildeter sich schnell über Meteorologie unterrichten will — und das Bedürfnis hatte in den letzten Jahren mancher felddienstfähige Naturwissenschaftler —, so kann man ihm kein zweckmäßigeres Werk empfehlen als Traberts Meteorologie. Mit gutem pädagogischen Geschick werden die schwierigeren Kapitel dieser Wissenschaft, z. B. das über Strahlung, eingehender behandelt, während in den leichter verständlichen das Wichtige großzügig, knapp und in wohl durchdachter Auswahl herausgehoben wird. Leider ist W. Trabert seit längerer Zeit schwer leidend. Die vorliegende vierte Auflage wurde von A. Defant bearbeitet, der sich jedoch meistens darauf beschränken konnte, einige Ergebnisse neuester Forschung einzufügen. Man hat oft das Gefühl, daß er an manchen Stellen dabei noch etwas weiter hätte gehen können, doch war jedenfalls ein bestimmter Umfang einzuhalten. Es ist ja ohnedies erstaunlich, daß ein so inhaltreicher, wissenschaftlich gediegener Band für eine Mark verkauft werden kann, noch dazu gebunden.

Franz Linke.

Dem Andenken an Werner Siemens. Zur Jahrhundertfeier seines Geburtstages. „Die Naturwissenschaften". Vierter Jahrgang, Heft 50. 15. Dezember 1916. Berlin, Jul. Springer.

Ein umfangreiches Heft legen uns „Die Naturwissenschaften als Erinnerungsheft an Werner Siemens vor. In einer großen Reihe von Arbeiten werden uns die vielen Gebiete seiner Tätigkeit geschildert von Männern, deren Namen in der heutigen Physik und Technik an allererster Stelle stehen. Wie es sich bei dieser trefflich redigierten Zeitschrift von selbst versteht, werden wir über jedes einzelne dieser Gebiete nur von zuständigen Vertretern desselben unterrichtet. So wird uns, um nur ein Beispiel zu nennen, Siemens' Anteil an der Gründung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt von ihrem jetzigen Präsidenten eingehend geschildert. Wir sind gewohnt, in Siemens den Begründer der modernen Elektrotechnik zu sehen, und das mit Recht. Aber darüber vergessen wir allzu leicht, daß er durchaus nicht einseitig nur in ihr sich betätigte. Bei der Lektüre erkennen wir klar, wie seine Liebe allen Zweigen der Naturwissenschaften galt, wie erstaunlich vielseitig seine Forscherarbeit war und erfolgreich auf den verschiedensten Gebieten. Nicht nur, daß er die Dynamomaschine erfand und bahnbrechend wirkte für die Einführung des Telegraphen in Preußen, er studierte und baute Wärmekraftmaschinen, er stellte Untersuchungen über die Strahlung an, er vervollkommnete das Verfahren zur Herstellung von Schießbaumwolle, ja er leitete sogar als Offizier im dänischen Kriege die Verteidigung des Kieler Hafens und erfand zu diesem Zwecke — wofür wir ja heute besonderes Verständnis haben — Unterseeminen mit elektrischer Fernzündung. Wir erkennen auch, wie die Früchte seiner Arbeit nicht nur seinem Vaterlande zugute kamen, sondern — heute muß man wohl sagen leider — auch den Nachbarvölkern; und wenn England durch sein Kabelsystem heute den Telegraphendienst der ganzen Erde fast ausschließlich beherrscht, so dankt es dies mit in allererster Linie der Tätigkeit von Werner Siemens.

Die Gesamtheit der Arbeiten im vorliegenden Hefte, dem die Reproduktion einer großen Photographie beigegeben ist, gibt uns ein lebenswarmes Bild des ganzen Mannes, eines im besten Sinne des Wortes, im Sinne Fichtes, deutschen Mannes, der eine Sache tut um ihrer selbst willen. V. Pieck.

M. Grünberg, Verluste im Dielektrikum technischer Kondensatoren. 8⁰. 42 S. m. 23 Textfiguren. Berlin, J. Springer. 1916. M. 1.60.

Der Verf. untersucht die Energieverluste bei einigen in der Technik häufiger verwendeten Arten von Hochspannungskondensatoren (mit Glas, Hartpapier oder Glimmer als Dielektrikum), und zwar bei hohen Spannungen (4 bis 20 KV) und niedrigen Frequenzen (25 bis 60 sec^{-1}) besonders in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur (bis zu etwa 90⁰ C hinauf). Die Versuchsanordnung zur Messung des Leistungsfaktors mittels eines sorgfältig justierten Quadrantelektrometers wird ausführlich beschrieben. Die in zahlreichen Tabellen wiedergebenen und durch Textfiguren veranschaulichten Ergebnisse sind in kurzer Zusammenfassung: Bei allen Kondensatorformen wächst der Verlust etwas schneller als das Quadrat der Spannung; er ist bei Zimmertemperatur der Frequenz angenähert proportional und steigt mit der Temperatur rasch an. Dem Absolutbetrage nach sind die Verluste bei Glas stark wechselnd je nach der Sorte, bei Glimmer geringer als bei den besten Glassorten. Hartpapier hat bei Zimmertemperatur noch kleinere Verluste, doch steigen sie hier mit der Temperatur besonders stark an (bis auf das Zehnfache bei 60⁰ C). Schweidler.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Frankfurt a. M. Dr. Walter Fraenkel für physikalische Chemie, an der Universität Heidelberg Dr. Ernst Schrader für Chemie.

Ernannt: Der ord. Professor an der Universität Klausenburg Dr. Karl Tangl zum ord. Professor der Experimentalphysik an der Technischen Hochschule Budapest, der Privatdozent an der Universität Leipzig Dr. Percy Waentig zum a.o. Professor der Chemie daselbst.

Berufen: Der Geh. Baurat Dr.-Ing. Oskar v. Miller zum Mitglied des Kuratoriums der Phys.-Techn. Reichsanstalt.

Gestorben: Der Privatdozent für Gewerbehygiene an der Deutschen Technischen Hochschule Prag Professor Dr. Josef Rambousek.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 6. | 15. März 1917. Redaktionsschluß für No. 7 am 24. März 1917. | 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Theorie der Röhrenfedermanometer.

Von H. Lorenz.

Zur Messung des Druckes tropfbarer oder elastischer Flüssigkeiten bedient man sich in der Technik vorwiegend der von Bourdon vorgeschlagenen Röhrenfedermanometer. Deren wirksamer Bestandteil, die Röhrenfeder, ist ein dünnwandiges Metallrohr mit ovalem, bzw. nahezu elliptischem Querschnitt, welches ringförmig derart zusammengebogen ist, daß die großen Achsen des Meridianschnittes auf einem Kreiszylinder liegen (Fig. 1). Da der Ring nicht in

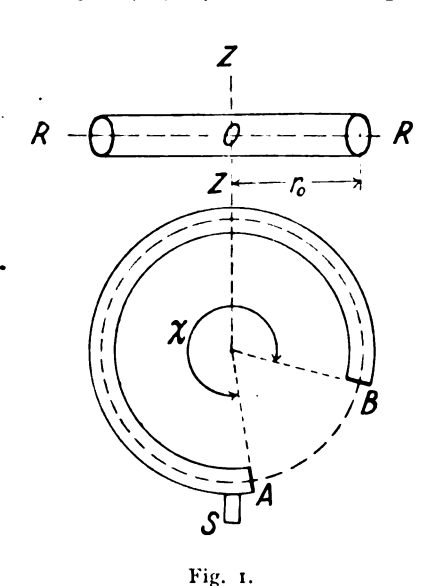


Fig. 1.

sich geschlossen ist, sondern nur einen Bogen $\chi \sim 270^0$ umfaßt, so sind die beiden Enden durch eingelötete Deckel verschlossen. In der Nähe des einen festgehaltenen Endes A trägt die Röhrenfeder einen Stutzen S zum Anschluß an das Gefäß, dessen Überdruck p gemessen werden soll. Das geschieht durch eine Aufblähung des Ringquerschnitts, die nicht nur einen für die Formänderungsarbeit grundlegenden Volumzuwachs, sondern auch infolge Hinausdrängens der äußeren und Hineindrückens der Innenfasern in bezug auf die Ringachse ZZ eine mit dem Drucke p zunehmende Aufbiegung desselben hervorruft. Diese wiederum bedingt eine Verschiebung des andern Rohrendes B, die auf einen Zeiger zum Ablesen an einer Skala oder auf ein Schreibzeug zur fortlaufenden Aufzeichnung übertragen wird.

Da das zur Bewegungsübertragung benutzte Getriebe ohne Schwierigkeiten so gestaltet werden kann, daß die Zeiger- und Schreibzeugangaben der Aufbiegung des freien Endes der Röhrenfeder proportional ausfallen, außerdem aber die Reibungswiderstände beliebig klein gehalten werden können, so dürfen wir uns mit der Theorie der Röhrenfeder allein begnügen. Für diese gehen wir von den Spannungen in einem in sich geschlossenen Ringrohr unter dem Innendrucke p aus, die ich meiner Arbeit über „die Biegung krummer Rohre" unmittelbar entnehme[1]). Es sind dies die Tangential- oder Ringspannung σ' und die Meridianspannung σ'', normal zu den Querschnitten durch

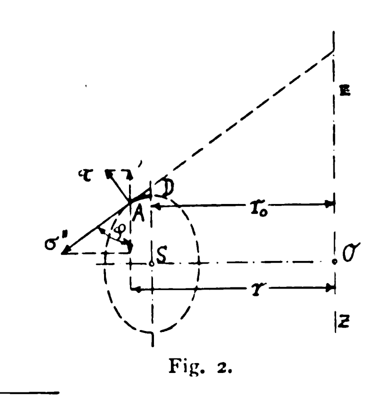


Fig. 2.

1) Diese Zeitschr. 13, 768, 1912. Vgl. auch H. Lorenz, Techn. Elastizitätslehre, 1913, S. 302.

die Rohrwand sowie eine in den Querschnitt selbst hineinfallende, auf σ' und σ'' senkrecht stehende Schubspannung τ (vgl. Fig. 2), alle Spannungen als Mittelwerte über die Wandstärke h verstanden. Von diesen ruft die Ringspannung Gl. (6) a. a. O.

$$\sigma' = \frac{p}{h}\varrho'\left(1 - \frac{r^2 - r_0^2}{2r\varrho''\cos\varphi}\right) - \frac{1}{\varrho''}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\tau r}{\cos\varphi}\right) \qquad (1)$$

neben einem tangentialen Zug S vermöge ihrer ungleichen Verteilung über den Meridianschnitt das Moment M' hervor, welches die Röhrenfeder aufbiegt. Zu deren Berechnung beachten wir, daß die Krümmungsradien ϱ'' der Meridiankurve sowie ϱ' eines dazu normalen Hauptschnittes durch die Ringfläche für einen Punkt mit den Koordinaten r, z und dem Tangentialwinkel φ im Meridianschnitt durch

$$\frac{1}{\varrho''} = -\frac{d^2 r}{dz^2}\cos^3\varphi, \quad \varrho' = \frac{r}{\cos\varphi} \qquad (2)$$

gegeben sind, während gleichzeitig mit dem Bogenelement ds der Meridiankurve

$$ds\cos\varphi = dz, \quad \frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \mathrm{tg}^2\varphi = 1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 \qquad (3)$$

ist. Damit folgt aus (1)

$$\sigma' = \frac{p}{h}\left(\frac{r}{\cos^2\varphi} + \frac{r^2 - r_0^2}{2}\frac{d^2 r}{dz^2}\right)\cos\varphi + \frac{d^2 r}{dz^2}\cos^3\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\tau r}{\cos\varphi}\right) \qquad (1a)$$

oder

$$\sigma' = \frac{p}{h}\left(r + \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[(r^2 - r_0^2)\frac{dr}{dz}\right]\right)\cos\varphi + \frac{d^2 r}{dz^2}\cos^3\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\tau r}{\cos\varphi}\right) \qquad (1b)$$

und das Element der Zugkraft

$$dS = \sigma' h\,ds = p\,r\,dz + \frac{p}{2}d\left[(r^2 - r_0^2)\frac{dr}{dz}\right] - h\,d\left(\frac{\tau r}{\cos\varphi}\right) \qquad (4)$$

dessen Integration über den ganzen Umfang der Meridiankurve unter Wegfall des zweiten und dritten Gliedes kurz

$$S = \int\sigma' h\,ds = p\int r\,dz = pF \qquad (4a)$$

ergibt, worin F die von der Meridiankurve eingeschlossene Fläche des Ringquerschnittes bedeutet. Mit dessen Schwerpunktsabstand r_0 von der Ringachse berechnet sich dann das Biegungsmoment

$$M' = \int r\,dS - S r_0 = \int(r - r_0)\,dS \qquad (5)$$

oder nach Einsetzen von (4) sowie wegen

$$r\,d\left[(r^2 - r_0^2)\frac{dr}{dz}\right] = d\left[r(r^2 - r_0^2)\frac{dr}{dz}\right] - (r^2 - r_0^2)\frac{dr}{dz}dr \qquad (5a)$$

$$M' = p\int\left[r^2 - r_0 r - \frac{r^2 - r_0^2}{2}\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]dz - h\int r\,d\left(\frac{\tau r}{\cos\varphi}\right). \qquad (5b)$$

Die Meridianspannung Gl. (5) a. a. O.

$$\sigma'' = \frac{p}{h}\frac{r^2 - r_0^2}{2r\cos\varphi} + \tau\,\mathrm{tg}\,\varphi \qquad (6)$$

hat nur eine Dehnung der Meridiankurve zur Folge, während die Schubspannung durch die Beziehung Gl. (4a) und (4b) a. a. O.

$$\tau r h \chi = \frac{dM''}{ds} \qquad (7)$$

das Moment M'' der Querbiegung infolge des Aufblähens der Röhrenfeder bestimmt. Soll deren Querschnitt entsprechend der Herleitung von Gl. (7) auch nach dieser Formänderung doppelt symmetrisch bleiben, so besitzt an den vier Scheiteln, d. h. für $\varphi = 0, \pi/2, \pi, {}^3/_2\pi$ das Moment M'' ausgezeichnete Werte, denen dort ein Verschwinden von τr entspricht. Dieser Tatsache werden wir durch den Ansatz

$$\tau r = \cos\varphi(A_1\sin\varphi + A_3\sin 3\varphi + A_5\sin 5\varphi + \ldots) \qquad (8)$$

gerecht, der gleichzeitig eine bequeme Darstellung der in die Gl. (1) und (5a) eingehenden Ableitung von $\tau r : \cos\varphi$ erlaubt, während die Faktoren $A_1\ A_3 \ldots\ldots$ noch zu ermitteln sind. Wir wollen uns hierbei mit der ersten Annäherung

$$\tau r = A\cos\varphi\sin\varphi = \frac{A}{2}\sin 2\varphi \qquad (8a)$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\tau r}{\cos\varphi}\right) = A\cos\varphi \qquad (8b)$$

begnügen, worin offenbar A den Wert von

$$\tau r \text{ für } \varphi = \frac{\pi}{4},$$

also an den Berührungsstellen des der Meridiankurve umschriebenen Quadrates bezeichnet. Mit (8a) folgt das Querbiegungsmoment aus (7) mit einer Abkürzung Φ

$$M'' = h\chi A\int\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,ds = h\chi A\,\Phi, \qquad (7a)$$

dem noch eine Biegungsspannung σ''' innerhalb der Wandstärke h und proportional dem Abstande y von der Wandmitte derart zugeordnet ist, daß mit dem Trägheitsmomente des ringförmigen Wandschnittes

$$\Theta'' = r\chi \frac{h^3}{12} \tag{9}$$

$$\sigma''' = \frac{M'' y}{\Theta''} = \frac{12\, y A}{r h^2}\,\Phi \tag{10}$$

wird. Diese Spannung, deren Mittelwert über die ganze Wandstärke verschwindet, addiert sich algebraisch zu der Meridianspannung σ'', so daß mit der Querkontraktionszahl μ sowie dem Elastizitätsmodul E und Gleitmodul G

$$G = \frac{E}{2}\,\frac{\mu}{\mu + 1} \tag{11}$$

für die Formänderungsarbeit

$$L = \frac{1}{2E}\int\left[\sigma'^2 + (\sigma'' + \sigma''')^2 - \frac{2\sigma'(\sigma'' + \sigma''')}{\mu}\right]dV + \frac{1}{2G}\int \tau^2 dV \tag{12}$$

geschrieben werden kann. Setzen wir mit dem Abstand y eines Punktes der Rohrwand von deren Mittelfläche

$$dV = r\chi\, ds\, dy \tag{13}$$

für das Volumelement der Rohrwand, so liefert die Integration über y zwischen den Grenzen $\pm\frac{h}{2}$ wegen

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma''' dy = \frac{M''}{\Theta''}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y\, dy = 0\,, \tag{10a}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma'''^2 dy = \frac{M''^2}{\Theta''^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{M''^2 h^3}{12\,\Theta''^2} = \frac{12 A^2 \Phi^2}{r} \tag{10b}$$

sowie unter Beachtung, daß σ', σ'' und τ über die ganze Wandstärke h als konstant, d. h. von y unabhängig anzusehen sind,

$$L = \frac{\chi h}{2E}\int\left(\sigma'^2 + \sigma''^2 - \frac{2\sigma'\sigma''}{\mu}\right) r\, ds + \frac{\chi h}{2G}\int \tau^2 r\, ds + \frac{6\chi A^2}{E h}\int\frac{\Phi^2 ds}{r}\,. \tag{12a}$$

Nach Einsetzen der Werte für die Spannungen, Ausschaltung von G durch Gl. (11) und Ordnen der Glieder wird daraus

$$\begin{aligned}\frac{2EL}{\chi} = \frac{p^2}{h}\int\Bigg[&\varrho'^2\left(1 - \frac{r^2 - r_0^2}{2r\varrho''\cos\varphi}\right)^2 + \left(\frac{r^2 - r_0^2}{2r\cos\varphi}\right)^2 \\ &- \frac{\varrho'}{\mu}\left(1 - \frac{r^2 - r_0^2}{2r\varrho''\cos\varphi}\right)\frac{r^2 - r_0^2}{r\cos\varphi}\Bigg] r\, ds \\ + 2Ap\int\Bigg[&\frac{r^2 - r_0^2}{2r\cos\varphi}\left(\frac{\sin^2\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi}{\mu\varrho''}\right) \\ &- \left(1 - \frac{r^2 - r_0^2}{2r\varrho''\cos\varphi}\right)\varrho'\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho''} + \frac{\sin^2\varphi}{\mu r}\right)\Bigg] r\, ds \\ + A^2 h\int\Bigg[&\frac{\cos^2\varphi}{\varrho''^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2} \\ &- \frac{\sin^2\varphi}{\mu r}\left(\frac{2\cos\varphi}{\varrho''} - \frac{\cos^2\varphi}{r}\right)\Bigg] r\, ds + \frac{12 A^2}{h}\int\frac{\Phi^2 ds}{r}\end{aligned} \tag{12b}$$

oder mit den sofort verständlichen Abkürzungen $C_1 C_2 C_3 C_4$ für die über den ganzen Umfang s zu erstreckenden Integrale

$$\frac{2EL}{\chi} = \frac{p^2}{h}\cdot C_1 + 2pC_2 A + \left(C_3 h + \frac{C_4}{h}\right)A^2\,. \tag{12c}$$

Die Stabilität des Gleichgewichts der gespannten Röhrenfeder bedingt nun, daß die Formänderungsarbeit ein Minimum ist, d. h.

$$\frac{E}{\chi}\,\frac{\partial L}{\partial A} = pC_2 + \left(C_3 h + \frac{C_4}{h}\right)A = 0 \tag{14}$$

woraus sich der noch unbekannte Faktor zu

$$A = -\frac{pC_2 h}{C_3 h^2 + C_4} \tag{14a}$$

bestimmt. Man erkennt weiterhin, daß er und damit auch die Schubspannung τ für $h = 0$ und $h = \infty$ verschwinden. Es heißt dies, daß eine unendlich dünne Haut keinen Widerstand gegen Biegung besitzt, während im andern Fall des vollen Balkens eine Querbiegung überhaupt ihren Sinn verliert.

Die Einführung von (14a) in (12c) ergibt dann

$$\frac{2EL}{\chi} = \frac{p^2}{h}\left(C_1 - \frac{C_2^2 h^2}{C_3 h^2 + C_4}\right), \tag{15}$$

während das Biegungsmoment M' nach Einführung von (8b) in (5b) durch

$$M' = p\int\left[r^2 - r_0 r - \frac{r^2 - r_0^2}{2}\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]dz - hA\int r\cos\varphi\, d\varphi \tag{5c}$$

gegeben ist. Schreiben wir darin

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} r\cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} r\, d\sin\varphi = -\int_0^{2\pi}\sin\varphi\, dr \\ &\qquad = -\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, ds = -s_1 \\ &\int\left[r^2 - r_0 r - \frac{r^2 - r_0^2}{2}\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]dz = C_0\,,\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

so wird mit (14a)

$$M' = p\left(C_0 - \frac{C_2 s_1 h^2}{C_3 h^2 + C_4}\right). \tag{17}$$

Die Verdrehung der Federenden gegeneinander, welche ihrerseits mit der Änderung von χ übereinstimmt, ergibt sich aus der Formänderungsarbeit durch Differentiation nach M', also

$$\Delta\chi = \frac{\partial L}{\partial M'} = \frac{\partial L}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial M'}$$

oder wegen (15) und (17)

$$\frac{\Delta\chi}{\chi} = \frac{p}{E\,h}\,\frac{C_1(C_3h^2+C_4)-C_2{}^2h^2}{C_0(C_3h^2+C_4)-C_2s_1h^2}. \tag{18}$$

Hiernach ist die Verdrehung $\Delta\chi$ dem Überdrucke p in der Röhrenfeder direkt proportional, womit deren Verwendung als Meßvorrichtung gerechtfertigt erscheint. Dagegen läßt sich die Abhängigkeit der Verdrehung von der Wandstärke infolge der verwickelten Form der Größen C, d. h. der in (12b) und (5c) auftretenden bestimmten Integrale nicht gut übersehen. Wir wollen daher zum Vergleich mit der Erfahrung noch eine Näherungslösung unter alleiniger Berücksichtigung der Biegungsmomente M' und M'' ableiten, deren ersterem das Trägheitsmoment der Meridianellipse von der Bogenlänge s und dem Trägheitshalbmesser k in bezug auf die große Achse, also

$$\Theta' = shk^2 \tag{19}$$

zugeordnet ist, während für die Querbiegung Gl. (9) bestehen bleibt. Alsdann ist die Formänderungsarbeit L gegeben durch

$$2EL = \int \frac{M'^2 r_0\,d\chi}{\Theta'} + \int \frac{M''^2 ds}{\Theta''}, \tag{20}$$

worin wir nach (5c) und (16)

$$M' = pC_0 + Ahs_1, \tag{21}$$

und mit (7a) und (9) sowie einer Konstanten C

$$\int \frac{M''^2 ds}{\Theta''} = \frac{A^2}{h}\chi\,12\int\frac{\Phi^2 ds}{r} = \frac{A^2}{h}\chi r_0 C \tag{22}$$

schreiben dürfen. Damit wird die Formänderungsarbeit

$$2EL = \frac{r_0\chi}{\Theta'}\left[p^2C_0{}^2 + 2pC_0hs_1A + A^2(h^2s_1{}^2 + Csk^2)\right], \tag{23}$$

und die Bedingung für ihr Minimum ergibt

$$E\frac{\partial L}{\partial A} = \frac{r_0\chi}{\Theta'}\left[pC_0hs_1 + A(h^2s_1{}^2+Csk^2)\right] = 0 \tag{24}$$

woraus dann nach Ausschaltung von A

$$L = \frac{p^2C_0{}^2r_0\chi}{2E\Theta'}\left(1 - \frac{h^2s_1{}^2}{h^2s_1{}^2+Csk^2}\right) \tag{20a}$$

$$M' = pC_0\left(1 - \frac{h^2s_1{}^2}{h^2s_1{}^2+Csh^2}\right) \tag{21a}$$

und endlich

$$\frac{\Delta\chi}{\chi} = \frac{1}{\chi}\frac{\partial L}{\partial M'} = \frac{pC_0r_0}{E\Theta'} = \frac{p}{\Theta h}\frac{C_0r_0}{sk^2} \tag{25}$$

folgt. Dieses Ergebnis können wir uns auch aus (18) dadurch hervorgegangen denken, daß dort im Zähler und Nenner des Bruches gleichzeitig $C_1C_3 = C_2{}^2$ und $C_0C_3 = C_2s_1$ gesetzt wird. Dasselbe erreicht man auch durch $C_2 = 0$, womit nach (14a) die Konstante A verschwindet, welche die Querbiegung bedingt. In der Tat vereinfachen sich mit $A = 0$ die beiden Gleichungen (21) und (23) in

$$M' = pC_0 \quad\text{und}\quad 2E\Theta'L = p^2r_0\chi C_0{}^2 \tag{23a}$$

und führen so unmittelbar auf die Formel (25)

Die bisherigen Entwicklungen gelten für alle doppelt symmetrischen Meridiankurven der Röhrenfeder unter der Voraussetzung, daß bei deren Formänderung die Doppelsymmetrie erhalten bleibt. Dies wiederum kann nur dann erwartet werden, wenn die kleine Achse des Meridianschnittes klein gegen den Radius r_0 der Röhrenfeder ist, was bei den ausgeführten Manometern stets zutrifft. Für den praktisch wichtigen Fall einer elliptischen Meridiankurve

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{(r-r_0)^2}{b^2} = 1 \tag{26}$$

läßt sich die in (25) auftretende Konstante C_0 leicht aus (16) berechnen und ergibt

$$C_0 = -ab\pi\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)r_0, \tag{16}$$

womit (25) in

$$\frac{\Delta\chi}{\chi} = -\pi\frac{p}{E}\frac{abr_0{}^2}{sk^2h}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \tag{25a}$$

übergeht. Zur Prüfung dieser Formel, die ich schon im Jahre 1910 ohne jede Rücksicht auf die Querbiegung abgeleitet habe[1]), mögen drei von der Firma Schäffer & Budenberg in Magdeburg-Buckau bezogene Manometer dienen, deren Röhrenfedern die in der folgenden Tafel zusammengestellten Abmessungen und Formänderungen ergaben, während der Elastizitätsmodul des mitgelieferten, anscheinend aus Messing bestehenden Wandbleches durch Biegungsversuche zu $E = 10^6$ kg/qcm im Mittel bestimmt wurde.

1) Zeitschr. d. Ver. d. Ingenieure 1910, S. 1865.

Manometer für Überdruck .	$p = 1$	6	12	kg/qcm
Halbmesser der Röhrenfeder	$r_0 = 5{,}50$	5,56	5,55	cm
Große Halbachse d. Ellipse .	$a = 1{,}138$	0,847	0,850	„
Kleine „ „ „ .	$b = 0{,}293$	0,243	0,241	„
Wandstärke	$h = 0{,}031$	0,048	0,065	„
Bogenlänge der Röhrenfeder	$\chi = 270^0$	270^0	270^0	
Aufbiegung nach Versuch .	$\Delta\chi : p = 4{,}575$	0,896	0,454	
„ „ Gl. (25a) .	$\Delta\chi : p = 0{,}982$	0,766	0,578	

Mit Rücksicht auf die nur unvollkommene Ellipsengestalt der Meridiankurven sowie auf die Verlötung der Enden, welche zweifellos die der Theorie zugrunde liegende Achsensymmetrie um ZZ beeinträchtigt, kann man die Abweichungen der berechneten und gefundenen Aufbiegungen an der 6 kg- und 12 kg-Röhrenfeder als zulässig hinnehmen, zumal sie entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Bei der schwachen 1 kg Feder dagegen reicht dies zur Erklärung einer 4,8fachen Aufbiegung jedenfalls nicht aus, so daß man hierfür auf die strengere Formel (18) zurückgreifen müßte. Außerdem ist es nicht unwahrscheinlich, daß in diesem Falle die Doppelsymmetrie bei der Formänderung verloren gegangen ist, ein Umstand, dem man in Gl. (8) näherungsweise durch Hinzufügung eines oder mehrerer Terme mit geraden Vielfachen von φ genügen könnte.

Danzig-Langfuhr, Techn. Hochschule.

(Eingegangen 26. Februar 1917.)

Zur Quantentheorie der Strahlung.

Von A. Einstein[1]).

Die formale Ähnlichkeit der Kurve der chromatischen Verteilung der Temperaturstrahlung mit Maxwellschen Geschwindigkeits-Verteilungsgesetz ist zu frappant, als daß sie lange hätte verborgen bleiben können. In der Tat wurde bereits W. Wien in der wichtigen theoretischen Arbeit, in welcher er sein Verschiebungsgesetz

$$\varrho = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \tag{1}$$

ableitete, durch diese Ähnlichkeit auf eine weitergehende Bestimmung der Strahlungsformel geführt. Er fand hierbei bekanntlich die Formel

$$\varrho = \alpha \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}} \tag{2}$$

welche als Grenzgesetz für große Werte von $\frac{\nu}{T}$ auch heute als richtig anerkannt wird (Wiensche Strahlungsformel). Heute wissen wir, daß keine Betrachtung, welche auf die klassische Mechanik und Elektrodynamik aufgebaut ist, eine brauchbare Strahlungsformel liefern kann, sondern daß die klassische Theorie notwendig auf die Rayleighsche Formel

$$\varrho = \frac{k\alpha}{h} \nu^2 T \tag{3}$$

führt. Als dann Planck in seiner grundlegenden Untersuchung seine Strahlungsformel

$$\varrho = \alpha \nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{4}$$

auf die Voraussetzung von diskreten Energie-Elementen gegründet hatte, aus welcher sich in rascher Folge die Quantentheorie entwickelte, geriet jene Wiensche Überlegung, welche zur Gleichung (2) geführt hatte, naturgemäß wieder in Vergessenheit.

Vor kurzem nun fand ich eine der ursprünglichen Wienschen Betrachtung[1]) verwandte, auf die Grundvoraussetzung der Quantentheorie sich stützende Ableitung der Planckschen Strahlungsformel, in welcher die Beziehung der Maxwellschen Kurve zu der chromatischen Verteilungskurve zur Geltung kommt. Diese Ableitung verdient nicht nur wegen ihrer Einfachheit Beachtung, sondern besonders deshalb, weil sie über den für uns noch so dunklen Vorgang der Emission und Absorption der Strahlung durch die Materie einige Klarheit zu bringen scheint. Indem ich einige vom Standpunkte der Quantentheorie naheliegende Hypothesen über die Strahlungs-Emission und -Absorption von Molekülen zugrunde legte, zeigte ich, daß Moleküle mit im Sinne der Quantentheorie bei Temperaturgleichgewicht verteilten Zuständen, im dynamischen Gleichgewicht mit Planckscher Strahlung stehen; es ergab sich auf diesem Wege die Plancksche Formel (4) in verblüffend einfacher und allgemeiner Weise. Sie ergab sich aus der Bedingung, daß die von der Quantentheorie geforderte Zustandsverteilung der inneren Energie der Moleküle allein durch Absorption

1) Zuerst abgedruckt in den Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich. Nr. 18, 1916.

1) Verh. d. Deutschen physikal. Gesellschaft Nr. 13/14, 1916, S. 318. In der vorliegenden Untersuchung sind die der eben zitierten Abhandlung gegebenen Überlegungen wiederholt.

und Emission von Strahlung sich einstellen muß.

Wenn die eingeführten Hypothesen über die Wechselwirkung von Strahlung und Materie das Richtige treffen, so müssen sie aber noch mehr liefern als die richtige statistische Verteilung der inneren Energie der Moleküle. Bei Absorption und Emission von Strahlung findet nämlich auch eine Impuls-Übertragung auf die Moleküle statt; diese führt dazu, daß sich durch die bloße Wechselwirkung von Strahlung und Molekülen eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung der letzteren einstellt. Diese muß offenbar dieselbe sein wie diejenige Geschwindigkeitsverteilung, welche die Moleküle bei alleiniger Wirkung gegenseitiger Zusammenstöße annehmen, d. h. sie muß mit der Maxwellschen Verteilung übereinstimmen. Es muß gefordert werden, daß die mittlere kinetische Energie, welche ein Molekül (pro Freiheitsgrad) im Planckschen Strahlungsfelde von der Temperatur T annimmt, gleich $\frac{kT}{2}$ sei; dies muß gelten unabhängig von der Natur der betrachteten Moleküle und unabhängig von den von ihnen absorbierten und emittierten Frequenzen. In dieser Abhandlung wollen wir dartun, daß dieser weitgehenden Forderung in der Tat ganz allgemein genügt wird; dadurch erhalten unsere einfachen Hypothesen über die Elementarvorgänge der Emission und Absorption eine neue Stütze.

Damit das genannte Resultat sich ergebe, bedarf es aber einer gewissen Ergänzung der früher zugrunde gelegten Hypothesen, welche sich lediglich auf den Austausch der Energie bezogen. Es entsteht die Frage: Erhält das Molekül einen Stoß, wenn es die Energie ε absorbiert oder emittiert? Betrachten wir vom Standpunkt der klassischen Elektrodynamik beispielsweise die Ausstrahlung. Wenn ein Körper die Energie ε ausstrahlt, so erhält er den Rückstoß (Impuls) $\frac{\varepsilon}{c}$, wenn die ganze Strahlungsmenge ε nach der gleichen Richtung ausgestrahlt wird. Erfolgt aber die Ausstrahlung durch einen räumlich symmetrischen Vorgang, z. B. Kugelwellen, so kommt überhaupt kein Rückstoß zustande. Diese Alternative spielt auch bei der Quantentheorie der Strahlung eine Rolle. Nimmt ein Molekül beim Übergang von einem quantentheoretisch möglichen Zustand in einen andern die Energie ε in Form von Strahlung auf, oder gibt es hierbei die Energie in Form von Strahlung ab, so kann ein derartiger Elementarprozeß als ein teilweise oder vollständig räumlich gerichteter oder auch als ein symmetrischer (nicht gerichteter) gedacht werden. Es zeigt sich nun, daß wir nur dann zu einer widerspruchslosen Theorie gelangen, wenn wir jene Elementarprozesse als vollständig gerichtete Vorgänge auffassen; hierin liegt das Hauptergebnis der nachfolgenden Betrachtungen.

§ 1. Grundhypothese der Quantentheorie. Kanonische Zustandsverteilung.

Nach der Quantentheorie vermag ein Molekül bestimmter Art, abgesehen von seiner Orientierung und Translationsbewegung, nur eine diskrete Reihe von Zuständen $Z_1, Z_2 \ldots Z_n \ldots$ anzunehmen, deren (innere) Energie $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots$ sei. Gehören Moleküle dieser Art einem Gas von der Temperatur T an, so ist die relative Häufigkeit W_n dieser Zustände Z_n durch die der kanonischen Zustandsverteilung der statistischen Mechanik entsprechende Formel

$$W_n = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \tag{5}$$

gegeben. In dieser Formel ist $k = \frac{R}{N}$ die bekannte Boltzmannsche Konstante, p_n eine für das Molekül und den n-ten Quantenzustand desselben charakteristische, von T unabhängige Zahl, die als das statistische „Gewicht" dieses Zustandes bezeichnet werden kann. Die Formel (5) kann aus dem Boltzmannschen Prinzip oder auf rein thermodynamischem Wege abgeleitet werden. Die Gleichung (5) ist der Ausdruck der weitgehendsten Verallgemeinerung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeiten.

Die letzten prinzipiellen Fortschritte der Quantentheorie beziehen sich auf die theoretische Ermittelung der quantentheoretisch möglichen Zustände Z_n und deren Gewichte p_n. Für die vorliegende prinzipielle Untersuchung ist eine nähere Bestimmung der Quantenzustände nicht erforderlich.

§ 2. Hypothesen über den Energieaustausch durch Strahlung.

Es seien Z_n und Z_m zwei im Sinne der Quantentheorie mögliche Zustände des Gasmoleküls, deren Energien ε_n bzw. ε_m die Ungleichung

$$\varepsilon_m > \varepsilon_n$$

erfüllen. Das Molekül möge imstande sein, aus dem Zustande Z_n in den Zustand Z_m überzugehen unter Aufnahme der Strahlungsenergie $\varepsilon_m - \varepsilon_n$; ebenso sei ein Übergang aus dem Zustande Z_m in den Zustand Z_n unter Abgabe dieser Strahlungsenergie möglich. Die hierbei vom Molekül aufgenommene oder abgegebene

Strahlung sei von der für die betrachtete Index-Kombination (m, n) charakteristischen Frequenz ν.

Über die Gesetze, welche für diesen Übergang maßgebend sind, führen wir einige Hypothesen ein, welche durch Übertragung der für einen Planckschen Resonator nach der klassischen Theorie bekannten Verhältnisse auf die noch unbekannten der Quantentheorie gewonnen sind.

a) Ausstrahlung. Ein in Schwingung befindlicher Planckscher Resonator strahlt nach Hertz in bekannter Weise Energie aus, unabhängig davon, ob er durch ein äußeres Feld angeregt wird oder nicht. Dementsprechend möge ein Molekül aus dem Zustande Z_m unter Emission der Strahlungs-Energie $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ von der Frequenz ν ohne Anregung durch äußere Ursachen in den Zustand Z_n übergehen können. Die Wahrscheinlichkeit dW dafür, daß dies im Zeitelement dt wirklich stattfinde, sei,

$$dW = A_m^n \, dt, \tag{A}$$

wobei A_m^n eine für die betrachtete Indexkombination charakteristische Konstante bedeutet.

Das angenommene statistische Gesetz entspricht dem einer radioaktiven Reaktion, der vorausgesetzte Elementarprozeß einer derartigen Reaktion, bei welcher nur γ-Strahlen emittiert werden. Es braucht nicht angenommen zu werden, daß dieser Vorgang keine Zeit beanspruche; diese Zeit muß nur vernachlässigbar sein gegenüber den Zeiten, in denen das Molekül in den Zuständen Z_1 usw. ist.

b) Einstrahlung. Befindet sich ein Planckscher Resonator in einem Strahlungsfelde, so ändert sich die Energie des Resonators dadurch, daß das elektromagnetische Feld der Strahlung auf den Resonator Arbeit überträgt; diese Arbeit kann je nach den Phasen des Resonators und des oszillierenden Feldes positiv oder negativ sein. Dementsprechend führen wir die folgende quantentheoretische Hypothese ein. Unter der Wirkung der Strahlungsdichte ϱ der Frequenz ν kann ein Molekül vom Zustand Z_n in den Zustand Z_m übergehen, indem das Molekül die Strahlungsenergie $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ aufnimmt, gemäß dem Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$dW = B_n^m \varrho \, dt. \tag{B}$$

Ebenso sei ein Übergang $Z_m \rightarrow Z_n$ unter der Einwirkung der Strahlung möglich, wobei die Strahlungsenergie $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ frei wird, gemäß dem Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$dW = B_m^n \varrho \, dt. \tag{B'}$$

B_n^m und B_m^n sind Konstante. Beide Vorgänge nennen wir „Zustandsänderungen durch Einstrahlung".

Es fragt sich nun, was für ein Impuls bei diesen betrachteten Zustandsänderungen auf das Molekül übertragen wird. Beginnen wir mit den Vorgängen der Einstrahlung. Leistet ein Strahlenbündel von bestimmter Richtung Arbeit auf einen Planckschen Resonator, so wird dem Strahlenbündel die entsprechende Energie entzogen. Dieser Energieübertragung entspricht nach dem Impulssatz auch eine Impulsübertragung vom Strahlenbündel auf den Resonator. Der letztere erleidet also eine Kraftwirkung in der Richtung des Strahles des Strahlenbündels. Ist die übertragene Energie negativ, so ist auch die Kraftwirkung auf den Resonator von entgegengesetzter Richtung. Im Falle der Quantenhypothese bedeutet dies offenbar folgendes. Findet durch Bestrahlung mit einem Strahlenbündel durch Einstrahlung der Vorgang $Z_n \rightarrow Z_m$ statt, so wird auf das Molekül der Impuls $\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c}$ in der Fortpflanzungsrichtung des Bündels übertragen. Bei dem Einstrahlungsvorgang $Z_m \rightarrow Z_n$ hat der übertragene Impuls dieselbe Größe, aber die entgegengesetzte Richtung. Für den Fall, daß das Molekül gleichzeitig mehreren Strahlenbündeln ausgesetzt ist, setzen wir voraus, daß die ganze Energie $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ eines Elementarprozesses einem dieser Strahlenbündel entnommen bzw. zugefügt wird, so daß auch in diesem Falle der Impuls $\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c}$ auf das Molekül übertragen wird.

Bei der Energieabgabe durch Ausstrahlung wird im Falle des Planckschen Resonators im ganzen kein Impuls auf den Resonator übertragen, weil nach der klassischen Theorie die Ausstrahlung in einer Kugelwelle erfolgt. Es wurde aber bereits bemerkt, daß wir zu einer widerspruchsfreien Quantentheorie nur gelangen können, indem wir voraussetzen, daß auch der Prozeß der Ausstrahlung ein gerichteter Prozeß sei. Es wird dann bei jedem Elementarprozeß der Ausstrahlung $(Z_m \rightarrow Z_n)$ ein Impuls von der Größe $\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c}$ auf das Molekül übertragen. Ist letzteres isotrop, so müssen wir alle Ausstrahlungsrichtungen als gleich wahrscheinlich annehmen. Ist das Molekül nicht isotrop, so gelangen wir zu derselben Aussage, wenn die Orientierung im Laufe der Zeit nach den Gesetzen des Zufalls wechselt. Eine derartige Voraussetzung muß übrigens auch für die statistischen Gesetze (B) und (B′) der Einstrahlung gemacht werden, da sonst die Konstanten B_n^m und B_m^n von der Richtung abhängen müßten, was wir durch diese Annahme der Isotropie oder Pseudoisotropie (durch zeit-

liche Mittelwert-Bildung) des Moleküls vermeiden können.

§ 3. Ableitung des Planckschen Strahlungsgesetzes.

Wir fragen jetzt nach derjenigen wirksamen Strahlungsdichte ϱ, welche herrschen muß, damit der Energieaustausch zwischen Strahlung und Molekülen vermöge der statistischen Gesetze (A), (B) und (B′) die Zustandsverteilung der Moleküle gemäß Gleichung (5) nicht stört. Dafür ist nötig und hinreichend, daß pro Zeiteinheit durchschnittlich ebenso viele Elementarprozesse vom Typus (B) stattfinden als von den Typen (A) und (B′) zusammen. Diese Bedingung liefert vermöge (5), (A), (B), (B′) für die der Indexkombination (m, n) entsprechenden Elementarprozesse die Gleichung

$$p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} B_n^m \varrho = p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} (B_m^n \varrho + A_m^n).$$

Soll ferner ϱ mit T ins Unendliche wachsen, was wir annehmen wollen, so muß zwischen den Konstanten B_n^m und B_m^n die Beziehung

$$p_n B_n^m = p_m B_m^n \tag{6}$$

bestehen. Wir erhalten dann als Bedingung des dynamischen Gleichgewichts aus unserer Gleichung

$$\varrho = \frac{\frac{A_m^n}{B_m^n}}{e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - 1}. \tag{7}$$

Es ist dies die Abhängigkeit der Strahlungsdichte von der Temperatur gemäß dem Planckschen Gesetze. Aus dem Wienschen Verschiebungsgesetze (1) folgt hieraus sofort, daß

$$\frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha \nu^3 \tag{8}$$

$$\text{und} \quad \varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu \tag{9}$$

sein muß, wobei α und h universelle Konstanten sind. Um den numerischen Wert der Konstante α zu ermitteln, müßte man eine exakte Theorie der elektrodynamischen und mechanischen Vorgänge haben; man bleibt hier vorläufig auf die Behandlung des Rayleighschen Grenzfalles hoher Temperaturen angewiesen, für welchen die klassische Theorie in der Grenze gilt.

Gleichung (9) bildet bekanntlich die zweite Hauptregel in Bohrs Theorie der Spektra, von der man nach Sommerfelds und Epsteins Vervollständigung schon behaupten darf, daß sie zum gesicherten Bestande unserer Wissenschaft gehört. Sie enthält implizite auch das photochemische Äquivalenzgesetz, wie ich gezeigt habe.

§ 4. Methode zur Berechnung der Bewegung der Moleküle im Strahlungsfelde.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Bewegungen, welche unsere Moleküle unter dem Einflusse der Strahlung ausführen. Wir bedienen uns dabei einer Methode, welche aus der Theorie der Brownschen Bewegung wohl bekannt ist, und von mir schon mehrfach zur rechnerischen Untersuchung von Bewegungen im Strahlungsraume benutzt wurde. Zur Vereinfachung der Rechnung führen wir die letztere lediglich für den Fall durch, daß Bewegungen nur in einer Richtung, der X-Richtung des Koordinatensystems, vorkommen. Wir begnügen uns ferner damit, den Mittelwert der kinetischen Energie der fortschreitenden Bewegung zu berechnen, verzichten also auf den Beweis dafür, daß diese Geschwindigkeiten v nach dem Maxwellschen Gesetz verteilt sind. Die Masse M des Moleküls sei hinreichend groß, daß höhere Potenzen von $\frac{v}{c}$ gegen niedrigere vernachlässigt werden; wir können dann auf das Molekül die gewöhnliche Mechanik anwenden. Wir können ferner ohne wirkliche Beschränkung der Allgemeinheit so rechnen, wie wenn die Zustände mit den Indizes m und n die einzigen wären, die das Molekül annehmen kann.

Der Impuls Mv eines Moleküls erfährt in der kurzen Zeit τ zweierlei Änderungen. Trotzdem die Strahlung nach allen Richtungen gleich beschaffen ist, wird das Molekül infolge seiner Bewegung eine von der Strahlung herrührende, der Bewegung entgegenwirkende Kraft erfahren. Diese sei gleich Rv, wobei R eine später zu berechnende Konstante bedeutet. Diese Kraft würde das Molekül zur Ruhe bringen, wenn nicht die Unregelmäßigkeit der Strahlungseinwirkungen zur Folge hätte, daß in der Zeit τ auf das Molekül ein Impuls Δ wechselnden Vorzeichens und wechselnder Größe übertragen würde; dieser unsystematische Einfluß wird entgegen dem vorher genannten eine gewisse Bewegung des Moleküls aufrecht erhalten. Am Ende der betrachteten kurzen Zeit τ wird der Impuls des Moleküls den Wert

$$Mv - Rv\tau + \Delta$$

besitzen. Da die Geschwindigkeitsverteilung zeitlich konstant bleiben soll, so muß die angegebene Größe ihrem mittleren absoluten Betrag nach ebenso groß sein wie die Größe Mv; die Mittelwerte der Quadrate beider Größen, erstreckt über eine lange Zeit oder über eine große Zahl Moleküle, müssen also einander gleich sein:

$$\overline{(Mv - Rv\tau + \Delta)^2} = \overline{(Mv)^2}.$$



Da wir den systematischen Einfluß von v auf den Impuls des Moleküls besonders in Rechnung gezogen haben, werden wir den Mittelwert $\overline{v\Delta}$ zu vernachlässigen haben. Durch Entwickeln der linken Seite der Gleichung erhält man daher

$$\overline{\Delta^2} = 2RM\overline{v^2}\tau. \qquad (10)$$

Der Mittelwert $\overline{v^2}$, welchen die Strahlung von der Temperatur T bei unseren Molekülen durch ihre Wechselwirkung mit ihnen erzeugt, muß ebenso groß sein, wie derjenige Mittelwert $\overline{v^2}$, welcher dem Gasmolekül nach den Gasgesetzen bei der Temperatur T nach der kinetischen Gastheorie zukommt. Denn die Anwesenheit unserer Moleküle würde sonst das thermische Gleichgewicht zwischen Temperaturstrahlung und einem beliebigen Gase derselben Temperatur stören. Es muß also sein

$$\frac{M\overline{v^2}}{2} = \frac{kT}{2}. \qquad (11)$$

Gleichung (10) geht also über in

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = 2RkT. \qquad (12)$$

Die Untersuchung wird nun wie folgt weiterzuführen sein. Bei gegebener Strahlung ($\varrho(\nu)$) werden $\overline{\Delta^2}$ und R durch unsere Hypothesen über die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Molekülen berechenbar sein. Setzt man die Resultate in (12) ein, so muß diese Gleichung identisch erfüllt sein, wenn ϱ in Funktion von ν und T ausgedrückt wird vermöge der Planckschen Gleichung (4).

§ 5. Berechnung von R.

Ein Molekül der betrachteten Art sei längs der X-Achse des Koordinatensystems K mit der Geschwindigkeit v gleichförmig bewegt. Wir fragen nach dem im Mittel von der Strahlung auf das Molekül pro Zeiteinheit übertragenen Impuls. Um diesen berechnen zu können, müssen wir die Strahlung von einem Koordinatensystem K' aus beurteilen, welches relativ zum betrachteten Molekül ruht. Denn unsere Hypothesen über Emission und Absorption haben wir nur für ruhende Moleküle formuliert. Die Transformation auf das System K' ist in der Literatur mehrfach durchgeführt, besonders genau in Mosengeils Berliner Dissertation. Ich will jedoch die einfachen Überlegungen der Vollständigkeit halber hier wiederholen.

Bezüglich K ist die Strahlung isotrop, d. h. die einem bestimmten infinitesimalen Körperwinkel $d\varkappa$ bezüglich ihrer Strahlrichtung zugeordnete Strahlung vom Frequenzbereich $d\nu$ pro Volumeneinheit ist

$$\varrho\, d\nu \frac{d\varkappa}{4\pi}, \qquad (13)$$

wobei ϱ nur von der Frequenz ν, nicht aber von der Richtung abhängig ist. Dieser hervorgehobenen Strahlung entspricht in bezug auf das Koordinatensystem K' eine hervorgehobene Strahlung, welche ebenfalls durch einen Frequenzbereich $d\nu'$ und durch einen gewissen Körperwinkel $d\varkappa'$ charakterisiert ist. Die Volumdichte dieser hervorgehobenen Strahlung ist

$$\varrho'(\nu', \varphi')\, d\nu' \frac{d\varkappa'}{4\pi}. \qquad (13')$$

Hierdurch ist ϱ' definiert. Es ist von der Richtung abhängig, welch letztere in geläufiger Weise durch den Winkel φ' mit der X'-Achse und dem Winkel ψ' der Y'-Z'-Projektion mit der Y'-Achse definiert sei. Diesen Winkeln entsprechen die Winkel φ und ψ, welche in analoger Weise die Richtung von $d\varkappa$ in bezug auf K festlegen.

Zunächst ist klar, daß zwischen (13) und (13') dasselbe Transformationsgesetz gelten muß wie für die Amplitudenquadrate A^2 und A'^2 einer ebenen Welle von entsprechender Richtung. Deshalb ist in der von uns gewünschten Näherung

$$\frac{\varrho'(\nu', \varphi')\, d\nu'\, d\varkappa'}{\varrho(\nu)\, d\nu\, d\varkappa} = 1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi \qquad (14)$$

oder

$$\varrho'(\nu', \varphi') = \varrho(\nu)\frac{d\nu}{d\nu'}\frac{dk}{dk'}\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi\right). \qquad (14')$$

Die Relativitätstheorie ergibt ferner die mit der gewünschten Näherung gültigen Formeln

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\cos^2\varphi\right) \qquad (15)$$

$$\cos\varphi' = \cos\varphi - \frac{v}{c} + \frac{v}{c}\cos^2\varphi \qquad (16)$$

$$\psi' = \psi. \qquad (17)$$

Aus (15) folgt mit entsprechender Näherung

$$\nu = \nu'\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'\right).$$

Also ist, ebenfalls in der gewünschten Näherung,

$$\varrho(\nu) = \varrho\left(\nu' + \frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'\right)$$

oder

$$\varrho(\nu) = \varrho(\nu') + \frac{\partial\varrho}{\partial\nu}(\nu')\cdot\frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'. \qquad (18)$$

Ferner ist gemäß (15), (16), und (17)

$$\frac{d\nu}{d\nu'} = 1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'$$

$$\frac{d\varkappa}{d\varkappa'} = \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi'} = \frac{d(\cos\varphi)}{d(\cos\varphi')} = 1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi'$$

Vermöge dieser beiden Relationen und (18) geht (14') über in

$$\varrho'(\nu', \varphi') = \left[(\varrho)_\nu + \frac{v}{c}\nu' \cos\varphi' \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \nu}\right)_\nu\right] \left(1 - 3\frac{v}{c}\cos\varphi'\right). \qquad (19)$$

Mit Hilfe von (19) und unserer Hypothese über die Ausstrahlung und Einstrahlung des Moleküls können wir leicht den pro Zeiteinheit im Mittel auf das Molekül übertragenen Impuls berechnen. Bevor wir dies tun, müssen wir aber noch etwas sagen zur Rechtfertigung des eingeschlagenen Weges. Man kann einwenden, daß die Gleichungen (14), (15), (16) auf die mit der Quantentheorie nicht vereinbare Maxwellsche Theorie des elektromagnetischen Feldes gegründet seien. Dieser Einwand trifft jedoch mehr die Form als das Wesen der Sache. Denn wie die Theorie der elektromagnetischen Vorgänge sich auch gestalten mag, so wird doch jedenfalls das Dopplersche Prinzip und das Gesetz der Aberration erhalten bleiben, damit also auch die Gleichung (15) und (16). Ferner geht die Gültigkeit der energetischen Beziehung (14) sicher über die der Undulationstheorie hinaus; dies Transformationsgesetz gilt nach der Relativitätstheorie z. B. auch für die Energiedichte einer mit (Quasi-)Lichtgeschwindigkeit bewegten Masse von unendlich kleiner Ruhedichte. Die Gleichung (19) kann daher für jede Theorie der Strahlung Gültigkeit beanspruchen. —

Die zum räumlichen Winkel $d\varkappa'$ gehörige Strahlung würde gemäß (B) pro Sekunde zu

$$B_n^m \varrho'(\nu', \varphi') \frac{d\varkappa'}{4\pi}$$

Elementarprozessen der Einstrahlung von Typus $Z_n \rightarrow Z_m$ Veranlassung geben, wenn das Molekül nach jedem solchen Elementarprozeß sofort wieder in den Zustand Z_n zurückgebracht würde. In Wirklichkeit ist aber die Zeit des Verweilens im Zustande Z_n pro Sekunde gemäß (5) gleich

$$\frac{1}{S} p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}},$$

wobei zur Abkürzung

$$S = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} + p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} \qquad (20)$$

gesetzt ist. Die Zahl dieser Prozesse pro Sekunde beträgt also in Wahrheit

$$\frac{1}{S} p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} B_n^m \varrho'(\nu', \varphi') \frac{d\varkappa'}{4\pi}.$$

Bei jedem derartigen Elementarprozeß wird in Richtung der positiven X'-Achse der Impuls

$$\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c} \cos\varphi'$$

auf das Atom übertragen. Auf analogem Wege fanden wir, gestützt auf (B), daß die entsprechende Zahl der Elementarprozesse der Einstrahlung vom Typus $Z_m \rightarrow Z_n$ pro Sekunde

$$\frac{1}{S} p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} B_m^n \varrho'(\nu', \varphi') \frac{d\varkappa'}{4\pi}$$

ist, und es wird bei jedem solchen Elementarprozeß der Impuls

$$-\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c} \cos\varphi'$$

auf das Molekül übertragen. Der im ganzen pro Zeiteinheit durch Einstrahlung pro Zeiteinheit auf das Molekül übertragene Impuls ist daher mit Rücksicht auf (6) und (9)

$$\frac{h\nu'}{cS} p_n B_n^m \left(e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} - e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}\right) \int \varrho'(\nu', \varphi') \cos\varphi' \frac{d\varkappa'}{4\pi},$$

wobei die Integration über alle räumlichen Elementarwinkel zu erstrecken ist. Durch Ausführung der letzteren ergibt sich vermöge (19) der Wert:

$$-\frac{h\nu}{c^2 S}\left(\varrho - \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \varrho}{\partial \nu}\right) p_n B_n^m \left(e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} - e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}\right) \cdot v.$$

Dabei ist die wirksame Frequenz wieder mit ν (statt ν') bezeichnet.

Dieser Ausdruck stellt aber den ganzen pro Zeiteinheit im Mittel auf ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes Molekül übertragenen Impuls dar. Denn es ist klar, daß die ohne Einwirkung der Strahlung stattfindenden Elementarprozesse der Ausstrahlung, vom System K' aus betrachtet, keine Vorzugsrichtung besitzen, also im Mittel auch keinen Impuls auf das Molekül übertragen können. Wir erhalten daher als Endergebnis unserer Betrachtung:

$$R = \frac{h\nu}{c^2 S}\left(\varrho - \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \varrho}{\partial \nu}\right) p_n B_n^m e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) \qquad (21)$$

§ 6. Berechnung von $\overline{\Delta^2}$.

Viel einfacher ist es, die Wirkung der Unregelmäßigkeit der Elementarprozesse auf das mechanische Verhalten des Moleküls zu berechnen. Denn man kann dieser Rechnung ein ruhendes Molekül zugrunde legen bei dem Grade der Näherung, mit dem wir uns von Anfang an begnügt haben.

Es verursache irgendein Ereignis, daß auf ein Molekül ein Impuls λ in der X-Richtung übertragen werde. Dieser Impuls sei in verschiedenen Fällen von verschiedenen Vorzeichen und verschiedener Größe. Es gelte jedoch für λ ein solches statistisches Gesetz, daß der Mittelwert $\overline{\lambda}$ verschwindet. Seien nun $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ die Impulswerte, welche mehrere voneinander unabhängig wirkende Ursachen auf das Molekül in

der X-Richtung übertragen, so daß der im ganzen übertragene Impuls Δ gegeben sei durch

$$\Delta = \Sigma \lambda_\nu .$$

Dann ist, wenn für die einzelnen $\lambda\nu$ die Mittelwerte $\overline{\lambda_\nu}$ verschwinden:

$$\overline{\Delta^2} = \Sigma \overline{\lambda_\nu^2} . \qquad (22)$$

Sind die Mittelwerte $\overline{\lambda_\nu^2}$ der einzelnen Impulse einander gleich $(=\overline{\lambda^2})$, und ist l die gesamte Zahl der die Impulse liefernden Ereignisse, so gilt die Beziehung

$$\overline{\Delta^2} = l \overline{\lambda^2} . \qquad (22a)$$

Nach unseren Hypothesen wird nun bei jedem Prozeß der Einstrahlung und der Ausstrahlung auf das Molekül der Impuls

$$\lambda = \frac{h\nu}{c} \cos \varphi$$

übertragen. Dabei bedeutet φ den Winkel zwischen der X-Achse und einer nach den Gesetzen des Zufalls gewählten Richtung. Daher ergibt sich

$$\overline{\lambda^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 . \qquad (23)$$

Da wir annehmen, daß alle stattfindenden Elementarvorgänge als voneinander unabhängige Ereignisse aufzufassen sind, so dürfen wir (22a) anwenden. l ist dann die Zahl der im ganzen in der Zeit τ stattfindenden Elementarvorgänge. Diese ist doppelt so groß als die Zahl der Einstrahlungsvorgänge $Z_n \rightarrow Z_m$ in der Zeit τ. Es ist also

$$l = \frac{2}{S} p_n B_n^m e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \varrho \tau . \qquad (24)$$

Es ergibt sich aus (23), (24) und (22)

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = \frac{2}{3S}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 p_n B_n^m e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \varrho . \qquad (25)$$

§ 7. Ergebnis.

Um nun zu zeigen, daß die nach unseren Grundhypothesen von der Strahlung auf die Moleküle ausgeübten Impulse das thermodynamische Gleichgewicht niemals stören, brauchen wir nur die in (25) und (21) für $\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau}$ und R berechneten Werte einzusetzen, nachdem in (21) die Größe

$$\left(\varrho - \frac{1}{3}\nu \frac{\partial \varrho}{\partial \nu}\right)\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$$

gemäß (4) durch $\frac{\varrho h \nu}{3kT}$ ersetzt ist. Es zeigt sich dann sofort, daß unsere Fundamentalgleichung (12) identisch erfüllt ist. —

Die nunmehr beendeten Überlegungen liefern eine starke Stütze für die in § 2 angegebenen Hypothesen über die Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung durch Prozesse der Absorption und Emission, bzw. durch Einstrahlung und Ausstrahlung. Zu diesen Hypothesen wurde ich durch das Bestreben geführt, in möglichst einfacher Weise ein quantentheoretisches Verhalten der Moleküle zu postulieren, das dem eines Planckschen Resonators der klassischen Theorie analog sei. Es ergab sich zwanglos aus der allgemeinen Quantenannahme für die Materie die zweite Bohrsche Regel (Gleichung 9), sowie die Plancksche Strahlungsformel.

Am wichtigsten erscheint mir aber das Ergebnis bezüglich der bei Einstrahlung und Ausstrahlung auf das Molekül übertragenen Impulse. Wenn eine unserer Annahmen über letztere abgeändert würde, so würde eine Verletzung der Gleichung (12) die Folge sein; es erscheint kaum möglich, anders als auf Grund unserer Annahmen mit dieser durch die Wärmetheorie geforderten Beziehung im Einklang zu bleiben. Wir können daher folgendes als ziemlich sicher erwiesen betrachten.

Bewirkt ein Strahlenbündel, daß ein von ihm getroffenes Molekül die Energiemenge $h\nu$ in Form von Strahlung durch einen Elementarprozeß aufnimmt oder abgibt (Einstrahlung), so wird stets der Impuls $\frac{h\nu}{c}$ auf das Molekül übertragen, und zwar bei Energieaufnahme in der Fortpflanzungsrichtung des Bündels, bei Energieabgabe in der entgegengesetzten Richtung. Befindet sich das Molekül unter der Wirkung mehrerer gerichteter Strahlenbündel, so ist immer nur eines derselben an einem Elementarvorgang der Einstrahlung beteiligt; dieses Bündel allein bestimmt dann die Richtung des auf das Molekül übertragenen Impulses.

Erleidet das Molekül ohne äußere Anregung einen Energieverlust von der Größe $h\nu$, indem es diese Energie in Form von Strahlung abgibt (Ausstrahlung), so ist auch dieser Prozeß ein gerichteter. Ausstrahlung in Kugelwellen gibt es nicht. Das Molekül erleidet in einer beim jetzigen Stande der Theorie nur durch den „Zufall“ bestimmten Richtung bei dem Elementarprozeß der Ausstrahlung einen Rückstoß von der Größe $\frac{h\nu}{c}$.

Diese durch die Gleichung (12) geforderten Eigenschaften der Elementarprozesse lassen die Aufstellung einer eigentlich quantenhaften Theorie der Strahlung fast unvermeidlich erscheinen. Die Schwäche der Theorie liegt einerseits darin,

daß sie uns dem Anschluß an die Undulationstheorie nicht näher bringt, andererseits darin, daß sie Zeit und Richtung der Elementarprozesse dem „Zufall" überläßt; trotzdem hege ich das volle Vertrauen in die Zuverlässigkeit des eingeschlagenen Weges.

Noch eine allgemeine Bemerkung soll hier Platz finden. Fast alle Theorien der Temperaturstrahlung beruhen auf der Betrachtung der Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Molekülen. Aber im allgemeinen begnügt man sich mit der Betrachtung des Energie-Austausches, ohne den Impuls-Austausch zu berücksichtigen. Man fühlt sich dazu leicht berechtigt, weil die Kleinheit der durch die Strahlung übertragenen Impulse es mit sich bringt, daß letztere gegenüber anderen bewegungserzeugenden Ursachen in der Wirklichkeit fast stets zurücktreten. Aber für die theoretische Betrachtung sind jene kleinen Wirkungen neben den ins Auge fallenden der Energieübertragung durch Strahlung als durchaus gleichwertig anzusehen, indem Energie und Impuls aufs engste miteinander verknüpft sind; es kann deshalb eine Theorie erst dann als berechtigt angesehen werden, wenn gezeigt ist, daß die nach ihr von der Strahlung auf die Materie übertragenen Impulse zu solchen Bewegungen führen, wie sie die Wärmetheorie verlangt.

(Eingegangen 3. März 1917.)

Über Schwärzungsparabeln der Kanalstrahlen auf Trockenplatten.

Von M. Wolfke.

(Mit Tafel I.)

Bekanntlich gibt es zwei verschiedene photographische Wirkungen der Kanalstrahlen. Bei kurzer Exposition entstehen an den von Kanalstrahlen getroffenen Stellen Schwärzungen, bei längerer Exposition — eine Art Solarisation[1]).

Zwecks Anwendung der Kanalstrahlen auf einige neue Forschungsgebiete habe ich mir vor allem die Aufgabe gestellt, mit möglichst kurzen Expositionen scharfe Parabeln zu erhalten. Hierzu ist die Solarisationsmethode nicht geeignet, da sie eine längere Expositionszeit erfordert, so daß ich auf die Schwärzungsmethode allein angewiesen war.

J. Koenigsberger und J. Kutschewski[2]), die wohl die ersten gewesen sind, welche die photographische Methode auf die Kanalstrahlen anwandten, suchten vergebens scharfe Schwärzungsparabeln auf Trockenplatten zu erhalten. Sie untersuchten mehrere Sorten von Trockenplatten mit negativem Resultat; auch nach mehreren Minuten der Exposition erhielten sie nur allgemeine Schwärzungen der Platten, ohne daß die Parabeln der Kanalstrahlen zu sehen waren. Nur auf einer nichtabgeschliffenen Lippmannplatte war nach 4′ Expositionszeit der neutrale Fleck ohne die abgelenkten Strahlen schwach sichtbar. Bessere Resultate erhielten Koenigsberger und Kutschewski mit Chlorbromsilberpapier. Auch die Schwärzungsbilder von T. Retschinsky[1]), wie aus seinen Reproduktionen zu ersehen ist[2]), sind nur diffuse Flecke, nicht nur zur quantitativen, sondern auch zur qualitativen Untersuchung vollkommen unbrauchbar. T. Retschinsky arbeitete deshalb ausschließlich mit der Solarisationsmethode[3]), die er zu einer großen Vollkommenheit ausgebildet hat. Im Gegensatz zu diesen negativen Resultaten stehen die schönen, äußerst scharfen Aufnahmen von J. J. Thomson[4]). Allerdings läßt sich aus seinen Publikationen nicht ersehen, ob die Bilder Schwärzungsparabeln oder Solarisationsbilder sind, und T. Retschinsky, gestützt auf eigene Erfahrung und das Aussehen der Thomsonschen Reproduktionen, vermutet, daß auch die Thomsonschen Aufnahmen keine Schwärzungsbilder, sondern Solarisationsbilder sind[5]).

Nach einigen Wochen Vorversuchen in dieser Richtung ist es mir gelungen, scharfe, zu quantitativen Messungen gut geeignete, Schwärzungsparabeln auf Trockenplatten zu erhalten. In Anbetracht des oben Gesagten ist wohl nicht ohne Interesse die näheren Versuchsbedingungen anzugeben, die die Aufnahme von scharfen Schwärzungsparabeln ermöglichen.

Die Anordnung des Aufbaues war im Prinzip mit einigen technischen Veränderungen und Verbesserungen die gleiche wie sie in Würzburg bei W. Wien ausgearbeitet worden ist und die auch T. Retschinsky[6]) vor zwei Jahren bei seinen Versuchen in Zürich benutzte. Sei es mir gestattet, Herrn Dr. T. Retschinsky auch an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen für seine Liebenswürdigkeit, mit der er mich seinerzeit in die Einzelheiten seiner Anordnung und die Kanalstrahltechnik eingeweiht hat.

---

1) Vgl. Bericht von T. Retschinsky, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**, 75, 1916.

2) J. Koenigsberger und J. Kutschewski, diese Zeitschr. **11**, 666, 1910; Verh. d. D. Phys. G. **13**. 133, 1911.

1) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4), **47**, 525, 1915.

2) Vgl. l. c. Taf. VI. Fig. 1 u. 2.

3) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4), **48**, 546, 1915.

4) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6), **24**, 244, 1912.

5) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4), **47**, 540, 1915.

6) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4), **47**, 525, 1915.

Sämtliche Aufnahmen habe ich mit Induktorium ausgeführt. Das Entladungspotential wurde annähernd mittelst einer parallel geschalteten Funkenstrecke zwischen zwei Aluminiumkugeln von 31 mm Durchmesser gemessen. Das Auspumpen des Kanalrohres besorgte eine Gaedepumpe ohne Kühlung. Der Kanal besaß 0,7 mm im Durchmesser und war 6 cm lang. Eine Wiensche Durchströmungsanordnung, die an das Kanalrohr angeschlossen war, habe ich nur selten benutzt, da sie sich bei kurzen Expositionszeiten (0,1″ bis 10″) erübrigte. In den meisten Fällen wurden das Entladungsrohr und die Kamera von beiden Seiten des Kanals gleichzeitig auf den gewünschten Entladungsdruck gepumpt, wonach die Außenverbindung zwischen Kamera und Entladungsrohr abgeschlossen blieb und Kamera allein weiter bis unter 0,0001 mm *Hg*-Druck einige Minuten gepumpt wurde. Ich habe ca. 100 Bilder unter verschiedenen Bedingungen aufgenommen. Das Rohr war stets mit trockener Luft gefüllt. Zu den meisten Aufnahmen benutzte ich „Agfa"-Diapositiv und in einigen Fällen auch „Agfa"-Extrarapidplatten.

Die ersten Aufnahmen zeigten starke Verschleierung, obgleich man den neutralen Fleck und auf manchen auch die abgelenkten Strahlen erkennen konnte. Eine Lichtwirkung war ausgeschlossen, da einerseits der enge Kanal und das Diaphragma kein merkliches Licht aus dem Entladungsraum in die Kamera ließen, anderseits der Druck in der Kamera während der Exposition unter 0,0001 mm war; bekanntlich ist bei diesem Vakuum das Leuchten der Kanalstrahlen äußerst schwach. Einige hierbei beobachtete Tatsachen scheinen dafür zu sprechen, daß die Ursache dieser Verschleierung, vor allem bei höheren Entladungspotentialen mit Funkenstrecken über 10 mm, in einer Entladung hinter dem Kanal im Innern der Kamera liegt. Diese Entladung findet zwischen den isolierten Elektrodenplatten, die zur Herstellung des ablenkenden elektrostatischen Feldes dienen, und dem Gehäuse der Kamera, welches wie üblich mit dem Kanal und dem negativen Pol des Induktors verbunden ist, statt. Es genügt nämlich, auch bei sehr hohen Entladungspotentialen mit Funkenstrecken über 40 mm, eine von den Elektrodenplatten mit dem Gehäuse direkt leitend zu verbinden, um die Verschleierung vollständig zu beseitigen. Diese oben erwähnte Entladung im Innern der Kamera bei isolierten Elektrodenplatten scheint eine ablenkbare Strahlung, wahrscheinlich Kathodenstrahlen, zu verursachen, welche die Platte verschleiern. Dies ist deutlich aus folgenden Tatsachen zu ersehen.

Schließt man die beiden Elektrodenplatten außen kurz miteinander, läßt sie jedoch isoliert vom Gehäuse, so erhält man bei einem Entladungspotential von 30 mm Funkenstrecke und 5″ Expositionszeit eine sehr stark verschleierte Aufnahme mit nur schwachen Umrissen des neutralen Flecks.

Schaltet man ein ablenkendes elektrostatisches Feld (600 Volt Hochspannungsbatterie), in dem jedoch die beiden Elektrodenplatten vom Gehäuse isoliert bleiben, ein, so erscheint die Platte bei gleichen Aufnahmebedingungen ganz klar und die abgelenkten Strahlen treten scharf hervor. (Vgl. Taf. Fig. 1.)

Fügt man zum elektrostatischen Feld noch ein schwaches Magnetfeld (Magnetisierungsstrom = 0,5 Amp.) hinzu, so erhält man eine klare Platte mit scharfen Parabeln. (Vgl. Taf. Fig. 2.)

Steigert man das Magnetfeld (Magnetisierungsstrom = 0,75 Amp.), so erscheinen die Parabeln noch scharf, aber die Platte zeigt schwachen Schleier. (Vgl. Taf. Fig. 3.)

Bei noch stärkerem Magnetfeld (Magnetisierungsstrom = 1,5 Amp.) sind die Parabeln noch sichtbar, aber die Platte wird sehr stark verschleiert. (Vgl. Taf. Fig. 4.)

Bei 2 Amp. Magnetisierungsstrom und darüber ist die Platte bei gleichen Aufnahmebedingungen total verschleiert.

Es genügt jedoch, eine von den beiden Elektrodenplatten mit dem Gehäuse der Kamera leitend zu verbinden, um auch bei starken Magnetisierungsströmen ein vollkommen klares Bild zu erhalten. (Vgl. Taf. Fig. 5.) Die beiden letzten Aufnahmen (Fig. 4 u. 5) habe ich sofort nacheinander unter gleichen Bedingungen ausgeführt, nur daß bei der ersten beide Elektrodenplatten vom Gehäuse isoliert waren und bei der zweiten Aufnahme die positive Elektrodenplatte mit dem Gehäuse der Kamera in leitender Verbindung stand.

Bei kleinen Entladungspotentialen (Funkenstrecken ca. 8 mm) habe ich auch mit isolierten Elektrodenplatten klare Bilder erhalten; bei höheren Entladungspotentialen mußte jedoch stets, um klare Bilder zu erhalten, eine von den Elektrodenplatten mit dem Gehäuse in Verbindung stehen. Ich habe auch bei sehr hohen Entladungspotentialen (Funkenstrecke über 40 mm), wenn die eine Elektrodenplatte mit dem Gehäuse verbunden war, nie einen Schleier auf den Aufnahmen beobachtet.

Auf die Schärfe der Parabeln hat außerdem das Entladungspotential und der Druck im Entladungsraum einen Einfluß. Der Einfluß des Druckes in der Kamera auf die Streuung der Kanalstrahlen wurde bereits von vielen Seiten untersucht. Um den Einfluß der beiden eben



erwähnten Faktoren unabhängig voneinander zu untersuchen, benutzte ich zwei verschiedene Entladungsröhren, von welchen das eine ein Zylinderrohr von 5 cm Durchmesser und 40 cm Länge war, das zweite dagegen durch Ansetzen einer Kugel von 18 cm Durchmesser an der Anodenseite des ersteren entstanden war. Bei letzterem wurde die Anode in einem engeren Rohr an die Kugel angesetzt. Die Entladungsbedingungen waren in diesen beiden Röhren verschieden, so z. B. erhielt man im Zylinderrohr bei einem Druck von 0,005 mm eine Funkenstrecke von ca. 30 mm. Im Rohr mit dem Kugelansatz dagegen zeigte sich bei diesem Druck eine Funkenstrecke von ca. 4 mm. Funkenstrecken von 30 mm erhielt ich erst unter 0,001 mm Druck. Aus dem Vergleich der Aufnahmen, die in den beiden Röhren unter sonst gleichen Bedingungen gemacht worden sind, d. h. bei gleicher Expositionszeit und gleichem Druck in der Kamera, lassen sich folgende zwei Schlüsse ziehen.

Bei gleichem Enladungspotential sind die Parabeln schärfer bei tieferem Druck im Entladungsraum (Rohr mit Kugelansatz).

Bei gleichem Druck im Entladungsraum sind die Parabeln schärfer beim höheren Entladungspotential (Zylinderrohr).

Die Schärfe der Parabeln scheint auch von der Wahl der Platten abzuhängen; eine genaue Untersuchung darüber ist im Gange. Bis jetzt habe ich festgestellt, daß die Diapositivplatten sich zu derartigen Aufnahmen besser eignen (vgl. Taf. Fig. 1, 2, 3, u. 5), als z. B. die Extrarapidplatten, auf denen die Parabeln weniger scharf hervortreten. (Vgl. Taf. Fig. 6.) Alle die hier reproduzierten Aufnahmen wurden bei gleichem Entladungspotential (Funkenstrecke ca. 30 mm) und mit gleicher Expositionszeit 5 Sek. aufgenommen.

Sei mir auch an dieser Stelle gestattet, dem Vorstand des Physik. Inst. d. Eidg. Techn. Hochschule Herrn Prof. Dr. P. Weiss und dem Assistenten Herrn Priv.-Doz. Dr. A. Piccard für ihr freundlichstes Engegenkommen meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Zusammenfassung.

Es wurden scharfe Schwärzungsparabeln der Kanalstrahlen auf Trockenplatten mit einigen Sekunden Expositionszeit und bei üblicher Anordnung erhalten, wobei sich für die Aufnahme solcher Parabeln folgende Bedingungen als günstig erwiesen haben:

1. Leitende Verbindung zwischen einer der beiden Elektrodenplatten, die zur Herstellung des ablenkenden elektrostatischen Feldes dienen, und dem Gehäuse der Kamera;

2. möglichst tiefer Druck, nicht nur in der Kamera, sondern auch im Entladungsraum selbst;

3. hohe Entladungsspannungen.

Zürich, Januar 1917.

(Eingegangen 5. Februar 1917.)

Widersprüche gegen die Wellenkinematik; ihre Auflösungen. II [1]).

Von Karl Uller.

Wenn eine Welle auch nicht in Gedanken aus Elementarwellen aufgebaut werden darf, wie in meiner vorangehenden Arbeit[2]) aus dem Interferenz-Prinzip gefolgert werden mußte, dann ist auch des Huygens-Kirchhoffschen Prinzips bisherige Deutung unstatthaft, nach der die Welle außerhalb ihres Quellgebietes in einem beliebigen Punkt dargestellt werden kann durch die Summe von passend zurückdatierten Elementarkugelwellen, die von allen Elementen einer Oberfläche nach dem Aufpunkt in ihrem Innern hinlaufen. Da die Oberfläche beliebig außerhalb des Quellgebietes gelegen sein kann, wäre jeder Punkt der Welle Ausgangspunkt von Kugelwellen. Die Welle könnte demnach aufgebaut gedacht werden auf der Interferenz unendlich vieler Elementarkugelwellen.

Wollen wir hinter die wahre Bedeutung des so wichtigen Oberflächensatzes kommen, dann müssen wir uns nochmals seine mathematische Herleitung in aller Kürze vergegenwärtigen. Wir beschränken uns dabei auf Wellen von elementarer Schwingungsform.

Für zwei neben ihren zwei ersten Ableitungen reguläre Skalare U und V, die in demselben Raum existieren, gilt der, eine Subtraktionswirkung darstellende, Greensche Satz

$$\int dv \{U\nabla^2 V - V\nabla^2 U\} = \int (do, U \operatorname{grad} V - V \operatorname{grad} U). \qquad (1)$$

Genügen beide einer Gleichung von der Form

$$aS + \nabla^2 S = 0, \qquad (2)$$

so verschwindet in (1) die linke Seite, wenn in ihr alle Integrationselemente endlich bleiben. Die Bedingungsgleichung (2) für das Verschwinden verlockt durch ihren Bau dies Ergebnis für die Wellentheorie nutzbar zu machen, denn dort tritt für homogene Körper häufig Gl. (2) als Wellengleichung auf. Bei Wellen von elementarer Schwingungsform sind dann U und V reine Ortsfunktionen, und zwar komplexe: ist die Welle vektoriell, so können wir U und V

1) I: Diese Zeitschr. 18, 99, 1917.

2) K. Uller, Das Interferenz-Prinzip. Diese Zeitschr. 18, 101, 1917.

als entsprechende Komponenten des Feldes auffassen. Wir bestimmen nun, daß U für die zu berechnende Welle verwendet werden soll und V für eine gleichzeitig existierende Kugelwelle von gleicher Schwingungsform, welche der U-Welle übergelagert sein soll. Wir haben dann also $V = e^{i\sqrt{a}r}/r$ in (1) einzusetzen. Liegt der Aufpunkt des Topographen $\mathfrak{r}$ vom Betrage r außerhalb der in (1) gedachten Oberfläche O, so haben wir noch nichts gewonnen. Setzen wir fest, daß er innerhalb O liegen soll, so ist V im Aufpunkt ($\mathfrak{r} = 0$) unendlich groß, was gegen die Voraussetzungen von (1) verstößt. Wir können aber den Aufpunkt durch eine kleine Kugelfläche, für die er Mittelpunkt ist, ausschließen von dem Integrationsgebiet. Ziehen wir nun diese Kugelfläche auf null zusammen, so konvergiert der ihr entsprechende Teil des Oberflächenintegrals in (1) gegen den Grenzwert $-4\pi U$, so daß wir für eine beliebige den Aufpunkt umschließende Oberfläche O, innerhalb welcher (2) gilt, den Huygens-Kirchhoffschen Oberflächensatz haben

$$4\pi U = \int (do, U \cdot \operatorname{grad} e^{i\sqrt{a}r}/r - e^{i\sqrt{a}r}/r \cdot \operatorname{grad} U). \quad (3)$$

Die Deutung kann nach seiner Herleitung nur die sein, daß durch Überlagerung einer gedachten Kugelwelle über die zu berechnende U-Welle der Wert der U-Welle im Pol der Kugelwelle angebbar ist. Dabei ist gleichgültig, ob die Kugelwelle nach außen oder nach innen läuft, wenn sie nur von derselben Schwingungsform ist; denn in der zweideutigen Wurzel aus dem Wellenparameter a steckt auch der Zeitfaktor ν der Schwingungsform.

Die Zwangsvorstellung der Elementarwellen-Interferenz, die durch Fresnel in die Wellentheorie gekommen ist, verleitete dagegen die Analysis dazu, den Ausdruck (3) zu schreiben

$$4\pi U e^{i\nu t} = \int \left(do, \operatorname{gr\acute{a}d} \frac{U e^{i(\nu t + \sqrt{a}r)}}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad} U e^{i\nu \left(t + \sqrt{a}r\right)}\right), \quad (3')$$

was nur möglich ist, wenn man eigens zu diesem Zweck festsetzt: Bei der Operation grád soll U konstant gehalten werden, und im zweiten Glied von (3') soll nachträglich t durch $t + \sqrt{a}r$ ersetzt werden. Diese Vorschriften, von denen die erste mathematisch recht sonderbar klingt, sind notwendig geworden, damit man das gewünschte Resultat ablesen kann, nämlich daß an der Oberfläche gedachte Quellpunkte in zusammenhängender Verteilung liegen, deren zu je nach dem Abstand vom Aufpunkt verschiedenen Zeiten entsandten Elementarkugelwellen den Wert der U-Welle im Aufpunkt zur Zeit t liefern, und zwar durch Überlagerung und Interferenz. Daß man der mathematischen Unzulänglichkeit entgehen kann, indem man $U \operatorname{grad} V$ durch $\operatorname{grad} UV - V \operatorname{grad} U$ ersetzt, so daß man statt (3') bekommt

$$4\pi U e^{i\nu t} = \int \left(do, \operatorname{grad} \frac{U e^{i(\nu t + \sqrt{a}r)}}{r} - \frac{2}{r} \operatorname{grad} U e^{i\nu \left(t + \sqrt{a}r\right)}\right), \quad (3'')$$

wird dabei wohl bemerkt worden sein.

In Wahrheit hat das H.-K.sche Prinzip mit dem Interferenz-Prinzip gar nichts gemein. Der Oberflächensatz beruht, wenn wir seine Herleitung prüfen, lediglich auf der Existenz einer Wellengleichung von der Form (2), auf dem eigentümlichen Verhalten von $\operatorname{div} \operatorname{grad} {}^1/r$ im Pol sowie auf dem Prinzip der störungsfreien Überlagerung. Daher kommt es auch, daß die Funktion $V = \sin(\sqrt{a}r)/r$, obgleich sie die Wellengleichung (2) befriedigt, doch nicht verwendet werden kann, eben weil sie die zweite Voraussetzung nicht erfüllen kann. Daher kommt es ferner, daß für U-Wellen, die wie die hydrodynamischen das Prinzip der störungsfreien Überlagerung nicht befolgen, der H.-K.sche Satz keine Verwendung finden kann.

Zu seinen Voraussetzungen gehört offenbar nicht gerade eine Kugelwelle. Denken wir uns in (3) statt der Kugelwellenfunktion $e^{i\sqrt{a}r}/r$ irgendeine andere einpolige Wellenfunktion, die mit der U-Welle gleiche Schwingungsform hat sowie derselben Wellengleichung (2) genügt und außerdem sich im Pol wie $1/r$ verhält, eingesetzt, so haben wir die allgemeinste Form des H.-K.schen Oberflächensatzes. Der Bau der Hilfswelle außerhalb ihres Pols ist beliebig. Die Phasen können also auf beliebig gekrümmten Bahnen vom oder zum Pol laufen; es braucht auch keine physikalische Welle zu sein. Es könnte beispielsweise eine exzentrische Kugelwelle sein. Allein schon diese durch die Verallgemeinerung möglich gewordene Erkenntnis feit uns gegen die Auffassung, daß irgendwelche gedachte Quellpunkte Elementarwellen, die doch in homogenen Körpern nur Kugelwellen sein könnten, ins Spiel kämen.

Das Huygens-Kirchhoffsche Verfahren und seine Verallgemeinerung ist ein Kunstgriff, der darin besteht, daß über die zu berechnende U-Welle eine einpolige Welle überlagert gedacht wird, mit deren Hilfe dann die U-Welle im

Pol angebbar ist, wenn beide an einer Oberfläche bekannt sind.

U kann natürlich auch einen Wellenzustand darstellen, d. h. die Überlagerung mehrerer Wellen gleicher Schwingungsform.

Auch bei Temperaturwellen sowie bei Flüssigkeits-Scherungswellen kann das H.-K.sche Verfahren angewendet werden. Denn sie befolgen die drei genannten Voraussetzungen. Daß bei ihnen der Wellenparameter a anders zusammengesetzt ist wie beispielsweise bei Verdünnungswellen, ist kein Hinderungsgrund.

Für räumlich variierende a bleibt das H.-K.sche Verfahren zu Recht bestehen. Indessen läßt sich das nicht für die Berechnung der Wellenbewegung in inhomogenen Körpern verwerten, und zwar weil in solchen die Wellengleichung keineswegs die einfache Form (2) hat.

Es sind noch andere Oberflächensätze denkbar, die nicht auf Überlagerung einer Hilfswelle beruhen.

Man kann bekanntlich einen Vektor $\mathfrak{V}$, falls er sich mit seinen ersten Ableitungen regulär verhält, in einem beliebigen Punkte seines Feldes darstellen durch die Werte von $\mathfrak{V}$, div $\mathfrak{V}$ und rot $\mathfrak{V}$ an bzw. innerhalb einer einfach zusammenhängenden Oberfläche O, die der einzigen Bedingung unterworfen ist, daß sie den Aufpunkt umschließt. Der Wert von $\mathfrak{V}$ im Aufpunkt erscheint dann in Form gewisser Raum- und Oberflächenintegrale[1]). Dieser Satz wird gewonnen durch die Verbindung des Vektors mit dem Skalar $1/r$ und Verwertung einer Eigenschaft des Topographen $\mathfrak{r}$. Für eine unendlich kleine Kugel, die den Aufpunkt umschließt, konvergiert nämlich $\int dv \cdot \mathfrak{V}$ div grad $1/r$ gegen $-4\pi\mathfrak{V}$, und ferner lassen sich Verschiebungen des Endpunktes von $\mathfrak{r}$ ersetzen durch die entgegengesetzten seines Anfangspunktes, des Aufpunktes. Die Zeit nun spielt in diesem rein geometrischen Satz keine Rolle. Tritt sie in $\mathfrak{V}$ auf, so ist sie als Parameter anzusehen, der konstant zu halten ist. Es kommen also in nichtstationären Feldern, in Wellen, nur gleichzeitige Werte der Beträge in Rechnung.

Es steht aber nichts im Wege und erscheint aussichtsvoll, den Satz zu erweitern, indem man $\mathfrak{V}$ nicht nur vom Ort abhängen läßt, sondern auch noch von einem skalaren Parameter, der Raum und Zeit in beliebiger gesetzmäßiger Verbindung enthält. Die Ersetzung von $\mathfrak{V}(\mathfrak{r})$ durch $\mathfrak{V}(\mathfrak{r}, t')$, worin $t' = f(t, \mathfrak{r})$ der Zeit-Raumparameter sei, macht gewisse Umformungen in den Gliedern des Satzes notwendig, die aber immer ausführbar sind, und weiter läßt sich immer im Aufpunkt $t' = t$ machen. In dieser Erweiterung liefern nun zu dem Werte $\mathfrak{V}(0, t)$ die einzelnen Feldpunkte an und innerhalb O nicht mehr gleichzeitige Beiträge, sondern je nach ihrer Lage ungleichzeitige, vergangene oder zukünftige Werte in bezug auf den Zeitpunkt t, ganz nach dem gesetzlichen Zusammenhang, der zwischen Zeit und Lage in dem Parameter t' angesetzt ist.

Durch diese Umformungen treten zeitliche Ableitungen von $\mathfrak{V}$ unter den Integralen auf. Man kommt dadurch auf den Gedanken, daß nach Aufstellung gewisser Vorschriften solche Funktionen $f(t, \mathfrak{r})$ existieren, durch deren Einführung die Raumintegrale zusammengezogen werden zu einem, dessen Integrand gerade die Form derjenigen Wellengleichung annimmt, der $\mathfrak{V}$ zu genügen hat. Dann würde $\mathfrak{V}(0, t)$ allein durch Oberflächenintegrale bestimmbar sein, was ja die mindeste Voraussetzung für die Verwendbarkeit der Methode wäre. Ob eine solche Funktion stets existiert, ist eine offene Frage; jedenfalls muß sie in Beziehung stehen zu der Form der jeweiligen Wellengleichung. Soviel ist aber seit der Auffindung des Interferenz-Prinzips gewiß: die Einführung des Parameters t' erlaubt nicht, die Elementarbeiträge der Integrale als Elementarwellen aufzufassen, die von den Raum- und Oberflächenpunkten auslaufen und untereinander interferieren. Es handelt sich in Wirklichkeit nur um eine rein rechnerische Verteilung der Beiträge. Ganz entsprechende Betrachtungen gelten natürlich auch für Skalarwellen.

Bisher ist es nur in einem besonderen Fall gelungen diejenige Funktion t' anzugeben, welche die Raumintegrale zum Verschwinden bringt. Befolgt das Vektorfeld die Wellengleichung $d^2\mathfrak{V}/dt^2 + \omega \operatorname{rot}^2 \mathfrak{V} = 0$, worin ω eine Konstante ist, dann liefert der Ansatz: $t' - t$ proportional dem Abstand r, in Verbindung mit gewissen Vorschriften, wirklich nur Oberflächenintegrale zur Bestimmung von $\mathfrak{V}(0, t)$.

Das skizzierte Parameter-Verfahren ist, wie man sieht, von dem Huygens-Kirchhoffschen im Wesen verschieden. Es ist allgemeiner, weil es nicht auf die Wellengleichung (2) beschränkt ist, somit auch in Quellgebieten zu brauchen ist.

Gießen, Februar 1917.

(Eingegangen 28. Februar 1917.)

1) Siehe z. B. Ignatowsky, Vektoranalysis I, Nr. 17. (Teubner, Leipzig 1909.)

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

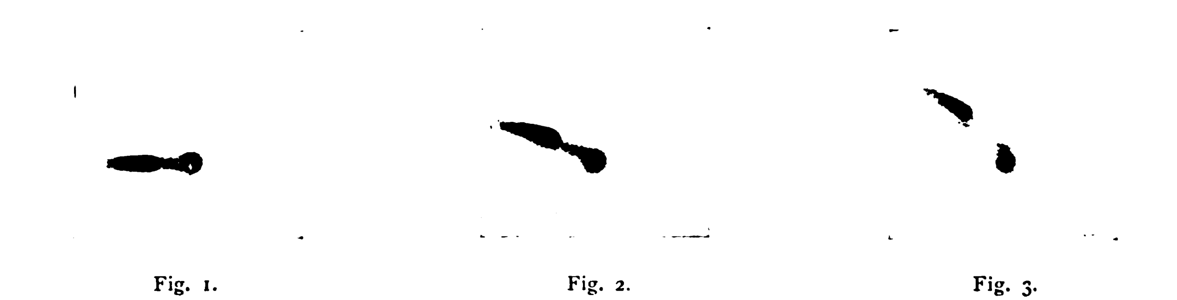


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.





Fig. 4.



Fig. 5.



Fig. 6.

M. Wolfke, Über Schwärzungsparabeln der Kanalstrahlen auf Trockenplatten.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 7. | 1. April 1917. | 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 8 am 6. April 1917.

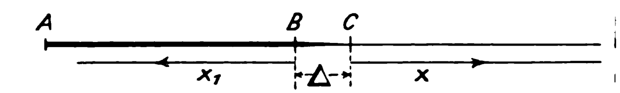
INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über ein einfaches Analogon der Theorie der offenen Pfeife.

Von P. Selényi.

Um die Schwingungsvorgänge der offenen Pfeife unserer mechanischen Einsicht näher zu bringen, kann man von einem Modell (s. Fig. 1)



Gebrauch machen, welches aus einer Saite — von der Länge l und der linearen Dichte ϱ_1 — und aus einer dieser anschließenden unendlich langen, dünneren Saite — von der Dichte ϱ — besteht. Der Übergang der Dichten soll auf einer kleinen Strecke — von der Länge $\triangle$ und der Masse m — stetig erfolgen; die ganze, so zusammengesetzte Saite sei mit einer Kraft P gespannt. Es entspricht hier — wie man sich leicht davon überzeugt — das dickere Saitenstück $\overline{AB}$ der offenen Pfeife, die Strecke $\triangle$ der Korrektur wegen dem offenen Ende und die unendliche, dünnere Saite dem freien Luftraume.

Behandeln wir das System unter der Bedingung, daß der Endpunkt A eine vorgeschriebene Schwingung ausführt; gegeben durch den reellen Teil von dem Ausdruck

$$\xi_A = A \cdot e^{i\omega t}. \tag{1}$$

Aus naheliegenden Gründen nimmt man dann die Elongation von der Strecke AB in der Form von zwei stehenden Schwingungen an

$$\xi_1 = [a \cos \mu_1 (x_1 - l) + b \sin \mu_1 (x_1 - l)]\, e^{i\omega t} \tag{2}$$

und die von der unendlich langen Saite in der Form einer fortschreitenden Welle

$$\xi = c \cdot e^{i(\mu x + \delta)} \cdot e^{i\omega t}. \tag{3}$$

Die zu erfüllenden Grenzbedingungen sind die folgenden: Zuerst ist im Punkte A die Bewegung vorgeschrieben, d. h. es muß

$$(\xi_1)_{x_1 = l} = \xi_A \tag{4}$$

sein.

Dann betreffs der Strecke $\triangle$ gilt die Kontinuitätsbedingung, welche aussagt, daß die Entfernung der Punkte B und C stets gleich $\triangle$ ist, d. h.

$$(\xi)_{x=0} - (\xi_1)_{x_1=0} = \triangle \cdot \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_{x=0}. \tag{5}$$

Endlich kommt noch dazu die dynamische Bedingung, wonach die Bewegung der kleinen Masse m durch die Resultate der angreifenden Kräfte erfolgt, wofür der analytische Ausdruck lautet:

$$P\left[\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_{x=0} - \left(\frac{d\xi_1}{dx_1}\right)_{x_1=0}\right] = m \cdot \left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{x=0}. \tag{6}$$

Wie man sieht, hat der hier behandelte Fall sein Analogon in den Schwingungen der offenen Pfeife, welche durch die vorgeschriebene harmonische Bewegung eines Stempels hervorgebracht werden[1]). Das Geschwindigkeitspotential in der Pfeife hat genau die Form von (2), im freien Luftraum unterscheidet es sich nur durch den Faktor $1/r$ vom Ausdrucke (3); die Grenzbedingung am Stempel entspricht der Gleichung (4) und für das offene Ende gilt zuerst die der Gleichung (5) ähnliche Kontinuitätsbedingung, wonach die kleine Luftmasse um das Rohrende sich wie eine inkompressible Flüssigkeit bewegt, und die der Gleichung (6) entsprechende dynamische Bedingung, wonach die Bewegung dieser kleinen Luftmasse durch die Resultierende der auf sie wirkenden Druckkräfte aufrecht erhalten wird.

Setzt man die Werte von ξ_1 und ξ in die Gleichungen (4), (5) und (6), so erhält man

$$a = A \tag{4a}$$

$$a \cos \mu_1 l - b \sin \mu_1 l = c \cdot e^{i\delta} + i \triangle \cdot \mu \cdot c \cdot e^{i\delta}, \tag{5a}$$

$$P[-(a\mu_1 \sin \mu_1 l + b\mu_1 \cos \mu_1 l) + i c \cdot \mu e^{i\delta}] = -m c \omega^2 e^{i\delta}. \tag{6a}$$

Um uns sofort auf den Fall der Resonanz zu beschränken, nehmen wir gleich

1) S. Rayleigh, Theorie des Schalles, II. Bd.

$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

an; so daß

$$\mu_1 l = 2\pi \frac{l}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2}\,;\ \cos\mu_1 l = 0,\ \sin\mu_1 l = 1$$

ist. Setzen wir weiter

$$b = \beta + i\gamma$$

und bemerken dazu, daß c nach Voraussetzung, a aber laut (4a) reelle Werte sind, so bekommen wir weiter

$$-(\beta + i\gamma) = c\,(\cos\delta + i\sin\delta)\,(1 + i\triangle\cdot\mu) \quad (5b)$$

$$Pa\mu_1 = c\,(\cos\delta + i\sin\delta)\,(iP\mu + m\,\omega^2). \quad (6b)$$

Jetzt trennen wir die reellen und imaginären Glieder voneinander:

$$\left.\begin{aligned} -\beta &= c\,(\cos\delta - \triangle\cdot\mu\cdot\sin\delta) \\ -\gamma &= c\,(\sin\delta - + \cdot\mu\cdot\cos\delta) \\ Pa\mu_1 &= +\,c\,(m\omega^2\cos\delta - P\mu\sin\delta) \\ 0 &= P\mu\cos\delta + m\,\omega^2\sin\delta \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Aus der letzten der vier Gleichungen folgt

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{P\mu}{m\cdot\omega^2}.$$

Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, nehmen wir m so klein an, daß

$$\operatorname{tg}\delta = -\infty,\ \delta = -\frac{\pi}{2}$$

gesetzt werden kann.

Dann ergibt zuerst der dritte von der Gleichung (7)

$$a\mu_1 = c\mu$$

$$c = a\frac{\mu_1}{\mu} = A\frac{\lambda}{\lambda_1}$$

und

$$\xi = A\frac{\lambda}{\lambda_1}\cos\left(\omega t - \mu x + \frac{\pi}{2}\right). \quad (8)$$

Zu dieser Gleichung ist folgendes zu bemerken: Hätten wir die dünne, unendlich lange Saite direkt zu dem Punkte A mit der vorgeschriebenen Schwingung angebunden, so hätten wir eine fortschreitende Welle mit der Amplitude A erhalten. Dadurch, daß die Verbindung mit der Zwischenschaltung eines dickeren Saitenstückes von einer auf die Periode ω resonierenden Länge geschehen ist, haben wir eine $\frac{\lambda}{\lambda}$ mal größere Amplitude hervorgebracht; die aus dem schwingenden Punkte pro Sekunde entzogene Energie aber im Verhältnisse $\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2$ d. h. $\frac{\varrho_1}{\varrho}$ mal vergrößert. Durch eine Wahl der Länge l doppelt so groß, hätte man umgekehrt die ausgestrahlte Energie ebensovielmal vermindert.

Weiter ergeben die zwei ersten von der Gleichung (7)

$$\beta = -c\cdot\triangle\cdot\mu = -A\cdot\triangle\cdot\mu_1 = -2\pi A\frac{\triangle}{\lambda_1} \quad (9)$$

und

$$\gamma = c = A\frac{\lambda}{\lambda_1}. \quad (10)$$

Diese Werte in ξ_1 eingesetzt, liefern

$$\xi_1 = [A\cos\mu_1(x_1 - l) - A\,(\triangle\mu_1 + \quad (11)$$
$$-i\frac{\lambda_2}{\lambda_1})\sin\mu_1(x_1 - l)]\,e^{i\omega t}.$$

Die wirkliche Bewegung wird durch den reellen Teil davon dargestellt, d. h. durch

$$\xi_1 = A\,[\cos\mu_1(x_1 - l) - \triangle\,\mu_1\sin\mu_1(x_1 - l)]\cos\omega t$$
$$-A\frac{\lambda}{\lambda_1}\sin\mu_1(x_1 - l)\sin\omega t. \quad (12)$$

Setzt man noch wegen der Kleinheit von $\triangle$

$$\cos\mu_1(x - l) - \triangle\cdot\mu_1\cdot\sin\mu_1(x_1 - l)$$
$$= \cos\mu_1(x_1 - l + \triangle)$$

und berücksichtigt man, daß

$$\mu_1 l = \pi/2$$

ist, so erhalten wir die endgültige Form der Schwingung

$$\xi_1 = A\sin\mu_1(x_1 + \triangle)\cos\omega t + A\frac{\lambda}{\lambda_1}\cos\mu_1 x_1\cdot\sin\omega t \quad (13)$$

Diese Formel gleicht genau der Formel für das Potential der offenen Pfeife. Die durch das erste Glied dargestellte stehende Welle hat seinen Knotenpunkt wie das entsprechende Glied des Potentials (welchem ein Maximum der Bewegung entspricht) — im Punkte $x_1 = -\triangle$ d. h. um die Strecke $\triangle$ **vor** dem Punkte B, wo der Übergang der Dicke ϱ_1 zu ϱ anfängt. also im Punkte C, wo der Übergang eben bereits beendet ist. Analogerweise ist bei der Pfeife die Korrektur wegen dem offenen Ende gleich der Strecke, innerhalb welcher die im Rohre vorhandene ebene Welle sich in die Kugelwelle des freien Luftraumes umwandelt.

Im Felde, Dezember 1916.

(Eingegangen 28. Februar 1917.)

Zur Theorie der Luftspiegelungen.

Von Fr. Nölke.

Wegen der großen Schwierigkeiten ist es bis jetzt nicht möglich gewesen, die bei der anomalen terrestrischen Strahlenbrechung vorliegenden eigenartigen Dichte- und Temperaturverhältnisse der Atmosphäre zu erforschen. Man begnügte sich daher mit besonderen An-

nahmen, die man analytisch formulierte, bestimmte die Lichtstrahlkurven und schloß aus der Form und Lage derselben auf die Art der entstehenden Bilder. Wenn es sich darum handelt, Naturerscheinungen zu erklären, so hat dieses Verfahren jedoch nur sehr bedingten Wert. Wenn man auch zu zeigen vermag, daß sich aus gewissen Voraussetzungen Erscheinungen, die den in der Natur beobachteten einigermaßen entsprechen, herleiten lassen, so ist damit für die Erklärung noch nicht viel gewonnen. Denn die Brücke, welche Theorie und Beobachtung miteinander verbindet, ist erst dann geschlagen, wenn feststeht, daß die theoretischen Voraussetzungen auch für die Naturerscheinungen Gültigkeit besitzen. Betrachtet man die Theorie der Luftspiegelungen von diesem Gesichtspunkte aus, so gerät man in ziemliche Verlegenheit. Es zeigt sich nämlich, daß man sehr verschiedenartige Voraussetzungen formulieren kann, die alle ungefähr zu demselben Ergebnis führen. Solange man nicht imstande ist, sich für eine bestimmte zu entscheiden, können die verschiedenen Erklärungen aber nur als eine interessante Sammlung mathematischer Übungsaufgaben gelten. Auch die vielfach zur Illustration der Naturerscheinungen ausgeführten Versuche, bei denen man durch Übereinanderschichten verschiedener Flüssigkeiten die atmosphärischen Verhältnisse nachzuahmen sucht, haben keinen großen Wert, da es sehr zweifelhaft ist, ob die durch Diffusion der Flüssigkeiten sich herausbildenden Verhältnisse mit den in der Atmosphäre vorliegenden Ähnlichkeit besitzen. Eine wirklich befriedigende Erklärung würde man erst dann gewinnen, wenn es möglich wäre, sich von jeder besonderen, durch einen mathematischen Ausdruck formulierbaren Annahme über die atmosphärischen Dichteverhältnisse frei zu machen und die den Gang der Lichtstrahlen bestimmenden abnormen atmosphärischen Bedingungen in ihrer Allgemeinheit zu erfassen. Wird von einer analytischen Formulierung abgesehen, so bleiben jedoch nur die allgemeinen Begriffe „abnehmende und zunehmende Dichte" übrig, und die auf ihnen sich aufbauende Erklärung nimmt statt des analytischen einen mehr geometrischen, anschaulichen Charakter an. Bei der großen Mehrzahl der Naturerscheinungen mag es wünschenswert sein, die anschauliche, phänomenologische Erklärung durch eine analytische zu ersetzen. In der Theorie der Luftspiegelungen jedoch verdient, da die ununterbrochen wechselnden, labilen Verhältnisse der Atmosphäre sich analytisch doch niemals genau und sicher erfassen lassen, die phänomenologische vor der analytischen zweifellos den Vorzug. Die anschauliche, geometrische Art der Erklärung ist nun zwar schon lange, besonders in populären Lehrbüchern der Physik, üblich gewesen; aber die Darstellung ist meistens eine sehr oberflächliche, nicht selten sogar fehlerhafte. Eine gründliche, erschöpfende Behandlung des Problems scheint bis jetzt nicht vorzuliegen; wir wollen sie im folgenden zu geben versuchen.

Einige sehr wertvolle experimentelle Bestätigungen unserer theoretischen Folgerungen finden sich in zwei Abhandlungen von W. Hillers:

„Photographische Aufnahme einer mehrfachen Luftspiegelung", diese Zeitschrift **14**, 718, 1913.

„Einige experimentelle Beiträge zum Phänomen der dreifachen Luftspiegelung nach Vince", diese Zeitschrift **15**, 304, 1914.

Der Kürze wegen wollen wir diese Abhandlungen mit A und B bezeichnen.

I.

Um eine allgemeine Vorstellung von den bei Luftspiegelungen vorliegenden Verhältnissen zu gewinnen, wählen wir die sogenannte Wüstenspiegelung, bei der bekanntlich unter dem Gegenstande ein umgekehrtes Bild erscheint, als Beispiel. Zunächst muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß in den meisten theoretischen Erörterungen über Luftspiegelungen eine Annahme gemacht wird, die, da sie nur einen besonderen Fall darstellt, der Untersuchung von vornherein den Charakter der Allgemeinheit raubt. Fast stets wird vorausgesetzt, daß der Gegenstand und das Auge des Beobachters sich beide noch innerhalb der Luftschicht befinden, die infolge ihrer Temperatur- und Dichteanomalien den Lichtstrahl von seiner geradlinigen Bahn ablenkt. Außer dieser Möglichkeit gibt es noch drei andere. Auge und Gegenstand können sich ebensowohl außerhalb wie in der betr. Schicht befinden, ferner das Auge in, der Gegenstand außerhalb, und das Auge außerhalb, der Gegenstand in der Schicht. Es genügt, die beiden ersten Fälle zu untersuchen; die beiden letzten, die zwischen den ersten eine mittlere Stellung einnehmen, lassen sich dann leicht beurteilen.

Wir beginnen die Untersuchung mit dem gewöhnlich betrachteten Falle, wo sich Auge und Gegenstand beide innerhalb der lichtbrechenden Schicht befinden, und erinnern zunächst an einige bekannte Definitionen und Folgerungen.

a) Nimmt die Dichte der Luft infolge ihrer starken Erhitzung am Erdboden von unten nach

oben zu, so beschreibt ein sie durcheilender Lichtstrahl eine zur Erdoberfläche konvexe Bahn, die aus zwei symmetrischen Ästen besteht. Ihr tiefster Punkt wird ihr Scheitel genannt. Bestimmt man die Scheitel aller durch einen bestimmten Objektpunkt gehenden Lichtstrahlkurven, so erhält man die diesem Punkte zukommende Scheitelkurve. Aus der Gestalt dieser Kurven lassen sich in Beziehung auf Zahl und Art der entstehenden Bilder wichtige Schlüsse ziehen. Zeichnet man die beiden zu dem Auge des Beobachters und zu einem bestimmten Objektpunkte gehörenden Scheitelkurven, so erkennt man leicht, daß, da die den Schnittpunkten der Scheitelkurven entsprechenden Lichtstrahlen sowohl das Auge wie den Objektpunkt treffen, soviele Bildpunkte entstehen, wie die Kurven Schnittpunkte aufweisen.

Die Gleichungen der Lichtstrahl- und der Scheitelkurven ergeben sich leicht auf folgende Weise. Durch den Objektpunkt und das Auge werde eine Ebene senkrecht zur Erdoberfläche gelegt. Ihre Schnittlinie mit der als eben vorausgesetzten Erdoberfläche sei die x-Achse; das Auge befinde sich in der y-Achse in der Entfernung b vom Nullpunkte. Eine das Auge treffende Lichtstrahlkurve schneide die y-Achse unter dem Winkel α_0; die in einem beliebigen Kurvenpunkte gezogene Tangente bilde mit der y-Achse den Winkel α. Dann besteht nach dem Brechungsgesetze die Gleichung

$$n \sin \alpha = n_0 \sin \alpha_0.$$

Der Brechungsexponent n ist von der im Punkte (xy) herrschenden Dichte abhängig. Diese ist durch die Entfernung des Punktes von der x-Achse bestimmt. n ist also eine Funktion von y, $n = f(y)$. Da $\sin \alpha = dx : ds$ ist, so erhält man als Gleichung der Lichtstrahlkurve

$$x = \int_y^b \frac{n_0 \sin \alpha_0 \, dy}{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \alpha_0}}.$$

Bedeutet n_s den Wert von n im Scheitelpunkte, so besteht nach dem Brechungsgesetze die Gleichung $n_s = n_0 \sin \alpha_0$. Bezeichnet man die Koordinaten des Scheitelpunktes mit ξ und η, so ist folglich

$$\xi = \int_\eta^b \frac{n_s \, dy}{\sqrt{n^2 - n_s^2}},$$

wo $n_s = f(\eta)$ zu setzen ist, da der veränderliche Parameter α_0 nicht mehr vorkommt, die Gleichung der Scheitelkurve des Punktes b.

Der Fall, wo die mit wachsendem y eintretende Vergrößerung des Brechungsexponenten diesem selbst proportional erfolgt, soll, weil er ein bequemes Einteilungsprinzip liefert, besonders betrachtet werden. In diesem Falle ist $n = e^{\lambda y}$, wo λ eine positive Konstante bedeutet. Für die Lichtstrahlkurve findet man die Gleichung

$$\lambda(b - y) = \log \frac{\sin(\lambda x + \alpha_0)}{\sin \alpha_0},$$

für die Scheitelkurve

$$\lambda(\eta - b) = \log \cos \lambda \xi.$$

Die Lichtstrahlkurve hat zwei auf der x-Achse senkrechte Asymptoten in den Entfernungen $(\pi - \alpha_0) : \lambda$ und $-\alpha_0 : \lambda$ von der y-Achse; ihr Abstand beträgt also $\pi : \lambda$. Sämtliche Kurven sind einander kongruent. Eigenartig ist, daß auch die Scheitelkurve den Lichtstrahlkurven kongruent ist; nur hat sie die umgekehrte Lage. Sie kehrt nach der x-Achse ihre konkave Seite und erreicht ihren größten Abstand b von der x-Achse im Punkte $\xi = 0$. Hieraus folgt allgemein, daß, wenn die Dichtezunahme langsamer erfolgt, als nach dem Exponentialgesetze, die Scheitelkurven sich immer weiter von ihrer Ursprungsordinate entfernen, daß aber, wenn sie schneller vor sich geht als nach dem angegebenen Gesetze, die Scheitelkurven, bei genügender Dicke der lichtbrechenden Schicht, sich nach ihrer Ursprungsordinate zurückkrümmen.

Die Fig. 1 und 2 beziehen sich auf den ersten Fall, wo die Scheitelkurven sich von ihrer Ursprungsordinate immer mehr entfernen.

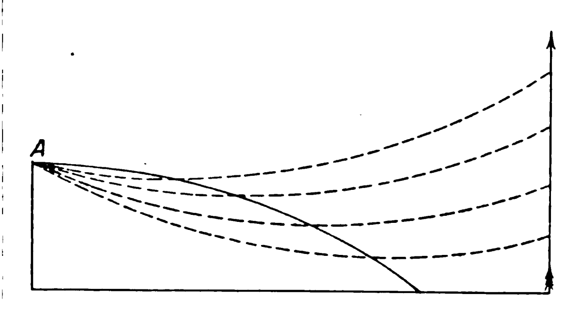


Fig. 1.

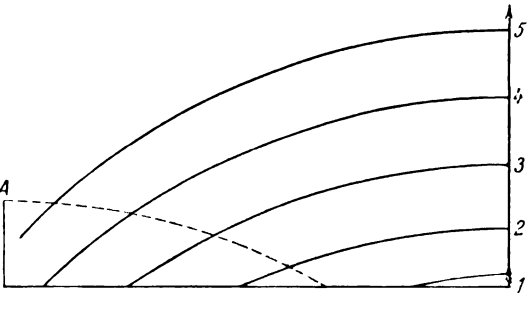


Fig. 2.

In Fig. 1 bezeichnen die punktierten Linien verschiedene von den Punkten 1, 2, 3 ... des Gegenstandes (Pfeil) ausgehende, im Auge A sich schneidende Lichtstrahlkurven; die von A ausgehende ausgezogene Linie ist die Scheitelkurve derselben. In Fig. 2 sind die zu den Punkten 1, 2, 3 ... des Gegenstandes gehörenden Scheitelkurven und die Scheitelkurve des Auges gezeichnet. Da die Scheitelkurve des Auges jede der Scheitelkurven des Gegenstandes nur in einem Punkte schneidet, so gelangt von jedem Punkte des Gegenstandes nur ein Strahl ins Auge des Beobachters. Man erblickt daher nur ein Bild, und zwar, wie aus den Fig. 1 und 2 ohne weiteres ersichtlich ist, ein aufrechtes, aber nach unten verschobenes Bild. Der Gegenstand erscheint tiefer, als er in Wirklichkeit liegt. Da man bei der Wüstenspiegelung zwei Bilder beobachtet, ein aufrechtes und ein umgekehrtes (meistens als Gegenstand und Spiegelbild bezeichnet), so findet der beschriebene Fall bei der Wüstenspiegelung keine Anwendung. Läßt man jedoch die Dichte der Luftschichten in der Richtung der positiven y-Achse nicht zu-, sondern abnehmen, so liegt er bei der **Fata Morgana** und der **Kimmung** vor, die bekanntlich darin bestehen, daß ein unter dem Horizonte befindlicher Gegenstand in seiner wirklichen Stellung über demselben emporgehoben erscheint.

Da bei der Wüstenspiegelung zwei Bilder erscheinen, so müssen die Scheitelkurven des Gegenstandes und des Auges so beschaffen sein, daß sie einander in zwei Punkten schneiden können. Dies ist der Fall, wenn sie sich der Ordinate, von welcher sie ausgehen, in ihrem weiteren Verlaufe wieder nähern, wenn sie also eine auf der x-Achse senkrecht stehende Tangente besitzen, die nicht Asymptote der Kurve ist. Dieser Fall ist in Fig. 3 dargestellt[1]). Den Schnittpunkten 5, 4, 3 entspricht ein nach unten verschobenes aufrechtes Bild, den Schnittpunkten 5', 4', 3' ein unter dem aufrechten liegendes umgekehrtes Bild.

Tritt ein mehrfacher Wechsel des Gesetzes, nach welchem die Dichtezunahme in der lichtbrechenden Schicht erfolgt, ein, so nehmen die Scheitelkurven noch andere Formen an. Sie können ihre Richtung von neuem umkehren, also zwei auf der x-Achse senkrechte Tangenten

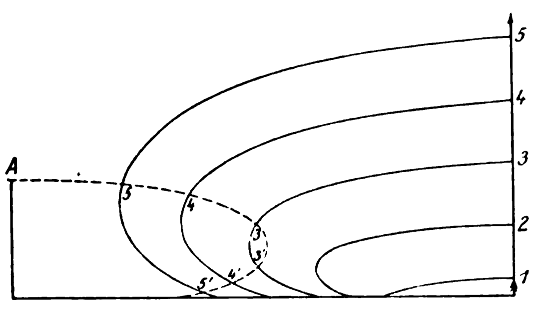


Fig. 3.

besitzen. In diesem Falle würde die vom Auge ausgehende Scheitelkurve die der Objektpunkte in drei Punkten schneiden können (Fig. 4), was zur Entstehung dreier Bilder Anlaß gäbe, zweier aufrechter (Schnittpunkte 4, 3, 2 und 4'', 3'', 2'') und eines zwischen ihnen liegenden umgekehrten (Schnittpunkte 4', 3', 2') usw.

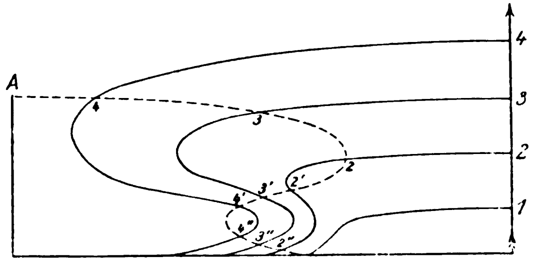


Fig. 4.

b) Wir wollen nunmehr genauer den Anblick bestimmen, den der Beobachter in den drei angegebenen Fällen haben wird. Im ersten Falle (Fig. 2) gelangen von allen Punkten des Gegenstandes, die zwischen 2 und 5 liegen, Lichtstrahlen in sein Auge, aber nicht von dem Punkte 1. Der Fuß des Gegenstandes bleibt ihm also verborgen. Entfernt er sich vom Gegenstande, so rücken die Schnittpunkte der Scheitelkurven nach links und nach unten. Das Bild rückt also tiefer; außerdem werden immer mehr Teile des Gegenstandes unsichtbar, und endlich bleibt nur noch der höchste Punkt desselben sichtbar. Das Umgekehrte tritt ein, wenn sich der Beobachter dem Gegenstande nähert; die unteren Teile des Gegenstandes werden mehr und mehr sichtbar. Ähnliche Folgerungen ergeben sich, wenn sich der Beobachter in senkrechter Richtung bewegt. Steigt er nach oben, so nimmt er allmählich auch den unteren Teil des Gegenstandes wahr; bewegt er sich nach unten, so erblickt er nur noch den oberen Teil. Im zweiten Falle (Fig. 3) sieht der Beobachter die zwischen 3 und 5 liegenden Teile des

1) Beim Zeichnen der Scheitelkurven verschiedener in derselben Ordinate liegender Objektpunkte ist zu beachten, daß sie, wie eigenartig ihr Verlauf auch sein mag, **keine Schnittpunkte** besitzen. Da in jedem Punkte einer Scheitelkurve der Lichtstrahl wagerecht verläuft, so müßte er nämlich, wenn zwei Scheitelkurven einen Punkt gemeinsam hätten, bei gleichen physikalischen Bedingungen zwei verschiedene Wege einschlagen können, was ausgeschlossen ist.

Gegenstandes aufrecht und umgekehrt. Beide Bilder stoßen unmittelbar zusammen; der untere Teil des Gegenstandes bleibt unsichtbar[1]) (Punkte 1 und 2). Nähert sich der Beobachter dem Gegenstande, so werden immer mehr Teile desselben sichtbar; beide Bilder wachsen von ihrer gemeinsamen Trennungslinie auseinander. Sobald aber die gestrichelten Schnittpunkte unter die x-Achse zu rücken beginnen, wird von dem umgekehrten Bilde der am weitesten nach unten liegende Teil wieder unsichtbar, bis es endlich ganz verschwindet. Bei Entfernung des Beobachters vom Gegenstande wird der aufrechte und der umgekehrte sichtbare Teil desselben immer kleiner; zuletzt verschwindet, gleichzeitig für beide Bilder, die Spitze. Die bei senkrechter Bewegung des Beobachters entstehenden Änderungen der Bilder lassen sich in ähnlicher Weise leicht aus der Figur ablesen; auf ihre Beschreibung wollen wir daher verzichten. Auch die komplizierteren Verhältnisse des 3. Falles sollen nicht weiter erörtert werden, da sie sich aus der Fig. 4 ohne weiteres erschließen lassen. Allen Fällen gemeinsam ist, daß das erste Bild sich nicht mit

1) Von der Richtigkeit dieser Folgerung kann man sich, auch ohne daß auf die Scheitelkurven eingegangen wird, überzeugen. Es mögen einige Worte darüber gesagt werden, besonders weil auf diese Weise Gelegenheit geboten ist, auf die Unrichtigkeit einer fast in allen populären Lehrbüchern der Physik zur Veranschaulichung dienenden Figur (siehe Fig. 5) aufmerksam zu machen.

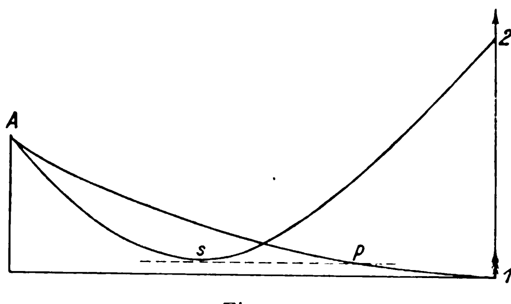


Fig. 5.

Der vom Fußpunkte 1 des Gegenstandes ausgehende Strahl ist anfangs entweder wagerecht oder er steigt aufwärts. Soll ein umgekehrtes Bild entstehen, so muß der von dem Punkte 2 ausgehende Strahl diese Kurve schneiden. Man ziehe durch den Scheitelpunkt der Kurve 2 die Parallele zur Erdoberfläche; sie schneidet die Kurve 1 im Punkte p. Die Kurve 1 durcheilt von p und die Kurve 2 vom Scheitelpunkte s aus dieselben Luftschichten. Da der Lichtstrahl 1 in p schon aufwärts steigt, während der Strahl 2 in s noch wagerecht ist, und beide nunmehr in denselben Luftschichten ihre Brechung erleiden, so müssen sie immer weiter divergieren; sie können also nicht im Auge des Beobachters zusammentreffen. Kommt aus 2 ein Strahl ins Auge, so kann also kein diesen Strahl kreuzender, von 1 kommender Strahl das Auge treffen; d. h. der untere Teil des Gegenstandes bleibt sowohl im aufrechten wie im umgekehrten Bilde unsichtbar.

dem Gegenstande deckt, sondern, da sämtliche Lichtstrahlkurven nach unten konvex sind, nach unten verschoben ist, daß der gesehene Horizont also unter dem wirklichen liegt. Schneidet die zu dem höchsten Punkte des Gegenstandes gehörende Scheitelkurve die Scheitelkurve des Auges noch zwischen Beobachter und Gegenstand, so liegt sogar das ganze erste Bild noch unter der Augenhöhe.

c) Nun drängt sich die Frage auf: Entsprechen die wirklichen Beobachtungen diesen Folgerungen? Ist es jemals bemerkt worden, daß sich bei der Wüstenspiegelung der Horizont senkte und bei der Seespiegelung hob? Hat man beobachtet, daß bei der Wüstenspiegelung gelegentlich nur die Kronen der Palmen und unmittelbar unter ihnen ihr Spiegelbild erschien? Hat man festgestellt, daß bei der Annäherung an den Gegenstand Bild und Spiegelbild immer weiter auseinanderwuchsen, bei der Entfernung aber sich von der Basis her verkürzten und schließlich ganz verschwanden? Von derartigen Beobachtungen wird nicht berichtet; die Richtigkeit der Voraussetzungen, die zu diesen theoretischen Folgerungen führte, erscheint daher als zweifelhaft. Wir gehen nunmehr zur Besprechung der zweiten Möglichkeit über, daß Auge und Gegenstand sich beide außerhalb der lichtbrechenden Schicht befinden.

II.

a) **Befinden sich das Auge des Beobachters und der Gegenstand außerhalb der lichtbrechenden Luftschicht**, so folgt zunächst, daß der Gegenstand in normaler Weise sichtbar wird, da von ihm aus geradlinige Strahlen in das Auge gelangen können. Um den Charakter der Bilder zu bestimmen, welche durch die in die lichtbrechende Schicht eindringenden Strahlen entstehen, stellen wir die Gleichung der von einem beliebigen außerhalb der Schicht liegenden Punkte P' ausgehenden Strahlen und die Gleichung der zu ihnen gehörenden Scheitelkurve auf. Wir verlegen die x-Achse (Fig. 6) in die untere Grenzebene der Schicht und lassen die y-Achse durch P' hindurchgehen. Die Dicke der Schicht sei b. Ihre obere Grenzfläche schneide die y-Achse im Punkte P und habe von P' den Abstand a. Eine von P ausgehende Lichtstrahlkurve habe den Scheitel s und im Punkte P die Tangente Pt, welche die y-Achse unter dem Winkel α_0 schneide. $P't'$ sei der Tangente Pt parallel. Dann verläuft der Strahl $P't'$ im Innern der Schicht genau wie der Strahl Pt; seine Bahn ist nur um die Strecke $a \operatorname{tg} \alpha_0$ in der Richtung

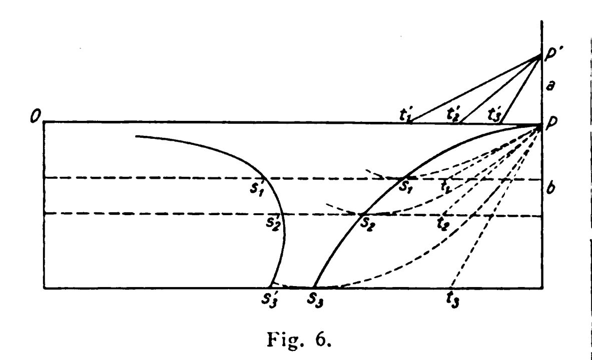


Fig. 6.

der x-Achse verschoben. Die Gleichung der Lichtstrahlkurve von $P't'$ lautet also

$$x = a \operatorname{tg} \alpha_0 + \int_0^h \frac{n_0 \sin \alpha_0 \, dy}{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \alpha_0}}.$$

Beachtet man wieder, daß $n_0 \sin \alpha_0 = n_s$, mithin

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{n_s}{\sqrt{n_0^2 - n_s^2}}$$

ist, so erhält man für die Scheitelkurve die Gleichung

$$\xi = \frac{a\, n_s}{\sqrt{n_0^2 - n_s^2}} + \int_\eta^h \frac{n_s \, dy}{\sqrt{n^2 - n_s^2}},$$

wo $n_s = f(\eta)$ zu setzen ist.

Hat man die Scheitelkurve des Punktes P bestimmt, so läßt sich übrigens die Scheitelkurve eines beliebigen Punktes P' durch bloße Konstruktion finden. Man lege durch die Scheitelpunkte $s_1, s_2, s_3 \ldots$ der von P ausgehenden Lichtstrahlkurven Parallele zur x-Achse und zu ihren Tangenten Pt_1, Pt_2, Pt_3 durch P' ebenfalls Parallele, welche die obere Grenzfläche PO der lichtbrechenden Schicht in den Punkten t'_1, t'_2, t'_3 schneiden. Da die Lichtstrahlkurve des Strahles $P't'_1$ um das Stück Pt'_1 gegen die entsprechende von P ausgehende Kurve verschoben ist, so liegt der zu ihr gehörende Scheitel s'_1 um das Stück Pt'_1 über s_1 hinaus; ähnliches gilt von den übrigen Strahlen. Um die Scheitelkurve des Punktes P' zu finden, braucht man daher nur die Strecken Pt'_1, Pt'_2, Pt'_3 auf den durch s_1, s_2, s_3 gezogenen Parallelen von diesen Punkten aus in der Richtung der positiven x abzutragen. Setzt man das Abtragen der angegebenen Strecken auf den Parallelen fort, so findet man nacheinander die Scheitelkurven von Punkten P'', P''' . . .. die über P' liegen und voneinander sämtlich die gleiche Entfernung a haben.

Die Scheitelkurven aller Punkte, ausgenommen die von P und von den im Innern der lichtbrechenden Schicht ausgehenden, nähern sich asymptotisch der oberen Grenzfläche PO. Dies gilt, einerlei nach welchem Gesetze die Dichtezunahme in der Schicht erfolgt. Der Verlauf der Scheitelkurven in der Nähe der unteren Grenzfläche hängt jedoch von dem analytischen Charakter der Dichtefunktion $n = f(y)$ ab. Wir nehmen an, daß sich die Dichte auch bei großen Temperaturgegensätzen in der Atmosphäre nicht sprunghaft ändert, daß die Dichtefunktion in den Grenzflächen der lichtbrechenden Schicht also stetig ist. In der Umgebung des Wertes $y = 0$ kann n dann in eine nach positiven Potenzen von y fortschreitende Reihe entwickelt werden. Bezeichnet man in ihr den Exponenten der niedrigsten Potenz von y mit ν und entwickelt das in der Gleichung der Scheitelkurve auftretende Integral in eine nach Potenzen von y fortschreitende Reihe[1]), so findet man leicht, daß ξ im Punkte $\eta = 0$ für $\nu > 2$ algebraisch unendlich von der Ordnung $\nu/2 - 1$, für $\nu = 2$ logarithmisch unendlich wird, für $\nu < 2$ aber endlich bleibt, ferner, daß die Ableitung von ξ nach η für $\eta = 0$, außer im Falle $\nu = 1$, unendlich wird. Hieraus folgt, daß die Scheitelkurven für $\nu \geqq 2$ sich der x-Achse asymptotisch nähern, für $\nu < 2$ aber die x-Achse im Endlichen treffen, und zwar berühren, ausgenommen für $\nu = 1$, in welchem Falle die Kurven unter einem bestimmten Winkel auf die x-Achse stoßen. Der Fall $\nu = 1$ bildet die Grenze zwischen den beiden Scharen der Scheitelkurven, deren eine in der Nähe des Berührungspunktes mit der x-Achse nach der y-Achse konkav, die andere konvex ist. Bezeichnet δ die auf Normaldichte bezogene Dichte der Luft im Innern der lichtbrechenden Schicht, so bringt die Gleichung $n = 1 + 0{,}000\,294\,\delta$ die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Dichte zum Ausdruck. Die niedrigste in n und δ auftretende Potenz von y ist also die gleiche. Da hiernach die Ableitung von δ nach y für $y = 0$ im Falle $\nu < 1$ unendlich, im Falle $\nu > 1$ Null wird, so wächst die Dichte in der Nähe der unteren Grenzfläche der Schicht im ersten Falle schnell, im zweiten langsam. In der Nähe der oberen Grenzfläche ist der Verlauf der Dichtekurve an keine Bedingung gebunden[2]). Bezeichnet man die Werte der Dichte in den Grenzflächen mit δ_u und δ_o, so kann die Dichtekurve in ihrer einfachsten Gestalt also die in Fig. 7 darge-

1) Für $\nu = 2 : m$, wo m eine ganze positive Zahl bedeutet, ist die Integration auch in geschlossener Form ausführbar.

2) In den beobachteten Fällen scheint der Übergang der veränderlichen in konstante Dichte ein allmählicher zu sein (vgl. W. Hillers, B).



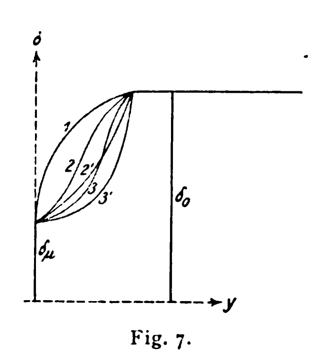


Fig. 7.

stellte Form haben. Die Kurve 1 bezieht sich auf den Fall $\nu < 1$; die Kurven 2 und 2' gelten für $\nu = 1$, die Kurven 3 und 3' für $\nu > 1$.

b) Bei der Diskussion der Bilder sind die Fälle $\nu < 2$ und $\nu < 2$ einzeln zu behandeln. 1. Fall: $\nu < 2$. Die Scheitelkurven berühren die x-Achse in endlicher Entfernung von der y-Achse.

α) $\nu < 1$. In der Nähe des Berührungspunktes sind die Kurven zur y-Achse **konkav**. Den Punkten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ des Gegenstandes entsprechen die Scheitelkurven $k_1, k_2, k_3 \ldots$ (Fig. 8). Das Auge befindet sich in A, in der Entfernung

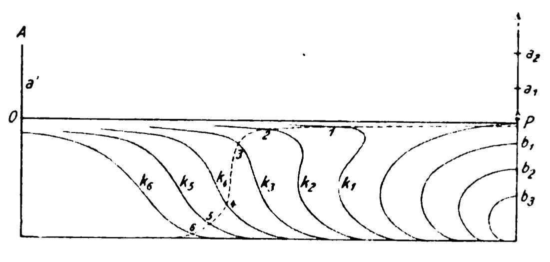


Fig. 8.

a' von der oberen Grenzfläche PO der lichtbrechenden Schicht. Die in der Figur punktiert dargestellte Linie ist die Scheitelkurve des Auges. Sie schneidet mehrere Scheitelkurven des Gegenstandes $k_1, k_2 \ldots k_6$ je einmal. Da in der Richtung der positiven y-Achse die Schnittpunkte rückwärts zählen, so entsteht ein unter dem Gegenstande liegendes umgekehrtes Bild, das die Punkte a_1 bis a_6 des Gegenstandes umfaßt. Nähert sich der Beobachter dem Gegenstande, so schneidet die Scheitelkurve des Auges immer weniger Scheitelkurven des Gegenstandes; das umgekehrte Bild verkürzt sich also, und zwar von der Spitze her. Im Innern der lichtbrechenden Schicht liegende Punkte des Gegenstandes ($b_1, b_2 \ldots$) können nicht wahrgenommen werden, da die zu ihnen gehörenden Scheitelkurven die des Auges nicht schneiden.

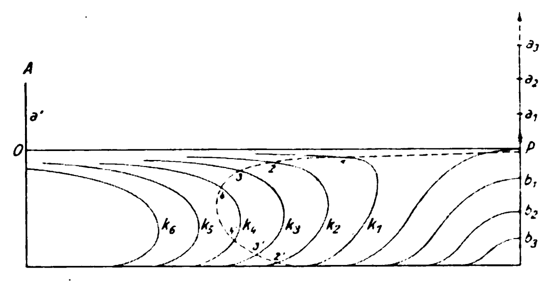


Fig. 9.

β) $1 < \nu < 2$[1]). In der Nähe des Berührungspunktes mit der x-Achse sind die Scheitelkurven des Gegenstandes zur y-Achse **konvex** (Fig. 9). Eine Reihe von ihnen wird von der Scheitelkurve des Auges wenigstens einmal geschnitten (Schnittpunkte 1, 2, 3, 4); es entsteht ähnlich wie bei α) ein umgekehrtes Bild. Es ist jedoch möglich, daß in der Nähe der x-Achse noch eine zweite Gruppe von Schnittpunkten 4', 3', 2' liegt. Da sie in der Richtung der positiven y-Achse in derselben Reihenfolge auftreten wie die Objektpunkte, so führen sie zur Entstehung eines aufrechten Bildes. Dieses Bild schließt sich dem umgekehrten Bilde unmittelbar an und zeigt dieselben oberen Teile des Gegenstandes wie dieses; die unteren Teile aber fehlen, da die Kurve k_1 zum zweiten Male nicht mehr geschnitten wird[2]). Nähert sich der Beobachter dem Gegenstande, so werden allmählich die oberen Teile des Gegenstandes in dem umgekehrten und dem aufrechten Bilde unsichtbar[3]). In dem aufrechten Bilde rücken die sichtbaren Teile aber näher an den Fuß desselben, und schließlich können bei diesem Bilde sogar im Innern der lichtbrechenden Schicht liegende Teile des Gegenstandes wahrgenommen werden (Punkte $b_1, b_2 \ldots$).

2. Fall: $\nu > 2$. Die Scheitelkurven nähern sich asymptotisch der x-Achse (Fig. 10). Die Scheitelkurven des Gegenstandes werden von der des Auges jede in 2 Punkten geschnitten. Der Gruppe der oberen Schnittpunkte entspricht wieder ein umgekehrtes, der Gruppe der unteren Schnittpunkte ein aufrechtes Bild. Das aufrechte Bild ist ebenso vollständig wie das umgekehrte; es läßt sogar noch Teile des Gegenstandes erkennen, die in der lichtbrechenden Schicht liegen. Bei Annäherung des Beobachters an den Gegenstand

1) Der Fall $\nu = 1$ bedarf keiner besonderen Untersuchung, da bei ihm die Verhältnisse ähnlich liegen wie bei α) oder β).

2) Das umgekehrte und das am Fuße unvollständige aufrechte Bild zeigt sehr schön die Photographie einer dreifachen Luftspiegelung von W. Hillers, A, Abbildung 1 und 2.

3) Vgl. W. Hillers, A, Abbildung 4.

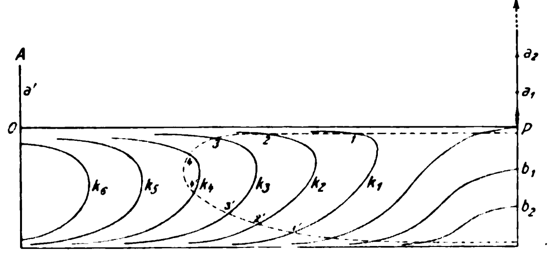


Fig. 10.

verkürzen sich beide Bilder gleichmäßig von der Spitze her. Ungefähr die gleiche Wirkung auf die Bilder wie die Annäherung des Beobachters an den Gegenstand hat in allen drei betrachteten Fällen seine Entfernung von der oberen Grenzfläche der lichtbrechenden Schicht.

Nach allem Gesagten liegt der Scheitel der Strahlen, welche das umgekehrte Bild erzeugen, in Gebieten der lichtbrechenden Schicht, die eine kräftige Dichtezunahme aufweisen, während das aufrechte Bild durch Strahlen erzeugt wird, die in Gebieten mit kleinem Dichtegradienten ihre Umbiegung erfahren. Mit diesen Folgerungen stimmt das experimentelle Ergebnis von Messungen überein, die Hillers ausgeführt hat. Er findet (vgl. B. Schlußabschnitt), daß bei der dreifachen Luftspiegelung 1. ein wenig ausgedehnter Teil geringen Temperaturabfalls in unmittelbarer Nähe der unteren Grenzfläche vorliegt, dem sich 2. ein Gebiet steilen Absturzes anschließt, und daß dann 3. eine asymptotische Annäherung der Temperatur an die Außentemperatur erfolgt.

Je dünner die lichtbrechende Schicht ist, desto kürzer ist der Weg, den die in der Nähe ihrer oberen Grenzfläche umkehrenden Strahlen in derselben zurücklegen, desto mehr nähert sich also auch das umgekehrte Bild einem einfachen Spiegelbilde; es erscheint dann in derselben Größe wie der Gegenstand, nicht verlängert oder verkürzt. Der Scheitelpunkt der das umgekehrte Bild erzeugenden Lichtstrahlen liegt in Gebieten der lichtbrechenden Schicht, die eine kräftige Dichtezunahme aufweisen; diese Strahlen erleiden ihre Hauptkrümmung daher in unmittelbarer Nähe des Scheitelpunktes. Anders bei dem aufrechten Bilde! Soll ein aufrechtes Bild entstehen, so muß in den unteren Teilen der Schicht die Dichte langsam zunehmen. Die in diese Gebiete eindringenden Strahlen erleiden in der Nähe ihres Scheitelpunktes dann nur eine mäßige Krümmung, und die Länge des Gesamtweges, den sie in der lichtbrechenden Schicht zurücklegen, hängt wesentlich von der in ihrer unteren Zone herrschenden Dichteverteilung ab. Durch die Art des Weges der Strahlen in der Schicht wird aber wieder die Richtung ihres Austritts und daher auch die Richtung, in der sie in das Auge eindringen, bestimmt; d. h. das aufrechte Bild ist in Form und Größe dem Gegenstande im allgemeinen weniger ähnlich als das umgekehrte Bild; meistens erscheint es zusammengedrückt[1]).

c) Im allgemeinen haben die Bilder nicht dieselbe Entfernung vom Beobachter wie der Gegenstand. Ihr Ort läßt sich aus den Fig. 8—10 leicht bestimmen. Der Bildpunkt α' eines Objektpunktes α ist die virtuelle Spitze des von diesem Punkte ausgehenden Strahlenkegels, dessen Grundfläche G_A die Augenfläche ist. Die Schnittflächen dieses Strahlenkegels mit der Fläche PO seien G_e (Eintrittsstelle) und G_a (Austrittsstelle). G_e und G_a sind einander ähnliche Ellipsen. Von ihrer Größe und gegenseitigen Entfernung E hängt die Lage des Bildpunktes α' ab, was sich auf folgende Weise zeigen läßt.

Im Innern der lichtbrechenden Schicht zerfällt jede Lichtstrahlkurve durch ihren Scheitel s in zwei kongruente Hälften. Zwei beliebige Strahlen des Strahlenkegels schließen daher nach dem Austritt aus der lichtbrechenden Schicht denselben Winkel miteinander ein wie vor ihrem Eintritt in dieselbe; d. h. der virtuelle Strahlenkegel mit der Grundfläche G_a und der Spitze α' ist dem reellen Strahlenkegel mit der Grundfläche G_e und der Spitze α ähnlich. Ist $G_a = G_e$, so haben also α und α' dieselbe Entfernung von PO. Ist $G_a < G_e$, so liegt der Bildpunkt α' der Ebene PO näher als α, und ist $G_a > G_e$, so tritt das umgekehrte ein. Die Entfernung des Bildpunktes α' vom Beobachter (in der Richtung der x-Achse) hängt in ähnlicher Weise von der Größe der Flächen G_a und G_e ab, außerdem aber auch von ihrer Entfernung E; denn um diese Strecke liegt der Bildpunkt dem Beobachter näher als in dem (z. B. bei der einfachen Spiegelung an der Fläche PO vorliegenden) Grenzfalle, wo Eintritts- und Austrittsstelle des Strahlenkegels zusammenfallen. Im allgemeinen liegen hiernach die Bilder dem Beobachter näher als der Gegenstand; nur im Falle $G_a > G_e$ kann das umgekehrte eintreten.

Nunmehr ist zu entscheiden, von welchen Bedingungen die 3 erwähnten Fälle abhängig sind. Zunächst erkennt man leicht, daß $G_a = G_e$ wird, wenn die Scheitel der in der Ebene der Zeichnung liegenden Lichtstrahlkurven des Strah-

1) Vgl. W. Hillers, B, Abbildungen 5 und 6.

lenkegels sich sämtlich in einer und derselben Ordinate befinden, die Scheitelkurve des Punktes α also an der Stelle, wo sie von der Scheitelkurve des Auges getroffen wird, eine auf der x-Achse senkrecht stehende Tangente besitzt. G_e ist größer als G_a, d. h. die Lichtstrahlkurven verlaufen bei ihrem Eintritt in die lichtbrechende Schicht in größerem Abstande voneinander als bei ihrem Austritte aus derselben, wenn ihre Scheitel sich mit abnehmendem y der y-Achse nähern, und umgekehrt ist G_e kleiner als G_a, d. h. die Lichtstrahlkurven drängen sich an ihrer Eintrittsstelle enger aneinander als an der Austrittsstelle, wenn ihre Scheitel sich mit abnehmendem y von der y-Achse entfernen. Die Fig. 8—10 lassen erkennen, daß das erste für die der Grenze PO benachbarten Teile der Scheitelkurven der Objektpunkte $a_1, a_2, \ldots,$ das zweite für die der x-Achse benachbarten Teile derselben zutrifft. Hieraus folgt, daß das den Schnittpunkten 1, 2, 3, 4 entsprechende umgekehrte Bild dem Beobachter näher liegt als der Gegenstand (vgl. Hillers, B), und daß dasselbe wenigstens auch für den dem umgekehrten Bilde zugekehrten Hauptteil des, den Schnittpunkten 4′, 3′, 2′ entsprechenden aufrechten Bildes gilt. Da nach dem Gesagten die Entfernungen verschiedener Punkte der Bilder vom Beobachter nicht dieselbe ist, so würden diese, wenn man sie von der Seite betrachten könnte, den Gegenstand in verzerrter Form erscheinen lassen.

d) Befolgt die Dichtefunktion f im Innern der lichtbrechenden Schicht nicht das früher angenommene einfache Gesetz (vgl. Fig. 7), wächst sie gelegentlich schneller, gelegentlich langsamer, wechselt also ihre 2. Ableitung von Zeit zu Zeit das Vorzeichen, so hat die Scheitelkurve des Punktes P einen gewundenen Verlauf (vgl. Fig. 4). In diesem Falle werden auch noch die ihr zunächst liegenden Scheitelkurven $k_1, k_2 \ldots$ Aus- und Einbuchtungen aufweisen, und da je nach dem Orte des Auges dasselbe auch bei der Scheitelkurve des Auges zutreffen kann, so ist es möglich, daß mehr als zwei Schnittpunktsgruppen entstehen. Jeder Gruppe entspricht ein Bild, dessen Lage, ob aufrecht oder umgekehrt, aus der Figur sogleich zu erkennen ist. Da aber nur verhältnismäßig wenige Scheitelkurven geschnitten werden, so umfassen die Bilder nur beschränkte Teile des Gegenstandes. Auf diese unvollständigen, vielfachen Bilder scheint man noch nicht aufmerksam geworden zu sein, besonders wohl deswegen, weil sie, wie aus dem Gesagten ohne weiteres ersichtlich ist, nur entstehen können, wenn sich der Beobachter dem Gegenstande und der lichtbrechenden Schicht ziemlich nahe befindet. Bei Laboratoriumsversuchen würden sie vielleicht zu erzielen sein[1]). Vier- und fünffache Luftspiegelungen erklären sich besser durch die Annahme, daß zwei Schichten mit veränderlicher Dichte übereinanderliegen und durch eine Schicht konstanter[2]) Dichte voneinander getrennt sind. Es ist dann möglich, daß Strahlen, welche die erste Schicht durchdringen, die zweite unter so kleinen Winkeln treffen, daß sie in dieser ihre Umkehr erleiden. Außer einem umgekehrten kann auch wieder ein aufrechtes Bild erscheinen. Bei drei übereinanderliegenden Schichten würde die Lichtbrechung ein sechs- oder siebenfaches Bild ergeben können. —

e) Die Annahme dieses Abschnittes, daß Beobachter und Gegenstand sich außerhalb der lichtbrechenden Schicht befinden, hat zu folgenden Hauptergebnissen geführt:

1. Der Gegenstand (das 1. Bild) erscheint, da von ihm aus geradlinige Strahlen ins Auge dringen, in seiner natürlichen Größe und an seinem wirklichen Orte.
2. Die Entstehung des zweiten, umgekehrten Bildes ist von dem Gesetze, das die Dichtezunahme in der lichtbrechenden Schicht bestimmt, ganz unabhängig. An der Spitze kann es unvollständig sein.
3. Das dritte aufrechte Bild entsteht, wenn in der dem Gegenstande abgewandten, unteren Grenzfläche der Schicht die veränderliche Dichte unmerklich in konstante Dichte übergeht, wenn also die erste Ableitung der Dichtefunktion für $y=0$ den Wert Null hat. Aber nur wenn auch die zweite Ableitung für $y=0$ den Wert Null oder einen endlichen Wert annimmt, ist es ebenso vollständig wie das 2. Bild. Ist die zweite Ableitung für $y=0$ unendlich, so fehlt ihm der Fuß. Dasselbe ist der Fall oder das Bild fehlt ganz, wenn die erste Ableitung für $y=0$ einen endlichen oder unendlichen Wert besitzt, die Dichtezunahme in der unteren Grenzfläche also nicht allmählich, sondern plötzlich einsetzt (wobei die Dichte selbst natürlich keinen Sprung erleidet).
4. Mehr als dreifache Luftspiegelungen entstehen, wenn zwei oder mehr lichtbrechende Schichten, durch Schichten konstanter Dichte voneinander getrennt,

1) Spuren eines 4. Bildes sind in der Tat von Hillers beobachtet worden: vgl. B. Abbildung 3b.

2) Der normale Dichteabfall in der Atmosphäre braucht nicht berücksichtigt zu werden.

übereinanderliegen, und in jeder Lichtstrahlen zur Umkehr gezwungen werden.

Diese Ergebnisse stimmen mit den Beobachtungen sehr gut überein. Die zugrunde liegende Annahme dürfte daher das Richtige treffen.

III.

Es ist nicht schwer, die wichtigsten Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte auch ohne Benutzung der Scheitelkurven, durch bloße Betrachtung des Verlaufs der gebrochenen Lichtstrahlen, herzuleiten. Es möge dies in Kürze geschehen, da das ganze Verfahren anschaulicher ist und besonders für populäre Lehrbücher der Optik geeigneter erscheint.

1. Einfache Luftspiegelung. Beobachter und Gegenstand (oder der Beobachter allein) befinden sich im Innern der lichtbrechenden Luftschichten.

Nimmt die Dichte der Schichten vom Erdboden nach oben ab, so sind die sie durchdringenden Strahlen in demselben Sinne gekrümmt, wie die Erdoberfläche (Fig. 11). Der

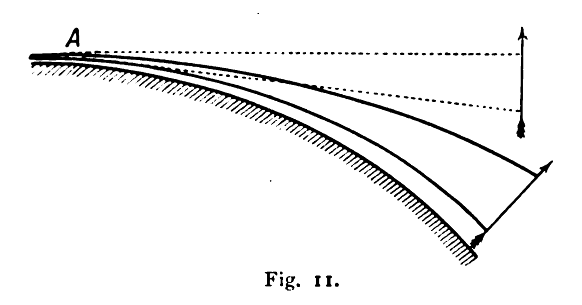


Fig. 11.

Gegenstand erscheint daher in aufrechter Stellung nach oben verschoben (Fata Morgana, Kimmung, Veränderung des astronomischen Ortes der Gestirne am Himmel).

2. Beobachter und Gegenstand befinden sich außerhalb der lichtbrechenden Schicht. Der Gegenstand ist an seinem wirklichen Orte selbst sichtbar.

α) Zweifache Luftspiegelung. Der von einem höher gelegenen Punkte 2 des Gegenstandes ausgehende Strahl muß, weil er steiler einfällt, als der von dem tiefer gelegenen Punkte 1 ausgehende, in der Schicht eine kräftigere Brechung erfahren (Fig. 12). Strahl 2 muß daher in die Schicht etwas tiefer eindringen und in ihr einen etwas längeren Weg zurücklegen als Strahl 1. Es entsteht ein unter dem Gegenstande liegendes umgekehrtes Bild (Wüstenspiegelung, in umgekehrter Lage die Seespiegelung).

Bei einer einfachen Spiegelung an der Linie *PO* würden sich die reflektierten Strahlen in *A'*

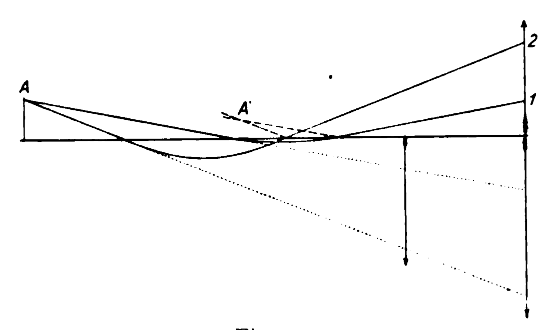


Fig. 12.

schneiden. Da *A* weiter von dem Gegenstande entfernt ist, als *A'*, der Sehwinkel, unter dem das umgekehrte Bild erscheint, in beiden Punkten aber derselbe ist, so scheint es, als ob dieses Bild stets ein vergrößertes sein müßte. Der Weg, den die Strahlen in der lichtbrechenden Schicht zurücklegen, ist jedoch im allgemeinen so kurz (vgl. II b), daß der Größenunterschied nur in wenigen Fällen bemerkbar sein dürfte. Außerdem ist zu beachten, daß das umgekehrte Bild dem Beobachter stets näher liegt als der Gegenstand (vgl. II c). In den Fig. 12 und 13 ist daher das wirklich geschaute Bild nicht das unmittelbar unter dem Objekte, sondern das seitlich davon liegende. Wegen des großen Abstandes des Objekts und des Bildes vom Beobachter wird in den meisten Fällen jedoch, falls nicht ein Fernrohr auf das eine und das andere scharf eingestellt wird, eine Beurteilung der Verschiedenheit der Abstände unmöglich sein[1]).

β) Dreifache Luftspiegelung. Zum Verständnis der dreifachen Luftspiegelung muß eine Überlegung vorausgeschickt werden. As_1 1 und As_2 2 seien zwei vom Auge ausgehende, in der Schicht zur Umkehr gezwungene Strahlen (Fig. 13). Wenn die Dichteabnahme von oben nach unten kräftig genug erfolgt, so liegen die Scheitelpunkte s_1 und s_2 der Strahlen und daher auch ihre Austrittspunkte aus der Schicht a_1 und a_2 dem Beobachter um so näher, je steiler sie einfallen. Wenn aber in den unteren Gebieten der Schicht die Dichteabnahme von oben nach unten langsamer erfolgt als in den oberen, so können von *A* steiler einfallende Strahlen, die bis in diese Tiefen eindringen, hier eine so schwache Brechung erfahren, daß ihr Scheitelpunkt und

1) Etwas anders liegen die Verhältnisse bei dem 2. aufrechten Bilde der dreifachen Luftspiegelung. Da die Strahlen, welche dieses Bild erzeugen, einen längeren Weg im Innern der Schicht durchlaufen, so wird es sich vom Gegenstande mehr oder weniger unterscheiden. Sein Ort im Raume liegt ebenso wie bei dem umgekehrten Bilde im allgemeinen dem Beobachter näher als der Gegenstand (vgl. II c).

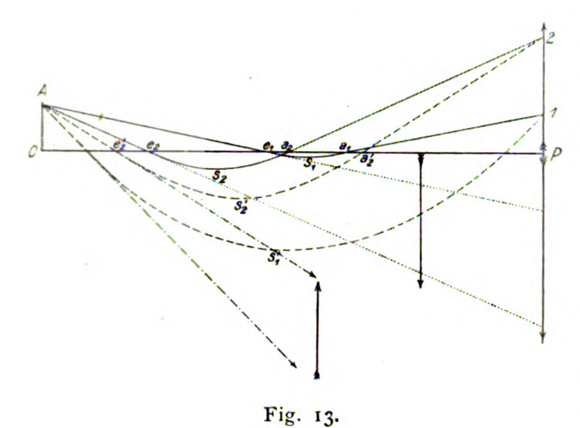


Fig. 13.

damit auch ihr Austrittspunkt aus der Schicht sich wieder von dem Beobachter entfernt. Dann aber folgt, daß von einem Punkte des Gegenstandes zwei verschiedene Strahlen das Auge erreichen können, z. B. von dem Punkte 2 die Strahlen $2\,s_2 A$ und $2\,s'_2 A$. Ein parallel zu $2\,a'_2$ von 1 ausgehender Strahl beschreibt in der Schicht eine der Kurve $a'_2 s'_2 e'_2$ kongruente, nur um das Stück $a'_2 P$ nach rechts verschobene Bahn. Dieser Strahl kann also nicht in das Auge dringen. Ein von 1 ausgehender, noch etwas steiler als $2\,a'_2$ einfallender Strahl aber, der etwas tiefer in die Schicht einzudringen vermag als der Strahl $2\,a'_2$, wird, da seine Krümmung in den unteren Gebieten der Schicht noch flacher ist, als bei $a'_2 s'_2 e'_2$, diese Kurve ganz umschließend, nach dem Austritt aus der Schicht in das Auge gelangen können (Strahl $1\,s'_1 A$). Die ausgezogenen Kurven $1\,s_1 A$ und $2\,s_2 A$ ergeben (wie bei $2\,a$) ein umgekehrtes, die punktierten Kurven $2\,s'_1 A$ und $2\,s'_2 A$ ein aufrechtes Bild. Da, wenn die untere Grenzfläche der Schicht der oberen etwas näher läge, wohl von 1, aber nicht mehr von 2 aus ein punktierter Strahl das Auge erreichen würde, so können dem aufrechten Bilde die unteren Teile fehlen (von W. Hillers beobachtete Spiegelung an einer Mauer, in umgekehrter Lage die dreifache Seespiegelung).

3. Vier- und mehrfache Luftspiegelungen entstehen, wenn mehr als zwei, durch eine Schicht konstanter Dichte getrennte lichtbrechende Schichten übereinanderliegen (fünffache Luftspiegelung nach Parnell).

Bei der Wüstenspiegelung ist die lichtbrechende Schicht wahrscheinlich mit der flimmernden Luftwelle identisch, die sich unmittelbar über dem Boden ausbreitet. Bei der Seespiegelung dürften die Grenzgebiete zweier übereinander lagernder, verschieden temperierter Luftschichten in Frage kommen. Da diese Übergangsschichten eine größere Dicke erreichen können und mit der Dicke die Wahrscheinlichkeit der Entstehung des dritten Bildes wächst, so werden drei- und mehrfache Luftspiegelungen häufiger inmitten der Atmosphäre, als an ihrem Grunde wahrgenommen.

Bremen.

(Eingegangen 14. März 1917.)

Konzentrationselement und Brownsche Bewegung.

Von P. Debye[1]).

Wie beim Konzentrationselement der Spannungsunterschied zwischen Punkten mit verschiedener Elektrolytkonzentration entsteht, ist allbekannt. Beide Ionen des Elektrolyten diffundieren von Stellen mit höherer Konzentration nach Stellen niederer Konzentration, aber wegen ihrer verschiedenen Beweglichkeit ungleich schnell. Dadurch rücken sie räumlich auseinander, erzeugen indessen infolge ihrer hohen elektrischen Ladungen sofort hemmende elektrische Kräfte, welche ein Gleichgewicht herbeiführen. Mit den sich in dieser Weise einstellenden räumlichen Ladungsüberschüssen sind elektrische Kräfte in der Lösung und damit die Spannungsunterschiede zwischen verschiedenen Punkten derselben ohne weiteres verknüpft.

Die quantitative Formel für den Effekt, welche in bekannter Weise die Spannung verknüpft mit dem log. des Konzentrationsverhältnisses der Beobachtungspunkte, ist in zweifacher Hinsicht interessant.

Erreicht man dieselbe auf thermodynamischem Wege, dann muß man sich, wie z. B. H. A. Lorentz hervorhebt[2]), darüber wundern, daß sie die Ionenbeweglichkeiten enthält, d. h. Größen, welche mit Reibungserscheinungen verknüpft sind.

Will man das Spiel der Kräfte, entsprechend der qualitativen Erklärung, übersehen, dann ist man gewöhnt neben den elektrischen Kräften den osmotischen Druck, als wirkliche an den Ionen angreifende Kraft einzuführen und erzeugt die Endformel unter wesentlicher Hinzuziehung der van't Hoffschen Formel für die Abhängigkeit jenes Druckes von Konzentration und Temperatur[3]). Es ist klar, daß dieses Verfahren nicht als eine kinetische Theorie des

1) Die nachfolgenden Bemerkungen erschienen zuerst im Kleiner-Heft der Physikalischen Gesellschaft Zürich: Nr. 18, 1916.

2) H. A. Lorentz, Les théories statistiques en thermodynamique, Teubner, Leipzig 1916, S. 78.

3) W. Nernst, Theoretische Chemie, Enke, Stuttgart, 3. Aufl., S. 359 u. 662.

Spannungseffektes angesehen werden kann und so dürfte es kommen, daß H. A. Lorentz[1]) sogar Zweifel äußern kann an der Möglichkeit einer statistisch-kinetischen Erklärung.

Tatsächlich bedeutet die Einführung des osmotischen Druckes vom Standpunkte einer reinen Molekulartheorie zum mindesten einen Umweg. In Wirklichkeit tritt das Diffusionsbestreben der Ionen als Grundeffekt in erster Linie auf. Es wird also nur nötig sein, dieses Bestreben quantitativ zu fassen. Die Diffusion einerseits und die Brownsche Bewegung andererseits sind nun im Wesen dieselben Effekte; eine direkte Heranziehung der Einsteinschen Theorie jener Bewegung[2]) muß uns also in den Stand setzen, die gewünschte Molekulartheorie zu erreichen.

Der einzige Punkt, in dem man über die gewöhnlichen Formeln der Brownschen Bewegung hinauszugehen hat, ist dort, wo man in einer, übrigens auf der Hand liegenden Weise, die zeitliche Variabilität der betrachteten Zustände mit in Rechnung setzen muß. Dadurch wird dann die angestrebte Theorie der Diffusion und des Konzentrationselementes in unmittelbarer Weise verknüpft mit zwei scheinbar unähnlichen Erscheinungen, nämlich erstens mit der bei vielen Flüssigkeiten beobachteten anormalen Dispersion im Gebiete langer Wellen[3]) und zweitens mit der Frage nach der Relaxationszeit des elektrischen Kerr-Effekts[4]).

§ 1. Die Grundformeln der Brownschen Bewegung[5]).

In einem Zylinder, in dessen Längserstreckung die Koordinate x gemessen wird, sind Teilchen (Moleküle, Ionen) suspendiert, an denen zunächst keine Kräfte angreifen. Zur Zeit $t = 0$ sei die Verteilungsdichte gleich $f(x)$, so daß die Anzahl Teilchen in einem Raumelement vom Querschnitte 1 cm² und der Länge dx gleich $f(x)\,dx$ ist.

Man legt sich nun zuerst die folgende Frage vor:

Wenn an der Stelle x ein Querschnitt von 1 cm² Fläche betrachtet wird, wieviel Teilchen gehen dann, während einer kleinen Zeit τ, durch diesen Querschnitt mehr von links nach rechts (positive x-Richtung) als von rechts nach links?

Die Antwort auf diese Frage, welche man auf Grund von im wesentlichen rein geometrischen Überlegungen bekommt, lautet folgendermaßen:

Jedes Teilchen wird während der Zeit τ eine nach Zufallsgesetzen ihrer Größe und Vorzeichen nach bestimmte Verschiebung ξ in der x-Richtung erfahren. Der Mittelwert aller ξ (durch $\overline{\xi}$ dargestellt) ist 0, dagegen hat $\overline{\xi^2}$ einen endlichen Wert. Die gesuchte Teilchenzahl ist gleich

$$-\frac{\overline{\xi^2}}{2}\frac{\partial f}{d x}, \tag{1}$$

die Strömung findet also nur dann statt, wenn ein Konzentrationsgefälle vorhanden ist. Schon mit diesem Resultat allein ist die Theorie des Konzentrationselementes bis zum Ende durchführbar. Allerdings enthält natürlich die Endformel dann als bestimmende Größe jenes mittlere Quadrat der Verschiebung $\overline{\xi^2}$, und zwar in Form des Verhältnisses $\frac{\overline{\xi^2}}{2\tau}$.

Es kann sich nun nur mehr darum handeln, dieses Verhältnis in anderen, der Messung zugänglicheren, Größen auszudrücken.

Das erreicht Einstein dadurch, daß er bemerkt: Wirkt auf die Teilchen eine aus einem Potential U ableitbare Kraft

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

dann erzeugt diese Kraft für jedes Teilchen in der Zeit τ eine zusätzliche Verschiebung von der Größe

$$\frac{F}{\varrho}\tau,$$

wenn unter ϱ die Reibungskonstante in dem Sinne verstanden wird, daß durch ϱ mal Geschwindigkeit die Reibungskraft dargestellt wird. Ein Gleichgewicht ist nur dann möglich, wenn durch keinen Querschnitt eine Strömung stattfindet, wenn also unter Kombination von (1) und (2):

$$-\frac{\overline{\xi^2}}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{\varrho}\tau f = 0. \tag{3}$$

Nun fordert aber das Boltzmannsche Prinzip, daß die Teilchen nach dem bekannten (der barometrischen Höhenformel ähnlichen) Gesetz

$$f = \text{const}\, e^{-\frac{U}{kT}} \tag{4}$$

verteilt sind, wobei k die Boltzmannsche Konstante und T die absolute Temperatur bedeuten. Die Gleichungen (3) und (4) indessen sind, wie

1) Les théories statistiques en thermodynamique, loc. cit., S. 78.

2) Ann. d. Phys. (4) **19**, 371, 1906.

3) P. Debye, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**, 777, 1913.

4) Tummers, Dissertation Utrecht 1914. An dieser Stelle findet sich auch die Verallgemeinerung meiner ursprünglichen Überlegungen auf die in Wirklichkeit räumlich beweglichen Molekülen.

5) Dieser Paragraph dient nur als Erinnerung an die Einsteinschen Überlegungen, loc. cit.

durch Einsetzen folgt, nur dann miteinander verträglich, wenn

$$\frac{\overline{\xi^2}}{2\tau} = \frac{kT}{\varrho} \tag{5}$$

ist. Damit ist die Aufgabe erfüllt.

Die Einsteinsche Beziehung (5) ist die einzige Anleihe, welche bei der Statistik zur Behandlung unserer Frage gemacht werden muß. Die Art und Weise, wie die Temperatur und die Gaskonstante[1]), z. B. in der Formel des Konzentrationselementes, auftreten (vgl. § 3), fußt also unmittelbar auf dem Maxwell-Boltzmannschen Gesetz (4).

§ 2. Der zeitlich veränderliche Zustand.

Die Gleichungen für die Ionenkonzentrationen.

Betrachten wir vorläufig noch eine Lösung mit nur einer Art von Teilchen, nennen die Verteilungsdichte wieder f und die Kraft auf ein Einzelteilchen F, wobei diese beiden Größen als Funktionen einer Längserstreckung x in der Lösung und der Zeit t angesehen werden. Durch einen Querschnitt von 1 cm² an der Stelle x gehen dann in der kurzen Zeit τ im ganzen

$$G = -\frac{\overline{\xi^2}}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{\varrho}\tau f$$

Teilchen, wie schon Gleichung (3) zeigt, welche ja als linkes Glied die Darstellung dieser Teilchenzahl enthält.

Durch einen Querschnitt von ebenfalls 1 cm², der aber um dx weiter nach rechts liegt, gehen in derselben Zeit τ

$$G + \frac{\partial G}{\partial x}dx$$

Teilchen.

Das zwischen beiden Querschnitten liegende Raumelement erhält also in der Zeit τ einen Zuwachs von

$$-\frac{\partial G}{\partial x}dx = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\overline{\xi^2}}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{\varrho}\tau f\right]dx$$

Teilchen.

Dieser Zuwachs kann aber auch in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}[f\,dx]\cdot\tau$$

geschrieben werden, so daß man zur Bestimmung von f als Funktion von x und t, nach Division mit $\tau\,dx$ die Differentialgleichung erhält:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\overline{\xi^2}}{2\tau}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{\varrho}f\right]. \tag{6}$$

Von Anfang an schon wollen wir für $\frac{\overline{\xi^2}}{2\tau}$ den in (5) angegebenen Wert einsetzen und erhalten dann als Grundgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kT}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{F}{\varrho}f\right] = 0, \tag{6'}$$

welche für jede Teilchenart und für jede Kraft F Gültigkeit haben muß.

Gehen wir jetzt zu einem Elektrolyten über, dessen Molekül in zwei Ionenarten mit den Ladungen $p_1\varepsilon$ und $-p_2\varepsilon$ auseinanderfallen möge. Dabei bedeutet ε die absolute Elektronenladung und p_1 bzw. p_2 die Wertigkeit des betreffenden Ions. Die Zahl der positiven Ionen pro cm³ sei n_1, die der negativen n_2. Die einzige Kraft, welche wir in Betracht ziehen wollen, sei die elektrische, von den Ionenladungen herrührende[1]); auf die Einheitsladung berechnet, habe sie den Wert X.

Für die positiven Ionen erhält man dann die Verteilungsgleichung, indem in (6') für f die Größe n_1 und für F der Wert $p_1\varepsilon X$ substituiert wird. Sie lautet also

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kT}{\varrho_1}\frac{\partial n_1}{\partial x} - \frac{p_1\varepsilon}{\varrho_1}Xn_1\right] = 0, \tag{7}$$

wenn die Reibungskonstante für die positiven Ionen mit ϱ_1 bezeichnet wird.

Ebenso erhält man für die negativen Ionen, wenn man die zugehörigen Größen mit dem Index 2 bezeichnet

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kT}{\varrho_2}\frac{\partial n_2}{\partial x} + \frac{p_2\varepsilon}{\varrho_2}Xn_2\right] = 0. \tag{7'}$$

Die beiden Gleichungen (7) und (7') wären zur Bestimmung der beiden Ionenkonzentrationen ausreichend, wenn man über die elektrische Kraft X frei verfügen könnte. Nach den Grundgesetzen der Elektrostatik aber ist das Gefälle von X in bekannter Weise mit der räumlichen Ladungsdichte durch die Divergenzgleichung verknüpft. Dieselbe hat in unserem Falle die Form

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 4\pi(p_1 n_1 - p_2 n_2)\varepsilon, \tag{7''}$$

da durch

$$(p_1 n_1 - p_2 n_2)\varepsilon$$

1) Da wir es vorziehen, mit molekularen Größen zu rechnen, wird bei uns überall an Stelle der Gaskonstanten die Boltzmannsche Konstante $k = 1{,}35\cdot 10^{-16}$ erg stehen, welche erst durch Multiplikation mit der Avogadroschen Zahl $6{,}15\cdot 10^{23}$ die übliche Gaskonstante $8{,}31\cdot 10^{7}$ erg liefern würde.

1) Elektromotorische Kräfte anderer Herkunft, z. B. durch die Schwere hervorgerufen, bleiben also außer Betracht.



die räumliche Ladungsdichte gemessen wird. Die drei Gleichungen (7), (7'), (7'') reichen aus, um die zwei Ionenkonzentrationen und als dritte Unbekannte die Feldstärke als Funktionen von Zeit und Ort zu bestimmen[1]).

§ 3. Diffusion. Spannung des Konzentrationselements.

Für die allermeisten Zwecke der Elektrolyttheorie ist es unnötig, die für eine strenge Behandlung recht unangenehmen Gleichungen (7), (7'), (7'') ohne Vernachlässigungen beizubehalten. Die räumlichen Ladungsüberschüsse, welche bei den Elektrolyten auftreten, sind nämlich stets äußerst gering, verglichen mit den enormen Absolutwerten, welche in den Lösungen an Ladung vorhanden sind. Dementsprechend empfiehlt sich das folgende Verfahren der sukzessiven Näherung, das im ersten Schritt alles praktisch Wichtige liefert.

Man geht aus von der Annahme, das Gefälle der Feldstärke X sei streng Null und schließt aus (7'') auf die Abwesenheit von Ladungsüberschüssen; in Formel

$$p_1 n_1 = p_2 n_2 . \tag{8}$$

Die durch $p_1 n_1$ bzw. $p_2 n_2$ dargestellte Zahl der positiven bzw. negativen Elementarladungen im cm^3, nennen wir abkürzend z, so daß

$$p_1 n_1 = p_2 n_2 = z. \tag{8'}$$

Zugleich in (7) und (7') kann man nun die beiden Unbekannten n_1 und n_2 durch die eine z ersetzen. Man hat dann noch zwei Gleichungen zur Bestimmung der zwei Größen z und X von der Form

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kT}{\varrho_1}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{p_1 \varepsilon}{\varrho_1} X z\right] = 0 , \tag{9}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kT}{\varrho_2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{p_2 \varepsilon}{\varrho_2} X z\right] = 0 , \tag{9'}$$

in erster Näherung.

Im allgemeinen wird hieraus X sich so ergeben, daß die Annahme

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

nicht erfüllt ist. Eine zweite Näherung würde dann erreicht werden können, indem man nun zum zweiten Male (7'') benutzt, aber jetzt nach Einsetzen des eben erhaltenen Wertes $\frac{\partial X}{\partial x}$ in erster Näherung. Mit der so bekannten Differenz $p_1 n_1 - p_2 n_2$ hätte man dann in (7) und (7') einzugehen, um die drei Variabeln wiederum auf zwei zu reduzieren und neue, bessere Werte für X und die Ionendichten n_1 und n_2 zu finden. Der neue Wert von X wäre dann wieder in (7'') einzusetzen und so hätte man fortzufahren. Wie bemerkt, liefert aber bei den Elektrolyten schon die erste Näherung alles vom wesentlichen Interesse. Richtet man dementsprechend in (9) und (9') zunächst sein Augenmerk auf z allein, dann hat man aus diesen Gleichungen X zu eliminieren und erhält:

a) die Theorie der Diffusion.

Die Elimination erfolgt durch Multiplikation von (9) mit ϱ_1/p_1, von (9') mit ϱ_2/p_2 und nachfolgender Addition. So bekommt man

$$\frac{\partial z}{\partial t} - kT\frac{p_1 + p_2}{p_1 \varrho_2 + p_2 \varrho_1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 , \tag{10}$$

d. h. die bekannte Diffusionsgleichung, in der

$$kT\frac{p_1 + p_2}{p_1 \varrho_2 + p_2 \varrho_1} = D \tag{11}$$

die Diffusionskonstante bedeutet in üblicher Bezeichnung.

Man erkennt z. B. im Falle eines binären Elektrolyten mit $p_1 = p_2 = 1$ das bekannte Nernstsche, durch die Erfahrung bestätigte Resultat, wonach

$$D = kT \Big/ \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} ,$$

so daß die Diffusionskonstante berechnet werden kann aus den mittels elektrischer Versuche festgestellten molekularen Ionenbeweglichkeiten[1]) $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$.

b) Zur Theorie des Konzentrationselements kommt man, indem man nunmehr auf Grund von (10) die Konzentration z als Funktion von Ort und Zeit als gegeben ansieht und aus (9) und (9') die Größe $\frac{\partial z}{\partial t}$ eliminiert. Die Elimination ergibt zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[kT\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{p_2}{\varrho_2}\right)\varepsilon z X\right] = 0, \tag{12}$$

d. h.

$$kT\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{p_2}{\varrho_2}\right)\varepsilon z X = \text{const.} \tag{12'}$$

wobei const. eine räumliche (nicht zeitliche)

1) Hier und im folgenden sind stets völlig in ihre Ionen zerfallene Elektrolyte vorausgesetzt. Eine Berücksichtigung des unvollständigen Zerfalls unter Anwendung des Guldberg-Waageschen Gesetzes wäre indessen ohne Schwierigkeit.

1) W. Nernst, loc. cit. S. 360.

Konstante ist, der eine einfache Bedeutung zukommt.

Nach den Angaben am Anfang des § 2 nämlich stellt, unter Berücksichtigung von (5), der Ausdruck

$$-\frac{kT}{\varrho_1}\frac{\partial n_1}{\partial x}+\frac{\varepsilon p_1}{\varrho_1}n_1 X$$

die pro Zeiteinheit durch den Querschnitt 1 hindurchwandernde Zahl der positiven Ionen dar. Mit Rücksicht auf die Bezeichnung $p_1 n_1 = z$, kann das auch geschrieben werden

$$-\left\{\frac{1}{p_1}\frac{kT}{\varrho_1}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{p_1}{\varrho_1}\varepsilon z X\right\};$$

ebenso findet man für die Zahl der negativen Teilchen, welche pro Zeiteinheit durch den Einheitsquerschnitt hindurchwandern, die Darstellung

$$-\frac{1}{p_2}\left\{\frac{kT}{\varrho_2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{p_2}{\varrho_2}\varepsilon z X\right\}.$$

Für die spezifische Stromstärke J erhält man demnach

$$J=-\varepsilon\left\{kT\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial z}{\partial x}-\left(\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}\right)\varepsilon z X\right\}, \tag{13}$$

da jedes positive Ion die Ladung $p_1\varepsilon$ und jedes negative die Ladung $-p_2\varepsilon$ trägt. Die Gleichung (12) bringt also die bekannte Tatsache der Divergenzlosigkeit des Leitungsstromes zum Ausdruck. Die Konstante des rechten Gliedes hat den Wert $-J/\varepsilon$, so daß man an Stelle von (12′) jetzt auch schreiben kann

$$\left(\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}\right)\varepsilon z X-kT\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{J}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Gibt man dieser Gleichung die Form

$$X-\frac{kT}{\varepsilon}\frac{\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}}{\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}}\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{J}{z\varepsilon^2\left(\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}\right)} \tag{14′}$$

dann kann man sie folgendermaßen interpretieren:

Ist im Elektrolyten die elektrische Kraft X vorhanden, dann wirkt nicht diese Kraft allein stromerzeugend. Vielmehr kommt noch eine durch das Konzentrationsgefälle $\frac{\partial z}{\partial x}$ erzeugte Feldstärke X' vom Betrage

$$X'=-\frac{kT}{\varepsilon}\frac{\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}}{\frac{p_1}{\varrho_2}+\frac{p_2}{\varrho_2}}\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} \tag{15}$$

hinzu. X und X' zusammen erzeugen eine dem Ohmschen Gesetz entsprechende, spezifische Stromstärke J, wobei dem spezifischen Widerstand R des Elektrolyten der Wert

$$R=\frac{1}{z\varepsilon^2\left(\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}\right)} \tag{16}$$

zukommt.

In (16) drückt sich in der bekannten Form das Gesetz der unabhängigen Wanderung der Ionen aus.

In (15) kommt die quantitative Grundlage für die Berechnung der Spannung einer Konzentrationskette zum Ausdruck. In üblicher Form bekommt man die gesuchte Spannungsdifferenz V, zwischen zwei Punkten A und B der Lösung, indem man unter Einführung eines Potentials Φ für X die Größe $-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ substituiert und dann im stromlosen Falle aus (14′) schließt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=-\frac{kT}{\varepsilon}\frac{\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}}{\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}}\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Durch Integration zwischen den Punkten A und B ergibt sich hieraus:

$$V=\Phi_B-\Phi_A=-\frac{kT}{\varepsilon}\frac{\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}}{\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}}\log\frac{Z_B}{Z_A}, \tag{17}$$

was z. B. für $p_1 = p_2 = 1$ mit dem bekannten Resultat in allen Einzelheiten übereinstimmt.

Man wird nicht umhin können, die vorstehenden Überlegungen als eine vollständig kinetische Theorie der in Betracht gezogenen Erscheinungen anzuerkennen. Andererseits wurden gerade im Hinblick auf den vorliegenden Fall Zweifel laut, ob wohl die statistische Theorie das ganze Gebiet der Thermodynamik umfassen könne[1]). Ich bin der Meinung, daß wir einem solchen Zweifel, der, wenn berechtigt, von höchster prinzipieller Bedeutung wäre, keinen Platz zu lassen brauchen. Zur Begründung dieses Standpunktes möge das Obige einen Beitrag liefern.

1) H. A. Lorentz, loc. cit. S. 78.

(Eingegangen 12. März 1917.)



Zur Theorie der freien Elektronen in Metallen.

Von F. v. Hauer.

In einer in den Annalen der Physik[1]) erschienenen Mitteilung habe ich eine Darstellung der Theorie der elektrischen Leitfähigkeit vom Standpunkte der Annahme freier Elektronen in Metallen gegeben, die mir mit der Erfahrung verträglich erscheint.

Ich habe hierbei nach Hinweis auf die zwischen Energieinhalt und elektrischem Widerstand bestehenden Zusammenhänge den Versuch gemacht, den Widerstandssprung beim Schmelzen, also das Verhältnis $\frac{W_{\text{flüssig}}}{W_{\text{fest}}}$ aus dem Temperaturkoeffizienten des Widerstandes, der spezifischen Wärme und der Schmelzwärme zu berechnen. Wenn wir uns den Widerstand W als Funktion des Energieinhalts E dargestellt denken, und T die abs. Temperatur bezeichnen soll, so können wir ja schreiben

$$\frac{dW}{dE} = \frac{dW}{dT}\frac{dT}{dE}.$$

Es sei ferner der Temperaturkoeffizient beim Schmelzpunkt

$a_t = \frac{1}{W_t}\frac{dW}{dT}$ und die spezifische Wärme $c = \frac{dE}{dT}$,

so finden wir durch Integration von $\frac{dW}{dE}$ über den Schmelzvorgang als näherungsweisen Ausdruck

$$\frac{W_{\text{flüssig}}}{W_{\text{fest}}} = 1 + \frac{a_t \varrho}{c}.$$

Daraus ließen sich die folgenden Werte berechnen und mit den von verschiedenen Beobachtern gefundenen vergleichen.

	$1+\frac{\alpha\varrho}{c}$	$\frac{W_{\text{flüssig}}}{W_{\text{fest}}}$
Blei	1,66[2])	1,9; 1,95
Kadmium	1,89[2])	1,8; 1,97; 1,96
Kalium	1,44	1,44; 1,44; 1,69
Natrium	1,36	1,35; 1,37; 1,70
Quecksilber	1,3?	4,04; 4,1; 4,08; 4,9
Zink	1,96	2,0
Zinn	2,18	2,2; 2,12; 2,21; 2,10
Antimon	<1	0,7

Diese Berechnung ist natürlich, worauf schon l. c. hingewiesen wurde, in mancher Hinsicht unsicher und die ziemlich gute Übereinstimmung der dort gegebenen Zahlen zum Teil sicher Zufall; bei der Berechnung der Zahlen wurde nämlich, da α_t beim Schmelzpunkt meist nicht bekannt ist, stattdessen α_0 (bei 0° C) eingesetzt[1]), was nur eine sehr rohe Näherung ist. Ich habe mich bei Blei und Zink, wo die notwendigen Daten zur Verfügung stehen, durch Konstruktion der Kurve für den Widerstand als Funktion der Energie überzeugt, daß in diesen beiden Fällen (und wohl auch sonst bei hoher Schmelztemperatur) die Übereinstimmung so schlecht ist, daß sie höchstens qualitativ genannt werden kann, und zwar auf einen Zusammenhang zwischen Widerstand und Energieinhalt hinweist, aber nicht so gedeutet werden darf, daß es eine Beziehung $W = f(E)$ gäbe, die ohne weiteres über den Schmelzpunkt hinaus gültig bliebe. Es ist dies in meiner weiteren Darstellung auch nicht geschehen, sondern ich habe unter Zugrundelegung des von Herzfeld begründeten Ausdruckes $E = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{Kt}} - 1}$ für die Energie des freien Elektrons und der Annahme eines thermodynamischen Gleichgewichts in einer Phase die Elektronenkonzentration in ihrer Temperaturabhängigkeit berechnet. In ähnlicher Form ließ sich die Abhängigkeit aus der Thomsonschen Formel für die Thomsonwärme geben. Die Gegenüberstellung beider Ausdrücke ermöglichte die Vernachlässigung eines noch unbekannten Faktors und infolgedessen die zahlenmäßige Berechnung der Elektronenkonzentration aus dem Richardsoneffekt, für den auf diesem Wege eine mit der Erfahrung gut stimmende Formel gegeben werden konnte. In Verbindung mit Wiens Formel für die freie Weglänge der Elektronen war diese Darstellung dann in Übereinstimmung mit dem Temperaturverlauf des elektrischen Widerstandes, und des Verhältnisses der elektrischen zur Wärmeleitfähigkeit, dem Richardson- und Thomsoneffekt und, da die Zahl der freien Elektronen klein gegen die der Atome gefunden wurde und ihre Energie nach Herzfelds Formel mit der Temperatur stark abnimmt, mit den Angaben über die spezifische Wärme.

Seitdem habe ich die hierbei erwähnten Versuche zur Bestimmung der Elektronenkonzentration weitergeführt, leider jedoch ohne zu einem positiven Erfolge zu gelangen, weshalb ich sie nur ganz kurz erwähnen möchte. Es handelte sich darum eine vermehrte Leitfähigkeit, durch eine Influenzladung hervorgerufen, fest-

1) Ann. d. Phys. **51**, 189, 1916.
2) Vgl. Anm. 3.

1) Bei Pb und Cd ist l. c. statt α_0 gesetzt $\alpha + \beta t + \gamma t^2$ (t = Schmelztemperatur), was den Fehler aber nicht kleiner, sondern größer macht.

zustellen, wie dies schon Bose mit dünnen Metallplatten versucht hatte. Ich erwartete mit dünnen Wollastondrähten zum Ziele zu kommen, die kaum starke Runzeln und Spitzen haben können, in denen sich die Influenzladung zusammendrängt (wie dies bei den dünnen Platten von Bose eingewendet wurde), weil sie sonst wohl schon bei der Erzeugung reißen würden. Solche an beiden Enden an Kupferdrähte angelötete Wollastondrähte wurden nun in einen Zylinderkondensator gebracht und in eine Wheatstonsche Brückenanordnung zur Messung ihres Widerstandes eingeschaltet. Das Aufladen des Zylinders zur Erzeugung einer Influenzladung bewirkte jedoch stets starke Dehnungen des Drahtes, die eine starke und recht unregelmäßige Änderung des Widerstandes zur Folge hatten. Belastung des Drahtes half dagegen nichts; nach Aufkleben auf eine isolierende Unterlage verschwinden zwar diese Störungen, aber dann kriecht anscheinend die Influenzladung sofort in das Dielektrikum hinein, wo sich die Elektronen anlagern; denn es konnte der gesuchte Effekt nicht gefunden werden. Schließlich besteht auch noch die Möglichkeit, daß sich die die Influenzladung bildenden Elektronen schon zum größten Teil an die Metallatome anlagern und dann die Leitfähigkeit nicht wesentlich beeinflussen können. Jedenfalls glaube ich, daß das Nichteintreffen des Effektes nicht als gegen die Annahme freier Elektronen im Metall sprechend aufgefaßt werden darf.

Tatsächlich ist ja dieser doch gewiß so fruchtbare Gedanke, daß sich im Metall freie Elektronen bewegen, wegen gewisser Schwierigkeiten in letzter Zeit von manchen verworfen worden. Da er der oben skizzierten Darstellung ebenfalls zugrunde liegt, möchte ich in diesem Zusammenhange auf einige kürzlich dagegen erhobene Einwände entgegnen. Gelegentlich der Aufstellung von Grundlagen für eine Kontakttheorie (phoretische Theorie) der elektrischen Leitung[1]), die davon ausgeht, die Elektrizitätsleitung im Metall sei durch Übertragung der Elektronen von einem Atom auf das andere bei Zusammenstößen hervorgerufen, hat Herr Benedicks die folgenden Einwände angeführt.

„Von jeder Theorie der Leitung der Metalle muß gefordert werden, daß sie im allgemeinen eine verbesserte Leitung ergibt, wenn die Atomabstände abnehmen."

Die Atomabstände können durch Druck und Zug geändert werden, außerdem sind sie bei verschiedenen Metallen von vornherein verschieden, wie sich aus den Werten für das Atomvolum bzw. Kovolum ergibt. Die beobachteten Widerstandsänderungen sind dabei im allgemeinen so, daß sie obigen Satz zu rechtfertigen scheinen. Da nun kleinere Atomabstände eine kürzere freie Weglänge bedingen, so kann man hierin einen Widerspruch mit der Theorie der freien Elektronen erblicken, die ja die Leitfähigkeit proportional der freien Weglänge setzt. Aber demgegenüber muß immer wieder betont werden, daß durch Druck und Zug nicht nur die freie Weglänge geändert wird; sehr wahrscheinlich ändert sich hierbei auch die Zahl der freien Elektronen. Die Theorie der freien Elektronen sagt aber hierüber gar nichts aus, ebensowenig, wie über die absolute Größe des Widerstandes, so daß sogar das Vorzeichen der zu erwartenden Änderungen unbestimmt ist. Außerdem muß daran erinnert werden, daß diese und ähnliche Widerstandsänderungen (wie nach Biegen, Tordieren, Erwärmen) vielleicht gar nicht von diesem Standpunkt aus erklärt werden können, sondern auf gröbere Strukturänderungen zurückzuführen sind. Diese Widerstandsänderungen sind ja auch nicht alle wieder rückgängig zu machen. (Nicht veröffentlichte) Beobachtungen an gedehnten Haardrähten aus Platin haben mir gezeigt, daß die dabei auftretenden Widerstandsänderungen recht unregelmäßig sind und sicherlich solchen Strukturänderungen und nicht nur Änderungen der freien Weglänge und der Zahl der freien Elektronen zuzuschreiben sind.

Eine Schwierigkeit für die Theorie der freien Elektronen bedeutet allerdings die (ebenfalls als solche angeführte) sogenannte Überleitfähigkeit, d. h. das von Kamerling Onnes gefundene Nullwerden des elektrischen Widerstandes beim absoluten Nullpunkt. Ohne eine Zusatzhypothese kann man hier kaum auskommen. Die freien Elektronen scheinen beim Aufhören jeder thermischen Bewegung nicht „festzufrieren", sondern ihre Anzahl sich einem von Null verschiedenen Grenzwerte zu nähern. Man könnte vielleicht annehmen, daß das freie Elektron einer gewissen Minimalgeschwindigkeit bedarf, um sich in den Atomverband eingliedern zu können.

Als weiteren Einwand führt Herr Benedicks die Joulesche Wärme an, von der er sagt, daß sie durch die Theorie der freien Elektronen nicht erklärt werden könne, bzw. daß nicht erklärt werden könne, wie die den Elektronen mitgeteilte kinetische Energie gänzlich zu den Atomen übergehe.

Es läßt sich freilich leicht annehmen, daß jedes Elektron beim Zusammenstoß ohne weiteres gerade den durch die elektrische Arbeit hervor-

1) C. Benedicks, Beiträge zur Kenntnis der Elektrizitätsleitung in Metallen und Legierungen. Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 13, 351, 1916.

gerufenen Energieüberschuß abgibt; dagegen erscheint es sehr wohl möglich, daß dieser Energieüberschuß bei allen zusammen abgegeben wird, d. h., daß der elektrische Strom das Dissoziationsgleichgewicht der Elektronen nicht ändert. Ferner bleibt das freie Elektron nur sehr kurze Zeit frei und legt hierbei auch nur eine kurze Wegstrecke zurück, dann lagert es sich wieder an und setzt spätestens hierbei seinen Energieinhalt ins Gleichgewicht mit der thermischen Energie. Vielleicht könnte man sogar so weit gehen, als die freie Weglänge des Elektrons den Weg anzusehen, den es vom Atomverbande losgetrennt, d. h. im Zustande frei, zurücklegt. Verbinden wir hiermit die oben für den Eintritt eines Elektrons in den Atomverband gemachte Annahme, wonach bei sehr tiefen Temperaturen das Dissoziationsgleichgewicht kein bewegliches Gleichgewicht ist, so würden sich daraus beim absoluten Nullpunkt freie Weglänge und damit elektrische Leitfähigkeit unendlich groß ergeben.

Wenn also zusammenfassend Herr Benedicks die gaskinetische Elektronentheorie für unhaltbar erklärt, so glaube ich dem widersprechen zu dürfen.

Freiburg i. Üchtland, März 1917.

(Eingegangen 3. März 1917.)

BESPRECHUNGEN.

R. H. Weber und R. Gans, Repertorium der Physik. Erster Band: Mechanik und Wärme, zweiter Teil[1]): Kapillarität, Wärme, Wärmeleitung, kinetische Gastheorie und statistische Mechanik. Bearbeitet von R. H. Weber und P. Hertz. XIV u. 613 Seiten mit 72 Figuren im Text. Leipzig und Berlin. B. G. Teubner. 1916. Geh. M. 11.—, in Leinwand geb. M. 12.—

Es ist erfreulich, daß dieser zweite Teil des ersten Bandes trotz des Krieges erschienen ist; er ist von den Herren Weber und Hertz allein fertiggestellt worden, da der Druckbogenaustausch mit Herrn Gans in La Plata unmöglich wurde. — Daß gerade diese Art einer zusammenfassenden Darstellung der theoretischen Physik in Klarheit und Gründlichkeit ohne Verteilung des Stoffes an allzuviele Autoren ihre ganz besondern Vorzüge hat, merkt man schon bei einem Durchblättern des Buches.

Von Weber stammen „Kapillarität", „Wärme", „Wärmeleitung", „kinetische Gastheorie", während die „statistische Mechanik" von Hertz bearbeitet ist.

Nächst einer Behandlung der kapillaren Erscheinungen bringt Kapitel IV ein dem Fernerstehenden willkommenes Referat der molekularen und thermodynamischen Theorien der Kapillarität. In dem Abschnitt über Wärme berührt sodann angenehm die Sorgfalt, mit welcher Definitionen und physikalische Gedankengänge gegeben werden. Die neueren Arbeiten werden berücksichtigt, hier z. B. beim Ausdehnungskoeffizienten die Beziehungen von Grüneisen, bei der spezifischen Wärme die Formeln von Thiessen, Einstein, Nernst, Lindemann usw. Sorgfältig ist auch die Zusammenstellung über die Zustandsgleichung und was dazu gehört, man kann sich danach rasch orientieren. Im allgemeinen ist die Darstellung nicht breit, aber leicht faßlich.

Die der eigentlichen Thermodynamik gewidmeten 50 Seiten werden manchem Physiker besonders gefallen — ich verweise hier nur auf den Artikel 107 über umkehrbare und reversible Prozesse. Ebenso ist der Abriß über den zweiten Hauptsatz sehr geschickt gemacht. Der Nernstsche dritte Hauptsatz samt Folgerungen hat selbstverständlich auch die gebührende Aufnahme gefunden. Kapitel IV—VII sind den „Aggregatzuständen", der „Phasentheorie" (Gibbs), den „chemischen Reaktionen" und den „Gemischen nach van der Waals" gewidmet. Bei der Wärmeleitung wird bei Erörterung der Grundlagen übrigens auch Tensorendarstellung benutzt (R. H. Weber, Göttinger Nachrichten 1909), im allgemeinen aber ist von vektorieller Schreibweise weniger Gebrauch gemacht als mancher Leser wünschen wird. — Nächst der Behandlung ein- bis dreidimensionaler Wärmeleitungsprobleme ist auch die Theorie der Meßmethoden vertreten. Bei den „empirischen Gesetzen" findet man die Wiedemann-Franz-Beziehung nebst Diskussion.

Die kinetische Gastheorie bringt zunächst die „elementare Theorie idealer Gase", dann die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Zahl der Lehrbücher über kinetische Gastheorie ist bekanntlich nicht allzu groß — hier liegt eine recht willkommene Ergänzung vor. Manches, z. B. die „Zahlenwerte", würde man gern noch ausführlicher gegeben sehen. Der Beziehung in anderen Gebieten trägt die Darstellung Rechnung. — Charakteristisch — für das Werk überhaupt — ist die Übersichtlichkeit der Zusammenstellungen und die didaktische Sicherheit, mit welcher schwierige Angelegenheiten (siehe Verteilungsgesetzbeweis von Boltzmann!) ihre Erledigung finden.

Auf die „statistische Mechanik" von P. Hertz, welche die letzten 164 Seiten dieses Buches füllt, sei ganz besonders aufmerksam gemacht. Das ist eine hervorragende Arbeit, die jedem Physiker, der sich mit diesem Stoffe bekannt zu machen wünscht, hochwillkommen sein muß. Für den Fernerstehenden ist es nicht leicht, die zum Teil doch recht verschiedenen, und doch analogen Gedankengänge der grundlegenden Arbeiten zu überblicken. Das vorliegende Werk erleichtert das Studium durch seine klare, die springenden Punkte sauber und übersichtlich referierende Art. Der „Zweck" des Abschnittes, wenn man so sagen soll, ist die Entwicklung der thermodynamischen Erscheinungen aus den Grundsätzen der Mechanik.

Nach wertvollen vorbereitenden Betrachtungen über Grundbegriffe und grundlegende Sätze der Me-

1) Besprechung des ersten Teiles: diese Zeitschr. **17**, 365, 1916.

chanik wird in den 3 Abschnitten „Theorie der Zeit-, Raum- und virtuellen Gesamtheit" die „allgemeine statistische Theorie der mechanischen Vorgänge" behandelt. — Im einzelnen näher darauf einzugehen dürfte sich erübrigen. Der Artikel ist mit viel Literaturnachweisen und spezielleren erläuternden Anmerkungen versehen und ist trotz seines geschlossenen Lehrbuchcharakters in gewissem Sinne als „Originalarbeit" des auf diesem Gebiete bestens bekannten Autors zu würdigen. —

Dieser ganze erste Band stellt jedenfalls eine sehr erfreuliche Neuerscheinung dar, und es ist nur zu wünschen, daß trotz des Krieges auch der zweite Band bald erscheint. H. Hörig.

Timerding, H. E., Die Analyse des Zufalls. (Die Wissenschaft. Bd. 56.) gr. 8. VIII u. 167 S. Mit 10 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1915. Geh. M. 5.—, geb. M. 5.80.

Dieses eigenartige, in seiner Art jedenfalls vorzügliche Werk erscheint durchaus berufen, dem Physiker, der sich die Grundlagen der statistischen Methoden, welchen er ja in immer noch steigendem Maße sein Interesse zu schenken veranlaßt wird, aneignen will, Anregung zum Nachdenken zu bieten und ein Hilfsmittel zur tieferen Einarbeitung zu sein. Was in dem ersten Kapitel „Der Begriff des Zufalls" besprochen wird, dient durchaus zur Klärung der physikalischen Auffassungsweise des in Rede stehenden Begriffes und beleuchtet treffend die philologisch-philosophischen Betrachtungen, die mit Vorliebe an die Begriffe „Zufall" und „Wahrscheinlichkeit" geknüpft worden sind. Im zweiten Kapitel wird die Rolle des Zufalls in der Statistik erörtert, also schlechterdings der Schritt vom „naiven menschlichen Gefühl" zur zahlenmäßigen Behandlung der Tatsachen vollzogen und die Analyse statistischer Tabellen nach bestimmten Gesichtspunkten als die weitere Aufgabe der Darstellung gekennzeichnet. Dabei wird insbesondere am Schlusse auf die fundamentale Rolle des „Urnenschemas" für die Beurteilung zufälliger Ereignisse eingegangen. (Die Zulässigkeit seiner Benutzung wird im siebenten Kapitel eingehend dargetan.) Es folgt in Kapitel III die Behandlung der stationären Zahlenreihen — die Ermittelung einer stationären Reihe ist geradezu die Aufgabe bei der Aufdeckung irgendeines physikalischen Zusammenhangs — und das vierte Kapitel bringt ausführlich das „Gesetz der großen Zahlen" — Gedankengänge, die jetzt im Kriege ein besonderes Interesse erwecken. Diese Erörterung über die Beziehung des Zufallsbegriffs zum Gesetz der großen Zahlen dürfte als besonders lesenswert zu bezeichnen sein. Die „Theorie der Glücksspiele" bietet naheliegenderweise auch einen gewissen historischen Überblick über das Gebiet. — „Die rein empirische Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs als einer bestimmten relativen Häufigkeit oder dem Grenzwerte einer solchen hat sich in der neueren Zeit mehr und mehr durchgesetzt", im Gegensatze zu dem klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff als dem Maße einer (subjektiven) Erwartung. Die nun folgenden Kapitel „Die mathematische Analyse stationärer Reihen", „Das Urnenschema", „Näherungsformeln", „Die statistische Theorie des Zufalls" und „Die genetische Theorie des Zufalls" bringen eine höchst wertvolle Zusammenfassung verschiedener theoretischer Entwicklungen und Formeln, die man sich sonst beim Studium des Gebietes recht mühsam zusammensuchen muß, so daß dieser Teil des Buches ein besonderes wertvolles, den Überblick erleichterndes Hilfsmittel zur Einarbeitung ist.

Aus der gesamten Darstellung spricht ein tiefes Bewußtsein der großartigen Tatsache, „wie sich auf der Unbestimmbarkeit und anscheinenden Regellosigkeit des einzelnen Falles eine Gesetzmäßigkeit aufbaut und feste in Zahlen ausdrückbare Zusammenhänge in der Gesamtheit sich ergeben".

H. Hörig.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor für chemische Technologie zu Lemberg Dr. Roman Zaloziecki zum Regierungsrat im Technischen Versuchsamt Wien, der Assistent an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Dr. Karl Müller zum ständigen Mitarbeiter bei derselben, der Privatdozent an der Universität Breslau Dr. Walther Schnee zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig.

Verliehen: Den Privatdozenten für Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Richard Löwenherz und Dr. William Guertler, sowie dem Privatdozenten für Chemie an der Universität Leipzig Dr. Konrad Schaefer der Titel Professor, dem ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Halle Dr. Gustav Mie, dem ord. Professor der Chemie an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Martin Freund und dem etatsmäßigen Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Ernst Orlich der Titel Geh. Regierungsrat.

In den Ruhestand: Der Dozent für metallurgische Technologie an der Technischen Hochschule Breslau Dr. Engelbert Leber (unter gleichzeitiger Habilitation an der Bergakademie Freiberg i. S.).

Gestorben: Eduard Lumière, einer der Erfinder der Autochromphotographie, infolge Fliegerunfalls, der a. o. Professor für Agrikulturchemie an der Universität Genf Albert Monnier, der Erfinder des Orthoforms Professor Dr. Alfred Eichhorn in München.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 8. | 15. April 1917. Redaktionsschluß für No. 9 am 20. April 1917. | 18. Jahrgang.

INHALT:

Dem Andenken der im Kriege gefallenen deutschen Physiker.

Friedrich Neumeier

Am 25. Oktober 1916 fiel der junge hoffnungsvolle Physiker Friedrich Neumeier als ein Opfer der schweren Sommekämpfe fürs Vaterland. Das Regiment, dem er als Leutnant der Reserve angehörte (15. bayr. Infanterieregiment) wurde in dem Heeresbericht über diese Kämpfe besonders lobend erwähnt, woran er auch seinen Teil hatte.

Als Sohn des Prokuristen Friedrich Neumeier am 16. September 1889 geboren, erwarb er seine höhere Schulbildung auf dem Realgymnasium seiner Vaterstadt. Nach Studien auf der Universität München und Berlin legte er im Herbst 1912 die Prüfung für das höhere Lehramt mit bestem Erfolge ab. Seine Examensarbeit: „Messungen von Kapillaritätskonstanten nach verschiedenen Methoden und Prüfung derselben" hatte er im Institut für Theoretische Physik in München unter Prof. Sommerfeld ausgeführt.

Auf meine Anregung widmete er sich nunmehr ganz der Physik. Gemeinsam mit mir führte er zunächst im Physikalisch-Chemischen Institut der Technischen Hochschule in Danzig Untersuchungen über thermisches und elektrisches Leitvermögen sowie Thermokraft zwischen -190^0 und $+100^0$ C an mehreren Legierungsreihen und gepreßten Pulvern von Metallen und Metallgemischen durch.

Fritz Neumeier

Als wesentlich wurde angesehen, sämtliche Messungen an ein- und demselben Stück zu machen, was bisher nur selten geschehen war, sowie eine Legierungsreihe durchzumessen, die insofern einfachere Verhältnisse bietet, als es sich um eine fortlaufende Reihe von Mischkristallen handelt. Jedoch wurde durch die Untersuchungen das Vorhandensein einer Verbindung mit etwa 11 Proz. Antimon und 89 Proz. Wismut wahrscheinlich gemacht. Die ausgearbeitete Methode gestattet gleichzeitig die Messung der Wiedemann-Franzschen Zahl, sowie auch der thermoelektrischen Kraft pro 1° C bei verschiedenen Temperaturen selbst an unregelmäßig geformten Stücken. Die Untersuchungen an gepreßten Pulvern aus Wismut und Antimon ergaben, daß trotz Erreichens des spezifischen Gewichtes der gegossenen Stücke bis auf 1 Proz. die thermischen und besonders die elektrischen Eigenschaften doch stark beeinflußt werden, und daß selbst bei Drucken von 5000 kg/qcm die Diffusion der beiden Metalle ineinander nur langsam vor sich geht, am schnellsten wieder bei einem Mischungsverhältnis entsprechend der wahrscheinlichen Verbindung mit 11 Proz. Antimon und 89 Proz. Wismut[1])[2]).

Im Juni 1913 begann Neumeier die Arbeit, mit der er zu promovieren gedachte, unter Professor Krüger am Danziger Physikalischen Institut. Diese behandelt die spezifische Wärme von Mischkristallen von Natriumchlorid und Thalliumchlorid bei tiefen Temperaturen. Die Versuche sollten vor allem die Frage entscheiden, ob die Bausteine des Kristalls die Atome oder die Moleküle sind. Die für Prozentgehalte von 20, 40 und 80 gemessenen Werte ergeben eine nahezu lineare Beziehung zwischen Prozentgehalt und spezifischer Wärme. Die sorgfältigen, fast abgeschlossenen Messungen werden demnächst durch Professor Krüger veröffentlicht werden.

In den Sommerferien 1913 machten Neumeier und ich Messungen über den Verlauf des Wärmeleitvermogens und der Thermokraft des Quecksilbers zwischen —190° und +30° C, namentlich zur Entscheidung des Verhaltens beim Übergang aus dem festen in den flüssigen Aggregatzustand. Auch die Resultate dieser Arbeit werden nach Durchführung einiger Kontrollmessungen demnächst veröffentlicht werden.

Den Abschluß dieser beiden Arbeiten sollte Friedrich Neumeier nicht mehr erleben. Obwohl nur der Ersatzreserve angehörig, und trotz einer früher durchgemachten schweren Unterleibsoperation, deren Folgen ihn bei körperlichen Anstrengungen behinderten, war er sofort bei Kriegsausbruch freiwillig zu den Fahnen geeilt und bereits am 3. August 1914 in seiner Vaterstadt in das bayr. Infanterie-Regiment Nr. 3 eingetreten. Trotzdem er nur garnisondiensttauglich war, meldete er sich, um wenigstens hinauszukommen, zum Etappendienst und wurde von hier aus auf sein Gesuch hin zu einem Reserve-Offizierkursus kommandiert. Nach Rückkehr zu seinem alten Regiment machte er den schwierigen Übergang über die Donau bei Belgrad an der Zigeunerinsel mit und wurde bald darauf bei einem Sturmangriff am Oberschenkel verwundet. Nach der Heilung kämpfte er dann mit dem 15. bayr. Infanterie-Regiment zunächst bei Arras, dann bei Douaumont, Fleury, Kalte Höhe und Thiaumont, wurde

1) G. Gehlhoff und Friedrich Neumeier, Über die thermischen und elektrischen Eigenschaften der Wismut-Antimonlegierungen zwischen —190° und +100° C. Verhdl. d. D. Physik. Ges. **15**, 876, 1913.

2) Dieselben, Beiträge zur Kenntnis der thermischen und elektrischen Eigenschaften von gepreßten Pulvern aus Antimon, Wismut und Bleiglanz. Ebenda **15**, 1069, 1913.

mit dem Eisernen Kreuz II. Klasse und dem bayr. Millitärverdienstkreuze II. Klasse mit Krone und Schwertern ausgezeichnet und für hervorragende Tapferkeit in diesen Kämpfen am 28. Juli 1916 zum Leutnant der Reserve befördert und zum Eisernen Kreuz I. Klasse vorgeschlagen.

Nach kurzer Ruhestellung finden wir ihn in den heißen Sommekämpfen, wo er am 25. Oktober 1916 in den Kämpfen bei Le Transloy mit den wenigen Leuten, die er noch um sich hatte, durch eine einschlagende schwere Granate verschüttet wurde.

So endete allzufrüh ein vielversprechendes junges Leben, der Stolz seiner trauernden Eltern und Angehörigen. Von allen seinen Lehrern wird ihm das Zeugnis eines gewissenhaften, sehr fleißigen und begabten Menschen von stillem, angenehmem Charakter ausgestellt. Alle seine Arbeiten und Aufzeichnungen tragen den Stempel seiner Gründlichkeit und seines Fleißes. Wer ihm, wie ich, als Freund näher stand, mußte ihn besonders wegen seiner Zuverlässigkeit, Hilfsbereitschaft und seines umgänglichen Charakters schätzen. So ist dem so jäh Dahingeschiedenen, der seine Liebe und Treue zum Vaterlande mit seinem Tode besiegelte, bei seinen Lehrern und Freunden ein dauerndes, ehrendes Andenken gesichert.

G. Gehlhoff.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Struktur der ultravioletten Quecksilberlinien.

Von N. Galli und K. Försterling.

Im folgenden teilen wir einige Beobachtungen mit, welche mit Hilfe einer Hilgerschen Planplatte aus Bergkristall nach Lummer-Gehrcke an den ultravioletten Quecksilberlinien angestellt sind. Leider war es bisher nicht möglich, die Beobachtungen an einer zweiten Platte von anderer Dicke zu wiederholen, um die eindeutige Zuordnung der gemessenen Trabanten zu treffen, und etwa vorhandene Geister zu erkennen. Allerdings schien die (nach den Bildern zu urteilen vortreffliche) Hilgersche Platte von dem letzteren Fehler ziemlich frei zu sein, da die Vergleichung unserer Resultate mit den bisher gemessenen und geprüften Quecksilberlinien zeigt, daß in diesem Bereiche keine Geister sichtbar sind. Die Planplatte war 13 cm lang, 1,6 cm breit und 0,457 cm dick. Sie wurde in Verbindung mit einem großen Fueßschen Spektrographen, dessen Linsen 60 bzw. 80 cm Brennweite und ca. 5 cm Durchmesser hatten, benutzt. Die Dispersion der Platte und diejenige des Cornuschen Quarzprismas des Spektrographen waren gekreuzt. Um den großen Durchmesser der Spektrographenlinsen auszunutzen, war die Lummerplatte nicht, wie bei der üblichen Hilgerschen Anordnung, zwischen Kollimator und Prisma eingeschaltet, sondern befand sich außerhalb des Spektrographen, und ein Quarz-Flußspat-Achromat ($F = 19,5$ cm) bildete die Interferenzstreifen scharf auf den Spalt des Spektrographen ab, so daß die Interferenzstreifen senkrecht zum Spalt standen. Um den außerordentlichen Strahl der Hilger-Platte zu beseitigen, befand sich direkt vor der Platte ein Luftnikol.

Beobachtet wurde stets möglichst nahe bei streifendem Austritt der Strahlen aus der Platte. Bei der ziemlich erheblichen Dispersion des Quarzes im Ultraviolett muß man den Neigungswinkel des eintretenden Lichtbündels gegen die Plattennormale beim Übergang von einem Wellenlängenbereich zum anderen verändern. Dies geschah mit Hilfe eines Quarzkeilpaares, das genau gegensinnig zusammengelegt eine Planplatte, bei entgegengesetzter Drehung der beiden Teile ein geeignetes Prisma von beliebigem, aber stets reproduzierbarem Winkel bildet.

Als Lichtquelle diente eine Hg-Lampe aus Glas mit aufgekittetem Quarzfenster; sie war dauernd in fließendem Wasser gekühlt und mit einer Quecksilberluftpumpe verbunden. Der Strom betrug 2 bis 2,5 Amp. Unter diesen Bedingungen konnten die Linien im Ultraviolett scharf erhalten werden. Mit abnehmendem Vakuum erschien in den Photogrammen der Zwischenraum zwischen den Interferenzlinien steigend geschwärzt, besonders stark bei $\lambda = 2536,7$, welche Linie bei Verwendung einer abgeschmolzenen Lampe überhaupt keine Interferenzstreifen zeigt, sondern gleichmäßig geschwärzt ist. Die Photogramme wurden mit einem Zeißschen Meßmikroskop ausgemessen.

Da nahe bei streifendem Austritt der Abstand je zweier Hauptlinien verschiedener Ordnung mit dem Austrittswinkel beträchtlich variiert, so wurde die Berechnung der Resultate aus den Messungen des Abstandes zweier aufeinanderfolgender Hauptlinien S_H und des Abstandes Hauptlinie — Trabant S_T in der folgenden Weise ausgeführt: Sei $\varphi = 90 - \varepsilon$ der Winkel der Wellennormale in Luft gegen die Plattennormale, welcher einem Maximum der Hauptlinie entspricht, χ der dazugehörige Brechungswinkel, φ'_H der Abstand bis zur nächsten Hauptlinie, φ'_T derjenige bis zu einem in der Nähe liegendem Trabanten, und analog sei χ' definiert. Da ε selbst sehr klein ist, müssen in den Entwicklungen nach φ' noch Glieder mindestens zweiter Ordnung beibehalten werden. Es gilt dann das Brechungsgesetz für irgendein χ' und φ'

$$\chi' = \frac{\varepsilon\varphi' - \frac{1}{2}\varphi'^2 - \frac{dn}{n}}{\sqrt{n^2-1}} \qquad (1)$$

(n Brechungsindex).

Der Abstand zweier Hauptlinien findet sich aus der Bedingung

$$-2D\chi' \sin\chi = +\frac{\lambda q}{n}.$$

Hierbei ist $q = \pm 1$, je nachdem, ob man die Ordnungszahl vergrößert oder verkleinert, und D ist die Dicke der Platte. Daraus findet sich:

$$\varepsilon = -\frac{\frac{n\lambda q}{2D}\sqrt{n^2-1} + \frac{1}{2}\varphi'^2_H}{\varphi'_H}. \qquad (2)$$

Das χ'_T eines Trabanten, welcher aber der Ordnung $h' = h + p$ zugehören mag, findet sich durch die Relation

$$-\frac{2D}{n}\chi'_T = h\left(\frac{d\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n^2}dn\right) + p\frac{\lambda}{n} \qquad (3)$$

Aus (1) ist zunächst ε mit Hilfe von (2) zu eliminieren, sodann in (3) χ'_T durch das beobachtbare φ'_T auszudrücken. f_0 sei die Brennweite der Linse, die die Interferenzstreifen auf den Spalt entwirft; $f_0\varphi'_T$ und $f_0\varphi'_H$ sind dann die entsprechenden linearen Abstände auf dem Spalt. Diese werden nun noch durch das Verhältnis der Kamerabrennweite f_2 zu der Kollimatorbrennweite f_1 vergrößert. Der auf der Platte gemessene Abstand ist somit:

$$S = \varphi' f_0 \frac{f_2}{f_1}.$$

Kürzen wir ab:

$$\frac{S_T}{S_H} = \frac{\varphi'_T}{\varphi'_H} = \mu$$

und:

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2 - 1 - n\lambda\frac{dn}{d\lambda}} = P$$

$$\frac{\lambda}{n^2 - 1 - n\lambda\frac{dn}{d\lambda}} = Q,$$

so ist:

$$d\lambda = \frac{\lambda^2}{2D}(q\mu - p)P + \frac{1}{2}\frac{f_1^2}{f_2^2}\frac{S^2_H}{f_0^2}Q(\mu - \mu^2).$$

Die Werte von P und Q enthalten die Dicke der Platte nicht mehr, sondern nur die Materialkonstanten. Im folgenden teilen wir die für P und Q berechneten Werte für eine Reihe von Wellenlängen mit für den ordentlichen Strahl in der Bergkristallplatte (λ in Å).

$\lambda =$	2144	2313	2573	2748	3404	3968	4341	4861	5461	5893	6158	7065
$P =$	0,538	0,660	0,703	0,720	0,770	0,794	0,804	0,817	0,842	0,830	0,832	0,840
$Q \cdot 10^{-4} =$	0,105	0,124	0,145	0,160	0,217	0,261	0,294	0,334	0,381	0,415	0,435	0,505

Am einfachsten ist es, die $\frac{P}{2D}$ und $\frac{1}{2}\frac{f_1^2}{f_2^2}\frac{Q}{f_0^2}$ in einer Kurve graphisch darzustellen, welcher man dann für jedes λ die entsprechenden Werte entnehmen kann. Die folgenden Tabellen enthalten die Abstände $d\lambda$ der Trabanten von der Hauptlinie in Wellenlängen und zwar in $^1/_{1000}$ Å. Die beigefügten Zahlen geben nach dem Vorgang von Gehrcke und v. Bayer die Reihenfolge der Intensitäten an. Außerdem ist stets noch die mögliche additive Konstante mitgeteilt, die hinzukommt, wenn der gemessene Trabant

nicht derselben Ordnung angehört wie die Hauptlinie und welche sich eben mit einer Platte nicht bestimmen läßt. Unter Heranziehung anderer Resultate wie sie bis zu $\lambda = 3663$ durch die Arbeiten von Gehrcke und v. Bayer[1]) (die nach den modifizierten Angaben von v. Bayer wiedergegeben werden) und diejenigen, die von Janicki gefunden sind, läßt sich eindeutig das $d\lambda$ festlegen. Bei den getroffenen Zuordnungen stimmt auch die Reihenfolge der Intensitäten im wesentlichen mit den Angaben der genannten Beobachter überein. Diese Resultate sind durch Messungen am Gitter durch J. Wendt bestätigt und erweitert worden.

$\lambda = 4358$

$d\lambda =$ (15) 32 49 62 95 132 $\pm h$ 168
3 3 3 3 2 1

Der Trabant 15 ist recht unsicher.

Janicki	v. Bayer	
	+ 185	+ 168 + 15 = + 183
+ 105	+ 114	+ 95
+ 43	+ 44	+ 49
+ 20	+ 28	+ 32
	+ 19	+ 15
— 23	— 17	— (168—132) = — 31
— 52	— 45	*)
— 97	— 93	— (168—95) = — 73**)
— 112	— 107	— (168—62) = — 104
— 161	— 150	

*) Nach Janicki sehr schwach.
**) Fällt mit + 95 zusammen.

Die Trabanten — 150 und + 19 liegen bei unserer Platte leider sehr nahe an der Hauptlinie, welche hierdurch verbreitert wird; daher wird zugleich die Einstellung auf die Mitte der Hauptlinie gefälscht.

$\lambda = 4078$

$d\lambda =$ 33 48 72 97 $\pm h$ 145
3 1 2 2

Janicki	v. Bayer	
+ 74	+ 73	+ 72
+ 49	+ 48	+ 48
— 32	+ 33	+ 33
— 46	— 47	— (145—97) = — 48
— 76	— 76	— (145—72) = — 73

$\lambda = 4047$

$d\lambda =$ 28 58 83 $\pm h$ 142
3 2 1

Janicki	v. Bayer	
	+ 126	
+ 67	+ 66	+ 58
— 51	— 55	— (142—83) = — 59
— 111	— 111	— (142—28) = — 114

1) Vgl. Kayser, Handbuch der Spectroscopie.

Die Hauptlinie ist nach der einen Seite stark abschattiert und hierdurch wird die Ausmessung etwas willkürlich; der von v. Bayer angegebene Trabant $d\lambda = + 126$ würde in dieser Verbreiterung liegen.

$\lambda = 3663{,}46$

$d\lambda =$ (15) 59 $\pm h$ 114.

Der scheinbare Trabant 15 ist nicht deutlich getrennt von der Hauptlinie und kann auch nur eine unsymmetrische Verbreiterung sein. Janicki findet einen Trabanten, der bei + 95 oder — 63 liegen kann. Der Trabant 59 bei uns kann bei — 65 liegen, entspricht also wohl dem von Janicki gefundenen. Wahrscheinlich ist indessen der gemessene Trabant mit der schwächeren von Runge und Paschen gemessenen Linie 3663,05 identisch; damit $d\lambda = -410$ ist, hätten wir $d\lambda = -65 - 3 \times 114 = -407$ zu setzen. (Das Aussehen des Photogramms spricht dafür.) Weitere Trabanten, welche neuerdings von Tamine als zu 3663,46 und 3663,05 gehörig angibt, sind weder von Janicki noch von uns gefunden.

$\lambda = 3655$

$d\lambda =$ 17 42 70 $\pm h$ 114
1 3 2

Janicki	Tamine	
	+ 163	114 + 42 = 156
+ 67	+ 69	+ 70
	— 23	
— 65	— 73	— (114—42) = — 72*)
— 92	— 96	— (114—17) = — 97

*) Fällt mit + 156 zusammen.

$\lambda = 3650$

$d\lambda =$ 72 85 (98) $\pm h$ 114.

Die drei Trabanten haben etwa gleiche Intensität.

Janicki	Tamine	
+ 97	+ 95	(+ 98)
	— 14	
	— 27	— (114—85) = — 29
— 40	— 40	— (114—72) = — 42
	— 50	

$\lambda = 3341{,}70$

$d\lambda =$ 30 49 70 $\pm h$ 94.

$\lambda = 3131{,}95$ und 3131,66 sind durch das Prisma nicht völlig getrennt. Die Messung war daher erschwert; aber es konnte ein zu 3131,66 gehöriger Trabant festgestellt werden.

$\lambda = 3131{,}66$

$d\lambda =$ 29 $\pm h$ 81

$\lambda = 3125{,}7$

$d\lambda =$ 22 36 44 $\pm h$ 81
3 2 1

Bei der Liniengruppe $\lambda = 3027,66$, $\lambda = 3025,79$ (sehr schwach), $\lambda = 3023,64$ und $\lambda = 3021,68$ fanden wir nur einen Trabanten, nämlich:

$$\lambda = 3023,64$$
$$d\lambda = 40 \pm h\ 75$$

Die Linie 2967,64 und 2967,37 fallen bei unserer Dispersion vollständig übereinander. Der Abstand $d\lambda = 270$ wäre mit unseren Messungen vereinbar, welche $d\lambda = 263$ zulassen. Außerdem ist noch ein Trabant sichtbar. Sein Abstand von der stärkeren der beiden Linien aus gemessen wäre:

$$d\lambda = 26 \pm h\ 72,4$$
$$\lambda = 2925,5$$
$$d\lambda = 33 \pm h\ 68,9.$$

$\lambda = 2893,7$ ist stark abschattiert; ein Trabant wurde nicht gefunden. Das Linienpaar bei 2803 ist nicht vollständig getrennt, scheint aber frei von Trabanten zu sein.

$$\lambda = 2752,9$$
$$d\lambda = 35 \pm h\ 59,3.$$

Die Hauptlinien und Trabanten des Serientriplets bei 2853 sind sehr diffus und schwer meßbar:

$$\lambda = 2655,29$$
$$d\lambda = 41 \pm h\ 54,5$$

$$\lambda = 26,55,86$$
$$d\lambda = 30 \pm h\ 54,5$$

$$\lambda = 2652,22$$
$$d\lambda = \underset{2}{13} \quad \underset{1}{17} \pm h\ 54,5$$

$\lambda = 2576,31$ kann, wenn überhaupt, nur relativ schwache Trabanten besitzen, welche auf unserer Aufnahme nicht sichtbar waren:

$$\lambda = 2536,7$$
$$d\lambda = \underset{3}{(8)} \quad \underset{2}{18} \quad \underset{3}{29} \quad \underset{1}{43} \pm h\ 49,5$$

Die Deutung der Messung ist nicht sicher. Der Trabant $d\lambda = 43$ liegt nahe an der Hauptlinie und ist fast ebenso stark wie sie; es kann sich also bei ihm sehr wohl um eine Selbstumkehr handeln. Der Trabant $d\lambda = 8$ ist gleichfalls nicht sicher, da er von der Hauptlinie nicht vollständig getrennt ist.

Die vorliegenden Beobachtungen wurden bereits im Sommer 1914 im Physikalischen Institut, Math.-Abt., der Universität Göttingen angestellt und mußten infolge des Kriegsausbruches vorzeitig abgebrochen werden. Andererseits haben aber die gewonnenen Resultate durch die neuen Theorien der Feinstruktur der Spektrallinien vielleicht an Interesse gewonnen.

Die Apparate, welche wir benutzten, waren uns von Herrn Prof. W. Voigt zur Verfügung gestellt und zum Teil neu beschafft, so daß wir Herrn Prof. Voigt zu größtem Danke verpflichtet sind.

(Eingegangen 17. Februar 1917.)

Untersuchungen über die Lichtenbergschen Figuren und über die Strahlung des Kondensators.

Von S. Mikola.

(Mit Tafel II—VI.)

Durch theoretische Betrachtungen angeregt suchte ich zwischen den Platten eines Kondensators elektrische Strahlen. Die benützte Versuchsanordnung war im wesentlichen dieselbe, mit welcher man die Lichtenbergschen Figuren zu erzeugen pflegt, aber mit dem Unterschiede, daß statt der Isolatorplatte eine photographische Platte benützt wurde. Das Resultat entsprach den Erwartungen: nach Entwickeln zeigten sich scharf und kontrastreich die bekannten Lichtenbergschen Figuren.

Die photographische Platte wurde zwar schon mehrmals zum Aufzeichnen von elektrischen Strahlungen benützt[1]), aber man hat sich bisher mit der Feststellung der Tatsache begnügt, daß auf der Platte interessante Figuren entstehen. Indem ich erkannte, daß hiermit nicht nur eine neue Erzeugungsart der Lichtenbergschen Figuren entdeckt wurde, sondern daß dieselbe auch eine Forschungsmethode zur Untersuchung der Erscheinung bietet, dehnte ich meine Untersuchungen auf die ganze Erscheinungsgruppe aus. Es wurden ganz neue — in vieler Hinsicht sehr merkwürdige — Figuren beobachtet, die bisher bekannten und die neuen Figuren wurden zu charakteristischen Gruppen geordnet. Es wurden auch die Versuchsbedingungen festgestellt. Aus theoretischen Betrachtungen ergab sich weiter, daß alle diese Figuren durch besondere elektrische Strahlen hervorgebracht wurden, die bei disruptivem Laden oder Entladen des Kondensators entstehen.

1. Die Versuchsanordnung.

Das Wesentliche der Anordnung besteht aus zwei Kondensatorplatten; meistens wurden solche mit verschiedenen Dimensionen benützt. Ich nenne sie einfach die schmale und die breite Elektrode. Die Versuche müssen in der

---

1) Brown, Phil. Mag. **26**, 502, 1888; E. S. Trouvelot, Lum. Élec. **30**, 269, 1888; Nürnberg, Phot. Mitteil. **33**, 160, 1897; K. Hansen, Elektrot. Zeitschr. 610, 1916.

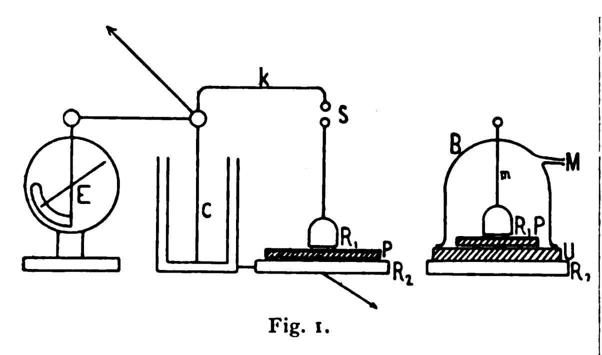


Fig. 1.

Dunkelkammer bei rotem Licht durchgeführt werden. Die Fig. 1 gibt einen Entwurf der Anordnung. Zwischen die Elektroden R_2 und R_1 werden die photographischen Platten P und ev. auch andere Isolatorplatten gelegt. Die Leidener Flasche C wird durch irgendeine Elektrisiermaschine geladen, die Spannung, wenn erforderlich, an dem Elektrometer E abgelesen und man läßt dann durch den Auslader k bei S einen Funken überspringen. Die Platte wird in gewöhnlicher Weise entwickelt, fixiert und gewaschen.

Für die Versuche in verdünnter Luft und in anderen Gasen wurde in die Glasglocke B der Stab m mit Siegellack befestigt. Dieser endigte in einer Kette, an welche die schmale Elektrode gehängt wurde. Auf die breite Elektrode R_2 wurde die Glasplatte U und auf diese die photographische Platte P gelegt. Dann wurde das Ganze mit der Glasglocke überstülpt und die Luft durch Röhre M ausgepumpt. Bei kleineren Spannungen kann man auch einfach die Glasplatte U mit Stanniol bedecken und die breite Elektrode darauflegen.

2. Die primären Strahlungsfiguren.

Die mit Anwendung der beschriebenen Methode erhaltenen Strahlungsfiguren können in zwei Hauptgruppen eingeteilt werden. Die der ersten Gruppe bestehen aus Radialstreifen, die der zweiten aus konzentrischen Kreisen, bzw. aus äquidistanten Linien. Die ersten nenne ich primäre, die zweiten sekundäre Strahlungsfiguren.

Zur Erzeugung der primären Strahlungsfiguren wird die Elektrode auf die Schichtseite der photographischen Platte gestellt oder einige Millimeter weit davon befestigt. Nach dem positiven oder negativen Vorzeichen der Ladung zeigen die Strahlungsfiguren charakteristische Unterschiede. Man kann mit einem einzigen Funken beide Arten der primären Strahlungsfiguren gleichzeitig erzeugen; dazu hat man nur zwei photographische Platten mit ihren Glasseiten aneinander zu legen und zwischen die Elektroden zu schieben. Legt man mehrere Kondensatorplatten und photographische Platten wechselweise aufeinander, so kann man mit einem einzigen Funken gleichzeitig eine Reihe von Strahlungsfiguren erzeugen.

Solange die Elektrodenspannung einen gewissen Grenzwert nicht überschreitet, gehen alle Radialstreifen von der Randlinie der Elektrode aus. Diese Figuren nenne ich reguläre primäre Strahlungsfiguren. Solche sind in den Fig. 2 u. 3 (Taf. II) abgebildet, und zwar wurde das Bild 2 durch positive, das Bild 3 durch negative Ladung erzeugt. Die positiven Radialstreifen sind länger als die negativen, zeigen kleinere Krümmungen und verästeln sich mehrfach. Die Radialstreifen der negativen primären Strahlungsfiguren verlaufen geradlinig und verzweigen sich nicht.

Die Länge der Radialstreifen ist eine charakteristische Größe, ich nenne sie Reichweite. Sie wurde aus zahlreichen Aufnahmen bei verschiedenen Ladespannungen und Luftdrucken gemessen und es ist mir auch geglückt für alle Fälle gültige empirische Formeln zu finden, welche die Meßresultate gut darstellen. Diese Formeln sind folgende:

bei den positiv. Figuren ist $R = a\sqrt{V - V_0}$ (1)

„ „ negativ. „ „ $R = a\,(V - V_0)$ (2)

für beide „ „ $R = \dfrac{R_1}{\left(\dfrac{p}{p_0} + k_0\right)^{2/3}}$ (3)

wo R die Reichweite, V die Ladespannung, p den Luftdruck, a, V_0, p_0, R_1 und k konstante Größen bedeuten. In den Fig. 4 und 5 sind die durch diese Formeln bestimmten Linien und die erhaltenen Meßresultate gezeichnet.

Von der erwähnten Grenzspannung an ver-

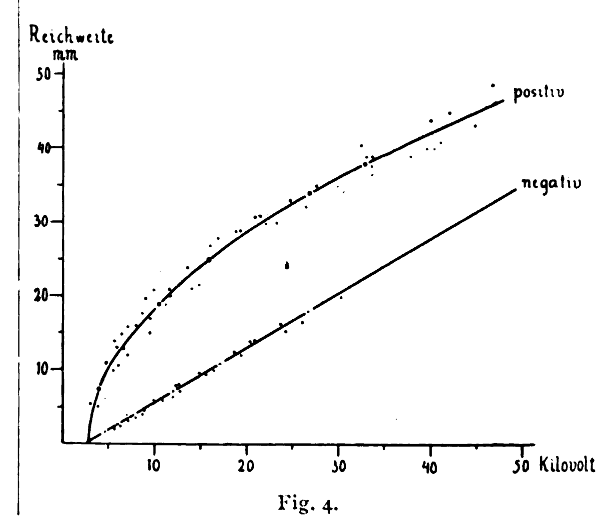


Fig. 4.

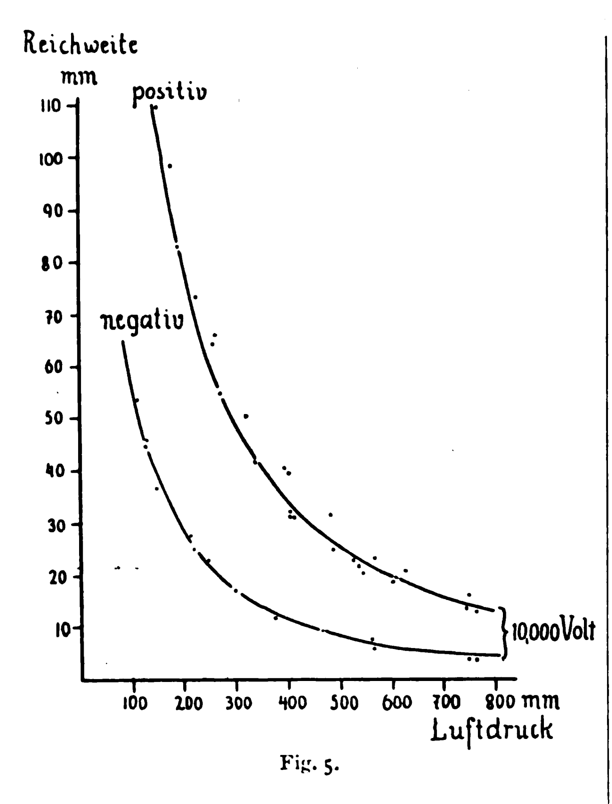


Fig. 5.

ändert sich die Struktur der Strahlungsfiguren. Es entstehen neue Zentren, aus welchen fächerartig Radialstreifen herausgehen und die regulären Radialstreifen überdecken. An der Fig. 6 (Taf. IV) findet man nur zwei „Explosionszentren", sonst ist die Figur identisch mit der regulären Fig. 3. Auf der Fig. 7 (Taf. III) treten schon mehrere „Explosionszentren" auf. Es entstehen auch Bilder, die „kontinuierliche Explosionen" und mehrfache „Explosionszentren" zeigen.

Die Grenzspannung hängt von mehreren Umständen ab. Je kleiner die Elektrodenentfernung ist, desto niedriger ist die Grenzspannung. Es hängt auch von dem Luftzustand ab. Je größer die Feuchtigkeit der Luft, umso niedriger ist die Grenzspannung und umso größer ist die Zahl der „Explosionszentren". Auch eine in die Ladeleitung eingeschaltete größere Selbstinduktion vermindert die Grenzspannung.

Die Entstehung der primären Strahlungsfiguren ist mit schwachem Fluoreszenzlicht verbunden. Die „Explosionszentren" blitzen kräftiger auf und man beobachtet oft, daß das Aufblitzen sich etwas später einstellt, als das Überspringen der Ladefunken.

3. Die sekundären Strahlungsfiguren.

Diese Figuren können nur mit zwei Elektroden von verschiedenem Querschnitt erzeugt werden, und zwar folgenderweise. Die empfindliche Schicht wird auf die breite Elektrode gestellt, aber so, daß zwischen beiden eine dünne Luftschicht bleibt. Auf die Glasseite der Platte wird die schmale Elektrode gelegt und mit einem Funken geladen.

Je nachdem die breite Elektrode mit dem positiven oder negativen Beleg der Leidener Flasche verbunden ist, nenne ich die Figuren positive oder negative sekundäre Strahlungsfiguren. Ihre Struktur ist an den Fig. 8—10 (Tafeln III u. V) ersichtlich. Beide Arten bestehen aus konzentrischen Kreisen, bzw. aus äquidistanten Linien. Die Kontur der negativen Linien ist etwas verschwommen und sieht manchmal so aus, als ob sie aus mehreren Punkten zusammengestellt wäre (Fig. 8, I); die positiven Linien sind immer scharf begrenzt und es ragen aus ihnen bei höheren Spannungen vielfach radiale Streifen vor (Fig. 8, II und 9).

Die sekundären Figuren entstehen nur an jenen Teilen der empfindlichen Schicht, welchen entsprechend auf der Glasseite der Platte die primären Figuren sich entwickeln. Fängt man einen Teil der primären Strahlungsfiguren mittels einer auf die Platte geklebten Paraffinplatte auf, so fehlen dementsprechend auch die sekundären Strahlungsfiguren. Eine auf die photographische Platte gelegte mit Graphit eingeriebene Mattglasscheibe befördert die Entwicklung der sekundären Bilder (Fig. 10).

Den engen Zusammenhang zwischen den primären und sekundären Strahlungsfiguren zeigt auch der Umstand, daß die Linienelemente der letztgenannten überall senkrecht auf die Richtung der primären Radialstreifen stehen. Die sekundären Linien sind also Trajektorien der primären. Die Fig. 10 zeigt z. B. eine sekundäre Strahlungsfigur, entsprechend einer primären Strahlungsfigur, die „Explosionszentren" und „kontinuierliche Explosionen" hatte. Der Mittelpunkt der Kreisbogen liegt in dem betreffenden Strahlungszentrum.

4. Die allgemeinen Versuchsbedingungen.

Es hat sich herausgestellt, daß Form und Material der Elektroden belanglos sind. Elektroden aus verschiedenen Metallen haben Strahlungsfiguren gleicher Struktur und gleicher Reichweite erzeugt. Auch ein dicker Lacküberzug hat die Figur unwesentlich geändert. Elektroden mit scharfen und stumpfen Kanten erzeugten gleiche Strahlungsfiguren.

In verdünnter Luft entwickeln sich beide Arten der Strahlungsfiguren (Fig. 11 u. 12, Taf. V u. IV), die Reichweite der primären wächst nach dem oben

mitgeteilten Gesetz (Formel 3), die negativen sekundären Linien haben eine Neigung zum Zerfallen in kleine Kreisflecke, die positiven sekundären Linien verändern sich kaum. Eine eigentümliche neue Erscheinung tritt auf bei 50 mm Luftdruck, deren Beschreibung später erfolgt.

In Stickstoff (atmosphärischer Herkunft) bekommt man ähnliche Strahlungsfiguren, wie in Luft. In den anderen untersuchten Gasen (O, H, CO_2 und Leuchtgas) entwickeln sich die Strahlungsfiguren kaum sichtbar. Ich senkte auch die ganze Versuchsanordnung in Vaselinöl, die photographische Platte zeigte schwache Schwärzung, aber von den Strahlungsfiguren war keine Spur zu sehen.

Schaltet man in die Ladeleitung größere Selbstinduktion ein, so zeigen die Figuren nicht mehr die Regelmäßigkeit und Homogenität, wie bei einer Leitung mit kleiner Selbstinduktion, sonst sind aber die Haupteigenschaften der Figuren sichtbar.

Es lag die Vermutung nahe, daß auch der oszillatorische oder nichtoszillatorische Charakter des Ladens eine Rolle spielen könnte. Zur Prüfung dieser Frage wurde das Laden durch einen großen Wasserwiderstand vorgenommen, der die Oszillationen unterdrückt hatte, aber die Figuren entwickelten sich auch in diesem Falle. Die Strahlungsfiguren entstehen also auch dann, wenn das Laden ohne Oszillationen vor sicht geht.

Wenn aber das Laden durch einen Holzstab von vielen Millionen Ohm Widerstand vorgenommen wird, so entwickeln sich die Strahlungsfiguren nicht. Ein ebensolches negatives Resultat erhält man, wenn die Elektrode auf die photographische Platte gelegt, mit dem inneren Beleg der ungeladenen Flasche verbunden und dann das ganze System durch langsames Drehen der Elektrisiermaschine geladen wird.

Auf Grund dieser und auch anderer Versuche steht ohne Zweifel fest, daß der konstante Spannungsabfall keine Strahlungsfiguren hervorbringen kann. Das Wesentliche der Erscheinung liegt also in der Disruptivität des Ladungsvorganges; die Strahlungsfiguren werden in der äußerst kurzen Zeit erzeugt, in der die Spannung von 0 an bis zu ihrem höchsten Wert anwächst.

Eine Verallgemeinerung dieser Schlußfolgerung lag auf der Hand. Erzeugt nämlich das schnelle Anwachsen des Feldes Strahlungsfiguren, so müssen solche auch beim schnellen Verschwinden des Feldes erzeugt werden. Zu ihrer Aufsuchung wurde die Elektrode durch langsames Drehen der Elektrisiermaschine — also ohne Bildung von Strahlungsfiguren — geladen und dann disruptiv entladen. Die Platte zeigte dieselben Strahlungsfiguren, wie bei disruptivem Laden mit einem wichtigen und charakteristischen Unterschied: Die Strahlungsfiguren waren von entgegengesetztem Typus als beim Laden; die positive Elektrode erzeugte nämlich dieselbe Strahlungsfigur, welche beim Laden durch die negative Elektrode erzeugt wird und umgekehrt.

Die Entstehung der Strahlungsfiguren ist eine Folge der schnellen Änderung der Feldstärke. Bezeichnet man die in der Zeit Δt eintretende Änderung der Feldstärke mit ΔF, so kann man feststellen, daß die Strahlungsfiguren dann und nur dann entstehen, wenn der Quotient $\frac{\Delta F}{\Delta t}$ größer ist, als ein gewisser Grenzwert.

Die Entstehung der Strahlungsfiguren ist eine viel allgemeinere Erscheinung, als es bisher vermutet wurde, sie wird nur durch die schnelle Änderung der Feldstärke bedingt.

5. Die korpuskulare Strahlung des Kondensators.

Über die Entstehungsweise der Lichtenbergschen Figuren sind verschiedene Theorien bekannt. Die beschriebenen neuen Versuchsresultate haben für die Bewertung dieser Theorien eine neue Sachlage errichtet und es ist erklärlich, daß die bisher aufgestellten Theorien zur Erklärung des erweiterten Erscheinungskomplexes nicht geeignet sind. In folgendem ist der Grundriß einer Theorie entwickelt, welche von den experimentellen Tatsachen eine befriedigende Erklärung gibt.

Die Theorie muß vor allem eine Erklärung für das Entstehen der regulären primären Strahlungsfiguren geben, denn die Figuren mit „Explosionszentren" und die sekundären Figuren knüpfen sich an diese an.

Die photographische Platte kann nur durch Ionenstrahlen und durch Ätherwellen (Lichtstrahlen) geschwärzt werden. Die scharfen Konturen der primären Radialstreifen sind nur mit der erstgenannten Ursache vereinbar. Für diese Ursache sprechen auch die elektrischen Ladungen, die auf der Isolatorplatte bei der Lichtenbergschen Herstellungsweise zurückbleiben. Diese Ladungen können nämlich durch eine Bunsenflamme oder durch Belichtung mit Röntgenstrahlen leicht entfernt werden und dies deutet darauf hin, daß die Ladung durch adhärierende Ionen veranlaßt wird. Solche Ionen können aber nur durch Teilchen von großer Geschwindigkeit hervorgebracht werden.

Wir stellen also folgende Hypothese auf: **Bei disruptiver Änderung der Ladung entstehen neben dem Rande der Kondensatorplatten positive oder negative Teilchen von großer Geschwindigkeit.**

Die Radialstreifen sind dann ebensolche Spuren von Ionisationsbahnen sich schnell bewegender Teilchen, wie in den bekannten Aufnahmen von C. T. R. Wilson. Die durch die fliegenden Teilchen erzeugten ungleichnamigen Ionen werden unter der Wirkung des Feldes von der photographischen Platte oder Isolatorplatte entfernt und die gleichnamigen mit großer Wucht darauf geworfen.

Die sich schnell bewegenden Teilchen verlassen die Elektroden mit bestimmter Anfangsgeschwindigkeit und verlieren dann sukzessive ihre Energie so, daß sie nach dem Durchlaufen einer Strecke zu ionisieren aufhören. Je größer die Ladespannung, desto größer ist die Anfangsgeschwindigkeit und daraus folgt, daß — in Übereinstimmung mit den Versuchsresultaten — die Reichweite desto größer sein muß, je größer die Ladespannung ist. Mit dem Vermindern der Luftdichte vermindert sich auch der Energieverlust pro Einheit der Wegstrecke, daraus folgt, daß die Reichweite mit Vergrößern des Verdünnungsgrades wachsen muß, was wieder in vollkommener Übereinstimmung mit den Versuchsresultaten steht.

Der Umstand, daß die Reichweiten der positiven und negativen Ionenstrahlen nach verschiedenen Gesetzen von der Ladespannung abhängen, weist darauf hin, daß die negativen Teilchen eine andere Struktur haben müssen, als die positiven. Wir dürfen annehmen, daß die erstgenannten Elektronen und die letztgenannten Atomionen sind. Diese Annahme wird auch durch andere Versuchsresultate bestätigt.

Die weitere Prüfung der aufgestellten Hypothese führt zu einigen bemerkenswerten Versuchsresultaten, die in folgendem mitgeteilt werden. Daß jedem Radialstreifen tatsächlich je ein individuelles Teilchen entspricht, wurde in folgender Weise bewiesen: Zwischen die Elektrode und die photographische Platte wurde eine Glasplatte gelegt; dadurch wurden die Teilchen gezwungen, einen Teil ihres Weges in der Luft zurückzulegen. In den so erhaltenen Strahlungsbildern sind kleine Kreisflecken sichtbar, welche die Auftreffpunkte der Teilchen darstellen (Fig. 13, Tafel IV).

Der Hypothese gemäß tragen die Teilchen elektrische Ladung, sie müssen also durch elektrische und magnetische Felder aus ihrer geradlinigen Bewegung abgelenkt werden. Die Ablenkung im elektrischen Felde zeigen verschiedene Versuche. Das Ergebnis eines solchen zeigt **Fig. 14 (Tafel VI), das mit einer Doppelelektrode** erzeugt wurde. Man sieht, daß die Bahnen der Teilchen unter Wirkung des Feldes gekrümmt und gekürzt wurden.

Die Ablenkung im magnetischen Felde konnte ich bisher — trotz zahlreicher Versuche — nicht beobachten, wahrscheinlich, weil die mir zur Verfügung stehende Feldstärke (etwa 2500 Gauß) zu schwach war. Ich darf aber meine diesbezüglichen Versuche auch aus anderen Gründen noch nicht als abgeschlossen betrachten.

6. Die impulsive Strahlung des Kondensators.

Wir kommen auf die wichtige Frage, wie die positiven und negativen Teilchen entstehen und aus welcher Quelle sie ihre große Geschwindigkeit erhalten. Vergebens sucht man die Antwort in der Theorie der Stoßionisation, denn man kommt immer zu Ergebnissen, die den Versuchsbedingungen widersprechen. Aber man findet die Antwort, wenn man die Versuchsbedingungen analysiert.

Wir haben gesehen, daß das Wesentliche der Erscheinung in der Disruptivität des Ladungsvorganges liegt und es wurde experimentell sichergestellt, daß die Teilchen mit großer Geschwindigkeit in der äußerst kurzen Zeit erzeugt werden, in der sich die Feldstärke ändert. Während der disruptiven Ladung erleiden die elektrischen Kraftlinien an der Kante der Elektrode eine Richtungsänderung und eine Verzögerung; während der disruptiven Entladung bekommen sie eine Beschleunigung und nachher eine Richtungsänderung. Es werden also den Kraftlinien Geschwindigkeitsänderungen aufgezwungen, die hier ebenso, wie bei dem Entstehen der Röntgenstrahlen, elektromagnetische Impulse hervorbringen müssen. Die Impulsenergie erscheint hier ebenso wie dort als Äquivalent für das Verschwinden des magnetischen Feldes. Solange nämlich die Ladung durch die Leitung strömt, ist in der Umgebung nicht nur elektrische, sondern auch magnetische Energie lokalisiert. Mit dem Aufhören des elektrischen Stromes kann diese vorhandene magnetische Energie nicht ohne Äquivalent verschwinden. Nach unserer Auffassung erscheint das Äquivalent in der Impulsenergie und in der Wirkung, die diese hervorruft. Wir können annehmen, daß der Impulsvektor die neutralen Moleküle und Atome in ihre Bestandteile, nämlich in negative Elektronen und in positive Atomionen zerspaltet. Die Moleküle und Atome geraten, während der Impuls durchläuft, in einen temporären radioaktiven Zustand.

Der elektrische Vektor des Impulses hat annäherungsweise die Richtung der Kondensatorplatten und daraus folgt, daß die neu entstandenen Ionen in statu nascendi eine Geschwindigkeit in der Richtung der Platte erhalten.

Es ist zwar schwierig von dem Mechanismus des Impulses ein zutreffendes Bild zu bieten, denn die notwendigen Vorarbeiten fehlen noch, dennoch versuchen wir es anzudeuten, wie die Erscheinungen eine befriedigende Erklärung finden können. In der Fig. 15

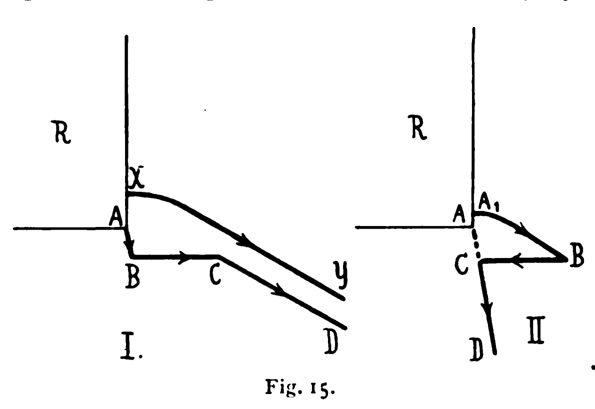


Fig. 15.

bedeutet R einen vergrößerten Teil einer Elektrode; die andre hat man sich weiter unten zu denken. Die Zeichnung I bezieht sich auf die Verhältnisse beim Laden und II auf die beim Entladen. Es soll XY eine Kraftlinie darstellen, die sich nach unten zu bewegen hat. In dem Moment, in dem sie den Punkt A erreicht, erleidet sie eine Richtungsänderung und darauf eine Verzögerung, so daß ihr Anfangsteil sich in die Stellung AB hinüberschwingt, während ihr weiterer Teil noch in der Stellung CD ist. In dem Raume zwischen B und C entsteht der Impuls, dessen elektrischer Vektor von B nach C gerichtet ist, so daß er die entstandenen gleichnamigen Ionen nach außen, die ungleichnamigen nach innen wirft. Beim Laden erhalten also die mit der Ladung gleichnamigen Ionen eine Geschwindigkeit nach außen.

Anders vollzieht sich die Erscheinung beim Entladen. Es sei AD eine ruhende Kraftlinie (Fig. 15, II), die im Moment der Entladung nach oben zu laufen hat; das kann nur so geschehen, daß ihr Anfangsstück in sehr kurzer Zeit die Stellung A_1B einnimmt, während ihr weiterer Teil CD noch weiter in Ruhe bleibt. Der Impuls entfaltet sich zwischen den Punkten B und C, sein elektrischer Vektor streckt sich in der Richtung von B nach C aus und stößt die mit der Ladung gleichnamigen Ionen nach innen, die entgegengesetzten nach außen. Beim Entladen erhalten also die mit der Ladung ungleichnamigen Ionen eine Geschwindigkeit nach außen.

Auf Grund dieser Theorie kann man also sehr leicht erklären, warum beim Entladen Ionenstrahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen erzeugt werden, wie beim Laden. Ebenso leicht werden auch die anderen Eigentümlichkeiten der primären Strahlungsfiguren erklärt. Wir sind also berechtigt folgenden Satz auszusprechen: mit der disruptiven Änderung der Ladung entstehen neben dem Rande der Kondensatorplatten elektromagnetische Impulse, welche die Moleküle und Atome in Elektronen und Atomionen von großer Geschwindigkeit zerspalten.

Ich habe zur Prüfung der entwickelten Theorie einige bemerkenswerte Versuche durchgeführt, die den ausgesprochenen Satz weiter bekräftigen. Die Fig. 16 (Tafel VI) zeigt die charakteristischen Streifen sowohl der positiven, wie der negativen Ionenstrahlen. Es entstand folgenderweise: Die empfindliche Schicht einer photographischen Platte wurde schwach angefeuchtet, dann wurde die schmale Elektrode auf sie gelegt und mit positiver Elektrizität disruptiv geladen. Für die Kraftlinien bildete der feuchte Fleck einen guten Leiter und ihr Anfangsstück erlitt nur am Rande des Fleckes eine disruptive Änderung, so daß der ionisierende Impuls erst hier entstand. Unter seiner Wirkung zerbrachen einige Moleküle oder Atome und die gleichnamigen Ionen flogen nach außen, die ungleichnamigen nach innen, so wie die Theorie es erfordert. Die Spuren sowohl der positiven wie der negativen Ionenstrahlen sind am Bilde sichtbar.

Nach der Theorie beschränken sich die supponierten Impulse nicht auf Kondensatorplatten, sondern können überall entstehen, wo eine Geschwindigkeitsänderung in den Teilen der Kraftlinien vorkommt. Dies kann überall geschehen, wo sich der Querschnitt der Leitung plötzlich ändert. Die Fig. 14 wurde, wie erwähnt, durch eine Doppelelektrode gewonnen. Man sieht am unteren Rande auf der linken Seite der Figur kleine weiße Kreisflecke, aus welchen Radialstreifen hervorragen. Diese Kreisflecke sind Treffpunkte der in der Luft fliegenden Ionen, welche dort entstanden sind, wo sich die Leitung in die zwei Teile der Doppelelektrode erweiterte.

Auch den Teslatransformator habe ich untersucht. Das von der sekundären Spule emittierte Teslalicht besteht, wie meine Aufnahmen zeigen, aus positiven Ionenstrahlen. Die erhaltenen Strahlungsfiguren sind identisch mit den oben beschriebenen regulären positiven

primären Strahlungsfiguren. Die Reichweiten können zum Messen der erhaltenen Spannung dienen. Selbstverständlich werden auch hier die Ionenstrahlen durch elektromagnetische Impulse erzeugt. Diese Impulse bringen noch in einer Entfernung von 6 m beträchtliche Ionisation hervor.

Die Entstehung der beschriebenen primären Strahlungsfiguren mit „Explosionszentren" kann folgenderweise vor sich gehen. Einige Moleküle oder Atome nehmen durch Verlust von Elektronen oder durch Vereinigung mit Elektronen elektrische Ladung an und erhalten infolgedessen eine Geschwindigkeit. Da sich aber ihre Stabilität durch die Wirkung des Impulses gelöst hat, so können sie während ihres Fluges explodieren, d. h. in ihre Bestandteile zerfallen.

Wir müssen noch auf einige bekannte Tatsachen hinweisen, die mit der oben entwickelten Theorie in vollkommenem Einklang sind. Die Herabsetzung der Funkenspannung durch schnell wechselnde Felder, die von E. Wiedemann entdeckten Entladungsstrahlen, der elektrodenlose Glimmstrom, das Sprühen der Kondensatoren sind Erscheinungen, die in den beschriebenen Versuchsresultaten und in der entwickelten Theorie ihre einfachste Erklärung finden.

7. Die Strahlung der Ionen.

Wir müssen noch das Entstehen der sekundären Strahlungsfiguren erklären. Mangels einer entsprechenden Theorie war ich gezwungen alle Möglichkeiten in Betracht zu ziehen, die bei dieser Erscheinung eine Rolle spielen könnten und ich wurde auf diese Weise zu einer Hypothese geleitet, die den beobachteten Tatsachen am besten entspricht.

Die Annahme von Luftverdichtungen und Verdünnungen als Ursachen dieser Linien widerspricht den Versuchsbedingungen. Ihr Entstehen ist durch wiederholte Zurückwerfung von Ionenstrahlen auch nicht erklärlich. Sie können auch nicht Spuren von Ionisationspartien sein. Es hat sich weiter herausgestellt, daß die Annahme, nach welcher diese Linien die Ergebnisse elektrischer Oszillationen wären, den Versuchsbedingungen widerspricht. Auch eine Interferenztheorie wurde geprüft, führte aber zu keinen Ergebnissen.

Da die bekannten Mechanismen erschöpft sind, müssen wir die wesentlichen Merkmale der Erscheinung als Grundeigenschaften der Ionen betrachten. Ich stellte daher folgende Hypothese auf: Die längs eines Leiters fliegenden Ionen emittieren in bestimmten Zeitintervallen nach dem Leiter zu gerichtete elektromagnetische Impulse, die aus dem Leiter Ionenstrahlen auslösen.

Mit dieser Hypothese erklären wir die sekundären Strahlungsfiguren folgenderweise: Die an der Glasseite der Platte fliegenden Ionen emittieren in gewissen Zeitintervallen, welche von der Energiedichte des Feldes abhängen, elektromagnetische Impulse nach der breiten Elektrode, die die photographische Platte durchdringen und aus der breiten Elektrode Ionen auslösen. Das elektrische Feld wirft die ungleichnamigen Ionen auf die empfindliche Schicht. Die Platte wird einerseits durch diesen Anstoß der Ionen, anderseits durch die Impulse geschwärzt.

Die von einem elektrischen Teilchen ausgehenden Kraftlinien wenden sich größtenteils dem Leiter zu, und die elektromagnetischen Impulse pflanzen sich durch diese Kraftlinien fort; es ist also erklärlich, daß der größte Teil der emittierten Energie dem Leiter zuwandert.

Da die Emission in gewissen Zeitintervallen erfolgt, so müssen konzentrische Kreise, bzw äquidistante Linien entstehen. Der Abstand der Linien hängt von der Geschwindigkeit der Ionen und von dem Emissionsintervall ab. Man kann annehmen, daß sich das Zeitintervall vergrößert, wenn die Energiedichte kleiner wird und dadurch erklärt man die Vergrößerung des Linienabstandes, wenn die Elektrodenentfernung vergrößert wird. Auch andere Eigentümlichkeiten der sekundären Linien werden leicht erklärt.

Der wesentliche Teil der Hypothese liegt in dem Satz, daß das Ion in gewissen Zeitintervallen emittiert. Damit behauptet man eigentlich, daß das Ion quantenhaft ausstrahlt, denn die Vorstellung einer quantenhaften Strahlung hat nur dann einen Sinn, wenn die Emission in gewissen Zeitintervallen erfolgt. Dieser Teil der Hypothese enthält nur die Behauptung, daß die zwischen dem Ion und dem Leiter sich spannenden Kraftlinien in gewissen Zeitintervallen erschüttert werden. Ob dieses Erschüttern der Kraftlinien automatisch — von innerlichen Ursachen aus — erfolgt, wie das in der Theorie der quantenhaften Strahlung angenommen wird, oder aber durch äußere Ursachen bewirkt wird, darüber läßt sich bisher nichts aussagen.

Zusammenfassung.

Mit der photographischen Platte kann man die bekannten Lichtenbergschen Figuren und auch ganz neue Figuren erzeugen. Alle diese Strahlungsfiguren entstehen dann und nur dann, wenn sich die Ladung des Kondensators disruptiv ändert. Zu ihrer Erklärung wird an-

genommen, daß mit der disruptiven Änderung der Ladung am Rande der Kondensatorplatten elektromagnetische Impulse entstehen, welche die Moleküle und Atome in Elektronen und Atomionen von großer Geschwindigkeit zerspalten. Es wird weiter angenommen, daß die längs eines Leiters fliegenden Ionen in bestimmten Zeitintervallen elektromagnetische Impulse emittieren, die aus dem Leiter Ionenstrahlen auslösen.

(Eingegangen 19. März 1917.)

Zur Physik des Integral-Iontometers [1]).

Von Th. Christen.

Auf S. 362, Jahrgang 1915, dieser Zeitschrift beschrieb ich eine Methode zur Messung der Flächenenergie ionisierender Strahlen unabhängig von ihrem Härtegrad. Das hierzu dienende Instrument wurde an anderer Stelle[2]) unter dem Namen Integral-Iontometer veröffentlicht. Dieser Apparat besteht aus einer Ionisationskammer, über welcher ein absorbierender Körper von solcher Form angebracht ist, daß er die leichter absorbierbaren Strahlen genau in demjenigen Verhältnis schwächt, wie deren Ionisationsfähigkeit gegenüber Luft überwiegt.

Dabei war vorausgesetzt, daß das Verhältnis der beiden Absorptionskoeffizienten — α für absorbierenden Körper und β für die Luft — der Gleichung

$$\frac{\beta}{\alpha} = c \tag{1}$$

Genüge leiste, wobei c eine vom Härtegrad unabhängige Konstante bedeutet.

Bei unseren praktischen Versuchen haben wir nun festgestellt, daß, wenn man als absorbierenden Körper Aluminium[3]) wählte, das Instrument beträchtliche Fehler aufwies, und zwar waren die Fehler systematisch, insofern als mit steigendem Härtegrad wachsende Ionisationsströme gemessen wurden. Dieser Fehler kann durch zweierlei Störungen bedingt sein:

1. dadurch, daß bei hohen Härtegraden die überhandnehmende Streustrahlung das Resultat fälscht,
2. dadurch daß Gleichung (1) nicht erfüllt ist.

Nach unseren heutigen Kenntnissen ist nun sicherlich Gleichung (1) für Aluminium nicht erfüllt. Wir kennen sogar mit ziemlich guter Annäherung den Zusammenhang zwischen α für Aluminium und β für Luft. Es ist nämlich, wie Glocker[1]) gezeigt hat,

$$\beta = c \cdot \alpha^{3/4}. \tag{2}$$

Nun haben wir a. a. O. gesehen, daß, wenn man mit senkrechten Koordinaten rechnet, wobei z die Strahlenrichtung bedeutet,

$$\beta \int_0^x e^{-\alpha z} \cdot y \cdot dx$$

eine vom Härtegrad unabhängige Konstante sein muß.

Ist der Querschnitt der Ionisationskammer ein Rechteck, so wird y zur Konstanten und verläßt das Integral. Eliminieren wir überdies β mit Hilfe von Gleichung (2), so wird

$$\alpha^{3/4} \cdot \int_0^{x_1} e^{-\alpha z} \cdot dx$$

eine Konstante sein müssen.

Nun wissen wir, daß

$$\frac{\Gamma_{(\nu)}}{\alpha^\nu} = \int_0^\infty e^{-\alpha u} \cdot u^{\nu-1} \cdot du = \frac{1}{\nu} \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha \cdot x^{\frac{1}{\nu}}} dx \tag{3}$$

Macht man den Keil so hoch, daß

$$\int_{x_1}^\infty e^{-\alpha z} \cdot dx$$

vernachlässigt werden kann, dann besteht die Bedingung, daß

$$\alpha^{3/4} \int_0^\infty e^{-\alpha z} \cdot dx$$

eine von α unabhängige Konstante sein muß.

Wir werden jetzt zeigen, daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn

$$z = x^{4/3}. \tag{4}$$

Dann wird nämlich

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z} \cdot dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x^{4/3}} \cdot dx = {}^3/_4 \cdot \frac{\Gamma_{(3/4)}}{\alpha^{3/4}} \tag{5}$$

woraus sich ergibt, daß

$$\alpha^{3/4} \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha z} dx$$

1) Aus der Strahlenforschungsstelle der Reiniger, Gebbert & Schall A.-G.

2) Fortschritte auf dem Gebiet der Röntgenstrahlen Bd. 23, Heft 6, S. 520.

3) Ein wesentlich leichterer Stoff kann nicht genommen werden, weil sonst die Dimensionen des Absorptionskörpers allzu ungünstig werden.

1) Nach einer privaten Mitteilung von Herrn Dr. Glocker, die sich allerdings nur auf die Verhältnisse zwischen Al und H_2O bezieht, doch mag Gleichung (2) immerhin Geltung haben, da alle für Luft und Wasser in Frage kommenden Elemente Atomgewichte unter 20 haben, sodaß mit großer Wahrscheinlichkeit eine Proportionalität zwischen den Absorptionskoeffizienten für Luft und für Wasser vorausgesetzt werden darf.

eine von α, d. h. vom Härtegrad unabhängige Konstante ist.

Es muß also, entsprechend den durch Gleichung (2) bestimmten Eigenschaften des *Al*, über der rechtwinkeligen Kammer ein Keil aufgesetzt werden, dessen Profil, nicht wie in meiner ersten Abhandlung sich ergab, geradlinig, sondern eine Parabel vom Grad $^4/_3$ sein muß, entsprechend Gleichung (4).

Für den Fall einer kreiszylindrischen Ionisationskammer hatte ich gezeigt, daß unter den damaligen Voraussetzungen [s. Gleichung (1)] der Absorptionskörper ein Rotationsparaboloid zweiten Grades sein müßte. Unter den veränderten Bedingungen, d. h. wenn $\frac{\beta}{\alpha}$ nicht konstant ist, sondern Gleichung (2) gilt, verändert sich auch die Form des Rotationskörpers. Ich habe schon in der genannten Arbeit darauf hingewiesen, daß, im Falle Gleichung (1) nicht erfüllt sei und etwa durch Gleichung

$$\beta = \varphi(\alpha) \tag{6}$$

ersetzt werden müßte, die ursprüngliche Bedingung

$$\alpha \cdot \int_0^h e^{-\alpha z} \cdot df = \text{const} \tag{7}$$

zu ersetzen wäre durch die neue Bedingung

$$\varphi(\alpha) \cdot \int_0^h e^{-\alpha z} \cdot df = \text{const}, \tag{8}$$

wobei h die größte Höhe des Absorptionskörpers an seinem Rand, z seine Ordinate in der Strahlenrichtung und df ein Element seiner zur Strahlenrichtung senkrecht stehenden Grundfläche bedeutet.

Da wir für alle Werte von z, die größer als h sind,

$$e^{-\alpha z}$$

vernachlässigen dürfen, so geht unsere Bedingung über in

$$\varphi(\alpha) \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha z} \cdot df = \text{const}. \tag{9}$$

Nun ist das Flächenelement des kreisförmigen Querschnittes

$$df = 2\pi \cdot r \cdot dr \qquad 0 < r < R, \tag{10}$$

wodurch Gleichung (9) übergeht in

$$\varphi(\alpha) \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha z} \cdot r \cdot dr = \text{const}. \tag{11}$$

Entnehmen wir die Funktion $\varphi(\alpha)$ aus Gleichung (2), so muß gelten

$$\alpha^{3/4} \int_0^\infty e^{-\alpha z} \cdot r \cdot dr = \text{const}. \tag{12}$$

Setzt man jetzt

$$r = m \cdot z^{3/8}, \tag{13}$$

worin m eine zunächst noch unbestimmte Konstante bedeutet, so geht die linke Seite der Gleichung (12) über in

$$\frac{3m}{8} \cdot \alpha^{3/4} \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha z} \cdot z^{-1/4} \cdot dz = \frac{3m}{8} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right). \tag{14}$$

Das Integral in Gleichung (12) ist also, wie Gleichung (12) es verlangt, tatsächlich eine Konstante, vorausgesetzt, daß zwischen der Höhe z und dem Radius r die Beziehung (13) bestehe.

Zur Bestimmung der Konstante m erinnern wir uns daran, daß der Rand des Rotationskörpers den Radius R und die Höhe h haben soll. Es gilt also entsprechend Gleichung (13)

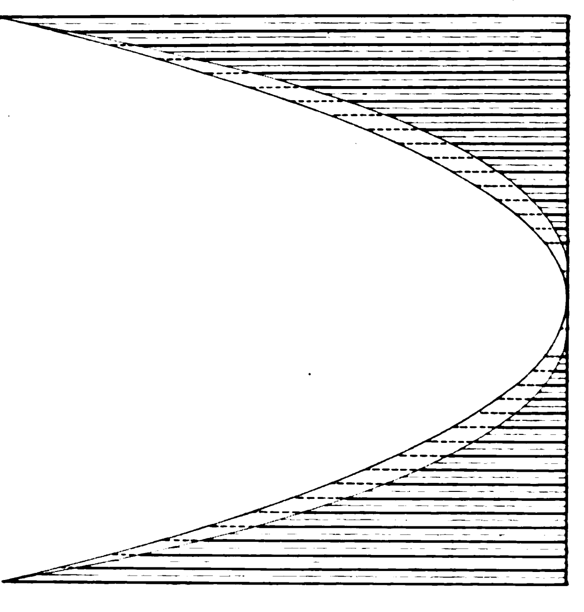
$$R = m \cdot h^{3/8}, \tag{15}$$

wodurch Gleichung (13) übergeht in

$$\frac{z}{h} = \left(\frac{r}{R}\right)^{8/3}. \tag{16}$$

Der Meridian des Rotationskörpers ist also nicht mehr eine Parabel zweiten Grades, sondern eine solche vom Grad $^8/_3$.

Daß diese Korrektur im Sinne einer Verminderung des beobachteten Fehlers wirkt, geht, wie leicht ersichtlich, aus beistehender Figur



hervor. Das Paraboloid vom Grad $^8/_3$ begünstigt, dank seiner stärkern Aushöhlung in der Mitte, den Durchtritt der weichen Strahlen im Vergleich mit den harten, während letztere bei

dem Paraboloid zweiten Grades durch die etwas größere Dicke im mittleren Teil des absorbierenden Körpers nicht wesentlich stärker absorbiert wurden.

Ob diese Korrektur den beobachteten Fehler vollständig kompensiert, oder ob noch ein Restfehler verbleibt, der auf den Einfluß der Streuung zurückzuführen ist, muß der Versuch lehren. Wegen Mangels an Aluminium infolge Beschlagnahme ist uns die Durchführung dieses Versuches zur Zeit nicht möglich. Die vorstehenden Erörterungen sollen aber trotzdem schon jetzt veröffentlicht werden, um etwaigen Nachprüfern die Mühe zu ersparen, ihrerseits nach dem gleichen Fehler suchen zu müssen.

(Eingegangen 24. März 1917.)

BESPRECHUNGEN.

M. Planck, Einführung in die allgemeine Mechanik. Zum Gebrauch bei Vorträgen, sowie zum Selbstunterricht. 8. VI u. 218 Seiten mit 43 Figuren. Leipzig, S. Hirzel. 1916. Preis geh. M. 7.—, geb. M. 8.—.

Obwohl es eine große Anzahl von Lehrbüchern der Mechanik gibt, so kommt man doch gerade hinsichtlich der Empfehlung einer Einführung tatsächlich in Verlegenheit. Teils möchte man den Kontakt mit der klassischen Darstellung gewahrt sehen, und auf der andern Seite bietet eine „vektorielle" Behandlung, die den physikalischen Kern viel unmittelbarer zum Ausdruck bringt, soviel Vorzüge, daß man geneigt ist, die Koordinatenmethode gerade im Anfang so sehr als möglich in den Hintergrund treten zu lassen. Planck betritt hier einen Mittelweg, der zweifellos viel Anerkennung finden wird, um so mehr, als die ganze Darstellung so ausfuhrlich und logisch sauber gehalten ist, daß der Anfänger beim Selbststudium seine Freude daran haben kann. Die Art und Weise, wie der Verf. hier auf einzelne Schwierigkeiten eingeht, — es sei hier beispielsweise hingewiesen auf die in Form eines Zwiegesprächs gehaltene Behandlung von Kräftepaaren an einem starren Körper (Seite 115) — ist bestens geeignet, zu selbständigem Durchdenken des Stoffes anzuregen. Das Werk zerfällt in 2 Teile: Mechanik eines materiellen Punktes (Bewegung auf einer Geraden; Bewegung im Raume; Zentralkräfte, Potential; Integration der Bewegungsgleichungen; relative Bewegung; vorgeschriebene Bedingungen) und Mechanik eines Systems materieller Punkte (Statik eines starren Körpers; Statik eines starren Punktsystems; Dynamik eines beliebigen Punktsystems; Dynamik eines starren Körpers).

Der Schwerpunkt der Darstellung ruht in einem sicheren Hinüberführen vom physikalischen Gedanken zur Aufstellung und Interpretation der Gleichungen. Im übrigen ist es wohl überflüssig, ein Buch aus der Feder von Max Planck in dieser Zeitschrift noch besonders zu empfehlen. H. Hörig.

L. Graetz, Das Licht und die Farben. (Einführung in die Optik.) Sechs Vorlesungen gehalten im Volkshochschulverein München. (Aus Natur u. Geisteswelt Bd. 17). kl. 8°. 128 S. mit 100 Abb. 4. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner 1916. M. 1.20, geb. M. 1.50.

Diese kurze Darstellung der wichtigsten Erscheinungen der Optik wendet sich an ein gebildetes Laienpublikum und umfaßt: geradlinige Ausbreitung, Reflexion und Brechung des Lichtes, Farben, Farbenmischung, Interferenzerscheinungen, Wellentheorie und Beugungserscheinungen, Ultrarot und Ultraviolett, Fluoreszenz und Phosphoreszenz, Photographie, Farbenphotographie und schließlich die Doppelbrechung. Es wird also tatsächlich das ganze Gebiet der Optik durchschritten. Dabei ist von jeder mathematischen Behandlung abgesehen, alles wird an der Hand von Experimenten, die durch gute, aber einfache bildliche Wiedergabe anschaulich dargestellt sind, entwickelt. Die Darstellung ist einfach und sehr klar, so daß das Buch in Laienkreisen viel Freude bereiten kann, aber auch der Physiker, besonders der Lehrer wird mancherlei Anregung aus der Darstellung entnehmen können; bringt ihm das Werkchen auch nur Bekanntes, so wird er doch an dem Aufbau des Ganzen und mancher experimentellen Wiedergabe Freude und Belehrung empfangen. Classen.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Greifswald Dr. Hermann Starke zum etatsmäßigen ord. Professor für Experimentalphysik an der Technischen Hochschule Aachen, die Observatoren an der Sternwarte zu Hamburg-Bergedorf Dr. Kasimir Graff und Dr. Franz Dolberg zu Professoren, der a. o. Professor an der Universität Innsbruck Dr. Adalbert Prey zum ord. Professor der Astronomie an der Deutschen Universität Prag, der a. o. Professor für Geodäsie und Markscheidekunde an der Montanistischen Hochschule Przibram Dr. techn. Franz Aubell und der a. o. Professor für Elektrotechnik und technische Mechanik an der Montanistischen Hochschule Leoben Dr. techn. Rudolf Czebek zu ord. Professoren an denselben Hochschulen.

Verliehen: Dem ord. Professor der Gärungsphysiologie und Bakteriologie an der Technischen Hochschule Wien Dr. Franz Lafar (anläßlich des Übertritts in den Ruhestand) der Titel Hofrat, dem Privatdozenten für Physik an der Technischen Hochschule Zürich Dr. August Piccard der Titel Professor.

In den Ruhestand: Der ord. Professor für Mathematik an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Hermann Amandus Schwarz.

Rücktritt vom Lehramt: Der Dozent für Eisenhütten- und Materialkunde an der Technischen Hochschule Aachen Professor Dr. Ing. Paul Goerens ist in die Dienste der Firma Krupp getreten.

Gestorben: Der Meteorologe Direktor des Brocken-Observatoriums Dr. Max Müller, der ord. Professor der physiologischen Chemie und Pharmazie am Karolinischen Institut und Mitglied des Verwaltungsrates der Nobelstiftung in Stockholm Dr. Karl Axel Hampus Graf Mörner, der Betriebsassistent beim Kaiser-Wilhelm-Institut für Physikalische Chemie und Elektrochemie in Berlin-

Dahlem Dr. Oskar Günther (im Kriege gefallen), der Honorarprofessor für Geodäsie der Technischen Hochschule München Regierungs- und Steuerrat Dr. Ignaz Bischoff.

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1917.

Technische Hochschule Aachen.

Starke: Experimentalphysik II: Atomdynamik, Optik, Thermodynamik, 4; Physikalisches Praktikum: a) Praktische Übungen aus allen Teilen der Physik für Anfänger, 4 oder 6, b) Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen (Dissertationen), tägl., c) Physikalisches Handfertigkeitspraktikum, 2. — **Seitz**: Theoretische Physik: Theorie der elektrischen Schwingungen und elektromagnetische Lichttheorie, 2; Experimentalphysik, enzyklopädischer Kursus: Wärme, Schall, Licht, 2. — **Steubing**: Photographie, 1, Übungen, 2; Theorie der Wärmestrahlung, 1. — **Hopf**: Quantentheorie, 1; Variationsprinzipien der Mechanik, 1. — **Schreber**: Technische Thermodynamik, 2. — **Grotrian**: Allgemeine Elektrotechnik, 5; Theoretische Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Praktikum, 8. — **Rasch**: Ausgewählte Kapitel der praktischen Elektrotechnik; Einleitung in die Elektrotechnik, 2; Konstruktionslehre der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Konstruktionsübungen, 2. — **Finzi**: Elektrische Zentralanlagen und Leitungen, 2, Übungen, 2. —

Bredt: Organische Experimentalchemie I, 4; Allgemeine Übersicht über die organische Chemie, 2; Organisches Praktikum (mit Lipp). — **Classen**: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 4; Anorganisches Praktikum (mit Fischer, Scheen, Schleicher, Laas, Demeure, Rolling und Wolf); Elektroanalytisches und elektrochemisches Praktikum. — **Rau**: Chemische Technologie II: Anorganische Industrien, 2, IV, 2; Entwerfen von chemischen Apparaten und Fabrikanlagen, Übungen, 4; Chemisch-technisches Praktikum (mit Lambris und Salmang). — **Kapff**: Chemische Technologie der Gespinstfasern: Färberei, Bleicherei usw., 2, Übungen, 4. — **Ruer**: Physikalische Chemie II, 2: Ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie, 1; Übungen in physikalischer Chemie, 1; Übungen in physikalischer Chemie für Hüttenleute, 3, für Chemiker, 1 Vormittag, für Fortgeschrittene; Allgemeines hüttenmännisches Praktikum, Übungen, 3. — **Lambris**: Kalk- und Zementindustrie, 1. —

Hamel: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Funktionentheorie, 2 *g*. — **Blumenthal**: Höhere Mathematik III, 3; Elemente der Differential- und Integralrechnung, 5, Übungen, 1; Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Lineare Integralgleichungen, 2 *g*. — **v. Kármán**: Mechanik I: Übersicht über Dynamik des Punktes und starren Körpers, Festigkeitslehre, Hydraulik, 4, Übungen, 1, II: Dynamik und Hydraulik, 3, Übungen, 1; Flugtechnische Aerodynamik, 2 *g*. — **Kötter**: Darstellende Geometrie II, 2, Übungen, 2; Elemente der darstellenden Geometrie, 2, Übungen, 2. — **Gast**: Praktische Geometrie I, 2, II, 1; Geodätisches Praktikum I, 1 Tag, II, 1 Nachmittag; Geodätische Ausarbeitungen, Übungen, 4; Geographische Ortsbestimmung, 2, Übungen, 2; Höhere Geodäsie, 2. — **Wilski**: Markscheiden und Feldmessen II, 3, Übungen (mit Wandhoff und Nysten), 1 Tag. — **Wandhoff**: Markscheiderische Zeichen- und Rechenübungen, 2. —

Universität Basel.

Hagenbach: Experimentalphysik I, 6; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, ganztägig, für Anfänger (mit Veillon und Zickendraht), 8; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Veillon**: Geometrische Optik: Gaußsche Theorie der Linsen und Linsensysteme, 2. — **Matthies**: Einführung in die Mechanik, für Anfänger, 4, Übungen, 1 *g*; Vektor- und Tensoren-Rechnung, 1, Übungen, 1 *g*; Strahlungstheorie, 4; Mathematisch-physikalisches Seminar, 2. — **Zickendraht**: Angewandte Physik V: Radiotelegraphie und -telephonie, 2, IV: Wissenschaftliche Photographie, 2. — **Knapp**: Geographische Ortsbestimmung, 2; Meteorologische Optik, 1; Astronomisches und geodätisches Messen, für Anfänger, 2, für Vorgerücktere, 3. —

Rupe: Chemie der Benzolderivate, 3; Chemisches Vollpraktikum: Organische Chemie, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Fichter und Bernoulli), 1 *g*. — **Fichter**: Anorganische Experimentalchemie, 6; Analytisches Halbpraktikum für Anfänger, 9, für Mediziner: Übungen in der qualitativen Analyse; Chemisches Vollpraktikum: Anorganische und elektrochemische Übungen und Arbeiten, tägl. — **Kreis**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel II, 2; Übungen in der Untersuchung von Lebensmitteln, 4; Arbeiten im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. — **Bernoulli**: Allgemeine physikalische Chemie, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger, 4; Physikalisch-chemisches Vollpraktikum: Übungen und Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. —

Hecke: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen: Proseminar, 1; Ausgewählte Kapitel der Funktionentheorie, 4; Mathematisches Seminar (mit Spieß), 1 *g*. — **Spieß**: Algebra, 4; Über ein noch zu bestimmendes Thema, 2; Geschichte der Mathematik, 1. — **Flatt**: Pädagogisches Seminar, math.-naturwissenschaftliche Abteilung II, 2; Repetitorium der Geometrie, 2. —

Universität Berlin.

Rubens: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 5, Mathematische Ergänzung, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium, 1½ *g*; Arbeiten im Physikalischen Laboratorium, für Geübtere (mit Wehnelt), tägl. — **Planck**: Theoretische Optik, 4; Mathematisch-physikalische Übungen, 1 *g*. — **Wehnelt**: Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Praktikum, 1 *g*; Praktische Übungen für Anfänger I und II (mit Blasius), 7; Physikalisches Praktikum für Pharmazeuten, 3; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das physikalische Arbeiten, 3. — **Hellmann**: Theorie und Gebrauch der meteorologischen Instrumente, 2; Meteorologisches Kolloquium, 1 *g*. — **Einstein**: Relativitäts-Theorie (Fortsetzung), 2. — **Warburg**: Kathodenstrahlen und andere elektrische Konvektionsstrahlen, 2. — **Schmidt**: Elementare Theorie und Anwendungen der Kugel- und Zylinderfunktionen, 2; Das Innere der Erde, 1 *g*. — **Neesen**: Atmosphärische Elektrizität, Blitzableiter, 2. — **Blasius**: Übungen im Anschluß an das Praktikum, 1 *g*. — **E. Meyer**: Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik, 2. — **Born**: Thermodynamik, 3; Variationsprinzipe der Physik, 1 *g*. — **Weinstein**: Theorie der Zustandsgleichungen der Körper, insbesondere der Gase, 3; Vektoranalysis der physikalischen Größen, 2; Geschichte der Physik im Altertum und Mittelalter, 1 *g*. — **Krigar-Menzel**: Elastizitätstheorie und Hydrodynamik, 4. — **Leß**: Praktische Wetter- und Klimakunde, 1; Über die jeweiligen Witterungsvorgänge, 1 *g*. — **Byk**: Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik, 2. — **Hahn**: Radioaktivität, 1. — **Henning**: Vektoranalysis und ihre Anwendung in der Physik, 2. — **Reiche**: Ausgewählte Kapitel der Quantentheorie, 3. — **Seeliger**: Mathematische und physikalische Hydrodynamik, 1. — **Scheffer**: Angewandte wissenschaftliche Photographie, 1; Grundlagen der Mikroskopie und Mikrophotographie, 1 *g*. —

Fischer: Praktische Arbeiten im Chemischen Universitäts-Laboratorium (mit Gabriel, Traube, Leuchs, Stähler, Schoeller und Schrauth), tägl.; Kursus für Mediziner und Zahnärzte, 5. — **Nernst**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemische Thermodynamik, 1 *g*; Praktische Übungen und Arbeiten im physikalisch-chemischen Laboratorium (mit Marckwald), tägl.. — **Beckmann**: Chemische Untersuchungen, tägl. *g*. — **Gabriel**: Organische Experimentalchemie, 5. — **Wichelhaus**: Technologie für Chemiker: Anorganische Stoffe, 4; Übungen im Institut (mit Großmann), tägl.; Anleitung im Institut (mit Groß-

mann), tägl. — **Thoms**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 4; Praktische Übungen und Arbeiten in pharmazeutischer, toxikologischer, physiologischer und Nahrungsmittel-Chemie, tägl.; Nahrungsmitteluntersuchung, mit besonderer Bezugnahme auf den Weltkrieg, 1½. — **Traube**: Qualitative chemische Analyse, 1½. — **Stock**: Anorganisch-chemisches Kolloquium, 1; Anorganisch-chemische Arbeiten, tägl. — **Biedermann**: Explosivstoffe, 2. — **Fock**: Atom- und Elektronentheorie, 1; Kristallchemie und Kristallstruktur, 1. — **Rosenheim**: Anorganisch-chemisches Praktikum (mit R. J. Meyer), tägl.; Übungen in der Experimentalchemie, besonders für Lehrer und Lehrerinnen (mit R. J. Meyer), 8; Praktische Übungen in der Gas- und Maßanalyse, 4. — **Jacobson**: Besprechung chemischer Tagesfragen, 1. — **Emmerling**: Chemische und hygienische Wasseruntersuchung, 1. — **Spiegel**: Anorganische Chemie, für Zahnärzte, 3. — **Neuberg**: Arbeiten auf dem Gebiete der Biochemie, tägl.; Organisch-chemische Arbeiten, tägl. — **Sachs**: Die Bestimmung der Konstitution organischer Verbindungen, 1. — **Meisenheimer**: Überblick der organischen Experimentalchemie, 3, Ergänzungen, 2; Anorganisch- und organisch-chemisches Praktikum in der Landwirtschaftlichen Hochschule, tägl. — **Großmann**: Besprechung chemisch-technischer und wirtschaftlicher Tagesfragen: Kriegsprobleme, mit Exkursionen, 1½. — **Stähler**: Repetitorium der anorganischen Chemie, 2. — **Houben**: Chemische Entdeckungen und ihre Geschichte, 1 *g*; Arbeitsmethoden der organischen und unorganischen Chemie, 1. — **Leuchs**: Einführung in die organische Chemie II, 1. — **Pringsheim**: Alkoholische Gärung, 1. — **Anselmino**: Arzneimittelgesetzgebung, 1. — **Schoeller**: Chemie der Anästhetika und Hypnotika, 1. —

Schwarz: Theorie der elliptischen Funktionen I, 4; Elementargeometrische Behandlung einiger Aufgaben des Maximums und Minimums, 2 *g*; Mathematisches Seminar (mit Schottky), 2 *g*. — **Foerster**: Geschichte der Astronomie, 2 *g*; Grundlehren der Zeit- und Ortsbestimmung, 1 *g*; Die meteorischen und elektrischen Einwirkungen aus dem Himmelsraume, 1 *g*. — **Frobenius**: Analytische Geometrie, 4. — **Schottky**: Allgemeine Funktionentheorie, 4; Potentialtheorie, 4. — **Struve**: Praktische Astronomie, Theorie der Instrumente, 3; Übungen auf der Sternwarte, für Fortgeschrittene, *g*. — **Cohn**: Astrometrie, 4; Übungen, 2 *g*. — **Rothe**: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1 *g*. — **Knopp**: Einführung in die höhere Mathematik, 4; Funktionentheorie II, 4; Mathematische Übungen für mittlere Semester (mit Schur), 14tägig, 2 *g*. — **Guthnick**: Photometrie der Gestirne, 2. — **Schur**: Theorie der Determinanten, 4; Integralrechnung, 4, Übungen, 14tägig, 2 *g*. — **Marcuse**: Geographische Ortsbestimmung, mit geographisch-, nautisch- und aeronautisch-astronomischen Übungen, 1½; Einführung in die astronomische Geographie und Erdphysik, mit Lichtbildern, 1½; Naturwissenschaft und Technik im Dienste des Krieges, mit Lichtbildern, 1. — **Witt**: Fernrohroptik, 2; Astronomische Übungen, 6 *g*. — **Schweydar**: Schwerestörungen und Isostasie, 2. — **Jentzsch**: Höhere Algebra, 4; Synthetische Geometrie, 4. —

Technische Hochschule Berlin.

Kurlbaum: Experimentalphysik: Wärme, Optik, 4, für Architekten, 2; Physikalische Übungen, 4. — **Krigar-Menzel**: Theorie des Lichtes, 4; Theorie der Wärmeleitung und der Strahlung, 2. — **Grunmach**: Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden, 2; Physikalische Maßbestimmungen und Meßinstrumente: Physikalische Übungen, 4. — **Kalischer**: Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik I, 2; Elektromagnetismus und Induktion mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotechnik, 4; Grundzüge der Elektrochemie, 2. — **Berndt**: Luftelektrizität, 1. — **Felgentraeger**: Maß- und Gewichtswesen II, 2; Die Meßinstrumente des Chemikers, 2. — **Gehlhoff**: Elektronentheorie der Metalle, 1. — **Kaßner**: Der Wind nach Entstehung, Messung und Ausnutzung für Hoch- und Hafenbau, See- und Luftschiffahrt, sowie für Windmotorenbau, 1. — **Kock**: Methoden zur Aufnahme von schnell verlaufenden elektrischen und magnetischen Erscheinungen: Oszillographen usw., 2; Meßmethoden der drahtlosen Telegraphie, 2. — **Möller**: Beleuchtungstechnik, 1. — **Petzoldt**: Die Relativitätstheorie, 1 *g*. — **Günther**: Anwendung der Photographie zum Messen in der Technik: Photogrammetrie, mit Lichtbildern und Demonstrationen, 2, Übungen, nach Verabredung. — **Orlich**: Theoretische Elektrotechnik I, 2, Übungen, 1; Elektrotechnische Meßkunde I und II, 2; Elektrotechnisches Laboratorium I, II und III, 4; Elektrotechnisches Laboratorium für Fortgeschrittene, tägl. — **Wedding**: Elektromaschinenbau I und II, 2; Beleuchtungstechnik, 2; Beleuchtungstechnisches Laboratorium, 3, für Fortgeschrittene, tägl.; Elektrotechnik im Bergbau, 2, Übungen, 1. — **Franke**: Elektrische Fernmeldetechnik, einschließlich drahtlose Telegraphie II: Anlagen, 4, Übungen, 1; Entwerfen von Instrumenten und Apparaten der Meß- und Fernmeldetechnik, Übungen, 2; Entwerfen von Anlagen der Fernmeldetechnik, Übungen, 2; Laboratorium für Fernmeldetechnik, 6, für Fortgeschrittene, tägl. — **Kloß**: Elektromaschinenbau I, 4, Übungen, 1, III, 2; Entwerfen elektrischer Maschinen, 4 und 8; Elektrotechnisches Versuchsfeld, 4, für Fortgeschrittene, tägl. — **Leist**: Technik der Kälteerzeugung, 4. — **v. Parseval**: Flugzeuge, 2. — **W. Reichel**: Elektrische Kraftanlagen und Bahnen II, 2; Entwerfen elektrischer Kraftanlagen und Bahnen, Übungen, 4. — **Becker**: Flugmotoren und Luftschiffmotoren, 2. — **Benischke**: Allgemeine Wechselstromtechnik, 4. — **Breslauer**: Berechnung und Prüfung elektrischer Maschinen nach den in der Praxis herrschenden Gepflogenheiten, 2. — **Faßbender**: Einführung in die drahtlose Telegraphie (Experimentalvortrag), 2. — **Kurrein**: Die Herstellung und Prüfung der Meßmaschinen und Meßwerkzeuge, 1 *g*. — **Rüdenberg**: Selbstinduktion und Streuung in elektrischen Maschinen, 2. — **Wagner**: Ausgewählte Kapitel aus der Hochspannungstechnik, 2. — **Zehme**: Elektrische Stadtschnellbahnen und Vorortsbahnen, 2. — **Krell**: Schiffselektrotechnik, 2. — **Dietzius**: Luftschiffbau und Luftschiffahrt, 1. — **Schaffran**: Untersuchungen mit Luft- und Wasserpropellern, 1. —

Hofmann: Experimentalchemie: Chemie der Metalle, mit Einführung, 4; Praktische Arbeiten im anorganischen Laboratorium, tägl.; Gasanalyse, Übungen, 2. — **N. N.**: Chemie der Nahrungsmittel mit Berücksichtigung der Nahrungsmittel-Analyse und Bakteriologie, 4; Chemisch-technische Analyse, 2. — **Dolezalek**: Angewandte Elektrochemie, 2; Kleines physikalisch-chemisches und elektrochemisches Praktikum, 2 halbe Tage; Praktische Arbeiten im physikalisch-chemischen und elektrochemischen Institut, tägl. — **Holde**: Untersuchung der Kohlenwasserstofföle und verwandter Produkte: Schmieröle, Treiböle, Leuchtöle, Paraffin, Ceresin, Asphalt usw., 2. — **Miethe**: Spektralanalyse, mit Übungen, 2; Photochemie und photomechanische Prozesse, 2; Konstruktionstypen photographisch-optischer Instrumente, 1; Praktische Arbeiten im photochemischen Laboratorium, für Photochemiker, tägl.; Photographische Übungen in den gebräuchlichen Prozessen, 16. — **Pschorr**: Organische Chemie II: Aromatische Reihe, zyklische Verbindungen, Farbstoffe, Alkaloide usw., 4; Praktische Arbeiten im organischen Laboratorium, tägl. — **Reisenegger**: Chemische Technologie II: Organische Verbindungen, Faserstoffe, Papier, Leder, Fette, Öle, Seifen, Farbstoffe, Beleuchtung, Trockene Destillation (Gasbereitung, Kokerei, Teerdestilation, Holzschwelerei, Braunkohle, Erdöl) mit Exkursionen, 4; Praktische Arbeiten im technisch-chemischen Institut, tägl. — **Stavenhagen**: Anorganische Experimentalchemie für Bergleute, 4; Praktische Arbeiten im anorganisch-chemischen Laboratorium der Bergbau-Abteilung, tägl.; Einführung in die Experimentalchemie, 2. — **Traube**: Thermochemie, 2; Physikalisch-chemische Übungen, 3; Glasfabrikation und Keramik, 2; Physikalische Chemie und ihre Beziehung zur Biologie, 1. — **Wölbling**: Analytische Chemie, für Bergleute, 2; Chemisches Kollo-

quium, für Bergleute, 1. — **Arndt**: Anwendungen der physikalischen Chemie auf technische Vorgänge, 1. — **Börnstein**: Verbrennung und Heizung, 1. — **Bucherer**: Die Grundzüge der Färberei und Druckerei, 1. — **Byk**: Chemie der photographischen Prozesse, 1. — **Endell**: Ausgewählte Kapitel der Mineralchemie nebst technischen Anwendungen, 1. — **v. Girsewald**: Praktische Kalorimetrie mit Übungen, 2. — **Grüttner**: Stereochemie anorganischer Verbindungen II, 1. — **Herrmann**: Radioaktive Prozesse, 1. — **Just**: Chemische Elektronenlehre, 1. — **Lehmann**: Die Farbenphotographie, 1. — **Liebermann**: Methoden zur Konstruktionsbestimmung organischer Verbindungen, 1. — **Loewenherz**: Erläuternde Vorträge zu den Führungen durch das Chemische Museum: Organischer Teil, 1 *g*; Die Produkte der chemischen Industrie, ausgewählte Kapitel: Organischer Teil, 1. — **Schaarschmidt**: Färberkursus, 4. — **Scheibler**: Über heterozyklische Verbindungen, 1. — **Seegert**: Ausgewählte Kapitel aus der Spektralanalyse, 1. — **Simonis**: Organische Analyse und Arbeitsmethoden, 2. — **Ullmann**: Arbeitsmethoden der Farbenindustrie, 1. — **Voswinckel**: Terpene und Kampfer, 1. — **Wirth**: Analytische Chemie, 1. — **Wolffenstein**: Die neueren Arzneimittel und ihre Fabrikation, 2. —

Dziobek: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2. — **Fuhrmann**: Markscheidekunst und Geodäsie II, für Bergleute, 4, Übungen 4, III, 2; Einführung in die Markscheidekunde, für Bergleute, 4; Markscheiderisches Zeichnen, für Markscheider, 1, Übungen, 1. — **Haentzschel**: Elemente der Mechanik, 4. — **W. Hartmann**: Maschinengetriebe: Anwendungen der Kinematik, 2. — **Haußmann**: Niedere Geodäsie, 4; Geodätisches Praktikum, 2; Praktische Übungen im Feldmessen, 4; Planzeichnen, zugleich Bearbeitung der Aufnahmen, 4; Höhere Geodäsie, 2. — **Jahnke**: Analytische Geometrie und algebraische Analysis, für Bergleute, 3; Höhere Mathematik und technische Mechanik, für Bergleute, 8, Übungen, 2; Ausgleichungsrechnung, für Bergleute, 4. — **Jolles**: Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4. — **Korn**: Ausgewählte Kapitel der Elastizitätstheorie, 2. — **Lampe**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2; Bestimmte Integrale und Differentialgleichungen, 2. — **E. Meyer**: Mechanik I, 4, Übungen und Festigkeits-Laboratorium, 3; Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik, 2. — **Reißner**: Mechanik und graphische Statik I, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Mechanik, 2 *g*. — **Rothe**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2; Differentialgleichungen, 2. — **Scheffers**: Darstellende Geometrie II, 5, Übungen, 5. — **Schuberg**: Mechanische Technologie, für Chemiker, 2; Maschinenelemente mit Übungen im Maschinenzeichnen, für Chemiker, 1, Übungen, 3; Baukonstruktionslehre, 2, Übungen, 4; Die technischen Einrichtungen chemischer Fabriken I, 1, Übungen, 3. — **Wallenberg**: Ausgewählte Kapitel der Elementarmathematik, 2; Funktionentheorie II, 2; Variationsrechnung, 2. — **Böhmer**: Grundzüge der Versicherungstechnik, 2. — **Fuchs**: Lineare Differentialgleichungen, 2. — **Jacobsthal**: Zahlentheorie II, 4. — **Lichtenstein**: Einführung in die Theorie der konformen Abbildung, 2. — **Pirani**: Elemente der graphischen Darstellung und des graphischen Rechnens, 1. —

Universität Bern.

Forster: Experimentalphysik II: Allgemeine Physik, Akustik, Optik, 6; Wärmelehre (Schluß), 1 *g*; Repetitorium der Physik, 2; Theoretisch-praktischer Kurs der Photographie, 2; Physikalisches Praktikum, 4; Arbeiten im physikalischen Institute (Vorgerückte), nach Vereinbarung. — **Gruner**: Analytische Mechanik, 3, Übungen, 1; Theorie der Beugung und deren Anwendung auf die meteorologische Optik, 2; Seminar für theoretische Physik, nach Vereinbarung. — **Blattner**: Theorie der Wechselströme, Leitungsberechnung, Transformatoren, 1. — **Luterbacher**: Meteorologie, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, für Anfänger, 1. — **Koestler**: Elektromagnetische Schwingungen, 1—2; Elastizität und Festigkeit, 1—2. —

Kohlschütter: Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl.; Chemisches Praktikum, für Mediziner, 8; Spezielle Chemie und Technologie der Metalle, 4; Kolloquium über anorganische Chemie, nach Vereinbarung. — **Ephraim**: Analytische Chemie, 3; Thermochemie, 2; Gasanalytisches Praktikum, 3. — **Mai**: Repetitorium der anorganischen Chemie für Mediziner und Lehramtskandidaten, 2. — **Tambor**: Organische Chemie I, 6, Repetitorium 1; Organisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Frl. Woker**: Arbeiten im Laboratorium für physikalisch-chemische Biologie, ganz- oder halbtägig; Kurs für die Untersuchung der Körperflüssigkeiten: Harn, Blut, Milch, Magensaft, 4; Die Ermittlung von Fermenten tierischen und pflanzlichen Ursprungs, 2; Physikalisch-chemische Biologie, 2. — **Abelin**: Chemie der Gärung, 1. — **Schaffer**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel II, 2; Chemische Technologie der Lebensmittelgewerbe, nach Verabredung. —

Graf: Kugelfunktionen mit Repetitorium, 3; Besselsche Funktionen mit Repetitorium, 3; Integralrechnung, mit Repetitorium (eventl.: Differential- und Integralrechnung), 3; Funktionentheorie II, 2; Differentialgleichungen I, 2; Renten- und Versicherungsrechnung, 2; Mathematisches Seminar (mit Huber), $1^1/_2$. — **Huber**: Sphärische Astronomie II, 2; Analytische Geometrie des Raumes mit Theorie der Flächen zweiten Grades, 3; Theorie der Enveloppen und Brennlinien, 2; Elliptische und Thetafunktionen, 2; Mathematisches Seminar (geometrische Richtung) (mit Graf), 1. — **Ott**: Algebraische Analysis I, 2; Differentialrechnung, 2; Analytische Geometrie der Ebene I, 2; Goniometrie und ebene Trigonometrie, 2; Mathematische Übungen, 2. — **Bentelli**: Elemente der darstellenden Geometrie, 4; Praktische Geometrie, meist Übungen auf dem Terrain, 3. — **Mauderli**: Astronomische Phänomenologie II, 2; Didaktik der Himmelskunde und der astronomischen Geographie, 1, Übungen, nach Verabredung; Geschichte der Astronomie: Das 18. und 19. Jahrhundert, 1 *g*. — **Crelier**: Synthetische Geometrie II, 2, Übungen, 1; Geometrie der Bewegung II, 2. — **Berliner**: Höhere Algebra, 1—2. — **Moser**: Mathematische Grundlagen der Versicherung einzelner und verbundener Leben, 2; Ausgewählte versicherungswissenschaftliche Kapitel, nach Vereinbarung; Mathematisch-versicherungswissenschaftliches Seminar, 1—2. — **Bohren**: Methode der kleinsten Quadrate, 2. —

Universität Bonn.

Kayser: Experimentalphysik I: Mechanik, Allgemeine Physik, Wärme, Akustik, 5; Laboratorium für Anfänger, 8, für Vorgeschrittene, tägl. — **Eversheim**: Übungen für Lehramtskandidaten im Experimentalvortrag, verbunden mit Handfertigkeitspraktikum, 2; Grundzüge der Elektrotechnik (technische Vorlesung), 1 *g*; Physikalisches Praktikum für Mediziner, 2. — **Pflüger**: Theorie des Lichtes, 4, Übungen, 1. — **Bucherer**: Neuere Elektrizitätslehre, 1. —

Anschütz: Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 6; Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Chemie, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschrittene sowie für Nahrungsmittelchemiker (mit Benrath, Frerichs und Kippenberger), tägl., für Mediziner (mit Benrath), tägl. außer Sonnabend. — **Rimbach**: Physikalische Chemie II: Thermochemie und Elektrochemie, 3; Chemisches Rechenseminar (mit Wintgen): Unterstufe: Stöchiometrische und chemisch-analytische Aufgaben, 2 *g*, Oberstufe: Physikalisch-chemische Aufgaben, 14tägig, 2 *g*; Übungen in den wichtigsten physikalischen Meßmethoden, 3. — **Wintgen**: Katalysatoren und Fermente, 1. — **Benrath**: August Kekulé und seine Zeit, 1 *g*; Quantitative Analyse, 2; Experimentierübungen für Lehramtskandidaten (mit Wintgen), 1; Übungen in der Gasanalyse, 3. — **Frerichs**: Toxiko-

logische Analyse, 1; Pharmazeutische Chemie II (organisch), 3, III: Zyklische Verbindungen, 1 *g*. — **Gewecke**: Einführung in das chemische Praktikum, 1. — **Mannheim**: Einführung in das chemische Praktikum, für Pharmazeuten, 1; Sterilisieren von Arzneimitteln, 1. — **Kippenberger**: Grundzüge der Nahrungsmittelchemie, 2; Chemische Technologie, organischer Teil (ausschließlich der Farbstoffchemie), mit Exkursionen, 2; Einführung in die chemische Großtechnik II: Organisch-chemische Betriebe, mit Exkursionen, 1 *g*; Besprechung technisch-chemischer Betriebskontrollen, 1 *g*. — **Laar**: Übungen in ausgewählten photographischen Verfahren, tägl.; Graphische Verfahren, mit Besichtigungen, 1. —

N. N.: Elemente der Differential- und Integralrechnung, 4, Übungen, 1 *g*. — **Hahn**: Reelle, komplexe und höhere komplexe Zahlen, 3; Differentialgleichungen, 4, Übungen in der Integration von Differentialgleichungen, 14 tägig, 2 *g*. — **Study**: Einleitung in die Differentialgeometrie: Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie, 3; Mathematisches Seminar: Oberstufe: Vortragsübungen, 14 tägig, 2 *g*. Kolloquium über Invariantentheorie, 2 *g*. — **C. Müller**: Einführung in die Geodäsie, mit Übungen im Freien, 2. — **Küstner**: Theorie und Praxis der astronomischen Instrumente, 3; Astronomisches Kolloquium, 1 *g*; Praktische Übungen im astronomischen Beobachten, nach Verabredung. —

Technische Hochschule Braunschweig.

Dießelhorst: Experimentalphysik: Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, Wärmelehre und Optik, 4; Wechselströme, 3; Physikalisches Praktikum I u. II; Physikalisches Kolloquium, 14 tägig, 2 *g*. — **Bergwitz**: Radioaktivität der Erde und der Atmosphäre, 1; Theoretische Telegraphie, 1. — **Witte**: Naturwissenschaft und Erkenntnistheorie, 1. — **Peukert**: Elektrotechnische Messungen, 2; Allgemeine Elektrotechnik, 4; Grundzüge der Elektrochemie, 2; Elektrotechnisches Praktikum, 9; Arbeiten im elektrotechnischen Laboratorium, für Fortgeschrittenere, 9. — **N. N.**: Elektromaschinenbau, 4, Übungen, 6; Elektrische Bahnen, 2; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. — **Mosler**: Drahtlose Telegraphie, 2; Radiotelegraphisches Praktikum, 3. — **Micheler**: Einführung in die Photographie, 1; Spezielle Photographie, 2; Photographische Übungen, für Anfänger und Fortgeschrittene, 3. —

R. Meyer: Organische Experimentalchemie, 6; Chemische Technologie der Faserstoffe, 1; Arbeiten im chemischen Laboratorium; Chemisches Kolloquium (mit Freundlich), nach Verabredung *g*. — **Biehringer**: Analytische Chemie, 2; Chemisch-technische Rechnungen, 1; Heizstoffe und Kesselspeisewasser, 2, Übungen, 1. — **Freundlich**: Elektrochemie, 2; Chemische Technologie I, 4; Arbeiten im Laboratorium für physikalische Chemie und Elektrochemie. — **Reinke**: Chemische Technologie II, 2; Technische Herstellung der Zuckerarten, 4; Chemisch-technische Analyse II für Zucker-, Stärke-, Gärungs- und Molkereitechnik, 2; Enzyme, 2; Arbeiten im Laboratorium für chemische Technologie II und landwirtschaftlich-chemische Gewerbe; Seminaristische Übungen auf dem Gebiete der chemischen Technologie II, monatlich 2 *g*. — **Schultze**: Agrikulturchemie, 2. — **Beckurts**: Abwässerreinigung, 1; Wasser- und Harnuntersuchung, 1; Pharmazeutische Chemie, 4; Arbeiten im Laboratorium für pharmazeutische Chemie und Nahrungsmittelchemie und in der Nahrungsmitteluntersuchungsstelle. — **Troeger**: Analytische Chemie, 2; Repetitorium der anorganischen und organischen Chemie, 2. — **Emde**: Alkaloide, 1. —

Fricke: Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie, 2; Grundlagen der Theorie der Fourierschen Reihen, 1. — **Timerding**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 4; Perspektive, 1, Übungen, 2; Einführung in die höhere Mathematik, 3, Übungen, 1. — **N. N.**: Statik starrer und elastisch-fester Körper, 4, Übungen, 2. — **Schlink**: Technische Mechanik I: Statik, 6, Übungen und Repetitionen, 3, III: Hydraulik, Aerostatik und Aerodynamik, 4, Übungen und Repetitionen, 2; Meteorologie und Flugwesen, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Konstruktionen, 2. — **Näbauer**: Geodäsie I, 5, Übungen, 2; Grundzüge der sphärischen Astronomie (direkte astronomische Bestimmung der geographischen Koordinaten und des Azimuts), 2, Übungen, 2; Vermessungsübungen I, 5, II, 9; Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen, 3. —

Universität Breslau.

Lummer: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Akustik, 4; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schaefer), 3, für Mediziner und Pharmazeuten, 3, für Geübtere (mit Pringsheim und Schaefer), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Pringsheim und Schaefer), 2 *g*. — **Pringsheim**: Kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität, 4. — **Schaefer**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4. — **Riesenfeld**: Photographisches Praktikum, 2; Die Photographie und ihre Technik, 1. —

Biltz: Unorganische Experimentalchemie, 6; Chemische Referate für Vorgeschrittenere, (mit Meyer und Königs), 14 tägig, $1\frac{1}{2}$ *g*; Chemisches Praktikum, unorganische und organische Abteilung, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner und Landwirte (mit Meyer), 4. — **Meyer**: Einfluß, Bedeutung und Leistungen der Chemie im Kriege, 1 *g*. — **Herz**: Einführung in die physikalische Chemie, 2; Grundlagen der Maßanalyse, 1; Anwendungen der Maßanalyse, mit besonderer Berücksichtigung des Deutschen Arzneibuches, 1; Besprechungen zur qualitativen Analyse, 1 *g*. — **Gadamer**: Anorganische Experimentalchemie, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie, 6; Prüfung der Arzneimittel, 1 *g*; Praktisch-chemische Übungen, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie, der forensischen Chemie und Nahrungsmittelchemie, tägl.; Kleines chemisches Praktikum, 6. — **Ehrlich**: Landwirtschaftlich-chemische Technologie II: Gärungsindustrien (Brennerei, Brauerei usw.), 2; Einführung in die Chemie für Landwirte, organischer Teil, 2; Die Milch, ihre technische Verarbeitung und Verwertung, 1; Gasanalytische und chemisch-technische Untersuchungen, 3; Chemische, biochemische und technische Arbeiten im landwirtschaftlich-technologischen Institut, für Anfänger und Fortgeschrittene, tägl. außer Sonnabend; Biochemisches Kolloquium, 1 *g*. —

Sturm: Theorie der geometrischen Verwandtschaften I, 3; Geschichte der Mathematik, 1. — **Kneser**: Funktionentheorie, 4; Algebraische Kurven und Flächen, 3; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 2 *g*. — **Schmidt**: Mengenlehre, 4; Quadratische Formen, 2; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 2 *g*. — **Steinitz**: Differentialgleichungen, 4, Übungen, 1 *g*. — **Wilkens**: Sphärische Astronomie, 3, Übungen, 1 *g*; Allgemeine Astronomie, 1 *g*; Astronomisches Seminar, 2 *g*; Übungen an den Instrumenten der Sternwarte, nach Verabredung. —

Technische Hochschule Breslau.

Lummer: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum, 3. — **Hilpert**: Elektrotechnik II, 4; Elektromaschinenbau I und II, 2; Apparatebau, 2; Übungen im Elektromaschinen- und Apparatebau, 4; Elektrotechnisches Laboratorium I, 4, III, 8; Kolloquium im Elektrotechnischen Institut, 14tägig, *g*. — **Euler**: Elektrotechnische Meßkunde I und II, 2; Elektrische Kraftanlagen II, 2; Elektrische Bahnen, 2; Übungen im Bau elektrischer Kraftanlagen und Bahnen, 4. — **Grosse-Leege**: Telegraphentechnik, 2. —

Ruff: Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl.; Analytische Chemie, 3; Chemisches Kolloquium (mit Eucken, Neumann und Semmler), 14tägig, 2 *g*. — **Neumann**: Anorganisch-chemische Technologie, 4; Chemisch- und elektrochemisch-technisches Praktikum, tägl. — **Semmler**: Organisch-chemisches Praktikum, tägl.; Organische Expe-

rimentalchemie, 4; Abriß der organischen Chemie, 1. — **Eucken**: Physikalische Chemie I und II, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum für Fortgeschrittene, tägl.; Übungen in physikalischer Chemie und Elektrochemie, 4. — **Nauß**: Einführung in die Gastechnik, 1. —

Dehn: Mathematik, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Analysis, nach Verabredung. — **Hessenberg**: Darstellende Geometrie, 2, Übungen, 4; Analytische Geometrie, 3; Kinematik, nach Verabredung. — **Mann**: Mechanik II: Graphische Statik, 4, Übungen, 2, IV, 2, Übungen, 2; Eisenhochbau, einschließlich Eisenbetonbau II, 2, Übungen, 2; Statik der Baukonstruktionen II, 1. — **Steinitz**: Höhere Mathematik II, 2, Übungen, 2; Vektoranalysis, 2. — **von dem Borne**: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Luftschiffahrt: Theorie der Flugzeuge, 2; Aeronautische und meteorologische Übungen, 2; Grundzüge der Meteorologie, 1; Physik der Erdfeste, 2. —

Technische Hochschule Brünn.

Jaumann: Allgemeine und technische Physik, 3½; Theoretische Physik, 1½; Physikalisches Praktikum, für Chemiker und Maschinenbauer (mit Lohr), 3, für Bauingenieure (mit Szarvassi), 3. — **Lohr**: Physik, für Bauingenieure, 4. — **Szarvassi**: Physikalische Grundlagen der drahtlosen Telegraphie, 2; Meteorologie und Klimatologie, 3. — **Zickler**: Elektrotechnische Messungen, 2; Elektrische Beleuchtungs-Anlagen, 3; Elektrotechnisches Praktikum I, für Anfänger, 4, III: für Elektrotechniker, Übungen, 8, Ausarbeitung, 8. — **N. N.**: Bau elektrischer Maschinen I, 3; Elektrische Apparate, 1; Projektierung elektrischer Anlagen, einschließlich elektrischer Arbeitsübertragung, 2; Elektrotechnische Konstruktionsübungen I, 2, II, 8. — **Siegel**: Verwertung von Prüfungsergebnissen an elektrischen Maschinen für den Dynamobau, 1. —

Hönig: Organische Chemie I, 5; Chemische Übungen III: Organisch-chemische Übungen, 20; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 3. — **Frenzel**: Analytische Chemie I: Allgemeiner Teil, 2; Chemische Übungen I b, 22, II b: Physikalisch-chemische Übungen, 5; Grundzüge der Elektrochemie, 2; Elektrochemisches Praktikum, 3; Physikalische Chemie I, 3. — **Gröger**: Enzyklopädie der technischen Chemie, 1½. — **Knöpfer**: Synthese organischer Verbindungen, 2. — **Donath**: Chemische Technologie anorganischer Stoffe I, 3, II, 3; Chemische Technologie organischer Stoffe I, 3; Übungen im Laboratorium für chemische Technologie I 2 (mit Margosches), 20. — **Margosches**: Chemische Technologie organischer Stoffe III, 1; Katalytische Fetthärtung, 1; Chemische Technologie III: Anleitung zu technisch-chemischen Untersuchungen, 2; Chemische Technologie der organischen Kolloide, 2. — **Ulrich**: Chemische Technologie organischer Stoffe II 2, 5; Mikrochemische Arbeitsmethoden, 1; Übungen im Laboratorium für chemische Technologie II, insbesondere der Farb- und Faserstoffe, II, 25; Spezielle chemische Technologie der Faserstoffe, 1. —

Waelsch: Mathematik I b, 2, Korrepetitionen, 1; Darstellende Geometrie II, 5, Übungen: Konstruktives Zeichnen, 6. — **Tietze**: Mathematik II 1, 3, Korrepetitionen, 1; Mathematik II: Mathematische Näherungsmethoden, 4, Übungen, 1; Variationsrechnung, 2. — **v. Schrutka**: Elemente der höheren Mathematik, 4, Korrepetitionen, 1; Potentialtheorie, 2. — **Benze**: Wahrscheinlichkeitsrechnung II, mit Anwendungen, 3. — **Fanta**: Versicherungsmathematik II, 2, Übungen, 1; Reformen im Rechnungswesen von Versicherungsanstalten, 1. — **Tranquillini**: Technisches Zeichnen I: Elemente des Hochbaues, 2, Übungen, 4. — **Löschner**: Technisches Zeichnen II: Plan- und Geländezeichnen, Übungen, 2; Plan- und Geländezeichnen: Situationszeichnen, Übungen, 4; Niedere Geodäsie, 2; Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie, mit Übungen, 1; Vermessungsübungen II, 12; Sphärische Astronomie, 2. — **Musil**: Technisches Zeichnen: Maschinenzeichnen, 6. — **Steiner**: Elemente der niederen Geodäsie, 2, Übungen, 3. — **Leon**: Mechanik I: Einleitung in die Mechanik, Statik in analytischer und graphischer Behandlungsweise, 5, Übungen, 2. — **Lechner**: Elemente der graphischen Dynamik, 1. — **Bortsch**: Elemente der Mechanik und Festigkeitslehre I, 4. —

Technische Hochschule Danzig.

Krüger: Experimentalphysik II, 4; Kleines physikalisches Praktikum, 4; Großes physikalisches Praktikum, tägl. — **Kalähne** (vertreten durch **Federlin**): Einführung in das physikalische Praktikum, 1; Licht- und Wärmestrahlung, 1; Photographie und photographische Reproduktionsverfahren, 1, Übungen I, für Anfänger, II, für Fortgeschrittene, je 3; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten im photophysikalischen Laboratorium, tägl. — **Försterling**: Elektromagnetische Lichttheorie, 3. — **Föttinger**: Ausgewählte Kapitel aus der Physik der technischen Strömungserscheinungen, 1. — **Horn**: Schwingungserscheinungen auf Schiffen, 2. — **Roeßler**: Elektrotechnik I, 4, II, 2; Elektrotechnisches Laboratorium I, 4, II, 6, III, 8, IV, für Fortgeschrittene, tägl. außer Sonnabend; Projektierung elektrischer Anlagen, 4; Berechnung und Entwurf elektrischer Maschinen (mit Roth), 1, Übungen, 4. — **Grix**: Elektrische Bahnen, 2, Übungen, 4; Berechnung elektrischer Leitungsnetze, 2. — **Roth**: Elektrotechnische Meßkunde, 2. —

v. Wartenberg (vertreten durch **Wohl** und **Jellinek**): Anorganisch-chemische Technologie I, 3, III: Technische Elektrochemie, 1; Chemisches Kolloquium, 2 *g*; Praktikum im anorganisch-chemischen und elektrochemischen Laboratorium, tägl. — **Wohl**: Organische Experimentalchemie II, 2; Organisch-chemische Technologie I, 3; Praktikum im organisch-chemischen Laboratorium, tägl.; Praktikum im Laboratorium für landwirtschaftliche Gewerbe, tägl. — **N. N.**: Physikalische Chemie I und II, 2; Chemisches Kolloquium, 2; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum I und II, 4; Großes physikalisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Jellinek**: Analytische Chemie I, 2. — **Claasz**: Methoden der organischen Synthese, 2. —

v. Mangoldt: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 1. — **Lorenz**: Einführung in die Mechanik, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, 2 *g*. — **Schilling**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 4; Graphische Statik, 2, Übungen, 3. — **Sommer**: Höhere Mathematik II, 2, Übungen, 1; Einführung in die höhere Mathematik, 5. — **v. Brunn**: Himmelsmechanik I: Bewegung der Schwerpunkte, 2. — **Grammel**: Hydrodynamik, 2; Grundzüge der Mechanik, 2. —

Technische Hochschule Darmstadt.

Schering: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrostatik, Elektrische Ströme, 5; Physikalisches Praktikum (mit Zeißig), 4 Nachmittage; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik (mit Zeißig), nach Verabredung; Elektrische Schwingungen und elektrische Wellen, Maxwells Theorie der Elektrizität, mit Demonstrationen, 2. — **Zeißig**: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrostatik, Elektrische Ströme, 4; Ausgewählte Kapitel aus der allgemeinen Physik, für Pharmazeuten, 1. — **Wirtz**: Allgemeine Elektrotechnik I: Elemente der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Meßkunde I: Elektrotechnische Meßinstrumente und Meßmethoden, 2; Übungen im elektrotechnischen Laboratorium (mit Sengel), 4 halbe Tage; Praktikum III: Selbständige Arbeiten für vorgeschrittenere Studierende (mit Sengel und Petersen), nach Verabredung; Grundzüge der Telegraphie und Telephonie, 2; Radiotelegraphisches Praktikum, ½ Tag. — **N. N.**: Allgemeine Elektrotechnik II: Gleich- und Wechselstromtechnik, 4. — **Petersen**: Allgemeine Elektrotechnik, Übungen, 2; Grundzüge der Hochspannungstechnik, 1. — **Sengel**: Konstruktion elektrischer Maschinen und Apparate, 3, Übungen, 3; Elektrische Licht- und Kraftanlagen, 2, Übungen, 2; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. — **Goldschmidt**: Elektrischer Antrieb von Hebemaschinen und industrielle elektrische Betriebe, 2; Referate aus elektrotechnischen Fachblättern, Kolloquium, 1. — **Eberhardt**:

Luftschiffahrt, 2, Übungen, 6; Flugtechnik, 2, Übungen, 6; Allgemeine Vorlesung über das gesamte Gebiet der Luftschiffahrt, 2. —

Wöhler: Spezielle anorganische Chemie, 4; Theoretische Chemie II, 2; Kolloquium über chemische Tagesfragen (mit Martin), 1; Chemisches Praktikum für anorganische und physikalische Chemie (mit Heyl, Martin und Schaeffer), tägl. außer Sonnabend. — **Martin**: Analytische Chemie I, 2. — **Schaeffer**: Agrikulturchemie, 1. — **Finger**: Ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie, 2; Teerfarbstoffe, 4; Praktikum im Laboratorium für organische Chemie (mit Friedlaender), tägl. außer Sonnabend; Färberei-Praktikum (mit Heuser), 4. — **Friedlaender**: Chemie der natürlichen Farbstoffe, 1 *g*. — **Heyl**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 2. — **Dieffenbach**: Elektrochemie, 2; Chemische Technologie, 2; Metallurgie, 2; Chemisches, chemisch-technisches und elektrochemisches Praktikum (mit Moldenhauer und Sander), tägl. außer Sonnabend. — **Vaubel**: Theoretische Chemie II: Thermochemie, 1, Übungen, 3; Steinkohlengasindustrie, 1 *g*; Die maschinellen Hilfsmittel der chemischen Technik, 1½. — **Sonne**: Chemische Technologie der Explosivstoffe, mit Vorführungen, 2. — **Weller**: Untersuchen von Nahrungsmitteln, Genußmitteln und Gebrauchsgegenständen, 1, Übungen, 8. —

Graefe: Höhere Mathematik für Architekten, Chemiker, Elektrochemiker und Geometer, 3, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der höheren Mathematik, 2. — **Horn**: Höhere Mathematik I, einschließlich Elemente der höheren Algebra, 5, Übungen, 3; Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Differentialgleichungen, 2—3. — **Dingeldey**: Höhere Mathematik I, einschließlich Elemente der höheren Algebra, 6, Übungen, 3, II, 2, Übungen, 1. — **Schleiermacher**: Rechenapparate und wissenschaftliches Rechnen, 2 *g*; Aerodynamik in Beziehung zur Luftfahrt, 2 *g*. — **Wiener**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 6; Neuere mathematische Lehren zur Behandlung naturwissenschaftlicher und technischer Aufgaben: Ortsfunktionen und Vektorfelder, 2; Arbeiten im mathematischen Institut (mit Sulzmann), 3. — **Müller**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 6; Reine Kinematik, 2. — **Hohenner**: Geodäsie, 4; Ausgewählte Kapitel aus der Geodäsie, 2; Geodätische Übungen, I, 2 Nachmittage, II, 1 Nachmittag; Geodätische Ausarbeitungen, 4; Praktische Geometrie, Übungen, 1 Nachmittag, Ausarbeitungen, 2. — **Assistenten**: Planzeichnen, 4. — **Gasser**: Geodätische Aufgaben im Luftfahrtwesen, 2. — **Henneberg**: Technische Mechanik, 3, Übungen (mit Graefe), 2; Mechanik I, 6, Übungen, 2. — **Braun**: Hydraulik, 2, Übungen, 1. —

Technische Hochschule Dresden.

Hallwachs: Experimentalphysik II: Elektrizität II, Optik 5; Physikalisches Praktikum I, 6 oder 3, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, für Fortgeschrittene, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — **Toepler**: Theoretische Physik I: Mechanik, 3; Optik, ausgewählte Abschnitte, 1. — **Luther**: Photographisches Praktikum, für Anfänger und Vorgeschrittene, 4 und 8; Selbständige Arbeiten im wissenschaftlich-photographischen Institute, 2 und 4. — **Görges**: Allgemeine Elektrotechnik I, 3; Theorie des Wechselstromes I, 2; Starkstromanlagen I, mit Übungen, 2; Elektrotechnisches Praktikum I, 4; Elektrotechnische Übungen für Geübtere I, 8; Selbständige Arbeiten im Elektrotechnischen Institut, 20; Elektrische Meßkunde, 2. — **Heubach**: Elektromaschinenbau I, 2, III mit Kolloquium, 2. — **Möllering**: Telegraphie und Telephonie, 3. — **Wagner**: Übungen im Gebiete des Elektromaschinenbaues für Elektroingenieure, 12, für Maschinen- und Fabrikingenieure, 4. — **Heger**: Raumakustik, 1 *g*. —

Foerster: Anorganische Experimentalchemie, 6; Anorganisch-chemisches Praktikum: Qualitative Analyse, 12, Quantitative Analyse, technische Titriermethoden, Gasanalyse, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrochemie und physikalischen Chemie, tägl. außer Sonnabend. — **Scholl**: Organisch-technische Chemie, 3; Neuere Erfolge und Probleme der organischen Chemie, 1; Organisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Farbenchemie (mit v. Walther), 12; Praktikum für Farbenchemie bzw. Färbereitechnik (mit v. Walther), tägl. außer Sonnabend; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Farbenchemie bzw. Färbereitechnik (mit v. Walther), tägl. außer Sonnabend. — **König**: Chemie und chemische Technologie der organischen Farbstoffe, 4. — **v. Walther**: Chemie der Zuckerarten und Kohlehydrate, 2. — **Dietz**: Die chemische Technologie der Mörtel und Zemente, 1; Die chemische Technologie des Glases, 1. —

Krause: Höhere Mathematik I, 5, Übungen, 2; Einleitung in die Theorie der Differentialgleichungen, 4; Mathematisches Seminar, 1 *g*; Seminaristische Übungen für Physiker (mit Naetsch), 1 *g*. — **Helm**: Höhere Mathematik III, 3, Seminaristische Übungen für Mathematiker (mit Naetsch), 14 tägig, 2; Theorie der Vektorfelder und des Potentials, 3; Versicherungstechnisches Seminar, 1 *g*, Übungen, 2. — **Ludwig**: Darstellende Geometrie I, 3, Übungen, 4; Algebraische Kurven, 2; Geschichte der Mathematik im Altertum, 1; Seminaristische Übungen über höhere Geometrie, 1 *g*. — **Naetsch**: Sphärische Trigonometrie, 2; Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 3; Einleitung in die Theorie der ganzen Zahlen, 2. — **Pattenhausen**: Methode der kleinsten Quadrate, 2, Seminaristische Übungen, 1; Höhere Geodäsie, 2, Seminaristische Übungen, 1; Sphärische Astronomie, 2, Seminaristische Übungen, 1; Vorübungen zum Planzeichnen für Vermessungsingenieure: Schriftzeichnen, 2; Planzeichnen II für Bauingenieure 2, für Vermessungsingenieure, 4; Skizzieren geodätischer Instrumente, 2; Triangulierungsübungen, 4; Geodätisches Praktikum I, 4, II, 4; Geodätisches Praktikum für Architekten, 4; Größere Geländeaufnahmen, 2 Wochen. — **Grübler**: Technische Mechanik II: Statik einschließlich graphischer Statik, 6, Seminaristische Übungen, 2; Graphostatische Übungen, 2. —

Universität Erlangen.

Wiedemann: Experimentalphysik II: Wärme, Akustik, Optik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger (Chemiker, Mediziner usw.), 2; Physikalisches Halb- und Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Reiger**: Theoretische Physik, 4, Übungen, 1 *g*. — **Hauser**: Photographie, mit Übungen, 2. —

O. Fischer: Organische Experimentalchemie, 5; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium (mit Henrich): a) Analytisch-chemische Übungen, tägl. außer Sonnabend, b) Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Mediziner, 4. — **Busch**: Anorganische Chemie, unter Berücksichtigung ihrer Anwendung in der Pharmazie, 3; Chemische Technologie, anorganische Großindustrie, mit Exkursionen, 2; Chemisches Praktikum: a) Vollpraktikum, tägl., b) Halbpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Übungen auf dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie, ganz- und halbtägig, tägl. außer Sonnabend. — **Henrich**: Analytische Chemie der Metalloide, mit besonderer Berücksichtigung der Maßanalyse (Experimentalvorlesung zur Ergänzung des analytisch-chemischen Praktikums), 2; Repetitorium der Chemie für Chemiker und Pharmazeuten, besonders für Kriegsteilnehmer, 2. —

Noether: Integralrechnung II und Analytische Raumgeometrie II, 4; Elliptische Funktionen, 3. — **Hartwig**: Das Sonnensystem, 2; Systematische Vorführung der Einrichtungen der Sternwarte in Bamberg, tägl. *g*; Astronomisches Praktikum auf der Sternwarte in Bamberg nach Bedürfnis, tägl. *g*. —

Universität Frankfurt a. M.

Wachsmuth: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik und Wärme, 5; Aerodynamik, 1; Physikalisches Kol-



loquium, 14tägig, 2; Physikalische Übungen für Anfänger, 6, für Mediziner, 4, für Fortgeschrittene, tägl.; Wissenschaftliche Arbeiten, tägl.; Handfertigkeitspraktikum (mit Seddig), 3. — **v. Laue**: Potentialtheorie, 4; Quantentheorie, 1. — **Déguisne**: Der elektrische Wechselstrom (Experimental-Vorlesung), 2; Wechselstrom-Messungen, 1; Die elektrische Beleuchtung, 1; Kolloquium über die neuere Literatur der angewandten Physik, 14tägig, 2; Kleines elektrotechnisches Praktikum I, 3, II, 3; Gasmotorenpraktikum, nach Verabredung; Großes elektrotechnisches Praktikum, halb- oder ganztägig; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. — **Linke**: Klimakunde, 2; Meteorologisch-geophysikalische Übungen, 2; Erdbebenkunde, 1. — **Seddig**: Repetitorium der Experimentalphysik, für Kriegsbeschädigte, 2; Photographisches Praktikum, 8. —

Freund: Anorganische Experimentalchemie, 5; Kolloquium über neue chemische Literatur, 14tägig, $1^1/_2$; Großes chemisches Praktikum und Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten: a) Organische Abteilung, ganztägig, b) Anorganische Abteilung (mit Ebler), ganz- oder halbtägig; Kleines chemisches Praktikum für Anfänger: Darstellung chemischer Präparate, Einführung in die qualitative Analyse, Nahrungsmittelanalyse (mit Ebler), 2 halbe Tage; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Ebler), 6; Chemisches Praktikum für Angehörige der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät (mit Speyer), 2 halbe Tage. — **Lorenz**: Elektrochemie, 3; Ausgewählte Kapitel aus der technischen Elektrochemie, 1; Kolloquium über neuere Arbeiten aus dem Gebiete der physikalischen Chemie, 14tägig, 2; Kleines Praktikum der physikalischen Chemie, tägl. außer Sonnabend; Übungen im physikalisch-chemischen Laboratorium, halb- oder ganztägig; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalisch-chemischen Laboratorium, ganztägig. — **Ebler**: Analytische Chemie II: Gewichtsanalyse und Maßanalyse, 2; Radioaktivität und radioaktive Substanzen, 2; Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1, Übungen, 4; Kolloquium über anorganische und analytische Chemie, 1. — **Mayer**: Einführung in die organische Chemie auf elementarer Grundlage, 1; Chemie und Technologie der Teerfarbstoffe, 2; Praktische Übungen in der Färberei der Textilfasern, 2. — **Speyer**: Synthetische Methoden der organischen Chemie I, 2, Besprechungen, 2. — **Tillmans**: Die Chemie der menschlichen Genußmittel, 2; Kursus in der Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Praktikum der Nahrungsmittelchemie, halbtägig. —

Schoenflies: Differentialrechnung, 5, Übungen, 1; Mathematisches Seminar (mit Bieberbach und Szász): Ausgewählte Fragen der höheren Analysis, 2. — **Bieberbach**: Analytische Geometrie, mit Übungen, 6; Partielle Differentialgleichungen, 4. — **Brendel**: Elemente der praktischen Astronomie: Geographische Orts- und Zeitbestimmung, mit Übungen, 4; Versicherungsmathematik, 2; Versicherungsseminar: Versicherungsmathematische Übungen und Vorträge der Teilnehmer, 2. — **Szász**: Zahlentheorie, 4; Theorie der unendlichen Reihen, 2. —

Universität Freiburg i. Br.

Himstedt: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrizität, Optik, Elektrooptik, 5; Übungen aus der theoretischen Physik, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Physikalisches Praktikum für Mediziner und Pharmazeuten, 1 Nachmittag, für Naturwissenschaftler, 2 Nachmittage; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Koenigsberger**: Mathematische Physik; Schwingung und Leitung, nach Verabredung, Repetitorium, nach Verabredung; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Gaede**: Anleitung zu selbständigen Arbeiten im technisch-physikalischen Institut, tägl. —

Gattermann: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum (mit Riesenfeld, Fromm, Meigen, Skita und Hess), für Chemiker, ganztägig, für Nichtchemiker, halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Übungen im Experimentieren und Vortragen für Lehrer der Chemie I (anorganisch) (mit Riesenfeld und Hess), 2 *g*. — **Kiliani**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Arbeiten und Übungen im chemischen Laboratorium (med. Abteilung), tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Autenrieth und Knoop), 6. — **Meyer**: Physikalische Chemie, 3; Photographie mit praktischen Übungen und Demonstrationen, 2; Radioaktivität, 1; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 2; Selbständige physikalisch-chemische Arbeiten, nach Verabredung. — **Riesenfeld**: Anorganische Experimentalchemie, 6; Deutschlands chemische Großindustrie, 1. — **Fromm**: Organische Technologie mit Exkursionen, 2; Repetitorium der organischen Chemie für Mediziner, 2, Repetition, 1. — **Meigen**: Qualitative Analyse, 3; Gasanalytisches Praktikum, 2. — **Skita**: Chemie der Teerfarbstoffe, 2; Übungen im Färben von Gespinstfasern, 2. — **Hess**: Methodik der organischen Chemie für Fortgeschrittenere, 2 *g*; Geschichte der organischen Chemie, 1 *g*. — **Autenrieth**: Pharmazeutische Chemie II: Organische Chemie, 3; Chemie des Harns, 1. — **Knoop**: Ausgewählte Kapitel der physiologischen Chemie, 1; Physiologisch-chemisches Praktikum, 3; Arbeiten und Übungen im physiologisch-chemischen Institut: Einleitung in das chemische Praktikum für Mediziner, 1. — **Madelung**: Benzolderivate, 1. —

Stickelberger: Differential- und Integralrechnung, 5, Übungen, 1; Determinanten, 3. — **Heffter**: Analytische Geometrie der Ebene, 4, Übungen, 1 *g*; Mathematisches Seminar: Geometrie, 2 *g*. — **Loewy**: Über die Mathematik des bürgerlichen Lebens, 2; Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate, 3; Mathematisches Seminar: Ausgewählte Fragen aus der Theorie der Differentialgleichungen, 1. — **Bolza**: Anwendungen der Gruppentheorie, 3. — **Seith**: Darstellende Geometrie: Krumme Linien und Flächen, Perspektive, Axonometrie, 2, Übungen, 2 *g*. — **Ansel**: Theoretische Astronomie, 3; Theorie der Gezeiten, 2; Geographische Ortsbestimmung, mit Übungen, 3 *g*. —

Universität Gießen.

König: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 6, für Vorgeschrittene, nach Verabredung, 3, für Chemiker, Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten, tägl. — **Cermak**: Handfertigkeitspraktikum, 2; Erscheinungen der Interferenz und Polarisation, 1. — **Fromme**: Thermodynamik, 3; Theoretisch-physikalische Übungen, 1; Niedere Geodäsie, 3, Praktische Übungen, 1 Nachmittag; Übungen im Feldmessen und Nivellieren für Landwirte, 1 Nachmittag. — **Aßmann**: Ausgewählte Kapitel aus der Physik der Atmosphäre, 1. — **Uller**: Einführung in die Theorie elektrischer Wechselströme, 1. — **Peppler**: Meteorologische Optik, 1. — **Jentzsch**: Beugungstheorie der optischen Instrumente, 1; Ballistik, 1. —

Elbs: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum, tägl., für Landwirte, tägl. außer Sonnabend; Chemische Übungen für Mediziner und Veterinärmediziner (mit Brand), 5. — **Schaum**: Kolloquium über die Grundlagen der allgemeinen und anorganischen Chemie, 2; Chemische Konstitution und Lichtabsorption, 1; Chemische Energie, 1 *g*; Physikalisch-chemische Übungen, 3; Photographische Übungen, 3; Physikalisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Brand**: Chemische Technologie II: Technologie der organischen Stoffe, mit Exkursionen, 2. — **Feist**: Pharmazeutisch-chemische Präparate, organischer Teil, 3; Ausmittelung der Gifte: Chemische Toxikologie, 2. — **v. Liebig**: Grenzfragen der Chemie, 1 *g*. — **Thomae**: Kolloidchemie und Ultramikroskopie, 1. —

Schlesinger: Analytische Geometrie, 4, Übungen, 1; Einführung in die Algebra, 4; Mathematisches Seminar: Über die allgemeine Relativitätstheorie, 1 *g*. — **Engel**: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1; Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4; Mathematisches Seminar: Funktionentheorie und Differentialgleichungen, 2 *g*. — **Graßmann**: Projektive Geometrie der Ebene in analytischer Behandlung, 4, Seminar, 14tägig, 1; Graphische Statik, 3, Übungen, 1. —

Universität Göttingen.

Debye: Grenzgebiete der Physik und Chemie, 2; Experimentalphysik mit besonderer Berücksichtigung der Mathematik und Physik, 4; Physikalisches Praktikum für Mathematiker und Physiker (mit Simon und Rausch v. Traubenberg), 4; Wissenschaftliche Arbeiten im Physikalischen Institut, tägl. außer Sonnabend; Kolloquium über neuere physikalische Literatur (mit Voigt), 2 *g*; Mathematisch-physikalisches Seminar: Vorträge über Struktur der Materie (mit Hilbert), 2 *g*. — **Voigt**: Einführung in die Mechanik der Kontinua, 2 *g*; Theorie und Anwendung des Potentiales, 4; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, nach Verabredung *g*. — **Wiechert**: Geophysik: Erdbeben, Erdkörper, Erdmagnetismus, Polarlicht, 4; Vermessungswesen, praktischer Teil: Feldmessung, 4; Wetter und Wettervorhersage, 1 *g*; Mathematisch-physikalisches Seminar: Vorträge der Mitglieder über geonomische Fragen, 1 *g*; Geophysikalisches Praktikum, nach Verabredung, *g*. — **Prandtl**: Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Mechanik, einschließlich der Aerodynamik, tägl.; Vorträge über Fragen der Stabilität (mit Runge), 2 *g*. — **Simon**: Elektrizitätsleitung in festen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen, 4; Theorie und Technik des Fernsprechens, 1 *g*; Elektrotechnisches Praktikum, 3; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Elektrizität, tägl. — **Pohl**[1]: Experimentalphysik mit besonderer Berücksichtigung der Naturwissenschaftler und Mediziner, 4; Physikalisches Praktiknm für Naturwissenschaftler und Mediziner, 4. — **Reich**[1]: Differentialgleichungen der angewandten Physik, 1. — **Rausch v. Traubenberg**: Elektrizität und Materie, 1; Einführende physikalische Übungen besonders für Kriegsteilnehmer, 2. —

Windaus: Allgemeine Chemie II: Organische Chemie, 5; Chemisches Kolloquium, 1 *g*; Seminar für Lehramtskandidaten (mit Borsche), 1 *g*; Chemische Übungen (mit Borsche), tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 6. — **Tammann**: Physikalische Chemie, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger, 4 Wochen; Physikalisch-chemische Arbeiten, ganz- und halbtägig; Kolloquium, 1 *g*. — **Coehn**: Die Chemie im Kriege: Stickstoffgewinnung, Explosivstoffe usw., 1; Photographisches Praktikum: a) für Anfänger, b) für Fortgeschrittene, 3; Photochemische Arbeiten, ganz- und halbtägig. — **Zsigmondy**: Kolloidchemie, 1 *g*; Besprechung hervorragender Arbeiten auf dem Gebiete der anorganischen Chemie, 1; Praktikum der anorganischen und der Kolloidchemie, ganz- und halbtägig. — **Borsche**: Theoretische Grundlagen der modernen organischen Chemie, 1; Grundzüge der analytischen Chemie, 2; Chemische Technologie II, 2; Färbereichemische Übungen, 3. — **Mannich**: Einführung in die Chemie für Mediziner, 2; Die Auffindung der Gifte, 1; Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 3; Kolloquium über pharmazeutische Chemie, 1 *g*; Praktische Übungen in pharmazeutischer, toxikologischer und Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend. — **Vogel**: Einführung in die Lehre vom heterogenen Gleichgewicht, 1; Metallographisches Praktikum, 3. — **Bachmann**: Ausgewählte Kapitel aus der analytischen Chemie: Maßanalyse, optische Analyse und Mikroanalyse, 1. —

Hilbert: Mengenlehre, 4; Vorträge über Algebra (mit Frl. Nöther), 2 *g*. — **Klein**: Mathematisch-physikalisches Seminar: Über die neuzeitliche Entwicklung der Mathematik, 2 *g*. — **Runge**: Analytische Geometrie mit Übungen, 6; Vektor-Analysis, 2. — **Landau**: Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 1 *g*; Funktionentheorie, 4. — **Carathéodory**: Differentialgleichungen, 4; Projektive Geometrie, 4; Seminar, 2 *g*. — **Bernstein**[1]: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate, 3; Versicherungsrechnung mit schriftlichen Übungen, 2; Seminar für Versicherungswissenschaft: Vorträge über ausgewählte Gegenstände der Mathematik, 2 *g*. — **Hartmann**: Photographie der Gestirne, 1; Astrophysikalisches Praktikum für Anfänger, 2; Astronomisches Seminar, 2 *g*; Leitung astronomischer und astrophysikalischer Arbeiten für Fortgeschrittene, tägl. — **Ambronn**: Ausgewählte Kapitel aus der Geschichte der Astronomie, 1; Über Präzession, Nutation und Parallaxe, 2; Astronomische Übungen für Anfänger, 6; Leitung astronomischer Arbeiten Fortgeschrittener, tägl. —

[1]) Fallen wegen des Krieges wahrscheinlich aus oder werden von anderen vertreten.

Universität Graz.

N. N.: Experimentalphysik II, für Mediziner, zugleich Einführung in die Physik für Lehramtskandidaten, 4; Physikalische Übungen I, für Chemiker und Naturhistoriker, 6 *g*, II, für Mathematiker und Physiker, 6 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend, *g*. — **Radakovic**: Seminar für theoretische Physik, 2 *g*; Besprechung physikalischer Fragen, 1 *g*. — **Streintz**: Photochemie, 2. — **Rosenberg**: Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 3 *g*. — **Waßmuth**: Physikalisch-chemische Fragen im Lichte der statistischen Mechanik, mit einer gemeinverständlichen Einleitung, 1 *g*. — **Brell**: Einleitung in die Quantentheorie, 3. — **Schenkl**: Einführung in die theoretische Mechanik, 2. —

N. N.: Organische Experimentalchemie, 5; Chemische Übungen für Anfänger (mit Skrabal), tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 4, für Vorgeschrittene, tägl. — **Kremann**: Physikalische Chemie IV, 3; Physikalisch-chemische Rechenmethoden, 2; Physikalisch-chemische und elektrochemische Übungen, 20. — **Skrabal**: Maßanalyse, 2; Harnanalyse, 2; Praktikum aus anorganischer und analytischer Chemie für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend; Chemische Übungen für Anfänger, tägl. außer Sonnabend. — **v. Hemmelmayr**: Chemische Technologie der Brennstoffe und des Verbrennungsprozesses, mit Exkursionen, 2; Experimentierübungen, chemische Schulversuche, 2. —

v. Dantscher: Analytische und projektivische Geometrie des Raumes, 5; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **v. Daublebsky**: Algebra (Fortsetzung), 2; Differentialgeometrie, 3; Mathematisches Seminar II, 2 *g*. — **Streißler**: Darstellende Geometrie, 3. — **Hillebrand**: Theorie der Figur der Himmelskörper, mit besonderer Berücksichtigung des kosmogonischen Problems (Fortsetzung), 3; Astronomische Chronologie, 2. —

Technische Hochschule Graz.

v. Ettingshausen: Physik für Ingenieure: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Elemente der mechanischen Wärmetheorie, Magnetismus, Elektrostatik, Galvanismus, Elektromagnetismus, Induktion, 5; Elektrizitätslehre, 5; Elektrotechnik, $3^1/_2$, Elektrotechnische Übungen: Praktische Messungen, 8; Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2. — **Streintz**: Physik für technische Chemiker: Mechanik, Optik und Wärmelehre, 4; Der Bleiakkumulator, $1^1/_2$. —

Emich: Organische Chemie II, 5; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten im chemischen Laboratorium, für Vorgeschrittene; Anleitung zur mikrochemischen Analyse, für Vorgeschrittene, nach Vereinbarung. — **Andreasch**: Qualitative chemische Analyse II, 2, Laboratoriumsunterricht und Übungen II, 16; Chemische Technologie der organischen Stoffe: Bleicherei, Färberei, Zeugdruck, Gerberei, 4; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der organisch-technisch-chemischen Analyse, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der organischen Chemie und der chemischen Technologie organischer Stoffe, für Vorgeschrittene. — **B. Reinitzer**: Quantitative chemische Analyse II: Maßanalyse, 1, Laboratoriumsunterricht und Übungen, 20; Chemische Technologie der anorganischen Stoffe: Heizung und Beleuchtung durch Verbrennungsvorgänge, 4; Elektrochemie I: Theoretische Elektrochemie, 2; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der Darstellung anorganisch-chemischer Präparate, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der anorganischen Chemie und der chemischen Technologie anorganischer Stoffe, für Vorgeschrittene, nach Ver-

abredung. — **v. Cordier**: Geschichte der Chemie von Lavoisier bis zur Gegenwart, 1. — **v. Hemmelmayr**: Organische Elementaranalyse und quantitative Bestimmung von Atomgruppen in organischen Verbindungen, 2. — **Kremann**: Ausgewählte Kapitel aus der physikalischen Chemie II, 2. — **Fuhrmann**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 3, Übungen, 4; Photographie: Wissenschaftliche Photographie, einschließlich Mikrophotographie und Röntgenphotographie, 1. —

Hocevar: Mathematik I: Algebra und Analysis, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 6, Übungen (mit Weitzenböck), 2. — **Weitzenböck**: Elemente der höheren Mathematik, 4; Einführung in die Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung, 1. — **v. Peithner**: Mathematik II: Geometrie, Integralrechnung, Differentialgleichungen, 4, Übungen (mit Weitzenböck), 2. — **Schüßler**: Darstellende Geometrie, 3, Repetitorium, 2, Seminarübungen für Lehramtskandidaten, 2; Projektive Geometrie II, 3, Übungen, 3. — **Wittenbauer**: Allgemeine Mechanik, einschließlich der Elemente der graphischen Statik II: Statik, Kinematik, Dynamik, 4, Übungen, 3 und 2; Technische Mechanik II: Hydrostatik, Hydraulik, Mechanik der Gase, Flug- und Luftschiffahrt, 3. — **Klingatsch**: Niedere Geodäsie, 4; Geodätische Feldübungen, 8; Sphärische Astronomie, 2; Katastervermessung, 3, Übungen, 16. —

Universität Greifswald.

Stark: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalische Übungen für Naturwissenschaftler, 6; Kleines Praktikum für Mediziner und Pharmazeuten, 2; Leitung selbständiger physikalischer Untersuchungen, tägl. —

Dimroth: Anorganische Experimentalchemie, 6; Chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend: a) in der anorganischen Abteilung, ganz- und halbtägig, b) in der organischen Abteilung (mit Posner), ganztägig, c) für Pharmazeuten und Nahrungsmittelchemiker (mit Scholtz), ganz- und halbtägig, für Mediziner (mit Scholtz), 4, Erläuterungen, $1/2$ *g*. — **Scholtz**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 3; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Sterilisationskursus für Pharmazeuten, 2; Pharmazeutisches Kolloquium, 1 *g*. — **Posner**: Synthetische Methoden der organischen Chemie, 2; Besprechung neuerer Arbeiten aus dem Gebiete der organischen Chemie, 1 *g*. —

Hausdorff: Differentialgleichungen, 4, Übungen, 1 *g*; Elliptische Funktionen, 4; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **Thaer**: Analytische Geometrie, 4, Übungen, 1 *g*; Geodäsie, mit Übungen, 4. —

Universität Halle.

Mie: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalische Übungen für Naturwissenschaftler, 6; Kleines physikalisches Praktikum für Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger physikalischer Untersuchungen, tägl.; Erläuterungen zu den physikalischen Übungen, 2 *g*. — **Schmidt**: Theorie des Lichts, 4; Selbständige Arbeiten für Fortgeschrittene, tägl.; Ausgewählte Kapitel der Physik, für Kriegsteilnehmer, 2; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Bernstein**: Verbrennungs-Kraftmaschinen, 2; Demonstrationen, nach Verabredung, *g*. — **Wigand**: Über Elektronen und Ionen, 1; Physikalisches Handfertigkeits-Praktikum, 3. — **Thiem**: Kursus der praktischen Photographie, 2. —

Erdmann: Praktische Übungen im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner, 4. — **Schulze**: Experimentalchemie, organischer Teil, 4; Praktische Übungen im Chemischen Laboratorium (mit Tubandt), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend; Besprechung der Arzneimittelprüfungen, 1 *g*. — **Baumert**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Praktische Übungen im Laboratorium für Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend; Die wichtigsten Lebensmittel und ihre Verfälschungen, 1 *g*. — **Tubandt**: Elektrochemie, 2; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 4. —

Wangerin: Analytische Mechanik I, 4; Differentialrechnung, 4, Übungen, 1 *g*; Übungen des Mathematischen Seminars, 1 *g*; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, für Kriegsteilnehmer, 2 *g*. — **Gutzmer**: Theorie der analytischen Funktionen, 4; Theorie und Anwendung der Determinanten, 2; Übungen des Mathematischen Seminars, 1 *g*; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, für Kriegsteilnehmer, 2 *g*. — **Eberhard**: Analytische Geometrie der Ebene, 2; Algebraische Gleichungen, 2; Analytisch-geometrische Übungen, 1 *g*. — **Buchholz**: Sphärische Astronomie und geographische Ortsbestimmung, 2; Praktische Übungen zur geographischen Ortsbestimmung, 2. —

Technische Hochschule Hannover.

Precht: Experimentalphysik, 4; Arbeiten im Laboratorium der Physik (mit Leithäuser), 4; Luftschiffahrt, 2. — **Leithäuser**: Photographie, mit Übungen, 2; Elektrische Wellen und drahtlose Telegraphie, 2. — **Kohlrausch**: Grundzüge der Elektrotechnik, 2; Theoretische Elektrotechnik, 4; Elektrotechnisches Laboratorium (mit Beckmann und Brückmann) I, 8, II, 16, III, für Maschineningenieure, 8. — **Heim**: Elektrische Anlagen II: Zentralanlagen (mit Helsing), 3, Übungen, 2; Entwerfen von elektrischen Maschinen und Transformatoren (mit Helsing), 3, Übungen, 2; Elektrische Bahnen, Elektrotechnischer Teil, 2; Elektrische Kraftübertragung, 2. — **Beckmann**: Praktische Elektrotechnik für Anfänger, 1; Elektrotechnische Meßkunde I 1, 2, II, 1; Induktionsmotoren, 1 *g*. — **Brückmann**: Einführung in die Rechnung mit vektoriellen Größen, 1 *g*; Elektrotechnisches Seminar, 1; Drehstrom-Kollektormotoren, 1. —

Seubert: Grundzüge der Chemie, 6; Arbeiten im Laboratorium der anorganischen Chemie (mit Eschweiler, Seybold und Sauermilch), tägl. außer Sonnabend. — **Eschweiler**: Maßanalyse, 2. — **Behrend**: Grundzüge der organischen Chemie, 3; Arbeiten im Laboratorium der organischen Chemie (mit Ingebrigtsen und Nottbohm), tägl. außer Sonnabend. — **Ost**: Zuckerindustrie und Gärungsgewerbe, 3; Farbstoffe und Färberei, 2; Arbeiten im Laboratorium der technischen Chemie, tägl. außer Sonnabend. — **Bodenstein**: Angewandte Elektrochemie, 3; Elektrochemische Übungen (mit Braune), 4; Arbeiten im elektrochemischen Institut (mit Braune), tägl.; Übungen in der Elektroanalyse (mit Braune), 7. — **Laves**: Grundzüge der physiologischen Chemie, 2. —

Kiepert: Höhere Mathematik II (mit Prange), 6, Übungen, 2, IV: Ausgewählte Kapitel der Mathematik, 4. — **Müller**: Höhere Mathematik (mit Prange) I A, 6, Übungen, 2, II A, 6, Übungen, 2, III A, 3, Übungen, 1; Theoretische Mechanik II, 3; Mathematisches Seminar (mit Rodenberg und Salkowski), 2 *g*. — **Salkowski**: Grundzüge der höheren Mathematik, 3, Übung, 1; Praktische Mathematik, 2, Übungen, 2; Geometrie der Kurven und Flächen, 3. — **Rodenberg**: Darstellende Geometrie (mit Richter und Morin), 3, Übungen, 6. — **Prange**: Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Analytische Geometrie, 3; Theorie des Erddrucks, 2. — **Oertel**: Praktische Geometrie, Planzeichnen (mit Petzold), 4; Grundzüge der praktischen Geometrie, 2, Übungen, 3; Geodäsie I: Praktische Geometrie (mit Petzold), 2, Übungen, 6; Grundzüge der astronomischen Ortsbestimmung, 2, mit Übungen. — **Pröll**: Mechanik I: Grundzüge der Mechanik, 4, Übung, 1; Ausgewählte Kapitel der Technischen Mechanik, 1; Aeromechanik in ihrer Anwendung auf Motorluftschiffe und Flugzeuge, 1, Übung, 1. —

Universität Heidelberg.

Lenard: Experimentalphysik: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 4; Physikalisches Praktikum (mit Becker),



6; Physikalisches Seminar und Kolloquium, 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalischen und radiologischen Laboratorium (mit Becker), tägl. außer Sonnabend. — **Becker**: Wärmetheorie: Thermodynamik, kinetische Theorie, 3; Theoretisch-physikalische Besprechungen, 1 *g*; Theorie der Strahlung, 1; Elemente der Vektorenrechnung, 1. — **Schmidt**: Photographische Kurse, für Anfänger und Vorgeschrittene, 2. —

Curtius: Experimentalchemie I: Allgemeine Chemie und Metalloide, 5; Chemisches Praktikum für Anfänger und Geübtere in anorganischer, organischer, physikalischer, analytischer und pharmazeutischer Chemie (mit Jannasch, Trautz und Müller), tägl. außer Sonnabend, für Lehramtskandidaten und Mediziner, halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Chemisches Anfänger-Praktikum für Mediziner, 4. — **Jannasch**: Titrier-Analyse, 2; Ausmittelung der Gifte, 1; Gasanalytisches Praktikum (mit Müller), 4; Chemisches Praktikum zur Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel, 5. — **Trautz**: Physikalische Chemie II: Photochemie, chemische Reaktionsgeschwindigkeit und Katalyse, 3; Metallographie auf Grundlage der Phasenlehre, 1; Physikalisch-chemische Besprechung anorganisch- und organisch-chemischer Arbeiten, 2; Praktische Einführung in die physikalische und Elektrochemie, 4—6 Wochen. — **Krafft**: Geschichte der Chemie, 2; Organische Chemie, 4; Praktisch-chemische Arbeiten und Übungen im Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Anfänger, tägl. außer Sonnabend. — **Mohr**: Besprechung neuerer organisch-chemischer Arbeiten, 1. — **Müller**: Spektralanalyse, 1; Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1; Praktische Übungen, 2. — **Stollé**: Pharmazeutische Chemie. — **Muckermann**: Über neuere Arzneimittel; Repetitorium der Chemie für Pharmazeuten. —

Stäckel: Analytische Geometrie der Ebene, 4, Unterseminar: Übungen, 1; Zahlentheorie, 3; Mathematisches Oberseminar (mit Perron), 2. — **Wolf**: Ausgewählte Kapitel aus den Elementen der Astronomie, 2 *g*. — **Perron**: Ausgewählte Kapitel aus der Elementargeometrie, 3; Mathematisches Unterseminar, 1. — **Koenigsberger**: Differential- und Integralrechnung I, 4; Fouriersche Reihen, 1. — **Koehler**: Synthetische Geometrie der Ebene, 3. — **Pfeiffer**: Darstellende Geometrie mit Übungen, 3. —

Universität Innsbruck.

v. Schweidler: Experimentalphysik II, 4; Elektrische Meßmethoden, 2 *g*; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6, für Mediziner, 3; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. *g*. — **Tumlirz**: Theorie der Wärme, 5; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar, 2 *g*. — **v. Lerch**: Ausgewählte Kapitel der Physik, 3. — **Hammerl**: Elektrotechnik I: Über Gleichstrommaschinen und Motoren, 2 *g*. —

Brunner: Allgemeine Chemie II: Organische Chemie, 5; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium für Chemiker und Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend, für Lehramtskandidaten, halbtägig, für Mediziner, 6. — **Hopfgartner**: Pharmazeutische Chemie, 5. — **Zehenter**: Ausgewählte Kapitel aus der chemischen Technologie anorganischer Stoffe, 2 *g*. —

Gmeiner: Analytische Geometrie (Fortsetzung), 5; Übungen im mathematischen Seminar, 2 *g*. — **Zindler**: Anwendung der Differentialrechnung und der Integralrechnung auf Geometrie (Fortsetzung), 4; Ausgewählte Abschnitte der Topologie, 1; Mathematisches Seminar für Anfänger: Einführung in die Differentialrechnung und die Integralrechnung an der Hand eines Textes (Fortsetzung), 1, für Vorgebildete: Übungen in der Differentialgeometrie, 1. — **Menger**: Darstellende Geometrie II, 2 *g*. —

Universität Jena.

Wien: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Physikalisches Praktikum (mit Auerbach und Pauli): a) für Mathematiker und Physiker, 6, b) für Chemiker, Pharmazeuten und Mediziner, 3; Physikalisches Kolloquium, *g*; Leitung physikalischer Spezialuntersuchungen (mit Auerbach, Straubel und Pauli), tägl. — **Auerbach**: Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper, 2; Grundzüge der Wetterkunde, 2; Ernst Abbes Leben und Wirken, 1 *g*. — **Straubel**: Geometrische Optik, 1. — **Pauli**: Experimentalphysik III: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, für Fortgeschrittene, 2. —

Knorr: Allgemeine Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 5; Analytisch-chemisches Praktikum (mit Wolff): a) Vollpraktikum, 30, b) Halbpraktikum, 15, c) Mediziner-Vollpraktikum, 6, d) Mediziner-Halbpraktikum, 3; Chemisches Praktikum im organischen Laboratorium und Anleitung zu chemischen Spezialuntersuchungen (mit Schneider), 40. — **Wolff**: Maßanalyse, 1½; Elektrolyse und elektrolytisches Praktikum, 2. — **Immendorff**: Grundzüge der anorganischen und organischen Chemie (Experimentalchemie), 5; Chemisches Praktikum für Landwirte: großes, tägl., kleines, 7; Agrikulturchemisches Seminar für Fortgeschrittene, 14tägig, 2 *g*. — **Vongerichten**: Technologie der Teerfarben und verwandter Industriezweige, mit Ausflügen, 2; Technisch-chemisches Praktikum, ganz- und halbtägig. — **Matthes**: Pharmazeutische Chemie II: Organische Chemie, 3; Untersuchung und Darstellung chemisch-pharmazeutischer Präparate, Ausmittelung der Gifte, Halbpraktikum, 15; Praktische und theoretische Übungen aus dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie: Ganzpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Theoretische und praktische Übungen in der Sterilisierung der Arzneimittel- und Verbandstoffe, Urinuntersuchungen, 3. — **Schneider**: Chemie der aromatischen Verbindungen, 2. — **Hirsch**: Chemie und physikalische Chemie der Eiweißkörper, 2. —

Haußner: Differential- und Integralrechnung I, mit Übungen, 5; Synthetische Geometrie, 3; Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, 3; Mathematisches Seminar, 1 *g*; Determinanten, mit Übungen im Proseminar, 2. — **Koebe**: Analytische Geometrie der Ebene, mit Proseminarübungen, 5; Einleitung in die allgemeine Funktionentheorie, 4; Mathematisches Seminar-Funktionentheorie und ausgewählte Kapitel der Differential- und Integralrechnung, 1 *g*. — **Frege**: Über die Grundlagen der Arithmetik, 2 *g*; Begriffsschrift, 1 *g*. — **Knopf**: Zeit- und Ortsbestimmung mit praktischen Übungen auf der Sternwarte, 4; Geodäsie, mit praktischen Übungen: Geländeaufnahme, Nivellieren usw., 2. — **Winkelmann**: Darstellende Geometrie II: Krummlinige Gebilde, Axonometrie, Perspektive, mit Übungen, 4; Vektoranalysis mit Anwendungen, 4. —

Technische Hochschule Karlsruhe.

Lehmann: Physik, 4, Ergänzungen, 2; Physikalisches Laboratorium (mit Schachenmeier), 6; Seminar für Experimentalphysik, 2 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im physikalischen Laboratorium, nach Verabredung. — **N. N.**: Mathematische Physik, 3; Repetitorium der Physik, 2. — **Schachenmeier**: Optik mit besonderer Berücksichtigung der Elektronentheorie, 2. — **Richter**: Elektromaschinenbau III: Synchronmaschinen, Umformer, 3; Übungen im Konstruieren elektrischer Maschinen und Apparate, 4; Elektrotechnisches Laboratorium für Vorgeschrittene, einschließlich Hochspannungs-, Hochfrequenzmessungen und drahtlose Telegraphie (mit Schleiermacher, Schwaiger und Hausrath), 8; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen. — **Schleiermacher**: Grundlagen der Elektrotechnik und Meßkunde, 2; Theoretische Elektrizitätslehre, 4; Elektrotechnisches Laboratorium I, 6. — **Schwaiger**: Elektromotorische Betriebe, einschließlich Bahnen, 2; Elektrische Kraftwerke und Schaltanlagen, 2; Schalt- und Regulierapparate, 1; Nichtstationäre elektrische Vorgänge und Hochspannungstechnik 1, Übungen, 2; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Teichmüller**: Allgemeine Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Seminar, 2; Übertragung und Verteilung elektrischer Energie: Leitungen, 1, Schaltungsschemata, 2,

Übungen, 2; Elektrische Beleuchtung, 2; Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Hausrath**: Instrumente- und Apparatebau, 2; Theoretische Telegraphie, 1; Hochfrequenzmessungen, 1. — **Thomälen**: Theorie der Wechselströme, 2, Übungen, 2. — **Schmidt**: Photographische Kurse, mit Vorträgen über die Theorie der photographischen Vorgänge, für Anfänger und Vorgeschrittene, 2; Exkursionen, 1 Nachmittag. — **Schultheiß**: Geschichte und Wesen der Witterungsvoraussage, nach Verabredung. —

Engler: Organische Chemie I, 4; Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 1; Organisch-chemisches Kolloquium (mit Franzen), 1; Chemisches Laboratorium, 5 Tage. — **Bredig**: Physikalische Chemie II, 2; Ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie und ihrer Anwendungen, 1; Demonstrationen technisch-elektrochemischer Prozesse (mit Askenasy), 3; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Kolloquium, für Vorgeschrittene, 2; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Physikalisch-chemischer und elektrochemischer Einführungskurs, mit einleitenden Vorträgen. — **Bunte**: Chemische Technologie I: Baumaterialien, Glas, Keramik usw., 2, II: Chemische Großindustrie, 2; Übungen in der technischen Analyse (mit Eitner), 4 u. 3, für Vorgerücktere, tägl.; Arbeiten im chemisch-technischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Technologische Exkursionen. — **Franzen**: Organische Chemie II, 2; Ausgewählte Kapitel der theoretischen Chemie, 1. — **Askenasy**: Prozesse der elektrochemischen Großindustrie I, 2. — **Dieckhoff**: Anorganische pharmazeutische Chemie, 2; Analytische Chemie I, 2. — **Eitner**: Methoden der technischen Analyse, 2; Ausgewählte Kapitel der technischen Analyse, 3; Spezielle Technologie der Gasbeleuchtung I und II, 1, Übungen, 4. — **Koenig**: Chemie der Metalle, 2. — **Reis**: Photochemie II: Wirkungen des Lichtes, 2. — **Rupp**: Chemische und mikroskopische Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln sowie Gebrauchsgegenständen, 2. — **Steinkopf**: Chemie der heterozyklischen Verbindungen I und II, 1; Chemie der Alkaloide, 1. — **Terres**: Ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie, 1. — **Ubbelohde**: Industrie des Petroleums, 1; Über Kunststoffe, 1. — **N. N.**: Chemie der Faserstoffe und Farbstoffe II: Die Chemie der künstlichen und natürlichen Farbstoffe, 2; Übungen in Färberei und Druckerei, 2. —

Disteli: Darstellende Geometrie I und II, 4, Übungen, 4; Konstruktive Übungen der Perspektive, 3. — **N. N.**: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2. — **Heun**: Mechanik I und II, 4, Übungen, 2; Mechanisches Seminar, 3 *g*. — **Krazer**: Grundlehren der höheren Mathematik, 4; Höhere Mathematik II, 2. — **Haupt**: Übungen in den Grundlehren der höheren Mathematik, 2; Determinanten, 2. — **Noether**: Stabilitäts- und Schwingungsprobleme, 2; Hydromechanik, 1. — **Wellstein**: Projektionslehre, 2, Übungen, 4. — **N. N.**: Elementare und analytische Geometrie der Ebene und des Raumes I und II, 3, Übungen, 1. — **Haid**: Geodätisches Praktikum II, 6, III, 3; Größere Vermessungsübung, 2 Wochen. — **Bürgin**: Katastervermessung I, 2, Übungen, 2; Plan- und Terrainzeichnen, 2 und 4. —

Universität Kiel.

Dieterici: Experimentalphysik II: Optik, Elektrizität, Magnetismus, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger: a) Mathematiker und Naturwissenschaftler, 8, b) Mediziner und Pharmazeuten, 4, für Fortgeschrittene, tägl. — **Weber**: Potentialtheorie und Elektrostatik, 4; Theorie physikalischer Messungsapparate, 1, mit anschließenden Übungen; Ausgewählte physikalische Messungen und Untersuchungen, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Kolloquium, 2. — **Martienssen**: Elastizitätstheorie, 1. —

Diels: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum I, anorganische Abteilung (mit Mumm), tägl. außer Sonnabend, II, organische Abteilung, tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Feist), 4. — **Rügheimer**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 3; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Berend**: Repetitorium der organischen Chemie, für Mediziner, 3/4. — **Mumm**: Analytische Chemie, 2. — **Stoehr**: Über Alkaloide, 1. — **Preuner**: Einführung in die Elektrochemie, 2. — **Horrmann**: Einführung in die Alkaloidchemie, 1. —

Pochhammer: Analytische Geometrie der Ebene, 4; Einleitung in die Theorie der höheren ebenen Kurven, 3; Übungen im mathematischen Seminar, 1 *g*. — **Harzer**: Praktische Astronomie, 3, Übungen nach Verabredung, *g*. — **Jung**: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte, 3; Differentialrechnung mit Übungen, 5; Übungen im mathematischen Seminar, 1 *g*. — **Kobold**: Einleitung in die höhere Geodäsie, 2; Geodätische Übungen, 2 *g*. — **Toeplitz**: Funktionentheorie, 4, Übungen für mittlere Semester, 2; Kreisteilung, 1 *g*. —

Universität Königsberg.

Kaufmann: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalische Übungen, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Neueste Forschungsergebnisse der Physik, 2 *g*. — **Volkmann**: Einführung in das Studium der theoretischen Physik, 4, Ergänzungen und Erläuterungen, 1 *g*; Mathematisch-physikalisches Laboratorium: Physikalisch-praktische Übungen und Arbeiten für Anfänger und Vorgerückte, 6. — **Hoffmann**: Elektrizitätsleitung in Gasen, 1; Übungen in der Handhabung und Herstellung von Demonstrationsapparaten, 2 *g*. —

Klinger: Anorganische Chemie, 5; Chemische Übungen im Laboratorium (mit Blochmann und Eisenlohr), tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 4; Besprechung besonderer Teile der Chemie (mit Blochmann, Eisenlohr und Sonn), 1 *g*. — **Rupp**: Pharmazeutische Chemie, 3; Übungen im pharmazeutisch-chemischen Laboratorium und Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Ausmittelung von Giften, 1 *g*. — **Zielstorff**: Organische Chemie für Landwirte, 2; Die Ernährung der Pflanze: Düngelehre, 3; Landwirtschaftliche Nebengewerbe, 2; Chemisches Praktikum für Anfänger, tägl. außer Sonnabend; Praktische Übungen auf dem Gebiete der Fütterungslehre und Futterberechnungen, 2; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium, für Geübtere, tägl.; Landwirtschaftliche Exkursionen, 1 Nachmittag, *g*. — **Blochmann**: Analytische Chemie I: Qualitative Analyse, 2; Krieg und Chemie, 1 *g*. —

Meyer: Differentialrechnung, mit Übungen, 4; Zahlentheorie 4, Übungen, *g*; Mathematische Gesellschaft, *g*. — **Battermann**: Geographisch-astronomische Ortsbestimmung, 2, Übungen, 1 Abend *g*. — **Blaschke**: Analytische Geometrie I, 4; Differentialgleichungen, 3—4, Seminar, *g*. — **Kaluza**: Versicherungsmathematik, mit Übungen, 2; Einführung in die Relativitätstheorie, 1; Repetitorium der Elementarmathematik, mit Übungen, 3. —

Universität Leipzig.

Wiener: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Akustik, 5; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Scholl), tägl.; Physikalisches Praktikum, 6, für Mediziner und Pharmazeuten (mit Scholl), 3; Physikalisches Kolloquium (mit Des Coudres), 2 *g*. — **Des Coudres**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Thermodynamische Übungen (mit Fredenhagen und Drucker), 1 *g*; Selbständige Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Fredenhagen), tägl. — **Bjerknes**: Ausgewählte Kapitel aus der Dynamik der Atmosphäre und des Meeres, 2; Selbständige Arbeiten im Geophysikalischen Institut, für Vorgeschrittene (mit Wenger), tägl.; Geophysikalisches Kolloquium (mit Wenger), 2 *g*. — **v. Oettingen**: Das Harmonium reiner Stimmung, 1 *g*. — **Scholl**: Repetitorium der Physik, für kriegsbeschädigte Mediziner, nach Verabredung. — **Marx**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften: Differential- und Integralrechnung, für Mediziner und Naturwissenschaftler, 2. — **Haas**: Einführung in die theoretische

Physik, 4; Selbständige geschichtlich-physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene, nach Verabredung, *g.* — **Lilienfeld**: Erzeugung und Verwendung tiefer Temperaturen, 1 *g.* — **Wenger**: Energieumwandlungen in der Atmosphäre, nach Verabredung. —

Hantzsch: Anorganische Experimentalchemie, 5, Ergänzung, 1 *g*; Analytisch- und anorganisch-chemische Übungen für Chemiker, Pharmazeuten, Mathematiker, Naturwissenschaftler und Landwirte (mit Schaefer), tägl.; Organisch-chemische Übungen (mit Reddelien), tägl.; Chemische Übungen für Mediziner und Zahnärzte (mit Schaefer), 6, für Fortgeschrittene (mit Stobbe, Rassow, Schaefer und Reddelien), tägl. — **Le Blanc**: Physikalische Chemie II: Elektrochemie, mit Demonstrationen unter Berücksichtigung der Technik, 3; Chemisches Praktikum für Anfänger: Analytische und präparative, anorganische und organische Arbeiten (mit Böttger), tägl.; Physikalisch-chemisches Praktikum (Photochemisch-photographisches mit Weigert, Elektrochemisches und kolloidchemisches mit Böttger), tägl.; Physikalisch-chemischer Einführungskurs, auch für Mediziner, auf Wunsch Darstellung elektrochemischer Präparate (mit Schall und Böttger), 4 oder 8. — **Paal**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum, analytisch, anorganisch und organisch, auch für Anfänger, für Chemiker, Mathematiker, Naturwissenschaftler und Landwirte (mit Deußen, Scheiber, Sieverts und Waentig), tägl.; Arbeiten auf dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie (mit Deußen und Waentig), tägl.; Pharmazeutisch-chemisch-toxikologisches Praktikum (mit Deußen und Scheiber), tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner und Zahnärzte (mit Sieverts und Waentig), 6; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, ganz- und halbtägig (mit Heller, Deußen, Scheiber, Sieverts und Waentig), tägl.; Chemisch-technisches Praktikum (mit Heller), tägl. — **Stobbe**: Spezielle organische Chemie: Die aromatischen Verbindungen, 2; Wiederholungskursus der organischen Chemie, *g.* — **Wagner**: Zur Methode und Didaktik des chemischen Unterrichts, 1; Technik der Experimentalchemie und Demonstrationen von Schulversuchen, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Lehrer: Schulversuche, Analyse und Präparate, tägl.; Didaktische Besprechungen: Massenwirkung, 1 *g.* — **Rassow**: Chemische Technologie, Brenn- und Leuchtstoffe sowie ausgewählte anorganische Betriebe, 2; Technologische Exkursionen, *g*; Chemisch-technologisches Praktikum, ganz- oder halbtägig; Der Stickstoff und seine Bedeutung für Technik und Wirtschaft, 1 *g.* — **Weigert**: Moderne Photochemie, 1; Photochemische und photographische Übungen, 4; Photochemische Arbeitsmethoden, 1 *g.* — **Schall**: Allgemeine Übersicht über die technischen und wissenschaftlichen Ergebnisse der Elektrolyse, 1. — **Böttger**: Elektroanalyse, 1, Übungen, unter besonderer Berücksichtigung der Schnellmethoden, 3 *g.* — **Heller**: Allgemeine und technische Chemie, anorganischer Teil, 2. — **Sieverts**: Übungen in technischer Gasanalyse, 1. — **Deußen**: Unsere Lebensmittel, ihre Gewinnung und Zusammensetzung, 1. —

Hölder: Allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Größe, 4; Galois'sche Theorie der algebraischen Gleichungen, 2; Mathematisches Seminar: Übungen in Funktionentheorie, 1 *g.* — **Bruns**: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, 2; Praktikum zur Instrumentenkunde, nach Verabredung; Praktische Arbeiten in der Sternwarte, nach Verabredung, *g.* — **Rohn**: Analytische Geometrie der Ebene, 4, Übungen, 1 *g*; Invariantentheorie, 2. — **Herglotz**: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4; Minimalflächen und konforme Abbildung, 2. —

Universität Marburg.

Richarz: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Übersicht über die Physik, als Wiederholung für Kriegsteilnehmer, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Physikalisches Praktikum (mit Feußner und Schulze), 6; Leitung eigener Untersuchungen, tägl. — **Feußner**: Theoretische Physik: Elektrizität und Magnetismus, 4; Theoretisch-physikalisches Seminar, 2 *g.* — **Schulze**: Kinetische Gastheorie, 2; Übersicht über die theoretische Physik als Wiederholung für Kriegsteilnehmer, 1 *g.* — **Take**: Über die neuen elektrischen Strahlungsarten: Kathoden-, Anoden-, Kanal-, Röntgen- und Becquerelstrahlen, mit Experimenten, 1; Physikalische Technologie mit Demonstrationen und Exkursionen, $1^1/_2$. — **Wegener**: Allgemeine Astronomie mit Lichtbildern und Demonstrationen auf der Sternwarte, 2. —

v. Auwers: Anorganische Experimentalchemie, für Chemiker und Mediziner, 6; Chemisches Seminar, im Anschluß an die wissenschaftlichen Arbeiten im Institut, 14tägig, 2 *g*; Chemisches Praktikum (mit Fries), tägl. außer Sonnabend, für Vorgerückte, tägl.; Chemische Übungen für Mediziner (mit Strecker): Theoretische Einführung, mit Demonstrationen, $^1/_2$, Praktikum, $3^1/_2$. — **Keller**: Anorganische Chemie, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie und Medizin, 6; Nahrungsmittelchemie I, Allgemeines, 1; Besprechungen und Übungen über Prüfung von Arzneimitteln, 1 *g*; Übungen über Keimfreimachung von Arznei- und Verbandmitteln, 2. — **Schmidt**: Praktische Übungen in der analytischen und forensischen Chemie, sowie in der Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel und selbständige Arbeiten im Laboratorium des Pharmazeutisch-chemischen Instituts, (mit Keller), tägl.; Qualitative Analyse im Anschluß, *g.* — **Strecker**: Gewichtsanalyse, 2; Titrieranalyse, 1; Repetitorium der anorganischen Chemie, 2; Gasanalytisches Praktikum, 3. — **Fries**: Ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie: Chemie der aliphatischen Verbindungen, 3; Chemisches Kolloquium, 2 *g*; Chemisches Repetitorium für Mediziner: Organische Chemie, 1. — **Thiel**: Physikalische Chemie I, 3; Theoretische Übungen über ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie, 1 *g*; Physikalisch-chemisches Praktikum, 6; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl.; Photochemisches und photographisches Praktikum für Anfänger und Fortgeschrittene (mit Stuchtey), 2. —

Hensel: Elementare Zahlentheorie, 4; Höhere Funktionentheorie, 2; Mathematisches Seminar, 1 *g.* — **Neumann**: Analytische Geometrie, 4; Funktionentheorie, 4; Mathematisches Seminar, 2 *g* (eventl. **Wiarda**: Differentialgleichungen der Physik, 3; Differentialrechnung, 4; Übungen für jüngere Semester zur Infinitesimalrechnung, 1.) — **v. Dalwigk**: Analytische Geometrie der Ebene mit Übungen, 5; Synthetische Geometrie und Grundlagen der Perspektive, mit Übungen, 3; Mathematische Probleme der Zeit- und Ortsbestimmung, 1. —

Universität München.

Röntgen: Experimentalphysik II: Wärme und Elektrizität, 5; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Praktische Übungen im Physikalischen Laboratorium (mit Koch und Wagner), 4. — **Sommerfeld**: Mechanik der Kontinua: Hydrodynamik, Akustik, Elastizität, 4, Übungen, 2 *g*; Relativitätstheorie, 2; Selbständige Arbeiten im Institut für theoretische Physik, tägl. — **Graetz**: Experimentalphysik II: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Physikalisches Praktikum: a) Übungen in physikalischen Messungen, b) Übungen in physikalischen Demonstrationen, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus der Physik, nach Verabredung *g.* — **Koch**: Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, mit Demonstrationen, 2. — **Wagner**: Über Kathodenstrahlen und Röntgenstrahlen, 1. — **Donle**: Doppelbrechung und damit zusammenhängende Erscheinungen, 2. — **Pummerer**: Explosivstoffe, 1 *g.* — **Kalb**: Chemische Wirkungen des Lichtes, 1. —

Willstätter: Organische Experimentalchemie, 5; Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium: a) Unorganische Abteilung (mit Prandtl und Vanino), tägl. außer Sonnabend, b) Organische Abteilung (mit Wieland und Dieckmann), tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Vanino), 4; Arbeiten im Chemischen Laboratorium für fortgeschrittenere Mediziner (mit Wie-

land), halb- oder ganztägig. — **Paul**: Anorganische Chemie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung, 5; Nahrungsmittelchemie I, mit Exkursionen, 2; Pharmazeutisch-chemische Präparatenkunde: Organische Präparate, 3; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich physikalisch-chemischer, elektrochemischer und nahrungsmittelchemischer Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl. außer Sonnabend. — **Prandtl**: Spezielle unorganische Experimentalchemie: 1. bis 4. Gruppe des periodischen Systems, 4; Praktikum für Gasanalyse, 4. — **Wieland**: Spezielle organische Chemie II: Benzolderivate, 3. — **Dieckmann**: Chemie der Kohlehydrate, 1 *g*. — **Meyer**: Physikalisch-chemisches Praktikum, 4. —

Lindemann: Analytische Geometrie des Raumes, 5; Theorie der bestimmten Integrale und der Fourierschen Reihen, 4; Über das Problem der Quadratur des Kreises, 2; Übungen und Vorträge im Mathematischen Seminar, $1^1/_2$ *g*. — **v. Seeliger**: Kapitel aus der theoretischen Astronomie, 3. — **Voß**: Integralrechnung, 5, Übungen, 1 *g*; Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der Kurven, 2. — **Pringsheim**: Höhere Algebra II, 4. — **Brunn**: Ausgewählte Kapitel aus der Lehre von den konvexen Kurven und Flächen (Eigebilden), 2. — **Hartogs**: Darstellende Geometrie II, 5, Übungen, 3. — **Großmann**: Übungen an den Instrumenten der Sternwarte, nach Verabredung. — **Böhm**: Einleitung in die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, 4; Seminar für Statistik und Versicherungswissenschaft (mit v. Mayr und Zahn), 3. — **Dingler**: Elementarmathematik, mit geschichtlichen und pädagogischen Hinweisen, 4; Einführung in die mathematische Behandlung von Beobachtungsdaten, 2. — **Rosenthal**: Synthetische Geometrie II, mit Übungen, 4; Seminar: Übungen über ausgewählte Fragen der höheren Mathematik, für mittlere Semester, 2. —

Technische Hochschule München.

Fischer: Experimentalphysik II: Magnetostatik, Elektrostatik, elektrische Strömung, veränderliches elektromagnetisches Feld, Elektrooptik, 4; Grundzüge der Physik II: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 3; Apparate und Methoden des physikalischen Unterrichts II: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 3; Praktisch-physikalische Übungen: Aufbau und Handhabung von Apparaten, 4; Einführung in die wissenschaftlichen Arbeitsmethoden der Physik, 8—30; Elemente der theoretischen Physik: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 4. — **Emden**: Physikalisches Praktikum, 4 oder 8; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Physik, 12—30; Konstruktion und Führung der Luftschiffe, 3. — **Knoblauch**: Kinetische Gastheorie, 2; Technisch-physikalisches Praktikum, 4; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Physik, nach Verabredung; Heizung und Lüftung, Übungen, 2. — **Heinke**: Einführung in die Elektrotechnik, Übungen, 2, Praktikum, 2; Elektrotechnik für Maschineningenieure, 3; Elektrische Meßtechnik I, 3; Elektrotechnisches Praktikum I: Meßtechnik und Photometrie, 4, für Vorgeschrittene, nach Verabredung. — **Ossanna**: Theorie und Konstruktion der elektrischen Maschinen III: Transformatoren und Asynchronmotoren, 4; Elektrotechnisches Praktikum II: Messungen an Maschinen, Umformern und Transformatoren, 4; Wechselstrom-Kommutatormotoren, 2; Entwerfen von elektrischen Maschinen, 4; Entwerfen von Wechselstrom-Kommutatormotoren, 4. — **Kadrnozka**: Elektrische Anlagen I (Verwertung elektrischer Arbeit) c: Elektrische Beleuchtung, 3, II: Erzeugung und Verteilung elektrischer Arbeit, 2, Übungen: Entwerfen elektrischer Anlagen, 4. —

Manchot: Allgemeine Experimentalchemie, einschließlich der Grundzüge der organischen Chemie, 5; Unorganisches und analytisch-chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgerücktere, 10, 20 oder 30; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten im unorganischen Laboratorium, nach Verabredung. — **Rohde**: Organische Chemie, 5; Chemisches Praktikum im organischen Laboratorium, 20—30; Spezielle Arbeiten auf dem Gebiete der organischen Chemie, 30; Chemie der hydroaromatischen Verbindungen, 2. — **Albert**: Die Bedeutung der Farbstoffe für die Biologie, 1. — **Hofer**: Analytische Chemie der Metalle und Metalloide nebst Gewichts- und Maßanalyse I, 4; Die elektrochemischen Prozesse, 2; Praktikum im elektrochemischen Laboratorium, 10, 20 oder 30; Praktikum in der technischen Gasanalyse, 3. — **Schultz**: Chemische Technologie V: Organische Farbstoffe, Färberei, 4; Praktikum im chemisch-technischen Laboratorium, 20—30; Spezielle Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Chemie, nach Verabredung. — **Jacob**: Ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie, 1. — **Lintner**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Gärungs-chemisches Praktikum nebst Übungen in der Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln, bis 30; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im gärungs-chemischen Laboratorium, bis 30; Grundzüge der organischen Chemie und Einführung in die Technologie und Warenkunde mit besonderer Berücksichtigung der Gärungsgewerbe, 4. —

Doehlemann: Höhere Mathematik II, 5, Übungen, 2; Grundzüge der höheren Mathematik II, 5, Übungen, 2; Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4; Synthetische (neuere) Geometrie, Flächen 2. Ordnung, 4, Übungen, 1. — **Faber**: Höhere Mathematik IV, 2, Übungen, 2; Mathematische Näherungsmethoden, 4. — **Liebmann**: Elementare Mathematik, 4, Übungen, 1; Analytische Mechanik, 4, Übungen, 1; Ausgleichungsrechnung: Methode der kleinsten Quadrate, 2, Übungen, 1. — **Finsterwalder**: Photogrammetrie, 3; Mathematisches Seminar (Kolloquium) (mit Liebmann und Faber), 2; Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4. — **Schmidt**: Vermessungskunde II, 4, Praktikum, 4; Hauptvermessungsübungen, 2 Wochen; Katastertechnik II, 3, Praktikum IV: Meßübungen, 8, Rechenübungen, 2; Kartierungsübungen, 4. — **Großmann**: Elemente der Astronomie, 2. — **Föppl**: Technische Mechanik einschließlich der Elemente der graphischen Statik und der analytischen Mechanik I: Einführung in die Mechanik, 4, IV: Dynamik, 3, Übungen, 2. —

Universität Münster.

Schmidt: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3 oder 6, für Fortgeschrittene (mit Konen), tägl. — **Konen**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4, Übungen, 1 *g*; Übungen in Demonstrationsversuchen und in der Anfertigung einfacher Apparate, 3. —

Schenck: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 6; Chemisches Praktikum (mit Ley), tägl. außer Sonnabend; Chemische Übungen für Mediziner (mit Kaßner und Ley), 4; Chemisches Kolloquium, 1 *g*. — **Ott**: Repetitorium der anorganischen und analytischen Chemie, 1. — **Kaßner**: Organische Chemie, mit besonderer Berücksichtigung der Medizin und Pharmazie, 4; Kolloquium über pharmazeutische Präparate und die Gegenstände des deutschen Arzneibuchs, 1; Ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie, mit besonderer Berücksichtigung der Brennstoffe und deren Ausnutzung, 1; Über Gifte und deren Nachweis in Untersuchungsobjekten, 1 *g*; Pharmazeutisch-chemische, maßanalytische und toxikologische Übungen, Darstellung chemischer Präparate, Anleitung zur selbständigen Bearbeitung wissenschaftlicher oder technischer Aufgaben, tägl. außer Sonnabend. — **Ley**: Organische Experimentalchemie II, 3. — **Bömer**: Chemie und Technologie der Nahrungs- und Genußmittel I, 2; Chemie und Analyse der Gebrauchsgegenstände, 1 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Chemie, für Fortgeschrittene (mit König), tägl. —

v. Lilienthal: Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 1 *g*; Analytische Mechanik I, 3: Variationsrechnung, 2; Übungen des mathematischen Oberseminars, 2 *g*. — **Killing**: Analytische Geometrie I, 4, Übungen, 1 *g*; Funktionentheorie, 4; Übungen des mathematischen Unterseminars, 2 *g*. — **Schewior**: Darstellende Geometrie II: Axonometrie, Perspektive, Schattenlehre und Kartenprojektion, 3, Übungen, 2 *g*; Praktische Analysis: Graphisches und numerisches Rechnen, mathematische Instrumente, mit Demonstrationen und Übungen, 2; Elemente der höheren Geodäsie, 1; Die Grundzüge der Aeronautik, 1; Die wesentlichen Methoden der Nautik, 1. — **Plaßmann**: Über den Mond, 2 *g*; Anfangsgründe der Bahnbestimmungslehre, 2; Methodik des Unterrichts in der Astronomie und der mathematischen Geographie, 1; Übungen im Beobachten und Rechnen, nach Verabredung *g*. —

Technische Hochschule Prag.

Tuma: Experimentalphysik: Elektrostatik, Stationäre Elektrizitätsströmungen, Magnetische Wirkungen des elektrischen Stromes, Magnetische Induktion, 5, für Kulturingenieure und Geodäten, 3; Thermodynamik, 3; Physikalisches Praktikum, 6. — **Niethammer**: Allgemeine Elektrotechnik, 3; Ausgewählte Kapitel der Wechselstrom-Elektrotechnik, 2. —

Hönigschmid: Anorganische Chemie, 4; Analytische Chemie, anorganisch-quantitativ, 2; Übungen im anorganisch-chemischen und analytischen Laboratorium I und II, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen für Geübtere, tägl. außer Sonnabend. — **Wenzel**: Organische Chemie, 5; Übungen im organisch-chemischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, für Vorgeschrittene, tägl. — **Storch**: Chemie der Metalle und technische Metallgewinnung: II. und III. Gruppe des periodischen Systems, 2; Die wissenschaftlichen Grundlagen der Maßanalyse, 1; Physikalische Chemie III: Photochemie, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, 15; Elektrochemische Prozesse der Industrie, 3, Übungen, 4. — **Ditz**: Chemische Technologie anorganischer Stoffe II, 6; Ausgewählte Kapitel aus der chemischen Technologie anorganischer Stoffe, 4; Übungen im anorganisch-technologischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **v. Georgievics**: Chemische Technologie organischer Stoffe II, $6^1/_2$; Übungen im organisch-technologischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **Harpf**: Technologie des Schwefeldioxyds, 1. — **v. Gintl**: Praktische Übungen in der Ausführung von Heizgasuntersuchungen, 1; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel und Untersuchung von Rohstoffen und Gebrauchsgegenständen, 3; Übungen, 8; Gasanalyse mit praktischen Übungen, 1, Gerichtlich-chemische Untersuchungen mit Demonstrationen, 1. — **Außerwinkler**: Photographie, 1, Übungen, 4, Photographisches Laboratorium, 4. — **Herzog**: Technische Mykologie, Übungen, 6; Agrikulturchemische Arbeitsmethoden, 1; Biochemische Analyse, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen für Vorgeschrittene, tägl.; Agrikulturchemie, 3. — **Siegmund**: Die Enzyme und ihre Bedeutung, 1; Chemie der Düngemittel, 1; Die Verunreinigung der Gewässer, des Bodens und der Luft durch Abwässer, Rauchgase und Staub, 2. —

Carda: Mathematik I, 4, Übungen, 2; Elemente der höheren Mathematik, 2, Übungen, 1. — **N. N.**: Mathematik II, 4, Übungen, 2, für Handelslehrkandidaten, 3; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, 2. — **Rosmanith**: Versicherungsmathematik I, 3, IIa, 1, IIb, 2; Politische Arithmetik, 2. — **Mack**: Darstellende Geometrie, 2, Konstruktive Übungen, 4; Ausgewählte Kapitel aus der darstellenden und projektiven Geometrie, 5. — **Grünwald**: Ausgewählte Abschnitte aus der Bewegungslehre starrer Körper, 2. — **Pöschl**: Allgemeine Mechanik, 4, Übungen, 1, Graphische Übungen, 2; Hydromechanik, 3, Übungen, 1; Besondere Probleme aus dem Gesamtgebiete der Mechanik, 2. — **Haerpfer**: Elemente der niederen Geodäsie, Übungen, 4; Theorie der Kartenprojektionen, 1; Die Nomographie in der Geodäsie, 1. — **Adamczik**: Niedere Geodäsie, $4^1/_2$, Übungen, 6; Grundzüge der sphärischen Astronomie, 3, Übungen, 2; Anwendungen der Geodäsie auf Kulturtechnik, 2, Übungen, 2; Geodätisches Rechnen I, 2, II, 2. —

Universität Rostock.

Heydweiller: Experimentalphysik: Allgemeine Physik, Akustik, Wärme, 5; Physikalische Übungen für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 8, für Mediziner und Pharmazeuten, 4; Wissenschaftlich-physikalische Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar (mit Weber), 1. — **Weber**: Analytische Mechanik, 3; Elektrizität und Magnetismus, 2; Übungen zur theoretischen Physik, 1. —

Pfeiffer: Anorganische Chemie, 5; Großes chemisches Praktikum, anorganische Abteilung, tägl.; Leitung wissenschaftlicher Arbeiten, tägl.; Kleines chemisches Praktikum, halbtägig; Übungen für Nahrungsmittelchemiker, nach Verabredung, für Mediziner (mit Stoermer), 4. — **Stoermer**: Ausgewählte Kapitel aus der Chemie der Benzolderivate und heterozyklischen Verbindungen, 3; Chemie der Riechstoffe, mit besonderer Berücksichtigung der Terpen- und Kampferchemie, 1; Maßanalyse, 1; Übungen in der organischen Abteilung: Großes chemisches Praktikum, tägl., Wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Honcamp**: Agrikulturchemie II: Tierernährung, 2; Agrikulturchemisches Praktikum, tägl. — **Kümmell**: Elektrochemie, 2. —

Staude: Theorie der Kurven und Flächen, 4; Analytische Mechanik, 4; Mathematisches Seminar, 2. —

Universität Straßburg.

Braun: Experimentalphysik II: Wärme, Akustik, Elektrizität, 5; Physikalische Übungen, 5 oder 10, Übersichtskurs für Mediziner, 3; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Cohn**: Experimentalphysik II; Teile der theoretischen Physik; Physikalische Übungen für Lehramtskandidaten und für Mediziner, nach Verabredung. — **Rohmann**: Kinetische Gastheorie, 2. — **Hecker**: Die Arbeitsmethoden der Erdbebenforschung, 1. —

Thiele: Allgemeine Experimentalchemie, organischer Teil, 5; Chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschrittene (mit Wedekind und Straus), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Kolloquium für Anfänger, 1 *g*. — **Rose**: Chemische Technologie der schweren Metalle, 3; Die häufiger gebrauchten Mineralfarben, 1 *g*. — **Wedekind**: Physikalische Chemie, 3; Analytische Chemie II, 2; Physikochemisches Praktikum, 4. — **Straus**: Benzolderivate, 4. — **Kreutz**: Chemie und Technologie des Weines, Schaumweines und der Branntweine, 1. — **Ruggli**: Synthesen der organischen Chemie III, 1; Kolloquium über neuere chemische Arbeiten (mit Weitz), nach Verabredung, *g*. — **Weitz**: Ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie II, 1. — **Oesterle**: Pharmazeutische Chemie und chemische Toxikologie, 5; Arbeiten im Laboratorium des pharmazeutischen Instituts, tägl. außer Sonnabend; Pharmakognostisch-mikroskopische Übungen, 3; Pharmakochemisches Kolloquium, nach Verabredung *g*. —

Schur: Räumliche projektive Geometrie, 3, Übungen, $1^1/_2$; Fragen der Elementargeometrie, 2. — **Wellstein**: Analytische Geometrie des Raumes, 3; Differential- und Integralrechnung II, 3. — **Epstein**: Funktionentheorie II: Elementare und elliptische Funktionen, 3. — **Bauschinger**: Einleitung in die Mechanik des Himmels, 4; Übungen auf der Sternwarte für Fortgeschrittene, nach Verabredung. — **Wirtz**: Einführung in die Theorie der Mondbewegung, 1. —

Technische Hochschule Stuttgart.

v. Koch: Experimentalphysik: Elektromagnetismus, Induktion, Akustik, Optik, Elektrooptik, 4; Theoretische



Physik, mit Einleitung: Mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik, 2; Übungen im physikalischen Institut: a) Physikalisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend, b) Anleitung zu physikalisch-wissenschaftlichen Arbeiten, tägl.; Handfertigkeitspraktikum in Physik, für Vorgeschrittene, 2—3; Physikalisches Kolloquium, 2; Meteorologie, ausgewählte Kapitel, 1. — **Veesenmeyer**: Grundlagen der Elektrotechnik: a) Konstruktionen und Anlagen, 1, Übungen, 1; Elektrotechnische Konstruktionselemente (mit Brandegger), 1, Übungen, 6; Dynamobau I (mit Brandegger), Seminar, 1, Übungen, 6, II, 2; Elektrische Apparate, 1; Elektrotechnische Maschinenkonstruktionen (mit Brandegger), 8; Projektieren elektrischer Anlagen (mit Brandegger), 1. — **Emde**: Gleichstromtechnik I, 2, Übungen, 8, II, 2, Übungen, 4. — **Herrmann**: Elektrische Meßinstrumente und Meßmethoden I, 1, Übungen, 8, II, 1, Übungen, 4; Schwachstromtechnik II, 2, Übungen, 4; Drahtlose Telegraphie, 2, Übungen, 4. —

Gutbier: Technische Chemie I: Anorganisch-chemische Großindustrie, 4; Übungen im Laboratorium für anorganische Chemie und anorganisch-chemische Technologie (mit Schmidt und Huber), tägl. außer Sonnabend. — **Küster**: Organische Experimentalchemie, 5; Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 2; Toxikologie, 1; Übungen im Laboratorium für organische Chemie, organisch-chemische Technologie und Pharmazie (mit Bauer), tägl. außer Sonnabend. — **Grube**: Physikalische Chemie, 3; Metallurgie, mit Ausschluß der Eisenhüttenkunde, 1; Übungen im Laboratorium für physikalische Chemie und Elektrochemie, tägl. außer Sonnabend. — **Kauffmann**: Farbenchemie, unter besonderem Eingehen auf die Chemie mehrkerniger Benzolderivate, 2; Chemische Tagesfragen aus Wissenschaft und Technik, mit Exkursionen, 1. — **Schmidt**: Analytische Chemie, 2; Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 2. —

Haller: Trigonometrische Übungen, 2. — **Stübler**: Mathematische Geographie mit Übungen, 2.; Synthetische Geometrie, 3. — **Kutta**: Höhere Mathematik I, mit Übungen, 8, III, 4, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 2. — **Mehmke**: Darstellende Geometrie I (mit Stübler), 3, Übungen, 4, II, 1, Übungen, 2; Analytische Mechanik (mit Stübler), 3, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 1. — **Wölffing**: Krümmungstheorie, 3; Partielle Differentialgleichungen, 1 *g*. — **Kommerell**: Ausgewählte Kapitel der Elementarmathematik, 2. — **Roth**: Perspektive, 2. — **Kriemler**: Technische Mechanik, 6, Übungen, 6. — **N. N.**: Aerostatik und Aerodynamik, 2. — **v. Hammer**: Praktische Geometrie II: Vermessungskunde, 5, Messungsübungen, 12, Ausarbeitung der Messungen, 2; Geodätische Schlußübungen, 12 Tage; Ausgleichungsrechnung: Methode der kleinsten Quadrate, Übungen, 2; Direkte Zeit- und geographische Ortsbestimmung, Übungen, 1; Übungen in praktischer Geometrie (mit Heer), 8. —

Universität Tübingen.

Paschen: Experimentalphysik: Mechanik, Optik, 5; Physikalische Übungen für Anfänger, 4, für Fortgeschrittene, halbtägig; Selbständige wissenschaftliche Untersuchungen, ganztägig. — **Füchtbauer**: Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, mit Übungen, 4. — **Rosenberg**: Sphärische Astronomie mit besonderer Berücksichtigung der geographischen Ortsbestimmung, 2, Übungen, 2; Leitung selbständiger astronomischer und astrophysikalischer Arbeiten, für Fortgeschrittene, tägl. — **Gerlach**: Experimentelle Wärmelehre: Thermodynamik, Wärmeleitung, Wärmestrahlung, 1; Praktische Physik I, Ergänzungen zum physikalischen Praktikum: Mechanik, Wärme, Optik, mit Übungen, 2. —

Wislicenus: Experimentalchemie II: Organische Chemie, 5, Ergänzungen, 1 *g*; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium für Anfänger und Fortgeschrittene: a) Analytisch-chemisches Praktikum (mit Bülow und Weinland), b) Chemisch-pharmazeutisches Praktikum (mit Weinland), c) Präparative Arbeiten (mit Kliegl), d) Physikalisch-chemisches Praktikum (mit Magnus), 1 Vormittag, e) Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Untersuchungen, ganztägig (mit Bülow, Weinland u. Kliegl mit Magnus auf dem Gebiete der physikalischen Chemie), Voll- und Halbpraktikum, tägl., Abgekürztes Praktikum für Mathematiker und Forststudierende, 2 oder 3 Tage. — **Thierfelder**: Physiologische Chemie der Kohlehydrate, Fette und Eiweißstoffe, 2; Physikalisch-chemische Übungen für Anfänger I: Qualitative Analyse, 6, II: Quantitative Analyse und physiologisch-chemische Übungen, 6; Physiologisch-chemische Arbeiten für Geübtere, tägl. — **Bülow**: Analytische Chemie II, auch für Anfänger, mit besonderer Berücksichtigung der praktischen Arbeiten im Chemischen Laboratorium, 3; Aromatische Chemie: Mehrkernige karbozyklische und einfache heterozyklische Verbindungen, 3. — **Weinland**: Chemie der Arzneistoffe II: Organischer Teil, 3; Chemie der anorganischen Komplexe, 1; Quantitative Untersuchung der Arzneistoffe, 1. — **Kliegl**: Zyklische Verbindungen I: Einkernige Benzolderivate, 3. — **Magnus**: Physikalisch-chemisches Kolloquium, 1. — **Brigl**: Fermente und ihre Wirkung, 1. —

v. Brill: Analytische Geometrie des Raumes, 3; Theorie der Krümmung der Flächen, 3; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **Maurer**: Höhere Analysis I, 4; Theorie und Anwendung der Determinanten, 2; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **König**: Höhere Analysis, 4; Höhere Geodäsie mit Anwendungen auf die Kartographie, für Mathematiker und Geographen, 3; Übungen im mathematischen Seminar, 1. — **Happel**: Darstellende Geometrie, 4, Übungen, 2. —

Universität Wien.

Lecher: Experimentalphysik für Lehramtskandidaten und Mediziner, 5; Anleitung für wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Franz Exner**: Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. — **Meyer**: Radioaktivität in Geophysik und kosmischer Physik, 2; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (mit Ehrenhaft), 1 *g*; Anleitung zu radioaktiven Messungen (mit Hess und Paneth), 3. — **Ehrenhaft**: Grundzüge der Theorien des Lichtes, 5. — **Haschek**: Über die Grenzen der physikalischen Beobachtungen, 1. — **Jäger**: Das elektrostatische Potential, 1. — **Kohl**: Grundzüge der Elastizitätstheorie, 2. — **Hess**: Theorie der Stoßionisation, 1. — **Thirring**: Hydrodynamik, 5. — **Flamm**: Quantentheorie, 2. — **Paneth**: Das periodische System der Elemente vom Standpunkte der neuen Atomtheorien, 1. — **Felix Exner**: Meteorologische Optik, 3. — **Defant**: Sonnenstrahlung, 1. — **Schmidt**: Meteorologische Instrumente, 1. — **Hinterberger**: Photographisches Praktikum, 12; Praktischer Kurs über Mikrophotographie, 20. —

Wegscheider: Theoretische und physikalische Chemie II, 5; Chemische Übungen für Philosophen, tägl. außer Sonnabend; Arbeiten im I. chemischen Laboratorium, für Vorgeschrittene, tägl. — **Schlenk**: Chemie II: Organische Chemie für Philosophen, Mediziner und Pharmazeuten, 5; Chemische Übungen für Anfänger und Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, tägl. — **Herzig**: Pharmazeutische Chemie, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend. — **Franke**: Anleitung zur Ausführung chemisch-wissenschaftlicher Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Analytische Chemie, im Anschluß an die chemischen Übungen, für Mediziner, 2; Chemie der Pflanzen, 1. — **Vortmann**: Übungen im analytischen Laboratorium der technischen Hochschule, tägl. außer Sonnabend. — **M. Kohn**: Repetitorium der organischen Chemie, 2. — **Abel**: Elektrochemie II, 1. —

v. Escherich: Funktionentheorie (Fortsetzung), 5; Elementar-Mathematik, 1; Proseminar für Mathematik, 1 *g*; Seminar für Mathematik, 2 *g*. — **Wirtinger**: Elemente

der Differential- und Integralrechnung, 5, Übungen 1 *g*; Mathematisches Seminar, 2 *g*; Mathematisches Proseminar, 1 *g*. — **Furtwängler**: Zahlentheorie II, 5; Elementarmathematik, 1 *g*; Proseminar, 1 *g*; Seminar, 2 *g*. — **Oppenheim**: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3; Einleitung in die Theorie der Bewegung des Mondes, 3; Über die Newtonsche Gravitationskraft, 2. — **G. Kohn**: Synthetische Geometrie (Fortsetzung), 4, Übungen, 1 *g*; Differentialgeometrie I, 2. — **Tauber**: Versicherungsmathematik II: Öffentliche und private Versicherung, 5, Übungen, 1½ *g*. — **Blaschke**: Einführung in die mathematische Statistik II, 3. — **Hanni**: Eulersche Integrale, 2. — **Roth**: Ebene algebraische Kurven, 2. — **Groß**: Kurs am mathematischen Seminar: Darstellende Geometrie, 3 *g*; Potenzreihen, 3; Übungen zur Funktionentheorie. — **Radon**: Periodische Funktionen, 2. — **v. Hepperger**: Astrophysik, 4. —

Technische Hochschule Wien.

Jäger: Physik für Bauingenieure, 3; Ausgewählte Kapitel der Physik, 2. — **Mache**: Physik für Maschinenbauer und technische Chemiker: Wärmelehre, Optik und Akustik, Elektrizitätslehre, 2 und 5, für Architekten, 4. — **Knoller**: Luftschiffahrt und Automobilwesen, 3. — **Sahulka**: Elektrotechnik für Maschinenbauer, 4½, Praktische Übungen I (mit Reithoffer), 4; Elektrotechnische Meßkunde, 2. — **Reithoffer**: Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2; Übungen zu elektrischen Schwingungen und Wellen, 4; Wechselstromtechnik, 2. — **N. N.**: Dynamobau, 3, Konstruktionsübungen, 6; Elektrotechnik: Praktische Übungen II, 4. — **Hochenegg**: Bau und Betrieb elektrischer Anlagen einschließlich Stromverteilung, 3, Übungen, 4. — **Paweck**: Technische Elektrochemie, 3. — **Jüllig**: Elektrische Telegraphie und Eisenbahn-Signalwesen, 2. — **Zelisko**: Die Fernsprechtechnik, 2; Die Telegraphentechnik, 1. — **Aigner**: Unterwasser-Telegraphie und -Telephonie, 1. — **Strunz**: Geschichte der Naturwissenschaften und der Naturbetrachtung in der beginnenden Neuzeit, 1; Volkskunde und Geschichte der Naturwissenschaften, 2; Übungen: Lektüre und Besprechung der neuen Literatur über Geschichte der Naturwissenschaften und ihrer philosophischen Grenzgebiete, 2. —

Suida: Allgemeine Experimentalchemie II: Organische Chemie I, 5; Chemische Technologie organischer Stoffe, 5, Übungen, 20. — **Bamberger**: Übungen im Laboratorium der allgemeinen Experimentalchemie, tägl.; Enzyklopädie der technischen Chemie, 3; Praktische Übungen in der Ausführung technischer Proben, 3. — **Vortmann**: Analytische Chemie, 4, Übungen, tägl. — **Moser**: Die technische Analyse anorganischer Stoffe, 2. — **Weißenberger**: Die Isotopie der Elemente, 2. — **v. Jüptner**: Theoretische und physikalische Chemie I, 1½, II, 2, Übungen, 4; Chemische Technologie anorganischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend. — **Praetorius**: Thermodynamik mit Einschluß der neueren Erscheinungen, 1. — **Lafar**: Technische Mykologie, 2, Übungen für Anfänger, 2. — **Böck**: Chemie der synthetischen organischen Arzneimittel, 2; Chemie der Zellulose, 1. — **Eder**: Photochemie und angewandte Photographie, 1; Photographisches Praktikum, 4. — **Abel**: Galvanische Elemente und Akkumulatoren, 2. — **Strache**: Beleuchtungsindustrie, 2; Übungen in Gasbeleuchtung, Brennstoffe und Feuerungsanlagen, 4. — **Klimont**: Chemische Technologie der Mineralöle, 1; Technische Chemie der Fette, 1. — **Erban**: Chemische Textilindustrie II, 1. — **Oettinger**: Die in der Industrie verwendeten textilen Fasern, 1½. — **Ruß**: Wirtschaftliche Bedeutung der chemischen Industrie, 1. —

Zsigmondy: Mathematik I, für Maschinenbauer, 5, Korrepetitionen, 2. — **Rothe**: Mathematik I, für Bauingenieure, 5; Analytische Geometrie der Ebene, 2. — **Czuber**: Mathematik II, 5. — **Suppantschitsch** (ev. Radon): Elemente der höheren Mathematik, 4. — **Radon**: Enzyklopädie der Mathematik, 3; Einführung in die Funktionentheorie: Analysis der komplexen Veränderlichen, 2. — **Tauber**: Versicherungsmathematik I, 3, II, 3. — **Förster**: Politische Arithmetik, 2. — **Blaschke**: Einführung in die mathematische Statistik, 3. — **Müller**: Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen, für Bauingenieure, 4, Konstruktionsübungen, 6; Konstruktive Behandlung der Regelflächen, 2, Konstruktionsübungen, 2; Seminar für darstellende Geometrie, 2. — **Schmid**: Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen für Maschinenbauer, 4, Konstruktionsübungen, 6; Projektive Geometrie II, 3, Konstruktionsübungen, 2. — **Danzer**: Normale und schiefe Axonometrie, 2. — **Wieghardt**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, für Bauingenieure, 5, Übungen, 1½. — **Jung**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, für Maschinenbauer, 7½, Übungen, 2; Vektoranalysis, 2. — **Wolf**: Einführung in die theoretische Elastizitätslehre, 2. — **Leon**: Ausgewählte Kapitel der Festigkeitslehre und Materialprüfung, 1½. — **Pollack**: Praktische Übungen zu den Elementen der niederen Geodäsie, 5. — **Dolezal**: Niedere Geodäsie, 3 u. 4½, Übungen I: Instrumental- und Vermessungsübungen, Feldübungen, 8; Ausgewählte Kapitel der „Niederen Geodäsie", 1½; Geodätisches Seminar, 2; Photographische Meßkunst: Photogrammetrie, Übungen, 2. — **Dokulil**: Übungen zur Niederen Geodäsie für Geodäten, 10; Geodätisches Zeichnen: Situationszeichnen, 4; Technik des Katasterwesens, 2, Übungen, 2½; Technische Terrainlehre, 1½. — **Schumann**: Sphärische Astronomie, 4; Übungen im Beobachten und Rechnen, 3½. —

Universität Würzburg.

Wien: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Praktische Übungen im physikalischen Institut, 4 bzw. 8, für Mediziner und Pharmazeuten, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Harms**: Einführung in die theoretische Physik, 2. —

Buchner: Experimentalchemie II: Organische Chemie, 5; Analytisch-chemisches Praktikum (mit Emmert), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner und Zahnärzte (mit Emmert und Supan), 6; Praktikum für präparative Arbeiten, tägl.; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen (mit Emmert), tägl.; Physikalisch-chemischer Einführungskurs (mit v. Halban), 2 Wochen; Kolloquium (mit Emmert und v. Halban), 14tägig, 1½ *g*. — **Heiduschka**: Chemische Technologie I, 4; Pharmazeutische Präparatenkunde II: Organische Präparate und Wertbestimmung von Drogen, 3; Nahrungsmittelchemie I, mit Exkursionen, 2; Gerichtliche Chemie II, 2; Neuere Arzneimittel, 1; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen in allen Richtungen der angewandten Chemie, einschließlich technischchemischer, gerichtlichchemischer und nahrungsmittelchemischer Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl. außer Sonnabend. — **Pauly**: Chemie der heterozyklischen organischen Verbindungen, 2; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl. — **Emmert**: Maßanalyse (Experimentalvorlesung unter Berücksichtigung der durch das deutsche Arzneibuch vorgeschriebenen Methoden), 1. —

Rost: Analytische Geometrie des Raumes, 4; Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 4; Mathematisches Seminar: Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. *g*. — **v. Weber**: Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4 *g*. — **Hilb**: Analytische und synthetische Geometrie der Kegelschnitte, 4; Ebene und sphärische Trigonometrie, 2. —

Universität Zürich.

Meyer: Experimentalphysik: Elektrizität und Optik, 5, Mathematische Ergänzungen, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 4, für Vorgerücktere, halbtägig, Ausführung selbständiger wissenschaftlicher Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Greinacher**: Radioaktivität, mit Experimenten, 1; Radiologisches Praktikum

für Naturwissenschaftler und Mediziner, 4. — **Ratnowsky**: Theorie der Elektriziät und des Magnetismus, 3; Neuere Probleme der theoretischen Physik, 2. — **Wolfke**: Moderne Lichttheorien, 2; Kanalstrahlen und ihre Bedeutung in der Physik und Chemie, 1. —

Werner: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisch-analytisches Praktikum für Chemiker, tägl.; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere: Präparative Arbeiten, Ausführung selbständiger Arbeiten, tägl., für Naturwissenschaftler, halbtägig. — **Abeljanz**: Quantitative chemische Analyse mit Berücksichtigung der elektrotytischen Methoden, 2; Nahrungsmittelchemie, 1; Anleitung zu chemischen Arbeiten im Laboratorium, 1; Chemisches Kolloquium, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Mediziner und Veterinäre sowie für Naturwissenschaftler, 3 Tage, für Lehramtskandidaten, 6; Übungen im Untersuchen von Nahrungs- und Genußmitteln, 1/2 Tag. — **Dubsky**: Konstitutionsvermittlung organischer Verbindungen, 1; Aromatische Chemie II, speziell Farbstoffe, 2. — **Lifschitz**: Ausgewählte Kapitel der Atom- und Molekulartheorie, 1; Physikalische Eigenschaften und chemische Konstitution, 1; Physikalische Chemie II: Statik und Dynamik homogener Systeme, 2. —

Fueter: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 1; Partielle Differentialgleichungen, 4, Seminar, 1. — **Speiser**: Analytische Geometrie, 4, Übungen, 1; Vorlesung aus dem Gebiete der reinen Mathematik, 3. — **Bernays**: Einführung in die Variationsrechnung, 3; Elementare Behandlung von Differentialgleichungen, mit Übungen, 3. — **Wolfer**: Geographische Ortsbestimmung, 3; Übungen im astronomischen Beobachten, 3; Theorie und Gebrauch der Mikrometer, 2; Grundzüge der geographischen Ortsbestimmung, mit Übungen, 2. —

Technische Hochschule Zürich.

Weiß: Physik II, 4, Repetitorium, 1; Wissenschaftliche Arbeiten in Physik, 8, 12, 24, chemisch-physikalischer Richtung, tägl.; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schweitzer), 4, 6, 8. — **Schweitzer**: Physik II, 3, Ergänzungen, 1, Repetitorium, 1; Experimentalphysik, 4, Repetitorium, 1. — **Wolfke**: Moderne Lichttheorien, 2; Kanalstrahlen und ihre Bedeutung in der Physik und Chemie, 1. — **Piccard**: Radioaktivität, 2 *g*. — **Brentano**: Optik, 2. — **de Quervain**: Gletscherkunde, mit Exkursionen, 1. — **Barbieri**: Photographie II, 1 *g*; Photogrammetrie, 1 *g*; Photographisches Praktikum, 2; Militärphotographische Übungen, 2 Wochen. — **Kuhlmann**: Theoretische Elektrotechnik I, 5, Repetitorium, 1, III, 4, Repetitorium, 1; Elektrotechnisches Laboratorium IIa, 4 und 8. — **Tobler**: Schwachstromtechnik II, 2. — **Farny**: Elektrische Maschinen II, 3 *g*; Konstruktionsübungen in elektrischen Maschinen, 9. — **Korda**: Angewandte drahtlose Telegraphie und Hochfrequenzmaschinen, 1; Die Elektrizität im Kriege, 1. — **Wyßling**: Elektrische Anlagen II, 3; Elektrische Bahnen, 3. — **Wirz**: Elektrische Apparate zur Messung von Strömen, Spannungen und Leistungen, sowie der Frequenz und des Leistungsfaktors, 1; Elektrische Tarifapparate: Theorie und Konstruktion der Registrierinstrumente und Zähler für Gleich-, Wechsel- und Drehstrom, 1. —

Winterstein: Organische Chemie, 3, Repetitorium, 1; Physiologische Chemie, 2; Anleitung zu dem agrikulturchemischen Praktikum, 1; Agrikulturchemisches Praktikum, 8, für Vorgerücktere, tägl.; Physiologisch-chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **F. P. Treadwell**: Analytische Chemie II, 2; Chemisch-technische Analyse, 4, Repetitorium, 1; Probierkunde mit Übungen, 2; Analytisches Praktikum, 20, 16, 10; Chemisches Praktikum 2, 4; Analytisch-chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Baur**: Physikalische Chemie I, 2, Repetitorium, 1; Technische Elektrochemie, 2, Repetitorium, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum, 8; Elektrochemisches Praktikum, 4; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Boßhard**: Anorganische chemische Technologie II: Alkalien, Chlor, Phosphate, 3, Repetitorium, 1, III: Silikate, 2, Repetitorium, 1; Technologie der Kohlehydrate und der Gärung, 2; Technisch-chemisches Praktikum, 16 und 24; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Eder**: Pharmazeutische Chemie II, 2 *g*; Pharmakognosie II, 3 *g*; Ätherische Öle, 1 *g*; Toxikologie, 2 *g*; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum I, 12 *g*, II, mit praktischem Kurs in Harnanalyse, 12 *g*; Technische Mikroskopierübungen I: Fasern und Stärke, 3 *g*; Pharmakognostische und pharmazeutisch-chemische Arbeiten für Vorgerücktere, tägl. *g*; Chemische Harnanalyse, 1 *g*. — **Fierz**: Organische Technologie II: Künstliche organische Farbstoffe, 3 *g*, Repetitorium, 1 *g*; Explosivstoffe, 1 *g*; Technisch-chemisches Praktikum, 16 und 24 *g*; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. *g*. — **Grete**: Düngungslehre und Düngerfabrikation, 2 *g*. — **Staudinger**: Organische Chemie, 6, Repetitorium, 1, Spezieller Teil II, 2, Repetitorium, 1; Chemisches Praktikum, 24, 10 und tägl., für Vorgerücktere, tägl. — **W. D. Treadwell**: Physikalische Chemie ausgewählter Gasreaktionen, 1. —

Hurwitz: Elliptische Funktionen, 4; Mathematisches Seminar (mit Kollros), 2. — **Amberg**: Mathematische Probleme der Sozialversicherung, 2 *g*. — **Baeschlin**: Vermessungskunde I, 3, Übungen, 3, III, 4, Übungen II, 8; Vermessungsübung, 2 Wochen; Große Vermessungsübung, 3—4 Wochen; Konstruieren geodätischer Instrumente, 2; Diplomarbeit in Vermessungswesen, 6 Wochen. — **Beyel**: Perspektive, 2; Darstellende Geometrie, 2. — **Brandenberger**: Einführung in den mathematischen Unterricht II, 2 *g*. — **Burger**: Graphische Vervielfältigung mit Übungen, 3. — **Franel**: Höhere Mathematik II, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2. — **Gonseth**: Ebene algebraische Kurven, 2; Graphisches Rechnen, 1. — **Großmann**: Anwendungen der darstellenden Geometrie, 2, Übungen, 3. — **Hirsch**: Höhere Mathematik II 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2; Lineare Differentialgleichungen, 2. — **Keller**: Repetitorium der darstellenden Geometrie: Axonometrie, Zentrische Kollineation, Kegel-, Rotations-Regel- und Schraubenflächen, 2; Die Prinzipien der projektiven Geometrie mit Anwendung auf die Kurven II. Grades (konstruktiv), 1. — **Kienast**: Anwendungen der Funktionentheorie: Asymptotische Reihen, 2 *g*. — **Kollros**: Anwendungen der darstellenden Geometrie, 2, Übungen, 3. — **Kraft**: Kinematik der Bewegung eines unveränderlichen Systems parallel einer Ebene, 1; Geometrische Analysis I, 3, II, 3; Gewöhnliche analytische Mechanik, 1. — **Meißner**: Mechanik I, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2, III, 2. — **Polya**: Mathematische Übungen, 2 *g*; Konforme Abbildung vom Standpunkte der Funktionentheorie, 2 *g*. — **Rudio**: Anwendungen der höheren Mathematik, 4. — **Weyl**: Analysis der Vektorfelder, 2; Gruppentheorie, 3; Raum, Zeit, Materie, 3. — **Wolfer**: Geographische Ortsbestimmung, 3; Übungen im astronomischen Beobachten, 3; Theorie und Gebrauch der Mikrometer, 2; Grundzüge der geographischen Ortsbestimmung mit Übungen für Grundbuchgeometer, 2. —

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

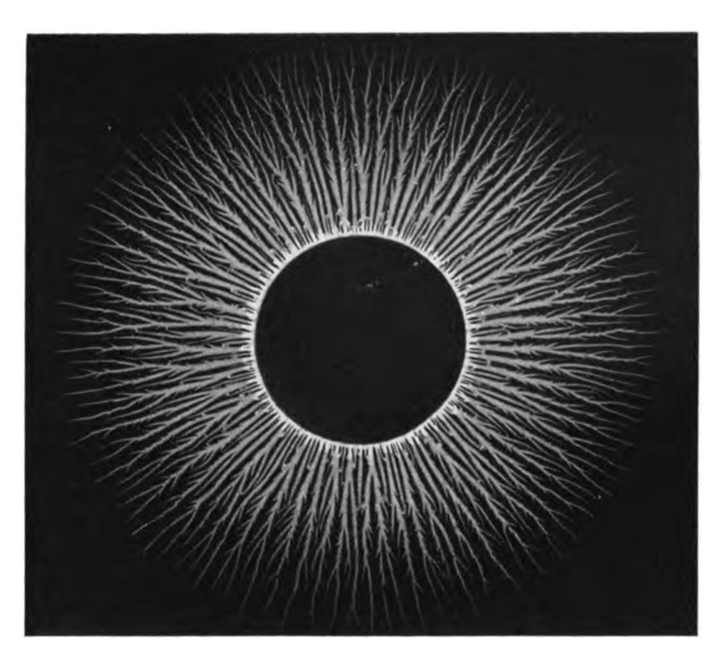


Fig. 2. Positive primäre Strahlungsfigur. Ladespannung $V = 18{,}000$ Volt, Elektrodenentfernung $d = 3{,}40$ mm.

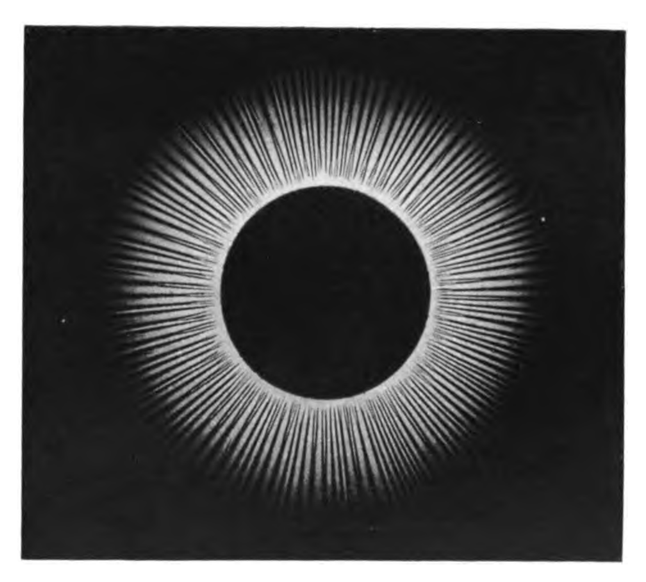


Fig. 3. Negative primäre Strahlungsfigur. $V = 30{,}000$ Volt, $d = 2{,}53$ mm.

S. Mikola, Untersuchungen über die Lichtenbergschen Figuren und über die Strahlung des Kondensators.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

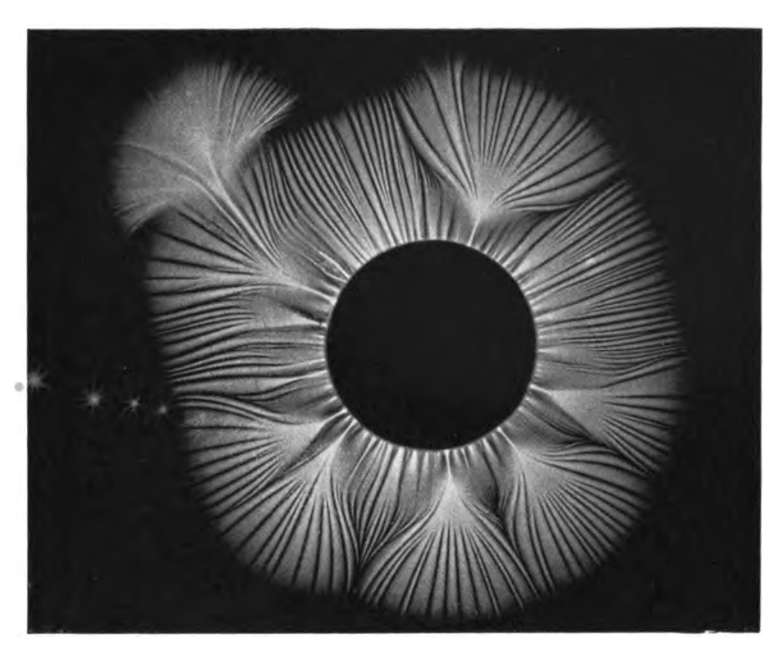


Fig. 7. Negative primäre Strahlungsfigur mit Explosionszentren.
$V = 33\,000$ Volt, $d = 4{,}90$ mm.

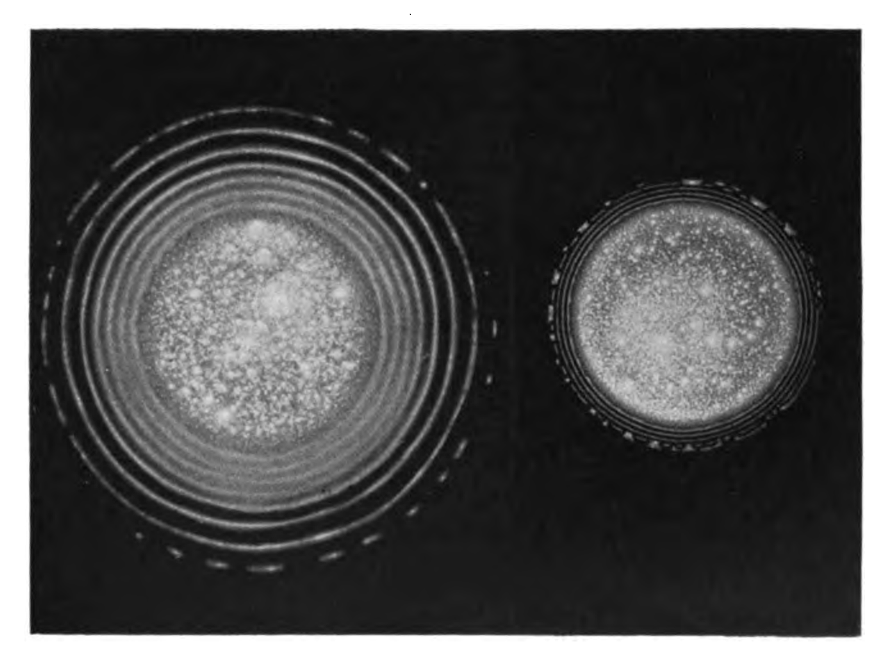


Fig. 8, I. Negative sekundäre Strahlungsfigur. $V = 11{,}500$ Volt, $d = 3{,}10$ mm, Dicke der Luftschicht $l = 0{,}10$ mm.
II. Positive sekundäre Strahlungsfigur. $V = 11{,}000$ Volt, $d = 1{,}54$ mm, $l = 0{,}10$ mm.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.



Fig. 6. Negative primäre Strahlungsfigur mit Explosionszentren. $V = 30{,}000$ Volt, $d = 2{,}53$ mm.

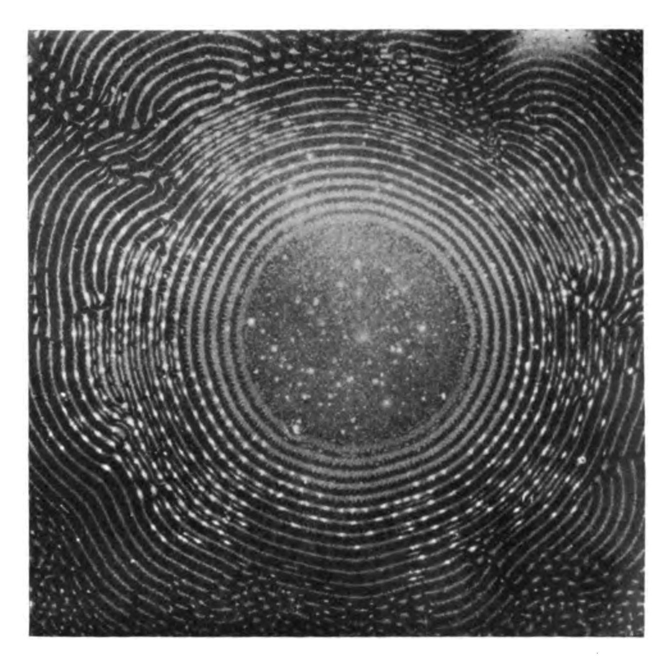


Fig. 9. Positive sekundäre Strahlungsfigur. $V = 18{,}000$ Volt, $d = 3{,}95$ mm, $l = 0{,}10$ mm (mit graphitierter Mattglasscheibe).

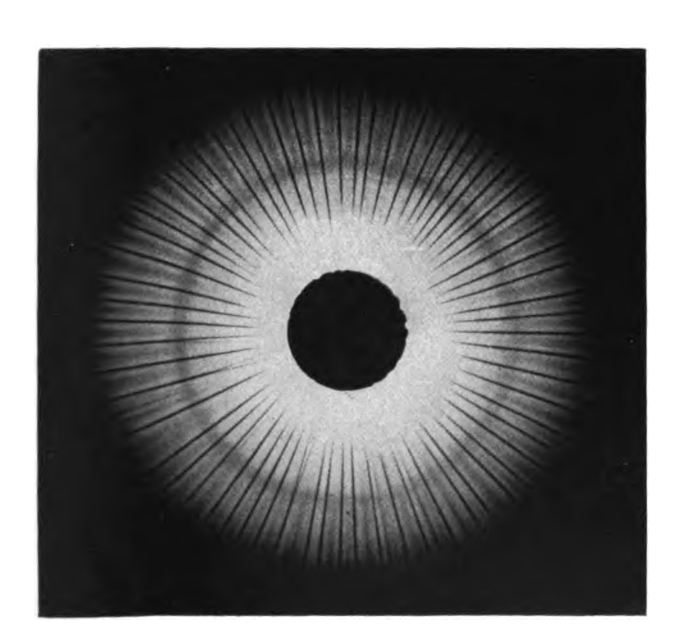


Fig. 12. Negative primäre Strahlungsfigur. $V = 9{,}300$ Volt, $d = 6{,}65$ mm, $p = 150$ mm.

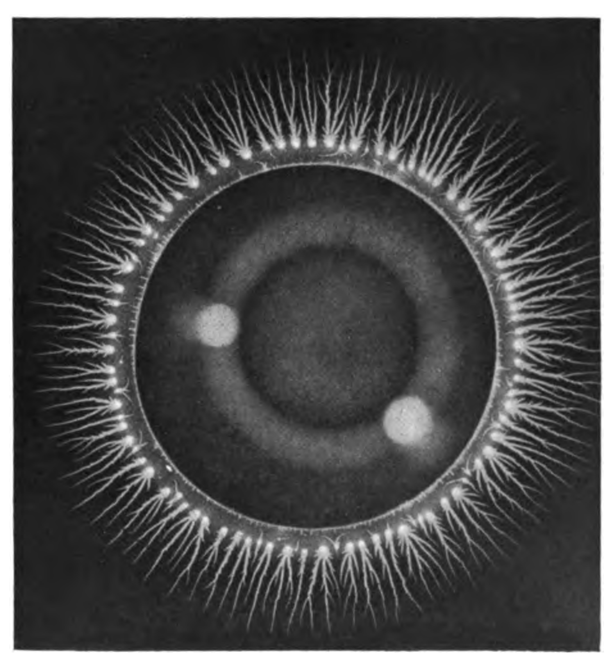


Fig. 13. Positive primäre Strahlungsfigur. $V = 20{,}000$ Volt, $d = 4{,}65$ mm (Treffpunkte der Ionen).

Fig. 10. Negat. sekund. Strahlungsfigur. $V = 19{,}500$ Volt, $d = 4{,}60$ mm, $l = 0{,}10$ mm (mit graphitierter Mattglasscheibe).

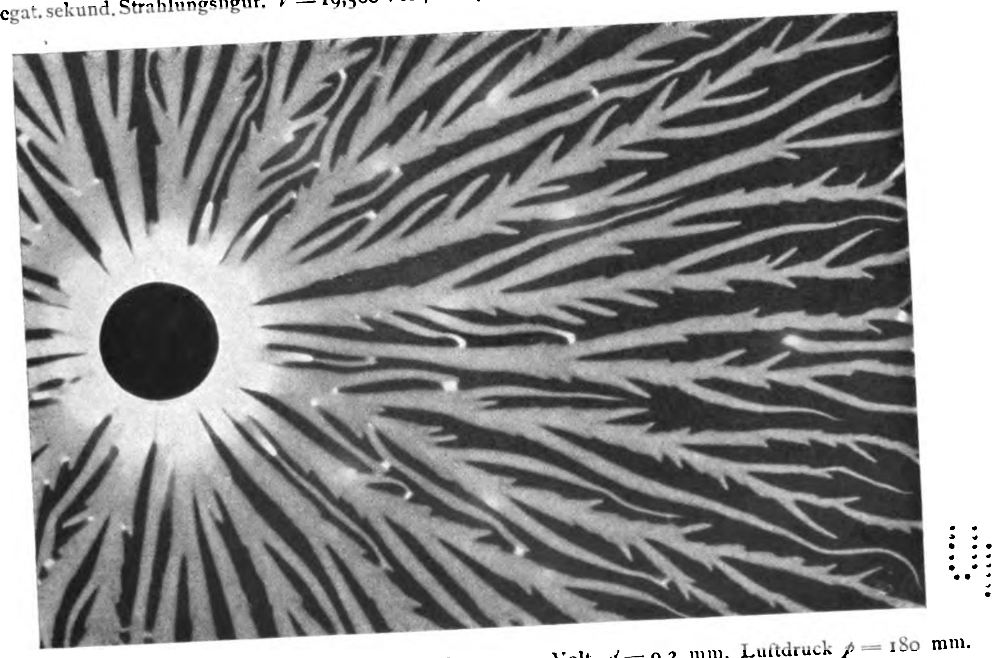


Fig. 11. Positive primäre Strahlungsfigur. $V = 12{,}000$ Volt, $d = 9{,}2$ mm, Luftdruck $p = 180$ mm.

S. Mikola, Untersuchungen über die Lichtenbergschen Figuren und über die Strahlung des Kondensators.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

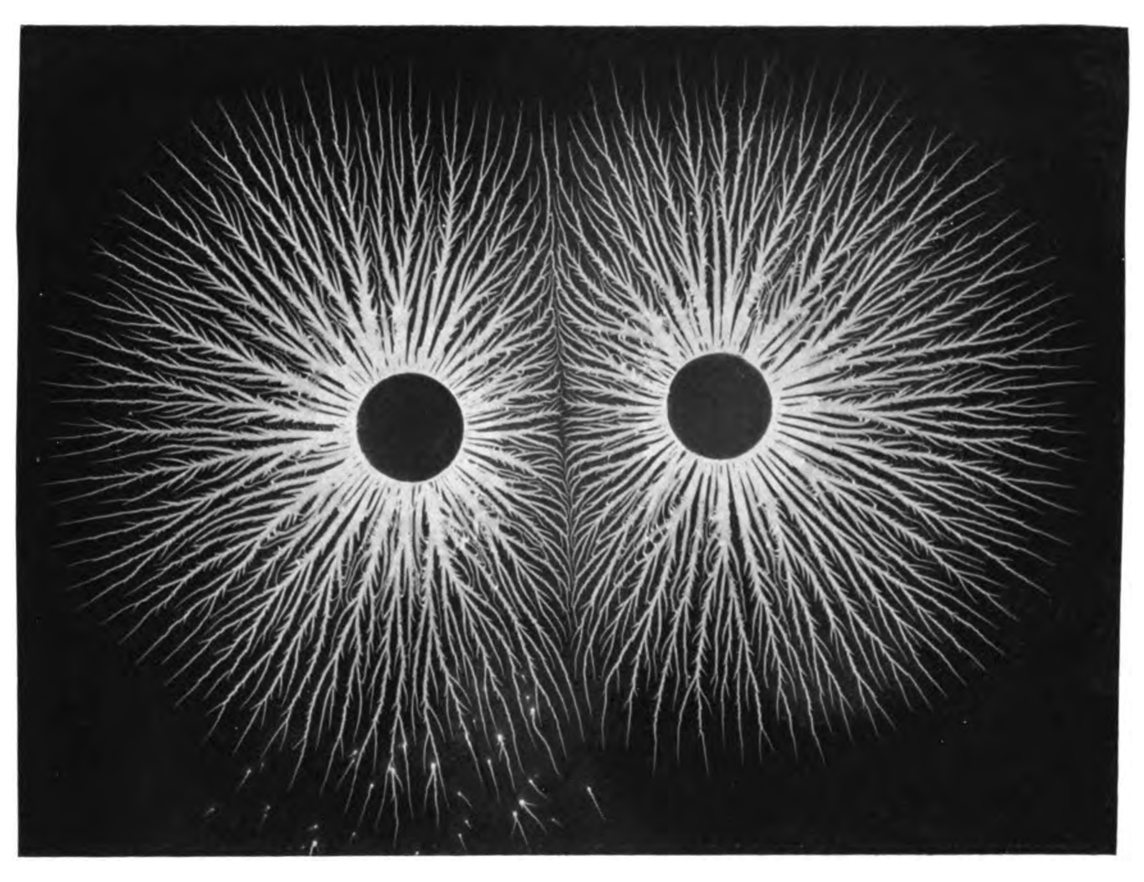


Fig. 14. Positive primäre Strahlungsfigur. $V = 32{,}000$ Volt, $d = 4{,}65$ mm (Doppelelektrode).

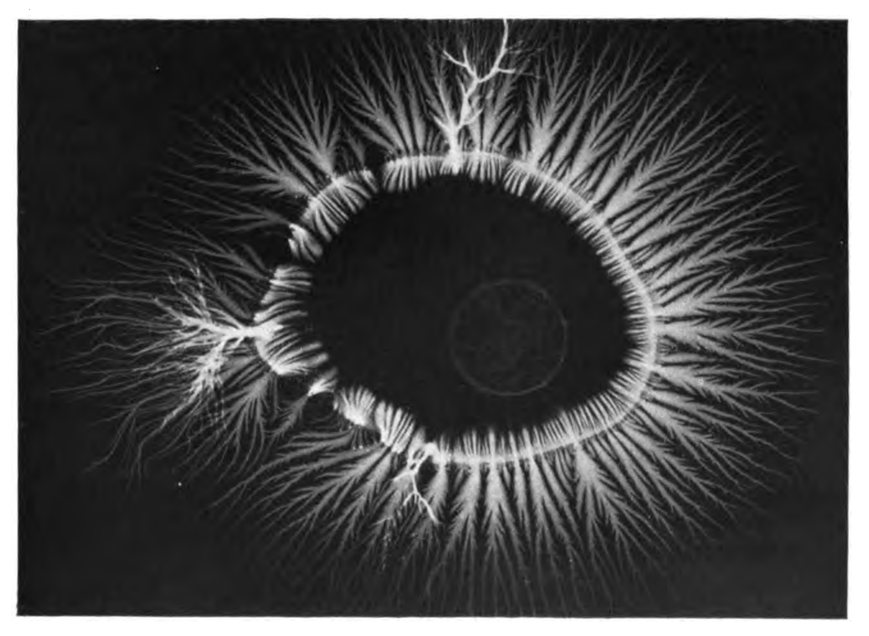


Fig. 16. Primäre Strahlungsfigur mit positiven und negativen Radialstreifen. $V = 18{,}000$ Volt, $d = 3{,}40$ mm.

S. Mikola, Untersuchungen über die Lichtenbergschen Figuren und über die Strahlung des Kondensators.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 9. | 1. Mai 1917. Redaktionsschluß für No. 10 am 4. Mai 1917. | 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über sekundäre Wirkungen der Röntgenstrahlen.

Berichtigung von F. Voltz.

In meiner gleichnamigen Arbeit: „Über sekundäre Wirkungen der Röntgenstrahlen“ (diese Zeitschrift 17, 532, 1916) habe ich gezeigt, daß eine Röntgenstrahlenhärtemessung wesentlich beeinflußbar ist durch die Zusammensetzung der Fluoreszenzmasse, sofern eben die Messung auf fluorometrischem Wege vorgenommen wird. Ich habe dort dann gezeigt, daß die auftretenden Unterschiede unter Umständen sehr groß sein können und dieselben ihre Ursache in der selektiven Absorptionsfähigkeit der Emulsion finden.

Meine seinerzeitigen Untersuchungen habe ich an drei Arten von Schirmen ausgeführt, und zwar an einem Bariumplatinzyanürschirm, an einem „Astral“-Schirm der Reiniger, Gebbert & Schall A.-G., Erlangen, dessen Erfinder Dr. Ruprecht, Hamburg ist, und einem „Ossal“-Schirm der Chemischen Fabrik von Heyden in Dresden. Bei den mir zu den Untersuchungen zur Verfügung stehenden Stücken habe ich feststellen können, daß neben dem bereits bekannten Unterschied in bezug auf den Helligkeitsgrad zwischen einem Bariumplatinzyanürschirm und dem Astralschirm auch ein merkbarer Unterschied zwischen dem Astralschirm und dem Ossalschirm war. Bei den Versuchsschirmen habe ich beobachtet, daß der Ossalschirm bei gleicher Röhrenspannung, gleicher Belastung, gleicher Betriebsart heller leuchtete als der Astralschirm, daß also das Durchleuchtungsbild auf dem Astralschirm dunkler erschien, als auf dem Ossalschirm. Ich habe daran die Folgerung geknüpft, daß das dunklere, aber kontrastreichere Durchleuchtungsbild auf dem Astralschirm für medizinische Untersuchungen zwar von Vorteil ist, daß man aber den heller leuchtenden Ossalschirm für bestimmte physikalische Untersuchungen vorziehen dürfte.

Vor kurzer Zeit wurde mir nun bekannt, daß auch von der Marke Astralschirm eine Sorte in den Handel kommt, die an Helligkeit dem Ossalschirm nicht nachsteht, sondern sogar ihm überlegen ist. Dazu wird die Erklärung gegeben, daß der Leuchteffekt von der Schichtstärke der Emulsion des Schirmes abhängt. Es ist also durch Veränderung der Schichtdicke des Schirmes möglich, die Helligkeit eines Schirmes zu steigern, indem man eben die fluoreszierende Schicht stärker und hierdurch leuchtender macht. Damit geht die Bildschärfe zurück, was sich auch aus der Diffusion der Strahlen leicht erklären läßt.

Zur Ergänzung und Richtigstellung meiner seinerzeitigen vorerwähnten Arbeit muß ich nun hier die nachfolgenden Punkte bemerken:

1. Eine Röntgenstrahlenhärtemessung ist, sofern sie fluorometrisch vorgenommen wird, beeinflußbar durch die Art und Zusammensetzung der fluoreszierenden Massen und bei ein und derselben Art von fluoreszierenden Massen ist sie wieder beeinflußbar durch die Schichtdicke der Massen.

2. Der von mir für den Ossalschirm konstatierte Vorteil des helleren Leuchtens ist auch einer anderen Sorte des Astralschirmes eigen und dabei zeigt sich eben, daß die höhere Leuchtkraft durch die Veränderung der Schichtdicke erzielt wird. Die Schichtdicke des von mir seinerzeit benutzten Astralschirmes ist auf die medizinischen Untersuchungen eingestellt, daher das dunklere Bild des von mir benutzten Astralschirmes, das aber gegenüber dem Bild



auf dem Ossalschirm kontrastreicher war, weil eben der Kontrastreichtum für die medizinischen Durchleuchtungen vorteilhaft ist.

3. Von der Fabrikantin des Astralschirmes wird auch bekannt gegeben, daß die Leuchtmasse des Heydenschen Ossalschirmes chemisch die gleiche ist, wie bei den Astralschirmen, und zwar enthält die Leuchtschicht in beiden Fällen reinen künstlichen Willemit, der nach einem besonderen Verfahren hergestellt wird. Außerdem gibt die Fabrikantin des Astralschirmes auch bekannt, daß Bruch, Spaltungserscheinungen, Struktur und Korngröße der Fluoreszenzmasse des Ossalschirmes die gleiche ist, wie bei dem Astralschirme. Beide Schirme sind also von derselben chemischen Natur.

Durch diese Angaben der Fabrikantin des Astralschirmes habe ich mich veranlaßt gesehen, eingehendere Untersuchungen über die Fluoreszenzerregung durch Röntgenstrahlen anzustellen, die aber noch nicht völlig abgeschlossen sind, die ich daher erst in einiger Zeit veröffentlichen kann. Ich gebe deshalb einstweilen die vorstehenden Ausführungen bekannt, damit meine seinerzeitigen Ausführungen richtig gestellt werden.

(Eingegangen 6. April 1917.)

Zur Beurteilung der neuen Leuchtschirme [1].

Von Th. Christen.

Zu den vorstehenden Ausführungen des Herrn Dr. Voltz möchte ich ergänzend folgendes bemerken:

Beim Vergleichen der beiden Schirme, Astral und Ossal, überzeugt man sich leicht von der größeren Deutlichkeit des Bildes auf dem Astralschirm. Die Deutlichkeit beruht auf zwei verschiedenen Faktoren: sie ist um so größer, je schärfer und je kontrastreicher das Bild ist.

Warum das Bild auf dem Astralschirm kontrastreicher ist, trotzdem die Leuchtmasse chemisch keinen Unterschied gegenüber dem Ossalschirm aufweisen soll, erscheint mir zurzeit nicht vollkommen geklärt. Warum aber die Bildschärfe beim Astralschirm höher ist, leuchtet ohne weiteres ein: Das Bild ist umso heller, je dicker die Leuchtmasse aufgetragen wird. Mit zunehmender Dicke der Leuchtmasse nimmt aber die Bildschärfe ab. Man hat es also in der Hand, die Helligkeit des Leuchtschirmes zu vermehren auf Kosten seiner Bildschärfe. Um auch diesen Gesichtspunkt neben anderen in der Beurteilung der Schirme zu berücksichtigen, vergleiche ich folgende drei Schirme:

1. Astral I. Das ist ein Erzeugnis der Firma Dr. Rupprecht in Hamburg, das seit einigen Jahren in den medizinischen Röntgeninstituten Verwendung findet.

2. Astral II. Dieser Schirm wurde mir von Herrn Dr. Rupprecht zu Versuchszwecken überwiesen. Er trägt eine dickere Fluoreszenzschicht als Astral I und zeigt dementsprechend höhere Leuchtkraft, allerdings auf Kosten der Bildschärfe.

3. Ossal. Der zu unseren Versuchen benützte Ossalschirm stammt, wie der von Herrn Dr. Voltz verwendete, von der Firma Heyden, Aktiengesellschaft. Das Ergebnis unserer Prüfung dieser drei Schirme ist folgendes:

1. Haltbarkeit: Der Astralschirm ist gegen Biegung wenig empfindlich, der Ossalschirm ist sehr zerbrechlich.

2. Korn: In der Feinheit des Kornes zeigen die verschiedenen Schirme keine merklichen Unterschiede.

3. Helligkeit: Der Ossalschirm ist dem Astral II kaum merklich, dagegen dem Astral I merklich an Helligkeit überlegen.

4. Bildschärfe: Die Bildschärfe ist beim Astral II etwas weniger gut als beim Astral I, dagegen immer noch weit besser als beim Ossalschirm. Daraus ergibt sich, daß man sicherlich den Astralschirm noch beträchtlich über die Helligkeit des Ossalschirmes hinaus verstärken könnte, bevor er dessen Unschärfe erreicht hätte.

5. Kontraste: Daß beim Astralschirm I sowohl wie II die Bilder bedeutend kontrastreicher sind als auf dem Ossalschirm, haben wir in Übereinstimmung mit den Angaben von Voltz ebenfalls festgestellt.

6. Nachleuchten: Sowohl der Ossalschirm, als auch der Astralschirm zeigt ein deutliches Nachleuchten, wobei allerdings diese Störung beim Astralschirm stärker ausgesprochen ist, wie beim Ossalschirm.

Der Astralschirm ist also in den meisten und namentlich in den überwiegend wichtigen Punkten dem Ossalschirm bedeutend überlegen. Immerhin ist es gut, wenn wir nicht ganz vergessen, daß der alte Baryum-Platincyanürschirm vor Astral und Ossal noch einen wesentlichen Vorzug hat, er leuchtet überhaupt nicht nach.

Interessant sind die Versuche, die Voltz über den Unterschied der fluorometrischen Härtebestimmung nach Wehnelt und nach Benoist unter Anwendung verschiedener Leuchtschirme geschrieben hat. Sie zeigen aufs neue, wie unzuverlässig all diese Methoden sind, abgesehen davon, daß sie nur schätzungsweise Zahlenwerte geben

[1] Aus der Strahlenforschungsstelle der Reiniger, Gebbert & Schall A.-G.

und abgesehen von der Tatsache, daß sie für Härtegrade, die oberhalb des Silber-Resonanzpunktes liegen, sowieso versagen müssen.

(Eingegangen 6. April 1917.)

Die Eigenschwingungen des Bohr-Debyeschen Wasserstoffmoleküls bei Berücksichtigung der Bewegung der Kerne.

Von A. Rubinowicz.

F. Krüger[1]) und P. S. Epstein[2]) haben, von zwei verschiedenen Standpunkten aus, die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme des Wasserstoffs unter Zugrundelegung des Bohr-Debyeschen Molekülmodelles zu erklären versucht. Beide Autoren machen dabei die Annahme, daß die Wärmebewegung des H_2-Moleküls, abgesehen von seiner Translation, hauptsächlich in einer regulären Präzession besteht, bei der sich das Molekülmodell wie ein starrer, bezüglich der Verbindungslinie der beiden Kerne symmetrischer Körper bewegt. Um die Berechtigung dieser Annahmen zu prüfen (unbewiesen ist es ja nicht einmal klar, daß das H_2-Modell die für eine Präzessionsbewegung notwendige Stabilität besitzt), habe ich mir die Aufgabe gestellt, unter Berücksichtigung der Kernbewegung sämtliche Eigenschwingungen des Wasserstoffmoleküls zu berechnen. Da die Mechanik des Bohrschen Modells doch an und für sich einiges Interesse beansprucht (Stabilitätsfrage) und auch für die Theorie der Dispersion verwertet werden kann, möchte ich im folgenden die Ergebnisse meiner Rechnungen mitteilen. Für den Fall, daß beide Kerne ruhen, sind die Eigenschwingungen von Frl. H. J. van Leeuwen[3]) berechnet worden.

Das Bohrsche Wasserstoffmolekül besteht bekanntlich aus zwei positiven, mit der Elementarladung e geladenen Kernen von der Masse M, um die in einer Kreisbahn zwei Elektronen derart rotieren, daß die vier Punkte immer die vier Ecken eines Rhombus bilden. Bezeichnen wir mit a den Radius der Kreisbahn, so beträgt die halbe Entfernung der beiden Kerne $\frac{a}{\sqrt{3}}$, und es besteht zwischen a und der, den beiden Elektronen zukommenden Winkelgeschwindigkeit ω die Beziehung:

$$m a \omega^2 = \frac{3\sqrt{3}-1}{4} \frac{e^2}{a^2}.$$

Während sich die beiden obigen Relationen aus den Gesetzen der klassischen Physik ergeben, werden die Abmessungen des Moleküls durch eine Quantenforderung festgelegt, die das Impulsmoment $ma^2\omega$ eines jeden Elektrons gleich $\frac{h}{2\pi}$ setzt (m ist die Masse des Elektrons und h die Plancksche Konstante). Der Wert der Winkelgeschwindigkeit ω bleibt bis auf die Schlußüberlegungen im folgenden unbestimmt.

Zur Berechnung der Eigenschwingungen benützen wir die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art, nachdem wir die potentielle und die kinetische Energie nach den Störungskoordinaten entwickelt haben.

§ 1. Berechnung der potentiellen Energie. P_1 und P_2 seien die beiden Kerne, P_3 und P_4 die beiden Elektronen. Die Störungskoordinaten lassen sich dann in folgender Weise angeben: Wir errichten in jedem Punkte P_ν ein rechtwinkliges, kartesisches, mit dem ungestörten Wasserstoffmolekül mitrotierendes Koordinatensystem $\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu$ so, daß die

ξ_ν Achsen parallel und gleichsinnig zu $\overrightarrow{P_4 P_3}$,

die

ζ_ν Achsen parallel und gleichsinnig zu $\overrightarrow{P_2 P_1}$

und endlich die

η_ν Achsen parallel und gleichsinnig zu einer Richtung sind, die senkrecht auf der Ebene der Punkte P_ν steht, wobei etwa $\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu$ ein Rechtssystem bilden. Für $\nu = 1$ und $\nu = 2$ behalten wir diese Koordinaten endgültig bei. In den Punkten P_3 und P_4 benützen wir dann aber die Koordinaten

$$\varrho_3,\ a\alpha_3,\ \zeta_3 \quad \text{bzw.} \quad \varrho_4,\ a\alpha_4,\ \zeta_4,$$

die in erster Annäherung gleich

$$\xi_3,\ \eta_3,\ \zeta_3 \quad \text{bzw.} \quad -\xi_4,\ -\eta_4,\ \zeta_4$$

sind und im übrigen derart gewählt werden, daß

$$a+\varrho_\nu,\ \alpha_\nu,\ \zeta_\nu \qquad (\nu = 3, 4)$$

ein System von Zylinderkoordinaten (mit dem Schnittpunkte von P_1P_2 und P_3P_4 als Ursprung und der Richtung $\overrightarrow{P_2 P_1}$ als ζ_ν-Achse) darstellen.

Um nun das Potential einfach zu berechnen, drücken wir es in den oben vorübergehend gebrauchten Koordinaten $\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ aus und führen darin erst dann die endgültig zu benützenden Störungskoordinaten ein.

x, y, z sei also ein rechtwinkliges, kartesisches, mit unserem Molekül mitrotierendes Bezugssystem.

---

1) F. Krüger, Ann. d. Phys. **50**, 346 und **51**, 450, 1916.

2) P. S. Epstein, Verh. d. Deutsch. phys. Ges. **18**, 398, 1916.

3) H. J. van Leeuwen, diese Zeitschr. **17**, 196, 1916; ausführlicher in Proceed. Amsterdam **18**, 1071, 1916.

$$P_\nu(x_\nu+\xi_\nu,\ y_\nu+\eta_\nu,\ z_\nu+\zeta_\nu)$$

und

$$P_\mu(x_\mu+\xi_\mu,\ y_\mu+\eta_\mu,\ z_\mu+\zeta_\mu)$$

seien zwei Punkte des H_2-Modells, denen bei der ungestörten Bewegung die Koordinaten x_ν, y_ν, z_ν bzw. x_μ, y_μ, z_μ zugeordnet sind. Das diesen beiden Punkten entsprechende Potential ist dann:

$$V_{\nu\mu}=\pm e^2\{(x_\nu-x_\mu+\xi_\nu-\xi_\mu)^2+(y_\nu-y_\mu+\eta_\nu-\eta_\mu)^2+(z_\nu-z_\mu+\zeta_\nu-\zeta_\mu)^2\}^{-1/2},$$

wobei das obere Zeichen bei gleicher, das untere bei ungleicher Ladung der beiden Punkte P_ν und P_μ gilt.

Entwickeln wir $V_{\nu\mu}$ nach Potenzen von ξ, η, ζ, so erhalten wir, wenn wir die Bezeichnungen:

$$x_\nu-x_\mu=x,\ y_\nu-y_\mu=y,\ z_\nu-z_\mu=z;$$
$$\xi_\nu-\xi_\mu=\xi,\ \eta_\nu-\eta_\mu=\eta,\ \zeta_\nu-\zeta_\mu=\zeta;$$
$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

einführen, den Ausdruck:

$$V_{\nu\mu}=\pm e^2\Big\{\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{r}\Big)\xi+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{r}\Big)\eta+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{r}\Big)\zeta+\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{1}{r}\Big)\xi^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(\frac{1}{r}\Big)\eta^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big(\frac{1}{r}\Big)\zeta^2+2\frac{\partial}{\partial x\,\partial y}\Big(\frac{1}{r}\Big)\xi\eta+2\frac{\partial}{\partial y\,\partial z}\Big(\frac{1}{r}\Big)\eta\zeta+2\frac{\partial}{\partial x\,\partial z}\Big(\frac{1}{r}\Big)\xi\zeta\Big]+\cdots\Big\}=$$

$$=\pm e^2\Big\{\frac{1}{r}-\frac{x}{r^3}\xi-\frac{y}{r^3}\eta-\frac{z}{r^3}\zeta+\frac{1}{2}\frac{1}{r^3}\Big[\Big(-1+\frac{3x^2}{r^2}\Big)\xi^2+\Big(-1+\frac{3y^2}{r^2}\Big)\eta^2+\Big(-1+\frac{3z^2}{r^2}\Big)\zeta^2+6\frac{xy}{r^2}\xi\eta+6\frac{yz}{r^2}\eta\zeta+6\frac{xz}{r^2}\xi\zeta\Big]+\cdots\Big\}.$$

Ersetzen wir jetzt $\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu$ durch unsere endgültigen Störungskoordinaten, so lauten die uns im folgenden allein interessierenden Glieder zweiter Ordnung:

$$V_{12}=\cdots\cdots\cdots\cdots+e^2\frac{3\sqrt{3}}{2^4a^3}\{-(\xi_1-\xi_2)^2-(\eta_1-\eta_2)^2+2(\zeta_1-\zeta_2)^2\}+\cdots.$$

$$-V_{13}=\cdots+e^2\frac{3\sqrt{3}}{2^4a^3}a^2\alpha_3^2+e^2\frac{3\sqrt{3}}{2^4a^3}\Big\{\frac{5}{4}(\xi_1-\varrho_3)^2-(\eta_1-a\alpha_3)^2-\frac{1}{4}(\zeta_1-\zeta_3)^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}(\xi_1-\varrho_3)(\zeta_1-\zeta_3)\Big\}+\cdots.$$

$$-V_{14}=\cdots+e^2\frac{3\sqrt{3}}{2^4a^3}a^2\alpha_4^2+e^2\frac{3\sqrt{3}}{2^4a^3}\Big\{\frac{5}{4}(\xi_1+\varrho_4)^2-(\eta_1+a\alpha_4)^2-\frac{1}{4}(\zeta_1-\zeta_4)^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}(\xi_1+\varrho_4)(\zeta_1-\zeta_4)\Big\}+\cdots.$$

$$-V_{23}=\cdots+e^2\frac{3\sqrt{3}}{2^4a^3}a^2\alpha_3^2+e^2\frac{3\sqrt{3}}{2^4a^3}\Big\{\frac{5}{4}(\xi_2-\varrho_3)^2-(\eta_2-a\alpha_3)^2-\frac{1}{4}(\zeta_2-\zeta_3)^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}(\xi_2-\varrho_3)(\zeta_2-\zeta_3)\Big\}+\cdots.$$

$$-V_{24}=\cdots+e^2\frac{3\sqrt{3}}{2^4a^3}a^2\alpha_4^2+e^2\frac{3\sqrt{3}}{2^4a^3}\Big\{\frac{5}{4}(\xi_2+\varrho_4)^2-(\eta_2+a\alpha_4)^2-\frac{1}{4}(\zeta_2-\zeta_4)^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}(\xi_2+\varrho_4)(\zeta_2-\zeta_4)\Big\}+\cdots.$$

$$V_{34}=\cdots+\frac{e^2}{2^4a^3}\{2a^2\alpha_3^2+2a^2\alpha_4^2\}+e^2\frac{1}{2^4a^3}\{2(\varrho_3+\varrho_4)^2-(a\alpha_3+a\alpha_4)^2-(\zeta_3-\zeta_4)^2\}+\cdots.$$

Die außerhalb der Klammern stehenden Terme rühren von dem Gliede erster Ordnung $\pm e^2\frac{x}{r^2}\xi$ her, da ja

$$\xi_3=-a+(a+\varrho_3)\cos\alpha_3=$$
$$=a\Big(-\frac{\alpha_3^2}{2!}+\frac{\alpha_3^4}{4!}-\cdots\Big)+\varrho_3\Big(1-\frac{\alpha_3^2}{2!}+\cdots\Big)=$$
$$=\varrho_3-a\frac{\alpha_3^2}{2}$$

und

$$-\xi_4=\varrho_4-a\frac{\alpha_4^2}{2}.$$

Die Summe der $V_{\nu\mu}$ bezeichnen wir im folgenden mit V:

$$V=V_{12}+V_{13}+V_{14}+V_{23}+V_{24}+V_{34}.$$

§ 2. **Die kinetische Energie des Wasserstoffmoleküls.** Wir berechnen zunächst die kinetische Energie des Kernes P_1. Setzen wir:

$$\varrho_1 e^{i\varphi_1} = \xi_1 + i\eta_1.$$
$$\zeta_1 = \zeta_1,$$

so sind ϱ_1, φ_1, ζ_1 seine Zylinderkoordinaten, bezogen auf ein mit dem ungestörten Molekül mitrotierendes Bezugssystem. Bezüglich eines im Raume ruhenden Systems dagegen entsprechen P_1 offenbar die Zylinderkoordinaten:

$$\varrho_1,\ \varphi_1 + \omega t,\ \zeta_1,$$

wobei ω mit entsprechendem Vorzeichen zu nehmen ist. Mithin lautet der Ausdruck für die kinetische Energie des Kernes P_1:

$$T_1 = \frac{M}{2}\left\{\dot\varrho_1^2 + \varrho_1^2(\omega + \dot\varphi_1)^2 + \dot\zeta_1^2\right\} =$$
$$= \frac{M}{2}\left\{\dot\xi_1^2 + \dot\eta_1^2 + \dot\zeta_1^2 + 2\omega(\xi_1\dot\eta_1 - \eta_1\dot\xi_1) + \right.$$
$$\left. + \omega^2(\xi_1^2 + \eta_1^2)\right\}.$$

Es ist ferner ohne weiteres einzusehen, daß die kinetische Energie des Elektrons P_3 sich berechnet als:

$$T_3 = \frac{m}{2}\left\{\left(\frac{d}{dt}(a + \varrho_3)\right)^2 + (a + \varrho_3)^2(\omega + \dot\alpha_3)^2 + \right.$$
$$\left. + \dot\zeta_3^2\right\} =$$
$$= \frac{m}{2}\left\{a^2\omega^2 + 2a\omega^2\varrho_3 + 2a^2\omega\dot\alpha_3\right\} +$$
$$+ \frac{m}{2}\left\{\dot\varrho_3^2 + a^2\dot\alpha_3^2 + \dot\zeta_3^2 + 4a\omega\varrho_3\dot\alpha_3 + \omega^2\varrho_3^2\right\}.$$

Für uns kommen dabei nur die in der zweiten Klammer zusammengefaßten Glieder zweiter Ordnung in Betracht. Von den Termen in der ersten Klammer fallen nämlich $a^2\omega^2$ und $2a^2\omega\dot\alpha_3$ bei der Bildung der Lagrangeschen Gleichungen weg und das aus $2a\omega^2\varrho_3$ sich ergebende Glied $2a\omega^2$ wird durch Terme erster Ordnung in V kompensiert.

Die Ausdrücke für die kinetische Energie des Kernes P_2 und des Elektrons P_4 entstehen aus den Formeln für T_1 und T_3 einfach durch die Ersetzung der Indizes 1 bzw. 2 durch 3 bzw. 4.

Die kinetische Energie des gesamten Moleküls bezeichnen wir mit

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

§ 3. **Die Gleichungen für die freien Schwingungen des Wasserstoffmoleküls.** Ist q irgendeine unserer generellen Koordinaten, so gilt zufolge den Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}.$$

Dies ergibt mit Rücksicht auf die Beziehung:

$$m a \omega^2 = \frac{3\sqrt{3} - 1}{4}\frac{e^2}{a^2}$$

die nachstehenden Bewegungsgleichungen:

$$M\ddot\xi_1 - 2\omega M\dot\eta_1 - M\omega^2\xi_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)} m\omega^2\left\{7\xi_1 - 2\xi_2 - \frac{5}{2}\varrho_3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta_3 + \frac{5}{2}\varrho_4 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta_4\right\}.$$

$$M\ddot\eta_1 + 2\omega M\dot\xi_1 - M\omega^2\eta_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)} m\omega^2\left\{-2\eta_1 - 2\eta_2 + 2a\alpha_3 - 2a\alpha_4\right\}.$$

$$M\ddot\zeta_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)} m\omega^2\left\{-5\zeta_1 + 4\zeta_2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\varrho_3 + \frac{1}{2}\zeta_3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\varrho_4 + \frac{1}{2}\zeta_4\right\}.$$

$$M\ddot\xi_2 - 2\omega M\dot\eta_2 - M\omega^2\xi_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)} m\omega^2\left\{-2\xi_1 + 7\xi_2 - \frac{5}{2}\varrho_3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta_3 + \frac{5}{2}\varrho_4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta_4\right\}.$$

$$M\ddot\eta_2 + 2\omega M\dot\xi_2 - M\omega^2\eta_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)} m\omega^2\left\{-2\eta_1 - 2\eta_2 + 2a\alpha_3 - 2a\alpha_4\right\}.$$

$$M\ddot\zeta_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)} m\omega^2\left\{4\zeta_1 - 5\zeta_2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\varrho_3 + \frac{1}{2}\zeta_3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\varrho_4 + \frac{1}{2}\zeta_4\right\}.$$

$$m\ddot\varrho_3 - 2m\omega a\dot\alpha_3 - m\omega^2\varrho_3 = \frac{m\omega^2}{4(3\sqrt{3}-1)}\left\{-\frac{15\sqrt{3}}{2}\xi_1 + \frac{27}{2}\zeta_1 - \frac{15\sqrt{3}}{2}\xi_2 - \frac{27}{2}\zeta_2 + \right.$$
$$\left. + (15\sqrt{3} - 4)\varrho_3 - 4\varrho_4\right\}.$$

$$m a^2\ddot\alpha_3 + 2m\omega a\dot\varrho_3 = \frac{m\omega^2}{4(3\sqrt{3}-1)}\left\{6\sqrt{3}\,a\eta_1 + 6\sqrt{3}\,a\eta_2 - 2a^2\alpha_3 + 2a^2\alpha_4\right\}.$$

$$m\ddot{\zeta}_3 = \frac{m\omega^2}{4(3\sqrt{3}-1)}\left\{\frac{2}{2}\xi_1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta_1 - \frac{27}{2}\xi_2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta_2 - (3\sqrt{3}-2)\zeta_3 - 2\zeta_4\right\}.$$

$$m\ddot{\rho}_4 - 2m\omega a\dot{\alpha}_4 - m\omega^2\rho_4 = \frac{m\omega^2}{4(3\sqrt{3}-1)}\left\{\frac{15\sqrt{3}}{2}\xi_1 + \frac{27}{2}\zeta_1 + \frac{15\sqrt{3}}{2}\xi_2 - \frac{27}{2}\zeta_2 - 4\rho_3 + (15\sqrt{3}-4)\rho_4\right\}.$$

$$ma^2\ddot{\alpha}_4 + 2m\omega a\dot{\rho}_4 = \frac{m\omega^2}{4(3\sqrt{3}-1)}\left\{-6\sqrt{3}a\eta_1 - 6\sqrt{3}a\eta_2 + 2a^2\alpha_3 - 2a^2\alpha_4\right\}.$$

$$m\ddot{\zeta}_4 = \frac{m\omega^2}{4(3\sqrt{3}-1)}\left\{-\frac{27}{2}\xi_1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta_1 + \frac{27}{2}\xi_2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta_2 - 2\zeta_3 - (3\sqrt{3}-2)\zeta_4\right\}.$$

§ 4. **Die Eigenschwingungen des Wasserstoffmoleküls.** Zur einfacheren Auflösung des obigen Gleichungssystems kann man versuchsweise einen Weg einschlagen, der sich erst nachträglich dadurch als brauchbar erweist, daß er in Übereinstimmung mit der Theorie der Differentialgleichungen 12 Lösungen mit 24 reellen, willkürlich und voneinander unabhängig wählbaren Konstanten liefert.

Unser Verfahren besteht darin, daß wir die Annahmen machen:

A) $\xi_1 = \xi_2,\ \eta_1 = \eta_2,\ \rho_3 = -\rho_4,\ a\alpha_3 = -a\alpha_4.$

B) $\zeta_1 = \zeta_2,\ \zeta_3 = \zeta_4.$

C) $\xi_1 = -\xi_2,\ \eta_1 = -\eta_2,\ \zeta_3 = -\zeta_4.$

D) $\zeta_1 = -\zeta_2,\ \rho_3 = \rho_4,\ a\alpha_3 = a\alpha_4$

und dabei jedesmal alle in dem betreffenden Falle nicht angeführten Koordinaten gleich Null setzen. In dieser Weise erhalten wir vier Systeme von Differentialgleichungen, die sich nach den üblichen Methoden[1]) einfach behandeln lassen, weil alle dabei auftretenden Säkulärgleichungen schließlich in quadratische Gleichungen zerfällt werden können. Selbstverständlich werden die gleich anzugebenden Resultate auch erhalten, wenn wir von der Säkulärgleichung des gesamten in § 3 angegebenen Systems von Bewegungsgleichungen ausgehen. Wir überzeugen uns dann einfach, daß die „große" Säkulärgleichung gleich dem Produkte der vier den Fällen A bis D entsprechenden Säkulärgleichungen ist.

Nachstehend stellen wir die Ergebnisse der Rechnung übersichtlich zusammen. Bei jeder Eigenschwingung geben wir an: das Quadrat der Eigenfrequenz ν^2, die Eigenfrequenz ν und die Störungskoordinaten als Funktion der Zeit oder, wo dies angängig ist, die durch die Beziehung:

$$\xi_1 = \bar{\xi}_1 e^{i\nu t},\ \eta_1 = \bar{\eta}_1 e^{i\nu t},\ \zeta_1 = \bar{\zeta}_1 e^{i\nu t} \dots \text{ usf.}$$

bestimmten Amplituden $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1$ usw. Die zu einer bestimmten Eigenschwingung gehörigen $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\xi}_2, \dots \bar{\zeta}_4$ sind nur bis auf einen gemeinsamen konstanten komplexen Faktor bestimmt, der im folgenden nicht angegeben wird. Von den explizit hingeschriebenen Konstanten sind die in B_1 und D_1 reell, alle übrigen aber sind komplex. Das Zeichen $\doteq$ bedeutet angenäherte Gleichheit.

ad A) In diesem Falle erhält man die Lösungen:

A_1) $\frac{\nu^2}{\omega^2} = 1$ ist eine zweifache Wurzel der der Annahme A entsprechenden Säkulärgleichung.

$$\xi_1 = \rho_3 = (b_1 + b_2 t)e^{i\omega t}.$$
$$\eta_1 = a\alpha_3 = i\xi_1.$$

A_2) $$\frac{\nu^2}{\omega^2} = -\frac{8-21\sqrt{3}+3\sqrt{3}\mu}{8(3\sqrt{3}-1)} + \left\{\left(\frac{8-21\sqrt{3}+3\sqrt{3}\mu}{8(3\sqrt{3}-1)}\right)^2 - \left(\frac{4-27\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)^2} - \mu\frac{243-3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)^2} - \mu^2\frac{135}{4(3\sqrt{3}-1)^2}\right)\right\}^{1/2} \doteq 1{,}99481 + 1{,}19993\mu$$

oder

$$\pm\frac{\nu}{\omega} \doteq 1{,}41238 + 0{,}42479\mu,$$

wobei

$$\mu = \frac{m}{M} = \frac{1}{1843{,}7} = 5{,}424\cdot 10^{-4}.^{1)}$$

$$\bar{\xi}_1 \doteq 1{,}29641\mu.$$
$$\bar{\eta}_1 \doteq 2{,}37874\mu i.$$
$$\bar{\rho}_3 \doteq -1{,}73832 - 2{,}85902\mu.$$
$$a\bar{\alpha}_3 \doteq -2{,}7955 i - 5{,}20619\mu i.$$

A_3) $$\frac{\nu^2}{\omega^2} = -\frac{8-21\sqrt{3}+3\sqrt{3}\mu}{8(3\sqrt{3}-1)} -$$

1) Vgl. etwa E. J. Routh, Stability of motion, London 1877, oder desselben Autors: Die Dynamik der Systeme starrer Körper, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1898.

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 50, 901, 1916.

$$-\left\{\left(\frac{8-21\sqrt{3}+3\sqrt{3}\mu}{8(3\sqrt{3}-1)}\right)^2-\left(\frac{4-27\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)^2}-\mu\frac{243-3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)^2}-\mu^2\frac{135}{4(3\sqrt{3}-1)^2}\right)\right\}^{1/2}=$$

$$=-0{,}30439-1{,}50951\mu$$

oder

$$\pm\frac{\nu}{\omega}=0{,}55172i-1{,}36801\mu i.$$

$$\xi_1=-1{,}02601\mu.$$
$$\eta_1=-1{,}69461\mu.$$
$$\varrho_3=0{,}92338+5{,}80360\mu.$$
$$a\bar{\alpha}_3=1{,}87706+7{,}28589\mu.$$

ad B) Hier ergibt sich:

B₁) $\frac{\nu^2}{\omega^2}=0.$

$$\zeta_1=a_1+a_2t.$$
$$\zeta_3=\zeta_1.$$

B₂) $\frac{\nu^2}{\omega^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}\cdot(1+\mu)=0{,}30958(1+\mu)$

oder

$$\pm\frac{\nu}{\omega}=0{,}55640\left(1+\frac{1}{2}\mu\right).$$

$$\zeta_1=-\mu.$$
$$\zeta_3=1.$$

ad C) Diese Annahme liefert:

C₁) $\frac{\nu^2}{\omega^2}=1.$

$$\xi_1=\frac{c_1}{\sqrt{3}}e^{i\omega t}.$$
$$\eta_1=i\xi_1.$$
$$\zeta_3=-\sqrt{3}\cdot\xi_1.$$

C₂) $\frac{\nu^2}{\omega^2}=\frac{1}{8(3\sqrt{3}-1)}\left[-(8-15\sqrt{3}+27\sqrt{3}\mu)+3\sqrt{3}\{9+(-234+32\sqrt{3})\mu+81\mu^2\}^{1/2}\right]=1-6\mu+\cdots$

oder

$$\pm\frac{\nu}{\omega}=1-3\mu+\cdots.$$

$$\xi_1=\frac{18\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}-\frac{33\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}6\mu=1{,}85747-17{,}5724\mu.$$
$$\eta_1=i\xi_1.$$
$$\zeta_3=-\frac{27}{4(3\sqrt{3}-1)}(2-6\mu)=-3{,}21723+9{,}65170\mu.$$

C₃) $\frac{\nu^2}{\omega^2}=\frac{1}{8(3\sqrt{3}-1)}\left[-(8-15\sqrt{3}+27\sqrt{3}\mu)-3\sqrt{3}\{9+(-234+32\sqrt{3})\mu+81\mu^2\}^{1/2}\right]=$

$$=\frac{3\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)}-\frac{24+7\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}\mu+\cdots=0{,}071265-2{,}15223\mu$$

oder

$$\pm\frac{\nu}{\omega}=0{,}26695-4{,}03109\mu.$$

$$\xi_1=-\frac{15\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{24+7\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}\mu=-2{,}30562\mu.$$
$$\eta_1=2i\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{24+7\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}\mu=1{,}14910\mu i.$$
$$\zeta_3=-\frac{27}{4(3\sqrt{3}-1)}\cdot\left(\frac{15\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}-\frac{24+7\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}\mu\right)=-1{,}72326+3{,}46212\mu.$$

ad D) Unter dieser Voraussetzung wird erhalten:

D₁) $\frac{\nu^2}{\omega^2}=0.$

$$\zeta_1=\frac{2ad_1}{3\sqrt{3}\omega}.$$
$$\varrho_3=\frac{2ad_1}{3\omega}.$$
$$\alpha_3=d_i t+d_2.$$

D₂) $\frac{\nu^2}{\omega_2}=-\frac{4-21\sqrt{3}-27\sqrt{3}\mu}{8(3\sqrt{3}-1}+\left\{\left(\frac{4-21\sqrt{3}-27\sqrt{3}\mu}{8(3\sqrt{3}-1)}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}\mu\right\}^{1/2}=$

$$=\frac{27\sqrt{3}}{21\sqrt{3}-4}\mu+\cdots=1{,}44458\mu+\cdots$$

oder

$$\pm\frac{\nu}{\omega}=1{,}20191\sqrt{\mu}.$$

$$\zeta_1=\frac{21\sqrt{3}-4}{27}-\frac{4(3\sqrt{3}-1)\sqrt{3}}{21\sqrt{3}-4}\mu=1{,}19900-0{,}89802\mu.$$
$$\varrho_3=1.$$

$$a\bar{\alpha}_3 = 2\sqrt{\frac{21\sqrt{3}-4}{27\sqrt{3}}}\frac{1}{\sqrt{\mu}}i =$$

$$= 1{,}66403\frac{1}{\sqrt{\mu}}i = \text{rund } 71\,i.$$

$$\text{D}_3)\quad \frac{\nu^2}{\omega^2} = -\frac{4-21\sqrt{3}-27\sqrt{3}\mu}{8(3\sqrt{3}-1)} -$$

$$-\left\{\left(\frac{4-21\sqrt{3}-27\sqrt{3}\mu}{8(3\sqrt{3}-1)}\right)^2 - \frac{27\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}\mu\right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{21\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)} +$$

$$+ \frac{729}{4(3\sqrt{3}-1)(21\sqrt{3}-4)}\mu + \cdots$$

$$= 1{,}92874 + 1{,}34163\,\mu$$

oder

$$+\frac{\nu}{\omega} = 1{,}38879 + 0{,}48303\,\mu$$

$$\bar{\zeta}_1 = -\frac{27}{21\sqrt{3}-4}\mu = -0{,}83403\,\mu$$

$$\bar{\varrho}_3 = 1$$

$$a\bar{\alpha}_3 \doteq 2i\frac{\omega}{\nu} \doteq 1{,}44010\,i - 0{,}50087\,\mu i.$$

Wir gehen nun an die Diskussion der obigen Lösungen und betrachten zunächst ihre allgemeinen, schon in den Annahmen A—B zum Ausdruck kommenden Eigenschaften.

Die Eigenschwingungen A und B finden so statt, daß sich der Abstand der beiden Kerne bzw. der der beiden Elektronen nicht ändert. In C und D hingegen bewegen sich einerseits P_1 und P_2, andererseits P_3 und P_4 zueinander spiegelbildlich in bezug auf den Schwerpunkt des Moleküls. Ferner erfolgen die Eigenschwingungen A in der Ebene senkrecht zur Rotationsachse, während die in B parallel zu dieser Richtung stattfinden. Bei den Eigenschwingungen C bewegen sich die Elektronen parallel der Rotationsachse, die Kerne in der dazu senkrechten Ebene. In D ist dies gerade umgekehrt.

Betreffs der einzelnen Lösungen wollen wir bemerken, daß sie, den in der Rechnung gemachten Vernachlässigungen entsprechend, die Bewegung nur bis auf Glieder höherer Größenordnung (und zwar von einem mitrotierenden Bezugssystem aus gesehen) beschreiben.

Vor allem stellen wir jetzt fest, daß in den obigen Lösungen (was man ja schon von vornherein erwartete) auch ganz triviale, kaum als Schwingungen im engeren Sinne anzusprechende Bewegungen enthalten sind; und zwar stellen: A_1 und B_1 eine Translationsbewegung des Moleküls senkrecht bzw. parallel zur Rotationsachse dar.

C_1 bedeutet eine ganz reguläre Bewegung des H_2-Modells, wobei sich nur die Molekülachse in einer neuen, gegen die ursprüngliche etwas geneigten Lage befindet. $\frac{|c_1|}{a}$ mißt dabei den Winkel zwischen der alten und der neuen Achse.

Die Lösung D_1 entspricht endlich (abgesehen von einer einfachen Drehung um den Winkel d_2) einer sonst regulären Rotation des Moleküls mit der veränderten Winkelgeschwindigkeit $\omega + d_1$. Allen bisher besprochenen Bewegungen ist ihre völlige Unabhängigkeit von dem Zahlenwerte für die Kernmasse gemeinsam.

Wir bemerken, daß A_1 und C_1 durch periodische Funktionen (mit der Periode ω) dargestellt werden. Dies ist einzig dadurch bedingt, daß wir die Bewegung von einem mit dem ungestörten Moleküle mitrotierenden Bezugssysteme aus betrachten. Von der Richtigkeit dieser unserer Behauptung überzeugt man sich einfach durch eine Transformation auf ein im Raume ruhendes Koordinatensystem.

Von den übrigen Lösungen bilden

$$A_2, A_3, B_2, C_3, D_3$$

insofern eine eigene Gruppe, als sie bei wachsender Kernmasse im wesentlichen bestehen bleiben und im Grenzfalle $\mu = 0$ mit den bei Frl. van Leeuwen mit

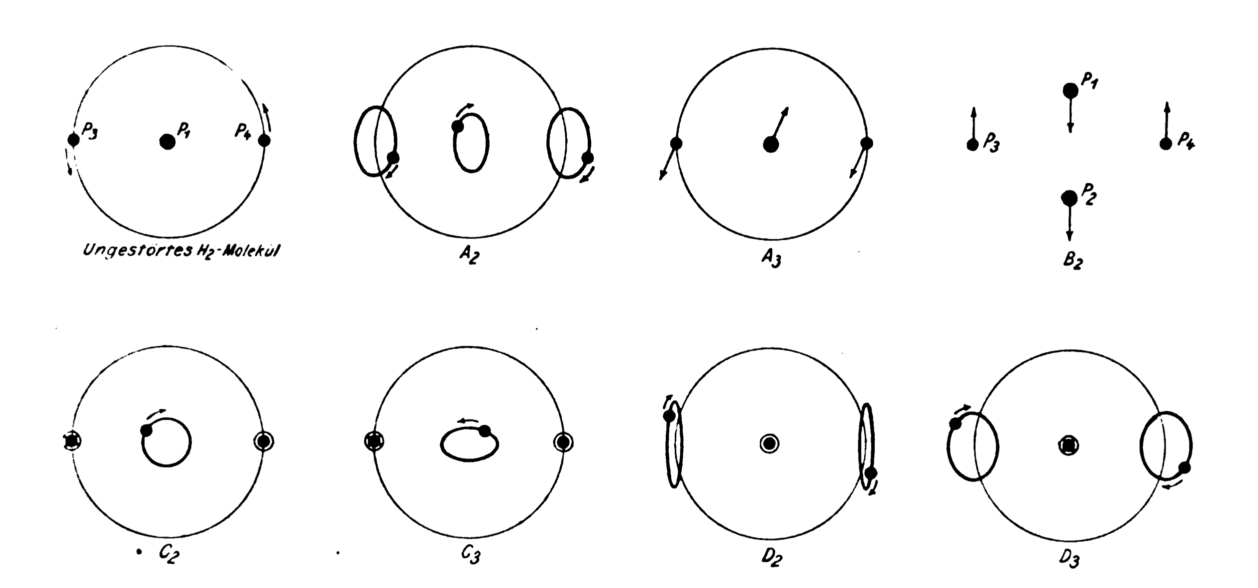
$$e, f, b, a, d$$

bezeichneten Eigenschwingungen[1]) identisch werden. Eine Vorstellung von dem Charakter dieser Eigenschwingungen geben am einfachsten die nebenstehenden Figuren, die (vom mitrotierenden Bezugssystem aus betrachtet) für die einzelnen Punkte P die Bahn, eine momentane

---

1) Bei Frl. van Leeuwen hat sich bei der Berechnung von d (in den Proc. Amsterdam mit C_2 bezeichnet) ein Rechenfehler eingeschlichen. Nach den Proc. Amsterdam lassen sich die Rechnungen leicht richtigstellen. Aus den dortigen Gleichungen (3) ergibt sich $n_{c_2} = (n_d =)\ 1{,}38879\,\omega$ und $\frac{\alpha}{r\mu} = \pm 0{,}694\,i$. Demgemäß sind in den beiden Abhandlungen die dortigen Figuren d und C_2 durch die unsrige D_3 zu ersetzen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß für $\mu = 0$ unsere Eigenschwingung D_1, die ja von μ überhaupt nicht abhängt, nicht in die van Leeuwensche c übergeht. Der Grund ist der folgende: Frl. van Leeuwen betrachtet die Eigenschwingungen bei festgehaltenen Kernen. Um ihre Formeln zu erhalten, müssen wir in den Gleichungen des § 3 schon von vornherein $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ gleich Null setzen. Beim Grenzübergang $M = \infty$ ($\mu = 0$) bleiben aber die Kerne noch immer beweglich ($\xi_1, \eta_1, \ldots \zeta_2 \neq 0$ im allgemeinen). Wie aus den ersten 6 Gleichungen des § 3 folgt, besteht dann die allgemeinste Bewegung der Kerne in einer Translation, so als ob gar keine Kräfte auf sie wirken würden.



Lage und die Richtung der ihr entsprechenden Geschwindigkeit darstellen. Mit Ausnahme von B_2 sind dabei in allen Fällen die Bewegungen in der Richtung der Molekülachse gesehen; B_2 ist eine Seitenansicht. Das Molekül als Ganzes ist in allen Figuren in dem beim ungestörten Moleküle durch Pfeile angedeuteten Sinne rotierend zu denken. Durch einen Kreis bzw. ein Kreuz im Kreise wird in unserer Zeichnung angedeutet, daß der betreffende Punkt seine zur Zeichenebene senkrechten Schwingungen vor bzw. hinter ihr ausführt und gleichzeitig dabei eine gegen den Beschauer hin bzw. von ihm weg gerichtete Geschwindigkeit besitzt. Die Bahnen der Kerne sind mit Ausnahme der dem Fall C_2 entsprechenden Figur in dem M/m-fachen Maßstabe gezeichnet. Die Punkte P_ν bewegen sich hier, wie dies bei kleinen Schwingungen im allgemeinen der Fall ist, in geraden Linien oder in Ellipsen, deren Lage und Größe aus den obigen Zahlenangaben unschwer zu entnehmen sind.

Besonders müssen wir nur noch auf A_3 hinweisen, wo die Abweichung aus der stationären Lage (imaginäre Schwingungsfrequenz!) mit der Zeit exponentiell ab- oder zunimmt. Dies ist nämlich eine, aber auch die einzige instabile Bewegung des Bohr-Debyeschen Wasserstoffmoleküls.

Es erübrigt jetzt nur noch die Besprechung der Eigenschwingungen C_2 und D_2.

C_2 ist als eine nur wenig verzerrte reguläre Präzession anzusprechen. Die Kerne beschreiben ja hier Kreisbahnen und es bewegt sich in erster Annäherung das Molekül so, daß die vier Punkte P_ν ihre, gegen die bei ungestörter Bewegung bestehende übrigens nur wenig geänderte Konfiguration beibehalten.

D_2 schließlich ist eine Eigenschwingung, bei der sich die Kerne längs der Rotationsachse periodisch bewegen, während die Elektronen in der zu ihr senkrechten Ebene, in der Richtung der $a\alpha_\nu$-Achsen langgestreckte Ellipsen beschreiben. $\overline{\zeta_1}$ und $\overline{\varrho_3}$ sind von gleicher Größenordnung, $\overline{a\alpha_3}$ ist dagegen wesentlich (ungefähr 71 mal) größer. In unserer Figur ist daher bei den Elektronenellipsen die große Achse gegenüber der kleinen zehnfach verkleinert[1]).

Die von uns berechneten Eigenfrequenzen ν sind, wie wir schon bemerkten, auf ein mit dem Molekül mitrotierendes Koordinatensystem bezogen. Nun wollen wir uns aber auch darüber klar werden, wie ein ruhender Beobachter die Frequenzen der einzelnen Punkte unseres Modells beurteilt. Zu diesem Zwecke zerlegen wir mit Lord Rayleigh[2]) die Schwingungen eines jeden Punktes P_ν in drei Komponenten: in eine lineare, parallel der Rotationsachse und in zwei entgegengesetzt zirkulare, senkrecht zu dieser Richtung. Die lineare Schwingung hat dann im ruhenden Bezugssystem die gleiche Frequenz wie im mitrotierenden, die beiden zirkularen Komponenten aber ergeben durch Superposition mit der Bewegung des ganzen Moleküls die Frequenzen $\nu + \omega$ bzw. $\nu - \omega$, je nachdem der Umlaufssinn der Zirkularschwin-

1) Diese Eigenschwingung wurde von Herrn Professor Sommerfeld auch für allgemeinere Bohrsche Molekülmodelle berechnet. Siehe darüber im § 5.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **24**, 410, 1892.

gung mit dem der Rotation des Modells übereinstimmt oder nicht.

Im einzelnen durchgeführt (siehe unsere Figur) ergibt dies, daß im ruhenden System den Kernen bzw. den Elektronen die nachstehenden Frequenzen zukommen:

Eigenschwingung	Kerne	Elektronen
A_2	$\nu-\omega,\ \nu+\omega$	$\nu-\omega,\ \nu+\omega$
B_2	ν	ν
C_2	$\nu-\omega$	ν
C_3	$\nu-\omega,\ \nu+\omega$	ν
D_2	ν	$\nu-\omega,\ \nu+\omega$
D_3	ν	$\nu-\omega,\ \nu+\omega$

Um auch noch die Frage zu erörtern, welche von den in der obigen Tabelle enthaltenen Frequenzen dem ultraroten Teile des Spektrums angehören, vergleichen wir die Werte für ν und $\nu\pm\omega$ mit dem der H_α-Linie entsprechenden Werte $\nu_{H\alpha}$ (Wellenlänge der H_α-Linie nach Watson 6563,05 Å-E, $\omega=4{,}214\cdot10^{16}\,\mathrm{sec}^{-1}$ nach Debye)

$$\nu_{H\alpha}=\frac{10^8\cdot3\cdot10^{10}}{6563{,}05}\,2\pi\,\frac{\omega}{4{,}124\cdot10^{16}}=6{,}82\cdot10^{-2}\cdot\omega$$

und ersehen daraus, daß nur zwei Eigenfrequenzen ins Ultrarot fallen, und zwar die der Präzessionsschwingung C_2 entsprechende Frequenz $\omega-\nu_{C_2}=3\mu\omega=1{,}627\cdot10^{-3}\,\omega$ ins langwellige und die D_2 zukommende Frequenz $\nu_{D_2}=2{,}799\cdot10^{-2}\,\omega$ ins kurzwellige Gebiet.

Endlich erwähnen wir noch, daß sich bei der Eigenschwingung C_2 die Kerne in Kreisen bewegen, ihnen daher im ruhenden Systeme nur die eine Frequenz

$$\omega-\nu_{C_2}=3\mu\omega$$

entspricht, die mit der von Krüger[1]) angegebenen Frequenz der „Präzessionsschwingung" vollständig übereinstimmt.

§ 5. **Die Eigenschwingungen komplizierterer Bohrscher Moleküle mit beweglichen Kernen.** Im folgenden betrachten wir Moleküle, die aus zwei Kernen und einem in der zu ihrer Verbindungslinie senkrechten Ebene rotierenden Elektronenringe bestehen. Besitzen dabei die beiden Kerne gleiche Ladungen und gleiche Massen, so sind die Moleküle in bezug auf den Elektronenring symmetrisch (z. B. H_2, O_2, N_2), sonst aber sind sie unsymmetrisch (z. B. HCl, CO). Die Eigenschwingungen solcher Moleküle lassen sich, wenn die Kerne ruhend gedacht werden, mit Benützung der in einer Arbeit von Sommerfeld[2]) entwickelten Formeln ohne prinzipielle Schwierigkeiten berechnen. Unter Zugrundelegung der beim Wasserstoff erhaltenen Ergebnisse können wir nun aber auch einfach feststellen, welche Eigenschwingungen bei Berücksichtigung der Bewegung der Kerne neu auftreten werden.

Die Annahme der Beweglichkeit der Kerne verschafft dem Molekül sechs neue Freiheitsgrade, also gerade ebensoviele, wie sie ein starrer Körper besitzt. Nun hat aber das Molekül, auch wenn die Kerne ruhen, eine Eigenschwingung, bei der es sich ohne seine Konfiguration zu ändern bewegt. Es ist dies einfach die ursprüngliche und die Gesamtheit der zu ihr benachbarten regulären Bewegungen (bei Frl. van Leeuwen mit c, bei uns mit D_1 bezeichnet). Die durch die Beweglichkeit der Kerne gewonnenen sechs Freiheitsgrade bedingen also höchstens fünf solcher Eigenschwingungen, bei denen sich das Molekül wie ein starrer oder nahezu starrer Körper bewegt.

Daß aber das allgemeinere Bohrsche Molekül diese fünf Eigenschwingungen auch tatsächlich besitzt, machen unsere Rechnungen für das H_2-Molekül sehr plausibel. Ja es ist sogar zu erwarten, daß von den fünf Freiheitsgraden entfallen werden: drei auf die Translationsbewegung des Moleküls (bei H_2 waren es A_1 und B_1), einer auf eine „Präzessionsschwingung" (C_2) und einer auf eine im übrigen reguläre Bewegung des Moleküls, bei der nur die Molekülachse gegen die ursprüngliche Lage etwas verdreht ist (C_1). Die sechste der neu entstehenden Eigenschwingungen ist bereits von Herrn Prof. Sommerfeld sowohl für ein symmetrisches als auch für ein unsymmetrisches zweiatomiges Bohrsches Molekül berechnet und in einem Kolleg über die „Probleme der Atomistik" im Wintersemester 1915/16 besprochen worden. Diese Bewegung (bei H_2 mit D_2 bezeichnet) ist beim symmetrischen Molekül in bezug auf den Schwerpunkt symmetrisch und besteht in einem Gegeneinanderschwingen der beiden Kerne längs der Molekülachse, wobei alle Elektronen mit gleicher Phase, in der zur Rotationsachse senkrechten Ebene gelegene und in der Richtung der Bahntangente gestreckte Ellipsen beschreiben. In den unsymmetrischen Molekülen kreisen bei dieser Schwingung die Elektronen nicht mehr auf ebenen Bahnen, sondern treten auch aus der Ebene, in der sie sich bei ungestörter Bewegung befinden, heraus.

§ 6. **Folgerungen: Stabilität des Bohrschen Moleküls, Dispersionsformel beim Mitschwingen der Kerne.** Aus den Erörterungen des letzten Paragraphen ist zu entnehmen, daß beim zweiatomigen Bohrschen Molekül durch die Berücksichtigung der Be-

1) F. Krüger, loc. cit.

2) A. Sommerfeld, Elster- und Geitel-Festschrift, S. 549, Braunschweig 1915.

wegung der Kerne keine neue instabile Eigenschwingung zutage tritt. Insbesondere ist beim Wasserstoff, wie schon früher betont wurde, im ganzen nur eine einzige solche Schwingung (A_3) vorhanden[1]).

Trotz der mangelnden Stabilität des H_2-Moleküls ist aber eine Präzessionsschwingung stets möglich, wenigstens wenn der Winkel, den die Molekülachse mit der Richtung des im Raume festen Impulses einschließt, hinreichend klein ist. Über Präzessionsschwingungen mit größeren Winkeln zwischen dem Impuls und der Molekülachse, wie dies die Theorien von Krüger und Epstein voraussetzen, können wir jedoch aus unseren Rechnungen keine exakten Schlüsse ziehen.

Für die Theorie der Dispersion ist das Resultat wichtig, daß bei allen durch das Mitschwingen der Kerne bedingten Eigenschwingungen im symmetrischen Molekül das elektrische Moment gleich Null bleibt. Bei der Translationsbewegung und bei der für H_2 mit C_1 bezeichneten Eigenschwingung ändert sich ja die Konfiguration der vier Punkte P_ν überhaupt nicht und die beiden ultraroten Eigenschwingungen (für H_2 waren es C_2 und D_2) sind eben symmetrisch in bezug auf den Schwerpunkt des Moleküls. Alle diese Eigenschwingungen sprechen daher auf äußere, homogene, elektrische Wellen nicht an, und es können infolgedessen in der Dispersionsformel keine Glieder auftreten, die durch eine dieser sechs Schwingungen bedingt werden. Die Debyesche Dispersionsformel[1]) für den Wasserstoff muß also im wesentlichen auch im Ultraroten gelten und die Sommerfeldschen[2]) Dispersionsformeln für O_2 und N_2 lassen sich durch die Berücksichtigung der Bewegung der Kerne nicht wesentlich verbessern[3]).

Anders liegen die Verhältnisse bei unsymmetrischen zweiatomigen Molekülen, deren Kerne ungleich stark geladen sind (etwa HCl). Die bei den ultraroten Eigenschwingungen, nämlich die Präzessionsschwingung und die von Sommerfeld berechnete, werden hier durch Lichtwellen angeregt und beeinflussen daher die Dispersion.

1) Siehe H. J. van Leeuwen, loc. cit.

1) P. Debye, Münchn. Ber. 1915, S. 1.
2) A. Sommerfeld, loc. cit.
3) Sowohl das elektrische Moment, als auch die für die Dispersion hier in Betracht kommenden Schwingungszahlen sind bei Berücksichtigung des Mitschwingens der Kerne nur um Glieder von der Größenordnung des μ zu ändern.

München, im Februar 1917.

(Eingegangen 8. April 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Das umgekehrte Spektrum und seine Komplementärverhältnisse.

Von A. Kirschmann.

Bei der Zerlegung des weißen Lichtes in seine Bestandteile mittelst Prismas oder Gitters bedient man sich seit Newtons grundlegendem Versuch eines Spaltes, d. h. einer in ihrer Weite regulierbaren rechteckigen Öffnung in einer undurchsichtigen Wand. Der Spalt ist in der Tat das einfachste Mittel, um die durch Brechung oder Beugung getrennten Strahlengattungen in eine nach Wellenlängen oder Schwingungszahlen geordnete lineare Reihenfolge zu bringen. Dabei ist die „Reinheit" des Spektrums umgekehrt proportional der Weite des Spaltes, wenn man unter Reinheit den Grad der Beschränkung der Superposition von Wellenlängen versteht. Ein Spektrum ist um so reiner, je weniger verschieden an jeder Stelle die superponierten Wellenlängen sind. Diese Verschiedenheit ist auch bei einem „sehr reinen" Spektrum noch eine verhältnismäßig große. Wenn man mittelst eines Spaltes von $^1/_{100}$ mm Weite ein Spektrum von 1 m Länge entwirft, so hat man infolge des Übereinanderfallens der Spaltbilder an jeder Stelle des Spektrums immer noch eine Superposition von Strahlen, deren größte und kleinste Schwingungszahl einen Unterschied von vier Millionen in der Sekunde aufweisen. Das ist zwar prozentual gegenüber den sich in den Billionen bewegenden Schwingungszahlen selbst nicht viel. Wir wissen aber nicht, ob es hier auf die Verhältnisse oder auf die absoluten Unterschiede ankommt. Ein absolut reines Spektrum, in welchem an jeder Stelle nur eine Wellenlänge oder Schwingungsfrequenz anzutreffen wäre, setzt einen Spalt von der Weite 0 voraus und ist daher ein Ding der Unmöglichkeit. Solange man der relativen Bedeutung der spektralen Reinheit sowie des Umstandes eingedenk bleibt, daß sich dieselbe auf rein physikalische Eigenschaften des Spektrums bezieht, liegt eine ganz berechtigte Anwendung

des mathematischen Hilfsbegriffes der „Annäherung an die Null" vor. Denn Spaltweite und Superpositionsgröße nähern sich im selben Sinne einem Minimum. Sobald man aber unter der „Reinheit" des Spektrums nicht mehr lediglich eine zahlenmäßig festzustellende Eigenschaft der vermutlichen physischen Vorgänge, sondern eine solche der psychischen Paralleltatsachen, der Farbenwahrnehmung, versteht, verliert die Anwendung dieses Begriffes jede Berechtigung. Denn, erstlich ist die Qualität der Lichtempfindung keineswegs eindeutig durch die Wellenlänge bestimmt, und zweitens ist die Reinheit oder Sättigung einer Farbenempfindung eine Funktion, deren Maximum nicht mit dem Minimum, dem Nullpunkt, einer anderen Variabeln dieser Empfindung, der Intensität, zusammenfallen kann. Selbst wenn es ausgemacht wäre, daß es vollständig homogenes Licht, d. h. Licht in welchem keine Wellenlängenverschiedenheiten vorkämen, geben könnte, und daß solches Licht Farbenempfindungen auslöste, so könnte solches homogenes und absolut monochromatisches Licht doch niemals mit Hilfe eines Spaltes erzeugt werden. Wir werden auf diese Seite unseres Gegenstandes im Laufe unserer Darlegungen später noch zurückzukommen haben.

Noch ein anderer folgenschwerer Irrtum heftet sich für gewöhnlich an die Benutzung des Spaltes. Nicht allein, daß man ihn in allen Fällen, wo es sich nicht um annähernd punktförmige Lichtquellen handelt, als das alleinige und unumgängliche Mittel zur Herstellung gesättigter Spektral-„Farben" ansieht, man betrachtet ihn auch als ein letzthin einfaches Instrument. Nun lassen sich aber auch ohne Spalt Spektralfarben erzeugen, die an Intensität und Sättigung denen eines Spaltspektrums unter günstigsten Reinheits- und Intensitätsverhältnissen nicht allein nicht nachstehen, sondern sie sogar noch übertreffen können. Und außerdem ist ein Spalt durchaus keine einfache Einrichtung; denn er besteht, ganz abgesehen von der Diffraktion und anderen optischen Komplikationen[1]), schon rein geometrisch aus zwei getrennten und voneinander unabhängigen Teilen. Das einfachste Instrument zur Erzeugung eines Spektrums ist der „halbe Spalt", d. h. die einfache undurchsichtige Kante oder die geradlinige Grenze zwischen einem hellen (durchsichtigen) und einem dunklen (undurchsichtigen) Felde. Das Licht, das an einer solchen dunklen Kante vorbei und dann durch ein Prisma geht, erzeugt ein intensives farbiges Spektrum. Liegt der dunkle Teil auf der Seite des brechenden Winkels des Prismas, so beginnt die Farbenreihe mit Rot und endet mit Gelb, einem Gelb, das weder grünlich ist, noch eine Tendenz nach dem Orange hin besitzt. Dazwischen finden sich die Übergänge zwischen diesen Endfarben, also Rotorange, Orange, Goldgelb. Dreht man den Halbspalt um, so daß der helle Teil nach der Seite der brechenden Kante des Prismas gerichtet ist, so zeigt das Spektrum die Farben Blau, Ultramarinblau (d. h. Violettblau) und Violett. Von diesen Farben der beiden Spektra entsprechen das Rot und Violett ganz den Endfarben des gewöhnlichen Spektrums, die ja, um überhaupt sichtbar zu sein, auch schon eine nicht zu geringe Öffnung des Spaltes erfordern. Die übrigen Farben der beiden Kantenspektra dagegen sind zusammengesetzter, d. h. physikalisch weniger rein als die eines gewöhnlichen Spektrums bei mäßiger oder enger Spaltbreite. Als Lichtempfindungen aber sind sie keineswegs weniger intensiv und gesättigt als jene; ja die beiden Endfarben Gelb und Blau, die im gewöhnlichen Spektrum um so mehr zusammenschrumpfen, je reiner dasselbe ist, erscheinen hier sehr ausgedehnt und von wunderbarer Sättigung. Im ordentlichen Spektrum herrschen neben den Endfarben Rot und Violett die Qualitäten Orange, Grün und Violettblau vor, in den beiden Kantenspektren Gelb und Blau. Und zwar ist dieses Gelb etwa ein Zitronen- oder Schwefelgelb, das ebensowenig nach dem Grün, wie nach dem Orange neigt. Das Blau aber ist ein reines, weder dem Grün noch dem Violett sich annäherndes Blau, etwa wie das sog. Preußisch Blau. Das äußerste Blau des Kantenspektrums entspricht etwa Nr. 60 des Ostwaldschen Farbenkreises, das äußerste Gelb ungefähr Nr. 00. (Ostwalds Farbenfibel, Leipzig 1917.)

Man kann die beiden Kantenspektra direkt übereinander entwerfen, wenn man eine „Spaltvorrichtung" wie die in Fig. 1 dargestellte benutzt, die sich durch Auflegen zweier undurchsichtiger Rechtecke auf eine durchsichtige Glasplatte leicht herstellen läßt. Die Ordnung der Farben in diesen Halbspektren ist aus Fig. 2 ersichtlich. Fängt man die beiden Spektren mit Planspiegeln auf, die um eine horizontale Achse

1) Das einen Spalt passierende Licht verhält sich nach dem Verlassen des Spaltes zu einem Teile so, als ob der Spalt nicht vorhanden wäre (d. h. es geht in der durch die Lichtquelle bedingten geradlinigen Richtung weiter), zu einem andern Teile aber so, als ob der Spalt selber eine Lichtquelle oder eine diffus reflektierende Fläche wäre. Dieser mit der Verengerung des Spaltes im Verhältnis zum andern wachsenden Teil macht die Anwendung einer Sammellinse nötig. Man kann diesen diffus vom Spalte ausgehenden Teil des Lichtes aber auch durch einen zweiten, in einiger Entfernung hinter dem ersten angebrachten Spalt ziemlich vollständig abblenden. Bei Anwendung direkten Sonnenlichtes kann man auf diese Weise ohne Zuhilfenahme einer Linse ein objektives Spektrum entwerfen, in welchem die hauptsächlichen Fraunhoferschen Linien deutlich zu sehen sind.



Fig. 1.

drehbar sind, so lassen sich dieselben leicht superponieren, wobei sie sich restlos zu Weiß ergänzen. Es ist also das spektrale Rot dem reinen weder grünlichen noch violettartigen Blau genau komplementär. Ebenso das spektrale Violett einem reinen Gelb. Das entspricht allerdings den herrschenden Ansichten über die physikalische Natur der Spektralfarben ebensowenig wie die Tatsache, daß die Kantenspektra mit reinem Blau und Gelb beginnen, anstatt mit Blaugrün und Gelbgrün, wie es die Theorie erfordert. Auch die Mineralogen haben

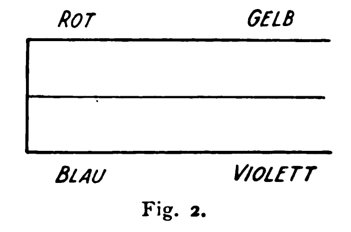


Fig. 2.

diesen auffallenden Widerspruch zwischen Theorie und Erfahrung längst bemerkt, indem die Farben der chromatischen Polarisation mit einem Gelb erster Ordnung beginnen, anstatt mit einem Grün, wie es der Theorie nach sein müßte.

Kombiniert man die beiden Halbspalten so, daß sie in gleicher Höhe stehen und einen lichten Raum zwischen sich lassen, so hat man einen gewöhnlichen Spalt. Ein mit weiter Spaltöffnung erzeugtes Spektrum ist nichts anderes als die Nebeneinanderstellung der oben erörterten Kantenspektra. Ist der Spalt von genügender Weite, so hat man auch keine anderen Farben. Es fehlt alsdann jede Andeutung des Grün. Das Grün erscheint erst, wenn die Spaltweite so weit verringert wird, daß die Kantenspektren in der Mitte übereinanderfallen.

Diese Art, die Kanten zu kombinieren, ist aber nicht die einzig mögliche. Ebensogut wie die hellen Seiten kann man auch die dunklen Hälften übereinanderfallen lassen (Fig. 3). Man hat dann gewissermaßen einen negativen Spalt, d. h. ein undurchsichtiges Rechteck auf durchsichtigem Grunde. Wenn man die Breite eines solchen, an die Stelle des gewöhnlichen eingesetzten, negativen Spaltes richtig wählt, so fallen die Kantenspektra jetzt mit ihren andern Enden in der Mitte zusammen, und es erscheint an dieser Stelle die Farbe, die im gewöhnlichen Spektrum nicht vorkommt, das Purpur, in herrlicher Sättigung, und beiderseits davon die Übergänge von dieser Farbe zu Rot und Violett. Man hat nun eine Farbenreihe, die mit Gelb beginnt und durch Orange, Rot, Purpur, Violett geht und mit Blau endigt. Man kann dieses Spektrum, in dem das Grün fehlt (wie im gewöhnlichen Spektrum das Purpur) das umgekehrte Spektrum nennen; und wir wollen diese Bezeichnung in der Folge dafür beibehalten. Bei einer gewissen Breite des negativen Spaltes, die selbstverständlich von dem Dispersionsvermögen des Prismas abhängt, ist die Sättigung der Farben des umgekehrten Spektrums eine maximale. Verbreitert man den Spalt so werden die purpurnen Farbentöne

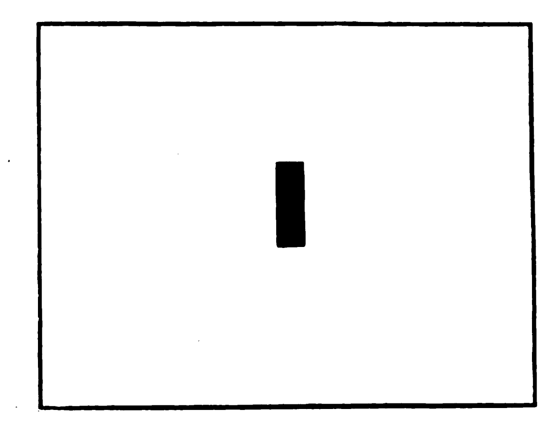


Fig. 3.

dunkler, und zuletzt wird die Mitte des Spektrums schwarz, so daß wieder die beiden Kantenspektren vorliegen. Macht man den Spalt schmäler und schmäler, so werden die Farben immer blasser und weißlicher. Ist der Spalt zu einer ganz dünnen schwarzen Linie zusammengeschrumpft, so besteht das umgekehrte Spektrum nur noch aus ganz blassen Tinten von Gelb, Rosa und Blau.

Die beiden Spektra, das gewöhnliche und das umgekehrte, können auf eine sehr einfache Weise direkt aneinander grenzend auf dieselbe Fläche projiziert werden. Man benutzt hierzu die in Fig. 4 veranschaulichte Spaltvorrichtung, die einen negativen und einen positiven Spalt von ungefähr gleicher Weite aufweist. Am einfachsten läßt sich eine solche Vorrichtung durch Bekleben einer Planglasplatte an den bezeichneten Stellen mit Stanniol oder sonstigem undurchsichtigen Material oder durch Auflegen von dünnem Metallblech herstellen. Man kann

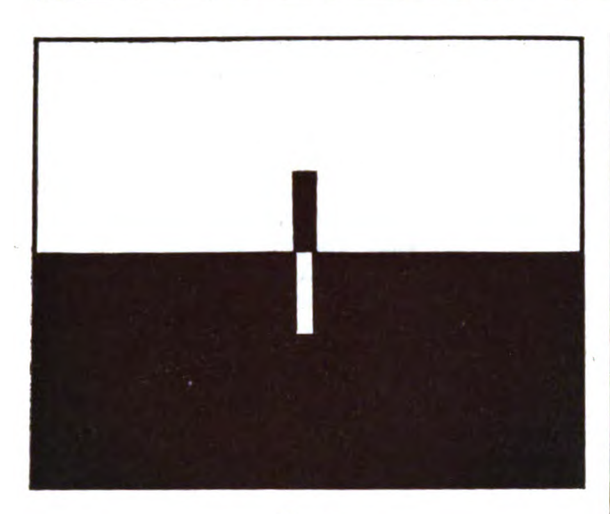


Fig. 4.

aber auch photographierte Spalte benutzen. Die dem Dispersionsvermögen des zur Anwendung kommenden Prismas anzupassende Breite der Spalte muß durch Ausprobieren gefunden werden. Es ist empfehlenswert, eine Einrichtung zu treffen, daß die beiden Spalte, entweder gemeinschaftlich oder unabhängig voneinander, variiert werden können.

Sollen beide Spalten einander vollständig entsprechen, so dürfen dieselben nicht genau die gleiche Weite haben. Es muß vielmehr der negative um so viel breiter sein, daß die störende Wirkung der Irradiation, die ja stets auf Kosten der dunklen Fläche geht, gerade aufgewogen wird. Da die Kompensation der Irradiation ihrerseits aber wieder von der Helligkeit und räumlichen Beschaffenheit der Lichtquelle abhängt, so ist die Benutzung unabhängig variabler Spalte vorzuziehen.

Man erhält mit dieser Spalteinrichtung das gewöhnliche und das umgekehrte Spektrum so nebeneinander gelagert, wie es in Fig. 5 dar-

BLAU	PURPUR	GELB	U.G.
ROT	GRÜN	VIOLETT	UV.

Fig. 5.

gestellt ist. Dem roten Ende des gewöhnlichen Spektrums entspricht das blaue Ende des umgekehrten, der grünen Mitte des gewöhnlichen das Purpur, und dem violetten Ende das Gelb des umgekehrten. Photographiert man beide Spektra auf dieselbe Platte, so zeigt das umgekehrte eine ultragelbe Region, die gerade soweit über das sichtbare Gelb hinausgeht wie das Ultraviolett im gewöhnlichen Spektrum über das sichtbare violette Ende. Das ultragelbe Spektrum unterscheidet sich von seiner Umgebung durch die Abwesenheit der ultravioletten Strahlen gerade so wie sich das ultraviolette durch die Anwesenheit derselben auszeichnet. Bei Anwendung geeigneter Hilfsmittel muß sich übrigens jenseits des blauen Endes auch eine ultrablaue Region feststellen lassen, die dem Ultrarot des gewöhnlichen Spektrums entspricht und sich im Gegensatz zu diesem durch die Abwesenheit der ultraroten Strahlen auszeichnet. Ich habe aber darüber keine Versuche angestellt. Falls man als Lichtquelle die von einem, auf schwarzer Samtunterlage befestigten, sehr dünnen Glimmerblättchen reflektierten Strahlen benutzt, so zeigen sich die durch die Weg- und Phasendifferenz erzeugten Interferenzstreifen im umgekehrten Spektrum ebenso schön und deutlich wie im ordentlichen, wie ich bereits vor mehr als zwanzig Jahren, als ich in der Physikalischen Gesellschaft der Universität von Toronto zum ersten Male das umgekehrte Spektrum demonstrierte, gezeigt habe[1]). Besonders interessant wird die Lagevergleichung der Interferenzstreifen in beiden Spektren, wenn das Glimmerblättchen so dünn gewählt ist, daß es selber die Farben dünner Blättchen zeigt, da in diesem Falle die Zahl der Streifen sehr gering, unter Umständen auf einen einzigen beschränkt wird.

Man kann die beiden Spektra, anstatt sie direkt auf den Schirm zu projizieren, auch mittelst zweier um parallele Längsachsen drehbarer Planspiegel auffangen. Dann lassen sie sich auf dem Schirm leicht auf derselben Fläche so vereinigen, daß jede Stelle des ordentlichen Spektrums mit der entsprechenden Stelle des umgekehrten zusammenfällt. Dabei zeigt sich, daß die beiden Spektra in allen ihren einander entsprechenden Teilen genau komplementär sind. Die Vereinigung auf derselben Fläche ergibt ein völlig farbloses Band. Vorausgesetzt ist nur, daß die zur Behebung der Irradiationsstörung nötige Korrektur der Spaltweiten richtig erfolgt ist, da sonst die Intensitätsverhältnisse unrichtig werden. Aber wenn dies nicht genau gelungen ist, läßt sich durch einen in den Gang der Strahlen des zu hellen Spektrums eingeschalteten Episkotister die geeignete Reduktion der Lichtstärke leicht bewerkstelligen.

Der genaue Komplementarismus zwischen

1) Univ. of Toronto Studies, Psycholog. Series. Vol I, p. 100. Siehe auch: „Normale und anomale Farbensysteme". Arch. f. d. ges. Psychologie VI, S. 397—424.



ordentlichem und umgekehrtem Spektrum ist von der Dispersionsverteilung des zur Anwendung kommenden Prismas unabhängig und gilt — selbstverständlich unter Voraussetzung der eben erwähnten Irradiationskorrektur — für jede beliebige Spaltweite. Auch wenn der positive, das gewöhnliche Spektrum erzeugende Spalt nur noch eine feine helle Linie und der negative, dem das umgekehrte Spektrum seine Entstehung verdankt, nur eine entsprechend dünne dunkle Linie ist, ergänzen sich das lichtschwache Farbenband des gewöhnlichen Spektrums und das lichtstarke, aber blasse Farben zeigende Band des umgekehrten zu einer gleichmäßig hellen, weißen Fläche. Es ist dies aber auch, rein physikalisch betrachtet, nicht allein leicht verständlich, sondern geradezu notwendig. Denn jede Stelle des umgekehrten Spektrums verdankt ja ihre spezifische Färbung gerade dem Umstande, daß in ihr die Wellenlängen fehlen, deren Zusammenwirken die Färbung der entsprechenden Stelle des ordentlichen Spektrums bewirkt. Und ebenso fehlen im ordentlichen Spektrum an jeder Stelle gerade die Strahlen, deren Superposition die Farbe der homologen Stelle des umgekehrten Spektrums erzeugt. Ja, man darf geradezu sagen: Es gibt, abgesehen vom Nikolkomplementarismus, keinen vollkommeneren Komplementarismus als den zweier homologen Stellen im ordentlichen und umgekehrten Spektrum. Ihre Kombination ergibt nicht allein farbloses Licht, sondern das volle Weiß der Lichtquelle mit allen seinen ursprünglichen Komponenten. Dabei hat die „Farbengleichung" für solche homologen Spektralstellen den Vorzug, daß sie für alle Intensitäten der Lichtquelle und für alle Spaltweiten in gleicher Weise gültig ist. Das ist bekanntlich bei den Komplementärverhältnissen der Teile des ordentlichen Spektrums nicht der Fall. Wenn man bei einer gewissen Spaltweite zu einer, durch die mittlere Wellenlänge oder Schwingungszahl gekennzeichneten, Stelle im ordentlichen Spektrum die komplementäre Stelle desselben Spektrums gefunden hat, dann ist die Gleichung für eine andere Spaltweite nicht mehr richtig, wie ja auch schon die Bezeichnung der Farbenqualität für eine bestimmte Stelle im Spektrum nicht mehr stimmt, wenn man die Spaltweite ändert, und zwar auch dann, wenn durch diese Spaltänderung die Lage der mittleren Wellenlänge der in Frage kommenden Spektralstelle nicht geändert wird.

Wir lassen der Übersichtlichkeit halber eine kurze Vergleichung der beiden Arten des Spektrums hinsichtlich ihrer übereinstimmenden und ihrer unterscheidenden Eigenschaften folgen:

Vergleichung des ordentlichen und des umgekehrten Spektrums.

A. Übereinstimmendes.

1. Bei dem gewöhnlichen wie bei dem umgekehrten Spektrum handelt es sich an jeder Stelle um eine Superposition von Wellenlängen.
2. Bei beiden hat die Änderung der Intensität der Lichtquelle und ebenso die Änderung der Spaltweite auch Änderungen der Farbenqualitäten zur Folge.
3. Bei beiden ist die relative Lichtintensität der Farben von der Weite des Spaltes abhängig.
4. Bei beiden hat die Erweiterung des Spaltes über eine gewisse, von dem Dispersionsvermögen des Prismas abhängige Größe hinaus keinen Effekt mehr auf die wahrzunehmenden Farbenqualitäten. Über diese Spaltweite hinaus bestehen beide Spektra aus denselben Elementen, nämlich den einfachen Kantenspektren. Nur die Lageverhältnisse der letzteren sind umgekehrt.
5. Bei äußerster Verengerung des Spaltes nähern sich bei beiden Spektren die wahrgenommenen Qualitäten der Farblosigkeit.
6. Die Sättigung der wahrzunehmenden Farben ist in beiden Spektren am größten bei einer mittleren Spaltweite.

B. Unterscheidendes.

1. Beim ordentlichen Spektrum ist die physikalische Reinheit am größten an den Enden und am geringsten in den mittleren Regionen. Im umgekehrten Spektrum dagegen ist sie in der Mitte am größten und an den Enden am geringsten.
2. Das ordentliche Spektrum zeigt bei der in bezug auf die Sättigung günstigsten Spaltweite die Farben Rot, Grün und Violett in größter, die Farben Blau und Gelb nur in sehr geringer Ausdehnung. Das umgekehrte Spektrum dagegen zeigt bei der Spaltweite der günstigsten Sättigungswirkung als dominierende Farben Blau, Purpur und Gelb, während Rot und Violett nur in geringer Ausdehnung auftreten.
3. In dem ordentlichen Spektrum fehlt das Purpur, im umgekehrten das Grün.
4. Das ordentliche Spektrum hat seine größte Lichtintensität in den mittleren Regionen; das umgekehrte dagegen an den Enden.
5. Im ordentlichen Spektrum werden bei Verengerung des (positiven) Spaltes alle Farben lichtschwächer und nähern sich dem Schwarz. Im umgekehrten Spektrum dagegen werden sie bei Verschmälerung des (negativen) Spaltes heller und nähern sich dem Weiß.

6. Bei Erweiterung des Spaltes über ein gewisses Maß hinaus tritt im ordentlichen Spektrum das Weiß an die Stelle des Grüns. Im umgekehrten Spektrum dagegen tritt bei der entsprechenden Verbreiterung des Spaltes das Schwarz an die Stelle des Purpurs.

Nach dem Vorstehenden hat der Einwand, das umgekehrte Spektrum sei nur das Resultat einer Superposition von Spektralteilen, keine Berechtigung, da in bezug auf die Superposition von Wellenlängen zwischen dem gewöhnlichen und dem umgekehrten Spektrum kein wesentlicher, sondern höchstens ein gradueller Unterschied besteht. Ebenso muß der Einwand, der leicht von denen erhoben wird, die nie ein umgekehrtes Spektrum gesehen haben, daß die Farben des umgekehrten Spektrums nur Mischfarben seien, schon aus rein logischen Gründen zurückgewiesen werden. Dem Begriff der Mischfarbe haften dieselben logischen Widersprüche und Inkonsequenzen an wie dem der räumlichen Mischung überhaupt, falls dieser nicht scharf definiert wird als „mehr oder minder feines Gemenge, dessen Bestandteile gesondert bleiben, obschon sie unter Umständen mit unsern Sinneswerkzeugen und deren Hilfsmitteln nicht mehr getrennt wahrgenommen werden". Eine Mischung von A und B im Raume, dergestalt, daß an jedem Punkte beide Bestandteile gleichzeitig vorhanden sind, ist ein Ding der Unmöglichkeit. Entweder A und B verschwinden, und es tritt ein Neues, Anderes (das wohl beiden ähnlich sein mag) an ihre Stelle, oder sie verschwinden nicht, sondern sind mit geeigneten Mitteln noch als nebeneinander bestehend zu erkennen. In beiden Fällen bleibt die „Mischung" ein unvollziehbarer Scheinbegriff. Denn die Bestandteile können nicht zu gleicher Zeit verschwinden und doch bestehen bleiben. Die Chemie hat darum auch ihre Ansichten über die Natur der Lösungen, die früher als vollkommene Mischungen galten, von Grund aus ändern müssen.

Auf optischem Gebiete entsteht aber noch eine weitere Schwierigkeit dadurch, daß das Wort „Farbe" in dreifacher Bedeutung gebraucht wird. Es bedeutet:

1. Technisch: soviel wie „Färbemittel".
2. Physisch: eine irgendwie in der Natur der Wellenperiodizität begründete Verschiedenheit des Lichtes.
3. Psychisch: eine Empfindungsqualität.

Mit den beiden erstgenannten Bedeutungen des Begriffs: Farbe, läßt sich nun eine Anwendung des Begriffs der Mischung (in der oben erörterten Bedeutung von Gemenge) sehr wohl in Einklang bringen, nicht aber mit der dritten. Und selbst bei den ersten beiden steht die Anwendung in gegenseitigem Widerspruch. Eine Mischung von Farbstoffen braucht, wie Helmholtz ausführlich zeigte, durchaus nicht auch optisch eine Mischung zu sein. Eine Mischung ist immer eine Addition (einerlei ob die Intensität der Resultante gleich der Summe der Intensitäten der Komponenten, oder, bei zeitlich-räumlicher Verteilung, gleich dem Durchschnitt der Einzelintensitäten ist). Wenn man aber zwei transparente Farben mischt, so ist das technisch zwar eine Addition, optisch aber genau ebenso eine Subtraktion wie wenn man Strahlenfilter hintereinander schaltet. Die Mischung der Malerfarben, die ja fast niemals vollständig transparente Lasurfarben oder absolut undurchsichtige Deckfarben sind, ist daher optisch durchaus keine einfache Mischung, sondern eine Kombination von Addition und Subtraktion.

Physisch ist alles Licht gemischt, d. h. ein Gemenge von Strahlen verschiedener Wellenlänge, wenigstens so lange wir daran festhalten, daß im weißen Lichte alle Wellenlängen gleichzeitig oder in außerordentlich kurzer Zeitfolge und auf außerordentlich kleinem Raum zusammen vorhanden sein sollen. Die Theorie stellt im Grunde genommen ganz ungeheuerliche Anforderungen an unser Vorstellungsvermögen. Im schmalsten Lichtbündel soll ein Millionenheer von Wellen, gewissermaßen in Regimentsfront marschieren. Sie haben alle, zeitlich und räumlich, ungleichen Tritt und ungleiche Schrittlänge. Aber sie kommen überall gleichzeitig an; und bei allen Schwenkungen (an der Grenze verschiedener Mittel) bleibt ihre Front wunderbar genau gerichtet. Aber wir haben keinen Grund von einer solchen Theorie abzugehen, so lange dieselbe durch die Tatsachen der Spektralanalyse, der Interferenz und Polarisation so glänzend bestätigt wird.

Psychisch sind alle Lichtqualitäten — soweit sie der schärfsten logischen Kritik standhalten und sich wirklich als Eigenschaften der Empfindungen und nicht als solche komplizierter Vorstellungen erweisen (wie beispielsweise die „Farbe" Braun) — einfach, auch die farblosen. Die Qualitäten des normalen Farbensinns bilden eine in sich geschlossene Mannigfaltigkeit mit stetigen Übergängen, in der alle Glieder von gleichem Range sind. Alle Komponententheorien (die Helmholtzsche, die Heringsche, sowie die neuerdings von G. E. Müller, Ebbinghaus u. A. aufgestellten Modifikationen) vergewaltigen die Tatsachen, indem sie gewisse Qualitäten zu Grundfarben stempeln. Außerdem begehen sie den logisch mathematischen Fehler, das Prinzip der Einfachheit, das nur als Ökonomieprinzip der Darstellung Geltung

hat, in die Natur der Tatsachen selbst zu verlegen. Die einzige Farbentheorie, die den Tatsachen keinen Zwang antut, ist die Wundtsche. Ich habe an anderer Stelle[1]) dargelegt, daß es für qualitative Mannigfaltigkeiten nur drei Möglichkeiten gibt:

1. Die Mannigfaltigkeit enthält nur eine Qualität (also gar keine qualitative Differenzierung). Alle Unterschiede sind Intensitätsunterschiede. So beispielsweise bei der Reihe der farblosen Lichtempfindungen.

2. Die Mannigfaltigkeit enthält zwei antagonistische Qualitäten, wie das Farbensystem eines Dichromaten, das System der Temperaturempfindungen.

3. Die Mannigfaltigkeit enthält unendlich viele Qualitäten, wie bei dem System der Farbentüchtigen.

Mannigfaltigkeiten der letzteren Art sind stets in sich geschlossen. Hierher gehören neben dem normalen Farbensystem die Mannigfaltigkeit der Klangfarben: die der Vokale, die Qualitätensysteme des Geruchs- und Geschmacksinns und die Mannigfaltigkeit der Richtungen in der Ebene und im Raume. In einem solchen Systeme gibt es zwar zwischen den einzelnen Gliedern Grade der Ähnlichkeitsbeziehungen, Übergänge, Verwandtschaftsgrade. Alles aber, was man, gestützt auf die veranlassende „Mischung" der physischen Reizvorgänge, als Mischung von Empfindungsqualitäten in Anspruch nimmt, entpuppt sich immer als eine der übrigen einfachen Qualitäten des Systems.

Der Einwurf, die Farben des umgekehrten Spektrums seien keine „reinen" Farben, sondern Mischfarben, kann nur erhoben werden auf Grund ungenügender Bekanntschaft mit dem umgekehrten Spektrum und den Beziehungen zwischen der physischen Reinheit (d. i. dem Grade der Superposition von Wellenlängen) und der psychischen Reinheit (d. i. der Einfachheit und Sättigung der Empfindungsqualität) der Farben. Wir haben uns zu sehr daran gewöhnt, Farbe und Wellenlänge praktisch füreinander einzusetzen. Aber die Farbenqualität ist — abgesehen davon, daß die Angabe einer Wellenlänge oder Schwingungszahl nur als ein Mittelwert der in Frage kommenden superponierten Strahlen Geltung haben kann — nicht nur von der Wellenlänge, sondern auch von deren Amplitude (Intensität) abhängig, und es ist klar, daß diese Intensitätsänderung nicht notwendig in der gleichen Weise auf die Qualität einwirkt, wie die durch die Erweiterung des Spaltes hervorgerufene. Aber selbst wenn es richtig wäre, daß zu einer gegebenen Wellenlänge immer und überall eine und dieselbe Farbenqualität gehörte, dann folgt daraus noch lange nicht auch die Richtigkeit der Umkehrung, nämlich daß zu einer gegebenen Farbenqualität immer und überall auch nur eine und dieselbe Wellenlänge gehöre. Tatsächlich kann, wie jedem, der einigermaßen mit den Problemen der Farbenwahrnehmung vertraut ist, bekannt sein muß, jede Farbenqualität auf drei ganz verschiedene Arten erzeugt werden:

1. Durch die Strahlen eines einzigen mehr oder minder eng begrenzten Spektralgebietes.

2. Durch Kombination zweier mehr oder weniger ausgedehnter Spektralgebiete, wobei überdies die Wahl der beiden Gebiete noch eine mannigfache sein kann.

3. Durch Kombination des ganzen Spektrums mit Ausnahme eines einzigen mehr oder minder ausgedehnten Gebietes.

Die Sache liegt auch nicht etwa so, daß nur die erste Art, und auch diese nur bei physikalisch sehr reinem Spektrum, voll gesättigte Farben ergibt. Im Gegenteil, je reiner das Spektrum im physikalischen Sinne, desto lichtschwächer die Farben und desto unbestimmter ihre Qualitätsunterschiede. Darum sind bei spektrometrischen Untersuchungen (z. B. der positiven Linienspektra), die einen sehr engen Spalt und sehr starke Dispersion erfordern, die Farbenqualitäten sehr undeutlich. Nichtsdestoweniger ist es richtig, daß einige Farben am gesättigtsten auf die erste Art hergestellt werden können (wenn auch nicht in großer Ausdehnung). Das ist besonders der Fall für die Enden des Spektrums, für Rot und Violett, wobei jedoch zu beachten ist, daß das Violett, um gesättigt zu erscheinen, schon eine beträchtliche Spaltöffnung erfordert. Ebenso das äußerste Rot.

Auf die zweite Art lassen sich am gesättigtsten herstellen Grün und Purpur. Beim Purpur ist das ja allgemein anerkannt; weniger aber beim Grün, obgleich schon Helmholtz das Grün des Spektrums als weniger gesättigt als die andern Farben anerkannte und demgemäß sein Farbendreieck an der Grünecke abrundete. Man kann aber, sowohl als Strahlenfilter wie auch als Aufstrichfarben, grüne Farbentöne herstellen, die einen gesättigteren Eindruck machen als das spektrale Grün. Bei spektroskopischer Untersuchung findet sich dann aber meist, daß das von ihnen durchgelassene oder reflektierte Licht aus Gelbgrün und Blaugrün oder aus Grüngelb und Blau zusammengesetzt ist.

Endlich gibt es Farben, die nur auf die

1) Die Dimensionen des Raumes, Philosoph. Studien 19, S. 390f. und Normale und anomale Farbensysteme, Archiv f. d. ges. Psychologie 6, S. 405.

dritte der genannten Arten bei genügender Helligkeit in voller Sättigung herzustellen sind: Das sind Gelb und Blau. Das gewöhnliche Spektrum enthält sie entweder gar nicht oder höchstens in ganz schmalen Übergangsbezirken. Etwas rechts von der Natriumlinie geht das noch orangeartige Goldgelb in Grüngelb und Gelbgrün über. Das eigentliche, vom Orange ebensoweit wie vom Gelbgrün entfernte Gelb ist im gewöhnlichen Spektrum kaum vorhanden. Im umgekehrten dagegen bildet es die eine der beiden, große Ausdehnung beanspruchenden Endfarben. Alle gelben Pigmente und auch die meisten gelben Strahlenfilter und durchsichtigen Medien verdanken ihre Farbe nicht etwa vorzugsweise von ihnen reflektierten oder durchgelassenen gelben Strahlen, sondern dem Umstand, daß vom ganzen Spektrum nur die violetten (und im Falle des dem Orange näheren Goldgelb auch die blauen) Strahlen durch Absorption ausgelöscht, oft aber auch nur geschwächt sind. Bringt man aber eine exklusivere Gelbreflektion oder Gelbdurchlässigkeit zustande, was zwar schwer, aber, besonders bei Strahlenfiltern[1]), doch möglich ist, so fehlt die nötige Helligkeit, um ein gesättigt erscheinendes Gelb hervorzurufen. Das Aussehen dieser Gegenstände ist dann nicht mehr gelb, sondern braun oder olivfarben.

Ganz ähnlich verhält es sich mit dem reinen Blau, d. h. dem Blau, das weder etwas Grünliches noch etwas Violettartiges an sich hat. Es ist im gewöhnlichen Spektrum fast nicht oder gar nicht vorhanden. Bei geringer Spaltöffnung geht das Blaugrün fast unmittelbar ins Violett über, so daß keine Fläche von nennenswerter Ausdehnung vorhanden ist, die man als reines Blau bezeichnen könnte. Auch bei größerer Spaltöffnung ist das nunmehr ausgedehntere Blau immer ein Violettblau, etwa dem Ultramarin bei Pigmentfarben entsprechend. Das reine Blau erscheint erst bei sehr großer Spaltöffnung, wenn das Grün verschwindet, das positive Spaltspektrum also in die beiden getrennten Kantenspektra übergeht. Ich möchte hier besonders darauf aufmerksam machen, daß die durch die Veränderung der Spaltweite hervorgerufenen Qualitätsverschiebungen keineswegs mit denen identisch sind, die durch die Helligkeitsänderungen der Lichtquelle entstehen. Auch bei ganz engem Spalt verschwindet bei sehr großer Intensitätssteigerung das Grün mehr oder weniger vollständig. Wenn man beispielsweise ohne Vermittelung durch Spiegel das direkte Licht der Sonnenscheibe benutzt, so ist auch bei äußerst geringer Spaltöffung kein Grün mehr

1) Siehe W. Wirth, Wundts Philos. Studien 18, 581.

im Spektrum zu sehen. Das Gelb geht dann durch einen schmalen farblosen Streifen direkt in ein lichtstarkes blasses Blau über. Aber weder dieses Gelb noch das Blau sind mit dem Gelb und Blau der Kantenspektra oder des umgekehrten Spektrums identisch; sie haben beide einen wärmeren Farbenton als diese. Das Gelb ist trotz seiner Lichtstärke und Blässe mehr eine Tinte des Goldgelben, und das sehr helle und an der Übergangsstelle sehr schwach gesättigte Blau ist durchweg deutlich violettartig.

Wir haben gesehen: Aus der wahrgenommenen Qualität einer Farbe kann man auch bei ausgezeichnetster Sättigung auf die physische Natur des betreffenden Lichtes, und besonders auf die spektrale Reinheit desselben nicht schließen. Das Blau des umgekehrten Spektrums ist dafür ein schlagendes Beispiel. Dasselbe ist bei richtig gewählter Helligkeit der Lichtquelle und Spaltweite so wunderbar intensiv und gesättigt, daß die Farben des ordentlichen Spektrums kaum dagegen aufkommen können, und doch ist es physisch sehr zusammengesetzter Natur. Auch nicht einmal annähernd kann man aus dem Aussehen einer Farbe auf die Lage ihrer physischen Komponenten im Spektrum schließen. Ich habe zu Demonstrationszwecken öfters blaue Strahlenfilter [durch Behandlung von unexponiert fixierten photographischen Diapositivplatten mit farbigen Bädern[1])] angefertigt, die nahezu gleich aussehen — unter größerem Aufwand von Sorgfalt und Zeit hätte man ihre Verschiedenheit auch bis zur Unterschiedsschwelle und noch weiter herabdrücken können — die aber bei spektroskopischer Untersuchung außerordentlich verschiedene Absorptionsspektra zeigten. Bei Kombination mit dem gleichen goldgelben Filter, wurde das eine tief rot, das andere smaragdgrün, ein beredtes Beispiel für die Tatsache, daß für die wahrnehmbaren Farbenqualitäten der Satz: „Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches, nicht gilt.

Es ist schon weiter oben angedeutet worden, daß auch die andere Annahme, nämlich daß zu einer bestimmten Wellenlänge auch eine bestimmte Farbenqualität gehöre, oder daß durch Angabe einer Wellenlänge die derselben entsprechende Farbe eindeutig bestimmt sei, unrichtig ist. Sie ist bedingt richtig für eine bestimmte Intensität der Lichtquelle und eine bestimmte Spaltweite. Die zu einem durch Angabe von Wellenlänge oder Schwingungszahl gekennzeichneten Ort im Spektrum gehörige Farbenqualität bleibt nicht dieselbe, wenn die Intensität der Lichtquelle oder die Weite der Spaltöffnung geändert wird. Dies und die an-

1) Wundt, Psycholog. Stud. 10, S. 185.

erkannte Tatsache, daß[1]) die Umkehrung des Satzes erwiesenermaßen falsch ist, hätte den Physiker längst stutzig machen müssen. Wenn die Wellenlänge wirklich für die Farbenqualität verantwortlich ist, wie kommt es denn, daß man dieselbe Qualität, die durch eine gewisse Wellenlänge hervorgerufen wird, auch durch Kombination von ganz andern Wellenlängen erzeugen kann. Daß zwischen Wellenlängen und Lichtqualitäten eine gesetzmäßige Beziehung besteht, ist außer Zweifel. Da diese Beziehung aber nicht eindeutig ist, so hat niemand das Recht, die Wellenlängen oder Undulationsfrequenzen direkt als Ursache der Farbenempfindungen auszugeben. Wenn eine Bewegungsperiodizität oder eine Periodizität der Kraftrichtungsänderung die Ursache ist, und daran zweifelt heute niemand, so kann es, eben wegen jenes Mangels der Eindeutigkeit, die ursprüngliche homogenem Licht innewohnende Periodizität nicht sein. Man könnte z. B. an Interferenzen denken, und die nach dem Lippmannschen Verfahren der farbigen Photographie erzeugten Farben, die nachweislich keine „reinen" Spektralfarben sind, sind durch ihr Verhalten geeignet einen ähnlichen Gedanken nahezulegen. In jeder, auch der schmalsten, positiven Spektrallinie sind immer noch viele verschiedene Wellenlängen an demselben Punkte im Raum vorhanden, zwischen denen eine Art von Interferenz stattfinden kann. Ich will mich aber hier keineswegs für die Lösung der Frage durch Interferenzen irgendeiner Art entscheiden. Aber ich behaupte: Wenn eine Periodizität die Ursache der Farben ist, so kann es nicht die primäre der Lichtwellen selber, sondern nur eine sekundäre, auf der Superposition der Lichtwellen beruhende Periodizität sein. Wirklich homogenes Licht hat noch kein Mensch gesehen. Man kann daher auch nicht wissen, ob es farbig erscheinen würde. Ja, man kann nicht einmal sicher sein, daß es als „Licht" wahrgenommen würde. Und selbst wenn jemand imstande wäre homogenes Licht zu erzeugen, und dieses sich als farbig erwiese, so bliebe für ihn immer noch das Rätsel zu lösen, warum man dieselbe Farbe auch mit nicht homogenem Lichte herstellen kann, in welchem die für die betreffende Farbe verantwortlich erklärte Wellenlänge fehlt. Es bliebe ihm immer noch zu erklären, warum für die Entstehung einer bestimmten Empfindungsqualität viel weniger die Anwesenheit einer gewissen Wellenlängengruppe als vielmehr die Abwesenheit einer gewissen anderen Gruppe maßgebend zu sein scheint. Es ist etwas Wahres an der von Goethe wieder vorgebrachten Lehre, daß die Farbe etwas Schattiges sei. Farbe entsteht überall da, wo dem weißen Lichte etwas entzogen wird. Darum kann auch eine Farbe nie dieselbe Helligkeit haben wie das weiße Licht, aus dem sie durch Beseitigung eines Teiles seiner Bestandteile entstanden ist.

Nicht bloß auf dem Gebiete des Lichtes, sondern überall, wo es sich um sogenannte Wellenbewegungen handelt, halte ich die herrschenden Anschauungen über die Beziehung zwischen kontinuierlicher Sinnesempfindung und periodischem physischen Reizvorgang für verfehlt. So besonders beim Schall. Es erscheint mir geradezu absurd, anzunehmen, daß die zweiunddreißig Luftstöße des tiefen Orgelpfeifentones direkt die kontinuierliche Klangempfindung erzeugen sollen. Wenn das der Fall wäre, dann müßten doch auch vierzig oder fünfzig Schwebungen in der Sekunde, die doch noch deutlich getrennt wahrgenommen werden, auch als Ton aufgefaßt werden. Ebenso hat jedes Geräusch, auch das ganz instantane Explosivgeräusch, einen deutlichen Klangcharakter. Unsere ganze Akustik leidet an dem Übelstand, daß wir uns nur zu sehr daran gewöhnt haben, den Schall als eine Sache der Luftbewegung anzusehen. Die Luft ist zwar das Mittel, in dem wir uns bewegen und auf das wir angewiesen sind; aber sie ist, sowohl was die Entstehung wie die Weiterleitung des Schalles anbelangt, eines der ungünstigsten und schlechtesten Mittel und zur Ermittelung der wahren physischen Natur des Schalles am wenigsten geeignet. Wir hören die periodischen Luftschwingungen nur dann als Ton, wenn sie gleichzeitig von ganzen Flächen eines ausgedehnten Körpers ausgehen. Eine Stimmgabel selber hören wir nur sehr schwach oder gar nicht. Um deutlich hörbar zu werden, müssen ihre Schwingungen erst auf den größere Ausdehnung bietenden Resonator übertragen werden. Am Resonator aber gehen die Schwingungen von allen Punkten großer Flächen gleichzeitig aus. Da diese Ausgangspunkte ungleiche Entfernung von dem perzipierenden Organe haben, und da überdies keineswegs feststeht, daß die Schwingungen aller dieser Punkte hinsichtlich ihrer Zahl und Dauer genau übereinstimmen, so haben wir kein Recht mehr anzunehmen, daß die Bewegung an der Türe der Psyche lediglich mit der stoßweisen Periodizität anklopfe, die wir in einer von einem Punkte ausgehenden Wellenfolge, der Schwingungszahl des betreffenden Tones entsprechend, vorauszusetzen pflegen. Wir wissen überhaupt nicht, ob eine genau von einem

1) Vgl. auch Mentz, Unters. zur Psychophysik der Farbenempf. am Spektrum. Wundt, Philos. Studien **13**, 534ff.

Punkte ausgehende Welle eine Empfindung hervorrufen würde. Wir haben es tatsächlich überall mit Vorgängen zu tun, die gleichzeitig von vielen Punkten ausgehen. Wohl zu verstehen: ich behaupte nicht etwa, daß schon auf der physischen Seite die diskontinuierliche Wellenfolge in einen kontinuierlichen Vorgang umgewandelt werde. Aber ich behaupte, daß die periodische Wellenfolge, die wir bei Schall und Licht durch die ermittelten Wellenlängen und Schwingungszahlen feststellen, zwar eine Vorbedingung zum Zustandekommen von Ton und Farbe, nicht aber deren eigentlicher und letzter physischer Parallelprozeß sei. Als solchen müssen wir vielmehr, anstatt der Schwingungen selber, gewisse aus dem Zusammenwirken zahlreicher nicht ganz gleicher Schwingungen resultierende sekundäre Vorgänge annehmen, deren spezielle Natur von der künftigen Forschung noch zu ermitteln bleibt.

Wie schon weiter oben bemerkt, soll durch die vorstehenden Erwägungen nicht etwa versucht werden, die Kluft zwischen dem physischen aus diskontinuierlichen Schwingungen oder Energie-Richtungs-Änderungen bestehenden Reizvorgang und dem psychischen Vorgang der kontinuierlichen Empfindung zu überbrücken. Die physische Welt, wenn sie als etwas von dem Bewußtsein Unabhängiges gedacht werden soll, hat keinen Platz für ein Kontinuum irgendwelcher Art. Überall wo wir ein physisches Kontinuum annehmen, geraten wir, sofern wir den Mut haben, den Gedanken bis zu seinen letzten Konsequenzen zu verfolgen, in unlösbare Widersprüche. Die Atome, die früher als innerlich homogen betrachtet wurden, sind längst in Komplexe von Elektronen mit weiten Zwischenräumen zerfallen. Den Elektronen wird es nicht besser ergehen, und den homöopathisch noch so weit potenzierten Subelektronen auch nicht. Die physische Welt der Dinge, d. h. die Materie, kann auch den kleinsten Teil des Raumes nicht lückenlos ausfüllen, ohne die Begriffe der Dichte und der Masse zu Pseudobegriffen werden zu lassen, und mit der Definition der Elastizität einen Zirkel zu beschreiben. Es kann kein physisches Kontinuum geben. Das einzige Kontinuum, von dem die Physik folgerichtig und ohne in direkte Widersprüche zu verfallen reden kann, und das sie bei der Behandlung der Bewegung gar nicht umgehen kann, ist die Kontinuität des Raumes und der Zeit; und diese ist, da sie mit der Kontinuität des Ich zusammenfällt, nichts spezifisch Physisches mehr. Einerlei, ob man die Welt der Dinge als der Welt der Bewußtseinsphänomene koordiniert oder als zu dieser im Verhältnis der Subordination stehend betrachtet, soweit sind die Vertreter der quantentheoretischen Betrachtungsweise im vollen Rechte: In einer Welt der (vom Bewußtsein losgelösten) „Dinge" ist nirgends eine Kontinuität zu finden.

Zu der Welt der „Dinge" gehören auch die Vorgänge in dem lichttragenden Äther. Dieses „raumerfüllende" Medium ist erfunden worden um das Wunder der Fernwirkung loszuwerden. Man wird es aber in der Wellentheorie des Lichtes doch nicht los. Man hat vielmehr nur das eine große Wunder der Wirkung der Lichtquelle auf das entfernte Objekt in Billionen mikroskopisch kleiner Wunderchen eingeteilt; denn die Übertragung der Lichtbewegung von einem Ätherteilchen zum nächsten, das doch durch einen leeren Zwischenraum von jenem getrennt ist, bleibt noch genau so rätselhaft. Versucht man aber der Schwierigkeit dadurch zu entgehen, daß man annimmt, die Übertragung von Ätherteilchen zu Ätherteilchen geschehe durch mechanischen Stoß, so muß man den Ätherteilchen Elastizität zuschreiben. Das ist aber eine Eigenschaft der Materie, die sich nur durch Lageänderung der durch Zwischenräume getrennten Teile erklären läßt. Dann bestehen eben die Ätherteilchen wieder aus noch kleineren voneinander entfernten Teilchen, und das ursprüngliche Problem ist nicht beseitigt, sondern nur ein Stockwerk höher hinaufgetragen. Der Fehler, den die Physik damit begeht, daß sie das Wunder der Fernwirkung loswerden, erklären will, besteht aber im wesentlichen darin, daß sie nicht einsieht, daß die Fernwirkung nur in dem nämlichen Sinne ein Wunder ist, wie etwa die Empfindungsqualität „Rot" oder das Gefühl „Angenehm", die sie längst aus dem Bereich dessen, was ihr zu erforschen und zu erklären obliegt, ausgeschlossen hat. Die Fernwirkung ist, wie jene, eine elementare Tatsache und daher ebenso wunderbar wie natürlich; natürlich, weil sie eben unleugbare Tatsache ist, und wunderbar, weil sie, wie alles Einfache, nicht erklärt werden kann. Denn „Erklären" ist ja nichts weiter als die Zurückführung des Zusammengesetzten, Komplexen, auf schlechthin Einfaches. Die Physik ist die mit größtmöglicher mathematischer Folgerichtigkeit vorgehende Erforschung und Erklärung der Welt der objektiven Dinge. Diese Welt der objektiven Dinge ist aber nicht die Wirklichkeit, die Welt der gegebenen Tatsachen, sondern, um mit Wundt zu reden, das Produkt einer abstraktiven, begrifflichen Konstruktion. Wir abstrahieren bei ihr gerade von dem allgemeinsten und konstantesten aller Merkmale der Tatsachen, nämlich von der Eigenschaft Bewußtseinszustand zu sein, welche Eigenschaft bei keiner wirklichen Tatsache fehlen kann. Das

Ich-Bewußtsein begleitet jede Tatsache, die für uns eine Rolle spielen kann, aber wir abstrahieren von ihm, d. h. wir wenden ihm keine Aufmerksamkeit zu; oder anders ausgedrückt: wir spielen, es sei nicht da. Wenn wir aber dann der durch Abstraktion von dem Ich-Bewußtsein losgelösten, rein begrifflichen, nicht wirklichen, Welt der objektiven Dinge Merkmale zuschreiben, die nur dem Ich-Bewußtsein zukommen oder geradezu mit ihm identisch sind, dann müssen wir uns unweigerlich in unlösbare Widersprüche verlieren. Und zu diesen Merkmalen gehört die Kontinuität.

Auch das „kontinuierliche" Spektrum ist ein mit inneren Widersprüchen behafteter Begriff. Zwar ist an dem stetigen Übergang der Qualitäten der Farbenmannigfaltigkeit, die ja zur Welt der gegebenen Bewußtseinstatsachen gehören, nicht zu zweifeln. Wohl aber sind Zweifel an der Möglichkeit einer stetigen Reihe von Wellenlängen nicht nur berechtigt, sondern geradezu geboten. Wenn auf einer beliebigen Strecke im Spektrum eines weißglühenden Körpers[1]) (in der sich die Intensität nicht der Null nähert, also nicht an den Enden), sagen wir beispielsweise von $\lambda = 570\,\mu\mu$ bis $\lambda = 550\,\mu\mu$, alle möglichen dazwischenliegenden Wellenlängen gleichzeitig vorhanden sein sollen, dann muß diese Spektralregion eine unendliche Intensität besitzen; denn sie besteht aus unendlich vielen Wellenlängen, von denen jede eine endliche Intensität besitzt. Es liegt auch nicht der geringste Grund zu der Annahme vor, daß diese unendliche Reihe von Intensitäten einen integrierbaren endlichen Wert haben könnte. Die tatsächliche Endlichkeit der Intensität der Spektralregion steht so mit der Annahme einer Kontinuität des Spektrums in offenbarem direktem Widerspruch. Es kann also nicht so sein, wie man gewöhnlich vorgibt. Entweder sind nicht alle möglichen Wellenlängen gleichzeitig vorhanden, oder das Spektrum ist nicht wirklich, sondern nur scheinbar kontinuierlich. Wahrscheinlich spielen beide Möglichkeiten eine Rolle. Denn einerseits ist gar nicht einzusehen, wie jemals zwei Dinge oder Vorgänge in der Welt, und seien es auch nur zwei Undulationen einer fortschreitenden Lichtwelle, völlig gleich sein könnten. Anderseits scheinen gerade die neueren Errungenschaften der physikalischen Optik, die Linienserien und das Zerfallen derselben unter dem Einfluß des elektrischen Feldes[1]) darauf hinzuweisen, daß das Spektrum doch zuletzt aus diskreten Teilen besteht. Nur sind wir mit unseren heutigen, an die Benutzung eines Spaltes gebundenen Methoden noch nicht in der Lage, die Bestandteile genügend weit zu sondern. Ist dieses Ziel einmal erreicht, dann dürfte sich das Rätsel der Abhängigkeit der Farbenqualität von den Wellenlängen und deren Superpositionen wahrscheinlich als ein Problem der Zahlentheorie entpuppen.

1) Wir sagen gewöhnlich: Ein glühendes Gas zeigt ein Linienspektrum, ein weißglühender oder leuchtender Körper aber ein kontinuierliches Spektrum. Damit stellen wir eine Unterscheidung auf, die vielleicht der Grundlage entbehrt, um so mehr als die Linienspektra der Gase unter hohem Drucke sich zu Bandenspektren verbreitern, die einen Übergang zum kontinuierlichen Spektrum bilden. Richtigerweise sollten wir sagen: Die Photosphäre eines leuchtenden oder weißglühenden Körpers benimmt sich genau so, als ob in ihr alle bekannten und unbekannten chemischen Elemente, in Form von glühenden Gasen vorhanden wären. Denn die Summe aller möglichen Linienspektren ergibt ein kontinuierliches Spektrum.

1) Stark, Der Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. Ann. d. Physik **48**, 193.

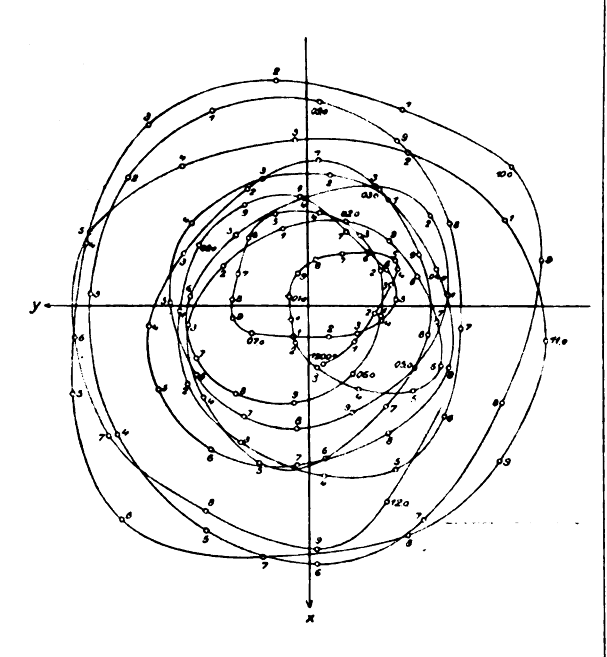
(Eingegangen 13. April 1917.)

BESPRECHUNGEN.

Zentralbureau der Internationalen Erdmessung. Neue Folge Nr. 20. Bd. V. B. Wanach, Resultate des internationalen Breitendienstes. gr. 8°. V, 223 S. mit 2 farb. Tafeln und 9 Abbildungen im Text. Berlin, Georg Reimer. 1916. M. 11.—

Der vorliegende Band enthält die von Professor Wanach abgeleiteten Ergebnisse der 6 Stationen des nördlichen Parallels (+ 39° 8'), und zwar zum Teil in etwas anderer Bearbeitung, als sie der um die Arbeiten des Breitendienstes hochverdiente Geheimrat Th. Albrecht bisher angewendet hat. Es handelt sich dabei um die Ausdeutung bzw. Mitnahme eines empirischen Gliedes in dem mathematischen Ausdruck für die kleinen Schwankungen der polaren Achse der Erde gegen ihre mittlere Lage. Werden diese Schwankungen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen und dafür der Ausdruck $\varphi - \varphi_0 = x \cos\lambda + y \sin\lambda + z$ benutzt, so stellt die Größe z desselben das nach den bisherigen Erfahrungen notwendige sogenannte Kimura-Glied als eine rein empirische Größe dar. Die von Professor Wanach durchgeführte Diskussion der sechsjährigen Ergebnisse von 1906—1912 hat nun gezeigt, daß das z-Glied doch nur auf Refraktionsanomalien oder ähnliche Ursachen zurückzuführen ist. Die neue Bearbeitung, in die auch älteres Material wieder mit

einbezogen wurde, ist unter Annahme einer anderen Beziehung zwischen den Lagen des mittleren und des instantanen Polorts, nämlich unter Zugrundelegung der jeweilig zusammengehörigen Gruppenmittel der beobachteten Werte von φ ohne Rücksicht auf die zyklische Vereinigung (Kettenmethode), durchgeführt worden. Es zeigt sich dabei, daß dem z-Glied keine reelle Bedeutung mehr beigemessen werden kann, sondern daß es als zufällige Abweichung aufgefaßt werden sollte. Neben diesen wesentlichen Ergebnissen enthält das Heft noch das umfangreiche Zahlenmaterial, welches der Diskussion zugrunde liegt. Außerdem aber ist noch eine Untersuchung von Professor Schweydar angefügt, welche sich mit der Untersuchung der Eulerschen Periode für die Schwankungen der Erdachse beschäftigt und aus der hervorgeht, daß die von Chandler aus vielen Beobachtungsreihen abgeleitete Dauer dieser Periode der Achsenschwankungen tatsächlich auf 432,8 Tage = 1,185 Jahre mit einer mittleren Amplitude von $0''.169$ = 5,2 m ergibt.



Um den wahren Trägheitspol der Erde würde der Rotationspol die Bewegung ausführen, die der Eulerschen Periode von 305 Tagen entspricht; infolge der Elastizität der Erde wandert aber der Trägheitspol derselben ebenfalls, und zwar so, daß seine Lage zu einem Punkte in bestimmten Beziehungen steht, den er einnehmen würde, wenn er selbst zugleich Rotationspol wäre. Die durch diese Umstände beeinflußte Bewegung des Rotationspoles bewirkt, daß aus der Eulerschen Periode die Chandlersche von nahe 433 Tagen wird[1]). Die von Schweydar durchgeführten vergleichenden Rechnungen zeigen nun, daß die von ihm schließlich gefundene Periode und Amplitude mit den Chandlerschen Werten recht gut übereinstimmt, daß wie diese Daten, aber wesentlich besser begründet, da sie auf schärferen Grundlagen beruhen und bei ihrer Ableitung die Durchgänge der Wegkurve des Rotationspoles durch die Nullagen und nicht die schwieriger zu erkennenden maximalen Abweichungen benutzt worden sind. Die beigefügte Darstellung gibt den Weg des jeweiligen Rotationspoles um seine mittlere Lage für die Zeit von 1990.0 bis 1912.0.

Ambronn.

1) Genauere Angaben über diese ganzen Bewegungen sind beigebracht in: Klein u. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, S. 718 ff., und in Monthly Notices 1892 von S. Newcomb.

Veröffentlichungen des Kgl. Preuß. geodätischen Instituts. Neue Folge Nr. 68. Lotabweichungen Heft V. L. Krüger, Ausgleichung des astronomisch geodätischen Netzes I. Ordnung nördlich der Europäischen Längengradmessung in 52 Grad Breite. IV, 134 S. mit 7 Fig. im Text. Berlin, P. Stankiewicz. 1916. M. 9.—

Das vorliegende Heft ist das 5. einer Reihe von Arbeiten, welche sich mit der Ausführung der umfangreichen Bearbeitung der Resultate der großen internationalen Vermessungsarbeiten beschäftigt, die zur genauen Ermittelung der Gestalt der Erdoberfläche ausgeführt werden.

Neben den Triangulationen und den astronomisch-geographischen Ortsbestimmungen der Erdmessung ist seinerzeit ein Plan ausgearbeitet worden, nach dem die örtlichen Lotabweichungen an den einzelnen Dreieckspunkten in einheitlicher Weise durch Gesamtausgleichungen gewisser Teilnetze bestimmt werden sollen.

Es sind zu diesem Zwecke bestimmte Lotabweichungszüge herausgegriffen worden, da sich eine allgemeine Ausgleichung einmal der außerordentlich großen rechnerischen Arbeit und sodann auch wegen der nicht völlig abgeschlossenen übrigen Arbeiten im ganzen Gebiet nicht als rätlich erweist.

Es ist deshalb die im Titel angegebene Abgrenzung der Arbeit gewählt worden. Es handelt sich dabei um die Berechnung der eigentlichen Lotabweichungsgleichungen und der sogenannten Laplaceschen Gleichungen, die alle auf die Station „Rauenberge" b. Berlin als Zentralpunkt bezogen sind.

Das Heft gibt das außerordentlich umfangreiche Zahlen- und Tabellenmaterial, die auf dieses gegründeten Bedingungsgleichungen sowie die Untersuchungen über die Gewichtsverteilung. Daran schließen sich die Ausgleichungen selbst sowie die Zusammenstellung der Endresultate. Die erlangten Werte für die Lotabweichungen sind schließlich in Form von Gleichungen gegeben, in denen Glieder enthalten sind, die es leicht machen, sowohl den Übergang vom Besselschen Reference-Ellipsoid auf jedes andere zu bewirken, als auch späteren Verbesserungen in den ausgeglichenen Längenbestimmungen und Azimuten gerecht zu werden.

Ambronn.

E. Raehlmann, Goethes Farbenlehre. 8⁰. 40 S. u. 2 Tafeln. Sonderabdruck aus dem Jahrbuch der Goethe-Gesellschaft, Bd. 3. Leipzig, Insel-Verlag. 1916. M. 5.—

Die Urteile über Goethes Farbenlehre haben im Laufe der letzten Jahrzehnte infolge der Entwicklung, die die physiologische Optik genommen hat, einen für alle Goetheverehrer erfreulichen Umschwung erfahren. Neben die schroffe Ablehnung seitens der Physiker ist die wachsende Anerkennung der Physio-

logen getreten. Seitdem Stilling in seinem Vortrag von 1898 den Nachweis geführt hat, daß die Heringsche Farbentheorie durchaus auf den Anschauungen und Lehren Goethes sich aufbaut, hat sich die Überzeugung Bahn gebrochen, daß der Schwerpunkt der Leistungen Goethes eben im physiologischen Teil seiner Farbenlehre zu suchen ist, und daß er hier tatsächlich Bahnbrechendes geleistet hat. Von diesem Standpunkte aus, und nur von ihm aus, werden dann auch die Schwierigkeiten verständlich, die Goethe den Lehren der Physiker gegenüber empfand, und die ihn in wachsendem Mißverstehen zu jener wütenden Bekämpfung Newtons veranlaßte, die vom rein physikalischen Standpunkte aus so ganz unverständlich und unbegreiflich erscheint. Diese Seite des Problems hat der Berichterstatter in einem Aufsatze im 1. Bande dieser Zeitschrift klar zu legen gesucht. Die gleiche Aufgabe stellt sich die vorliegende Abhandlung. Doch verweilt der Verfasser nur kurz bei dem Verhältnis der physikalischen und der physiologischen Farben zueinander, um dafür um so eingehender die physiologischen Leistungen Goethes zu würdigen, die er mit einer gewissen Zuspitzung in den Satz zusammenfaßt: Die Farbe Goethes ist die Kontrastfarbe. Dem Physiker und dem Physiologen bringt die kleine Schrift nichts Neues. Aber sehr geeignet ist sie ohne Frage, um dem Laien die Gedanken Goethes verständlich zu machen, da Herr Raehlmann in sehr geschickter Weise seine Ausführungen durch zwei Farbentafeln unterstützt, die den Leser in den Stand setzen, sich unmittelbar von der Wirklichkeit der Goetheschen Farbe im nachfolgenden und im gleichzeitigen Kontraste zu überzeugen. W. König.

E. Raehlmann, Über die Farbstoffe der Malerei in den verschiedenen Kunstperioden. Nach mikroskopischen Untersuchungen. 4⁰. VI u. 57 S. Mit Fig. Leipzig, E. A. Seemann. 1914. M. 2.50.
— **Die Stellung der Temperamalerei in der Kunst der verschiedenen Zeitepochen.** Monatshefte für Kunstwissenschaft. IX. Jahrgang. S. 404—418. Leipzig, Klinkhardt & Biermann. 1916.

Diese Abhandlungen gehören der Kunstwissenschaft an. Aber auch den Naturforscher dürfte es interessieren, aus ihnen zu ersehen, wie mikrochemische und mikroskopische Untersuchungen auch auf solchen Gebieten zu exakten Erkenntnissen und wichtigen Schlüssen führen können. Etwa 1000 Proben alter Kunstwerke hat der Verfasser optisch und chemisch untersucht, um zu einer Analyse der Farben und ihrer Gebrauchstechnik zu gelangen. Das Material wird aufbewahrt, um jederzeit mit neuem Material verglichen werden zu können. Die mikroskopische Untersuchung gestattet, nicht bloß die einzelnen Farbenschichten, die der Maler aufgetragen hat, voneinander zu scheiden und jede für sich zu untersuchen, sondern man vermag in den einzelnen Schichten selbst die verwendeten Farben und die Bindemittel und bei Mischfarben auch die einzelnen Bestandteile der Mischung zu erkennen. Die erste der genannten Abhandlungen bringt die ausführliche Darstellung der Ergebnisse dieser Untersuchungen, z. T. unterstützt durch Abbildungen des mikroskopischen Aussehens der Farbstoffe — eine gründliche Arbeit, die sich nicht minder auf weitgehende kunsthistorische Kenntnisse wie auf das sorgfältige Studium der Farben stützt, und die für die Kunsttechnik und ihre Geschichte von größter Wichtigkeit sein wird. Die zweite Abhandlung enthält die Anwendung dieser Erkenntnisse auf die Frage nach dem Verhältnis der Temperamalerei zur Ölmalerei in alten und neueren Zeiten. W. König.

H. Froelich, Der Strahlungsdruck als kosmisches Prinzip, Kosmologie und Kosmogenie. Einheitliche mechanistische Begründung der sogenannten Naturgesetze durch Zurückführung aller Vorgänge auf Strahlungswirkungen. Nach des Verfassers Tode bearbeitet und mit Anmerkungen herausgegeben von A. Mertens. 8. 244 S. Mit 38 Textfiguren. Bielefeld, Dr. W. Breitenbach. 1917. M. 4.—

Der Verfasser sucht die Gravitation durch den von der Gesamtheit aller uns rings umgebenden Fixsterne ausgehenden Strahlungsdruck zu erklären. Jeder Weltkörper übt eine seiner Masse entsprechende Schirmwirkung aus und erzeugt, indem er die von ihm weg gerichteten Druckkräfte abschneidet, ein scheinbares Attraktionsfeld. Die Irrtümer des Werkes konnten auch dadurch nicht beseitigt werden, daß der Herausgeber eine Reihe von mathematischen und physikalischen Versehen des Verfassers berichtigt hat.
J. Hartmann.

Ludwig Carl Glaser, Beiträge zur Kenntnis des Spektrums des Berylliums. 4⁰. Mit 6 Tafeln und 1 Abbildung. 39 S. Berlin SW 68, Verlag von Glasers Annalen für Gewerbe und Bauwesen. 1916.

Verf. erzeugt das Bandenspektrum des Berylliums im elektrischen Lichtbogen mit Hilfe von Kupferelektroden oder mit Kohleelektroden und Berylliummetall. Das *Be*-Spektrum hat vier Bandengruppen: A gelbgrün, bei λ 5446; B grün, bei λ 5054; C blau, bei λ 4708, und D violett, bei λ 4426 Å.-E. In Tabellen und Tafeln werden die Gesetzmäßigkeiten des Spektrums gezeigt, besonders die sehr weitgehend aufgelöste Bandengruppe C wird ausführlich dargestellt, und es wird auf die Ähnlichkeit des Spektrums von *Be* mit dem von *Al* hingewiesen. Zum Schluß wird vorgeschlagen, für den chemisch-analytischen Nachweis von *Be* und *Al* nebeneinander die Beobachtung des Bandenspektrums zu benutzen: für *Be* in *Al* die hellste *Be*-Bande $\lambda\lambda$ 4708 und umgekehrt die Hauptbande des *Al* bei $\lambda\lambda$ 4842. — Zu diesem Vorschlag sei indessen bemerkt, daß die Chemiker sich schwerlich für ihn werden begeistern lassen. Denn die Mengen, die sie mit einer handlichen Spektralapparatur erkennen können, finden sie auch bequem mit einfachen chemischen Mitteln, und für den sicheren Nachweis kleinster Mengen des einen neben sehr großen des anderen Elements wird es einer recht kostspieligen Apparatur bedürfen. Diese aber wird für den Chemiker in der Regel schwieriger zu erwerben sein als die Geschicklichkeit, mit den vorhandenen chemischen Methoden zur Reinheitsprüfung von Aluminium und Beryllium richtig umzugehen. Wilke-Dörfurt.

Berichtigungen.

In dem Bericht über die Hauptversammlung der Deutschen Bunsen-Gesellschaft, diese Zeitschr. 18, Heft 5, S. 109 (1917) sind einige Irrtümer zu berichtigen:

Auf Seite 109, rechte Spalte, Zeile 2 von unten muß es heißen: .... Kaliumchlorat und Milchzucker im Verhältnis 4:1 (statt 1:1);

auf Seite 110, linke Spalte, Zeile 5 von oben muß es heißen: Trauzlschen (statt Trautzschen) Bleiblockes.

Nachtrag zur Übersicht über die Kriegsbeteiligung der Deutschen Physiker.

Dr. **Karl Stuchtey**, erster Assistent am Physikalischen Institut der Universität Marburg, stellvertr. Fahrtenwart des Kurhess. Vereins für Luftfahrt, der als Oberleutnant und Adjutant bei einem Generalkommando im Felde steht, erhielt das Eiserne Kreuz I. Klasse.

Dr. **E. Take**, Privatdozent der Physik an der Universität Marburg und Assistent am Physikalischen Institut dortselbst ist als Leiter einer Funkerabteilung im Felde und wurde zum Leutnant der Landwehr ernannt.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Berlin Dr. Wilhelm Hort für Technische Mechanik, insbesondere Sonderfragen der neueren technischen Mechanik, an der Universität Halle für angewandte Mathematik Dr. Richard Grammel (bisher Privatdozent für Mechanik an der Technischen Hochschule Danzig), an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Wilhelm Hort für Technische Mechanik.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Straßburg Dr. Fritz Straus zum a. o. Professor der Mathematik ebendaselbst.

Berufen: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Breslau Dr. Erhard Schmidt in gleicher Eigenschaft an die Universität Berlin, der a. o. Professor an der Universität Bonn Dr. Hans Hahn zum ord. Professor der Mathematik an derselben Universität.

Verliehen: Dem a. o. Professor der Chemie an der Universität Innsbruck Dr. Karl Hopfgartner Titel und Rang als ord. Universitätsprofessor.

Gestorben: Der Privatdozent für Geodäsie, insbesondere Feldbereinigung, Katastervermessung, Plan- und Terrainzeichnen von der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Josef Bürgin, der Professor der Ingenieurwissenschaften an der argentinischen Nationaluniversität in La Plata Dr. Oskar Doering in Cordoba, der Professor für Physik und Chemie an der Marineakademie in Kiel Dr. Ludwig Rellstab, der Abteilungsvorstand für große astronomische Instrumente bei der Firma Carl Zeiß Dr. Max Pauly in Jena.

Berichtigung zu den Personalien. Auf Seite 167 der Physikalischen Zeitschrift ist als gestorben gemeldet „der Meteorologe, Direktor des Brockenobservatoriums Dr. Max Müller". Diese, aus den Tageszeitungen übernommene Notiz bedarf, wie uns Herr Geheimrat Hellmann freundlichst mitteilt, in mehrerer Hinsicht Ergänzung und Berichtigung. Der leider verstorbene Brockenbeobachter Müller war ursprünglich Landwirt und wurde erst vom Meteorologischen Institut als Beobachter auf dem Brocken eingeschult. Den Doktortitel hatte ihm der Volksmund verliehen. Er hat zwölf Jahre lang seine Stellung als Brockenbeobachter in der verdienstvollsten Weise wahrgenommen.

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1917.

Technische Hochschule Berlin. (Nachtrag.)

Everling: Mechanik und Führung des Freiballons, 1 st.

Deutsche Universität Prag.

Lampa: Experimentalphysik II, 5; Physikalisches Praktikum II (Fortsetzung), 6 bzw. 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, für Vorgeschrittene, tägl. *g.* — **Frank**: Statistische Mechanik und Quantentheorie, 3; Elektromagnetische Lichttheorie, 2; Besprechung des physikalischen Lehrstoffs der Mittelschule: Mechanik, 1; Theorie der Gravitation, 2 *g.* — **Meyer**: Organische Chemie, 5; Chemische Übungen, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, halbtägig; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen, für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend; Chemie des Kunstgewerbes, für Vorgeschrittene, 1 *g.* — **Rothmund**: Thermochemie, 2; Physikalisch-chemische Untersuchungsmethoden 2; Physikalisch-chemisches Praktikum, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — **Wagner**: Kolloidchemie, 1. — **Kirpal**: Chemische Großindustrie, mit Exkursionen, 3. — **Hönigschmid**: Analytische Chemie für Mediziner, 3. — **Morgenstern**: Über Alkaloide, 2. — **Herzog**: Ausgewählte Kapitel der Biochemie, nach Verabredung. — **Sigmund**: Die Enzyme und ihre Bedeutung in der Physiologie und Technik, 1. — **Pick**: Elemente der Theorie der algebraischen Gleichungen, 4; Übungen über numerische Auflösung der Gleichungen, 1; Mathematisches Seminar: Übungen, 2 *g.* — **Kowalewski**: Elliptische Funktionen, mit Übungen, 4; Theorie und Anwendungen der Elementarteiler, 1; Über einige Spiele und ihre mathematische Theorie, 1. — **Funk**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, II, 3. — **Scheller**: Spektroskopische Doppelsterne, 1. — **Spitaler**: Meteorologische Instrumente, Beobachtung und Berechnung, 4, Praktikum, 1. —

Angebote.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 10. 15. Mai 1917. 18. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 11 am 25. Mai 1917.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Abhängigkeit des Luft- und Wasserwiderstandes von der Geschwindigkeit.

Von H. Lorenz.

Es ist bisher noch nicht gelungen, die aus Versuchen bekannte Veränderlichkeit des Widerstandes eines in tropfbarer oder elastischer Flüssigkeit gleichförmig fortschreitenden festen Körpers mit der Geschwindigkeit aus den Differentialgleichungen dieser Flüssigkeiten mit oder ohne Berücksichtigung der Zähigkeit zu berechnen. Es handelt sich dabei im allgemeinen um sehr verwickelte dreidimensionale Bewegungen der Flüssigkeitsteile in der Umgebung des Körpers, deren mathematisch strenge Behandlung, die augenblicklich noch nicht einmal für die Wellenbewegung reibungsloser Flüssigkeiten restlos durchgeführt ist, vorläufig ganz aussichtslos erscheint. Einigen Erfolg dagegen verspricht die Ermittlung des Energiebedarfs der bei der Beobachtung besonders hervortretenden Vorgänge. Selbstverständlich bedarf eine auf dieser rein phänomenologischen Grundlage gewonnene Näherungsformel für den Widerstand der Prüfung durch die Erfahrung, wofür glücklicherweise hinreichende Versuche vorliegen.

Die hier in Frage kommenden Vorgänge zerfallen nun, wie die Beobachtung von einem fahrenden Schiffe sofort zeigt, in ein Mitnehmen der umgebenden Flüssigkeit und eine Wellenbewegung der letzteren. Die Mitnahme erfolgt zweifellos durch Vermittlung von Reibungskräften zwischen den aneinander hingleitenden Schichten, von denen die an den festen Körper angrenzende daran haftet und somit an dessen Bewegung teilnimmt, während in großem, streng genommen unendlichem Abstande davon Ruhe herrscht. Dieser letzteren Bedingung werden nun die auf Navier und Stokes zurückgehenden Bewegungsgleichungen zäher Flüssigkeiten[1]), die sich für die langsame Laminarströmung in engen Röhren bewährt haben, insofern nicht gerecht, als sie auf eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung führen. Dagegen haben Versuche von Calvert am Hinterteil eines Modellbootes sowie solche der Neptune Works in Newcastle am Modell des Schnelldampfers Mauretania eine merklich asymptotische Abnahme dieses sog. Vorstromes nach außen hin ergeben[1]). Genau dieselbe Erscheinung ist natürlich auch in der Umgebung eines rasch durch die Luft bewegten Körpers, z. B. eines Geschosses, zu erwarten, dessen von Mach nach dem Töplerschen Schlierenverfahren aufgenommene Wellenbildung überdies den Schiffswellen sehr ähnelt. Da ferner die Intensität aller dieser Wellen mit der Entfernung vom bewegten Körper stark abnimmt, so wollen wir diese Abnahme sogleich auf die resultierende Geschwindigkeit eines Flüssigkeitselements erstrecken. Beschränken wir unsere Untersuchung auf axial bewegte, langgestreckte Rotationskörper, deren eine Hälfte demnach dem eingetauchten Teile eines Schiffes in grober Annäherung entsprechen würde, so möge in einer Normalebene zur Achse an der Körperoberfläche mit dem Achsenabstand r_1 die Geschwindigkeit w_1 herrschen (Fig. 1). Dieser kann dann im Abstande r die resultierende Flüssigkeitsgeschwindigkeit w durch die empirische Formel

$$w = w_1 e^{\varkappa_0\left(1-\frac{r^2}{r_1^2}\right)} \tag{1}$$

zugeordnet werden, welche nicht nur den oben erwähnten Grenzbedingungen, sondern auch der Achsensymmetrie genügt; und weiterhin eine Veränderlichkeit von w bzw. w_1 in der Bewegungsrichtung zuläßt. Bei der Fortbewegung der mit dem Körper verbundenen Normalebene um dz durchstreicht das Flächenelement $r\,dr\,d\varphi$ das Volumenelement $r\,dr\,d\varphi\,dz$, in dem mit dem spezifischen Flüssigkeitsgewicht γ und der

1) Vgl. z. B. Lorenz, Techn. Hydromechanik, 1910, S. 419ff.

1) Calvert, On the measurement of water current, Inst. Nav. Architects 1893. Vgl. auch Jahrb. d. schiffsbautechn. Gesellschaft 1914, S. 559.

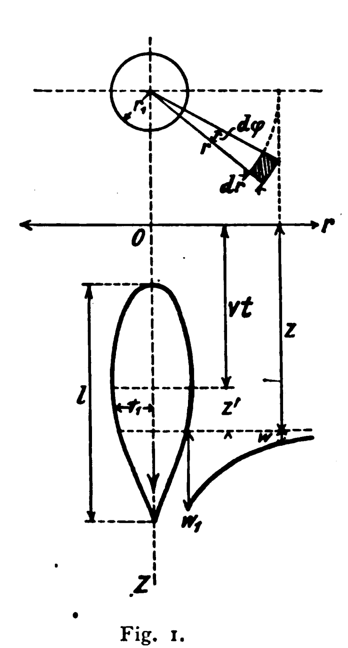


Fig. 1.

Erdbeschleunigung g eine Masse $\frac{\gamma}{g} r\,dr\,d\varphi\,dz$ enthalten ist, der durch Vermittlung der Flüssigkeitsreibung die kinetische Energie

$$dL_1 = \frac{\gamma}{2g} w^2 r\,dr\,d\varphi\,dz \tag{2}$$

erteilt wird. Die Einführung von (1) und Integration über die Normalebene außerhalb des Körperquerschnitts $\pi r_1^2 = F$ liefert alsdann

$$\frac{dL_1}{dz} = \frac{\pi\gamma}{2g} w_1^2 \int_{r_1}^{\infty} e^{2\varkappa_0\left(1-\frac{r^2}{r_1^2}\right)} r\,dr = \frac{\pi\gamma}{4\varkappa_0 g} r_1^2 w_1^2. \tag{2a}$$

Da nun der Bewegungszustand im Abstande r von der Achse durch das Fortschreiten des ganzen Körpers bedingt ist, so werden wir zweckmäßig an Stelle von w_1^2 in (2b) dessen Mittelwert w_0^2 sowie den größten Querschnitt F_0 einführen, also mit einer neuen Konstante $\varkappa_1$ kurz

$$dL_1 = \varkappa_1 F_0 w_0^2 dz \tag{2b}$$

schreiben. Auf dem gleichen Wege dz wird aber zur Überwindung der Zähigkeit an der Körperoberfläche F' die Arbeit

$$dL_2 = -\mu_0 \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_1 dF'\,dz \tag{3}$$

geleistet, worin der Zeiger 1 die Gültigkeit der Ableitung für den Oberflächenradius r_1 andeuten soll. Streng genommen wäre die Ableitung nicht nach dem Radius, sondern nach der Flächennormale zu nehmen und nur die Axialkomponente des Produktes mit dF' einzuführen. Für geringe Abweichungen der Normale vom Radius, wie wir sie hier stets voraussetzen, ist dagegen unser Ansatz (3) ebenso zulässig wie die Näherungsformel

$$dF' = r_1\,d\varphi\,dz' \tag{4}$$

für das Element der Körperoberfläche mit der Achsenprojektion dz' des Bogendifferentials im Meridianschnitt. Aus der Verbindung von (1) mit (3) und (4) ergibt sich dann durch Integration über den Umfang 2π und die Körperlänge l (Fig. 1)

$$\frac{dL_2}{dz} = 2\mu_0\varkappa_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{l} w_1\,dz' = 4\pi\mu_0\varkappa_0 \int_0^{l} w_1\,dz'$$

oder mit einer neuen Abkürzung μ sowie Einführung eines Mittelwertes w_0' wie in (2a)

$$dL_2 = \mu l w_0' dz. \tag{3a}$$

Der gesamte Arbeitsaufwand auf dem Wege dz ist dann die Summe von (2a) und (3a) und liefert nach Division mit dz den Widerstand

$$W = \frac{d(L_1 + L_2)}{dz} = \varkappa_1 F_0 w_0^2 + \mu l w_0'. \tag{5}$$

Für die Bildung der Mittelwerte w_0^2 und w_0' erinnern wir uns, daß die resultierende Geschwindigkeit w in drei Komponenten w_z, w_r und w_n in axialer, radialer und tangentialer Richtung zerfällt. Von diesen kommt für die Reibung an der Körperoberfläche nur die Axialgeschwindigkeit w_z in Frage, die mit hinreichender Genauigkeit mit der Bahngeschwindigkeit v des Körpers übereinstimmt. Infolgedessen dürfen wir auch im zweiten Gliede von (5) für den Mittelwert kurz

$$w_0' = w_z = v \tag{5a}$$

schreiben. Eine tangentiale oder Rotationskomponente tritt nur bei Drallgeschossen auf und folgt mit einem Drallwinkel χ sogleich aus der Bahngeschwindigkeit zu $v \operatorname{tg} \chi$. Dagegen ändert sich die Radialkomponente infolge der Verdrängung periodisch mit dem Abstande z' vom größten Körperquerschnitt und gibt dadurch Anlaß zu der eingangs erwähnten Wellenbildung, die im Falle eines Schiffes an der Wasseroberfläche sich in Transversalwellen kundgibt, während bei Geschossen in der Luft longitudinale Schallwellen entstehen. Mithin erhalten wir mit dem noch zu bestimmenden Mittelwerte u^2 von w_r^2

$$w_0^2 = v^2(1 + \operatorname{tg}^2\chi) + u^2. \tag{5b}$$

Bezeichnen wir nun den radialen Ausschlag eines Flüssigkeitsteilchens aus seiner Ruhelage mit ξ und seine Schwingungsdauer mit t_0, so verläuft mit $\alpha t_0 = 2\pi$ und einem Dämpfungsfaktor ε die freie Schwingung nach der Formel

$$\frac{d\xi}{dt^2} + \varepsilon\frac{d\xi}{dt} + \alpha^2\xi = 0 \tag{6}$$

Diese Schwingung schreitet bei einer Wellenlänge λ mit der Geschwindigkeit a derart fort, daß

$$\lambda = a t_0 = \frac{2\pi a}{\alpha} \tag{6a}$$

ist. Infolge des Vorbeistreichens des festen Körpers erfährt nun das Flüssigkeitsteilchen eine radiale Zwangsbeschleunigung

$$q = \frac{v^2}{\varrho} \sin(\varrho, z) \tag{7}$$

an der Körperoberfläche mit dem Krümmungsradius ϱ, wofür wir auch in erster Annäherung wegen der Sinusform der Relativbahn

$$q = v^2\left(M \cos 2\pi \frac{z'}{\lambda} + N \sin 2\pi \frac{z'}{\lambda}\right)$$

oder mit

$$z' = vt, \quad \frac{2\pi v}{a} = \omega \tag{7a}$$

$$q = v^2(M \cos \omega t + N \sin \omega t) \tag{7b}$$

schreiben dürfen. Damit aber tritt an Stelle von (6) die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \varepsilon \frac{d\xi}{dt} + \alpha^2 \xi = q, \tag{8}$$

deren Integral wegen (7b) die Form

$$\xi = C \cos \omega t + D \sin \omega t \tag{8a}$$

besitzt. Hierin bestimmen sich die Faktoren C und D durch Einsetzen von (7b) und (8a) zu

$$\left.\begin{aligned} C &= v^2 \frac{M(\alpha^2 - \omega^2) - N\varepsilon\omega}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon^2\omega^2}, \\ D &= v^2 \frac{N(\alpha^2 - \omega^2) + M\varepsilon\omega}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon^2\omega^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8b}$$

Aus (8a) folgt ferner die periodische Radialgeschwindigkeit

$$w_r = \frac{d\xi}{dt} = \omega(D \cos \omega t - C \sin \omega t) \tag{9}$$

mit dem Quadrate

$$w_r^2 = \omega^2\left(\frac{C^2 + D^2}{2} - \frac{C^2 - D^2}{2} \cos 2\omega t - CD \sin 2\omega t\right), \tag{9a}$$

dessen Mittelwert sich mit (8b) zu

$$u^2 = \omega^2 \frac{C^2 + D^2}{2} = \frac{\omega^2 v^4}{2} \frac{M^2 + N^2}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon^2\omega^2} \tag{9b}$$

berechnet. Führen wir an Stelle der Frequenzen α und ω der freien und erzwungenen Schwingungen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a der Welle von der Länge λ und die Bahngeschwindigkeit v des Körpers vermittelst der Beziehungen (6a) und (7a) ein, so wird aus (9b) mit den leicht verständlichen Abkürzungen A_1 und c

$$u^2 = \frac{(M^2 + N^2)\lambda^2}{8\pi^2} \frac{v^6}{(a^2 - v^2)^2 + \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{4\pi^2} v^2} = \frac{A_1 v^6}{(a^2 - v^2)^2 + c^2 v^2}. \tag{9c}$$

Durch Verbindung dieses Ergebnisses mit (5b) sowie unter Benutzung von (5a) nimmt schließlich der Widerstand Gl. (5) die Form

$$W = \mu l v + \varkappa_1 F v^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\chi + \frac{A_1 v^4}{(a^2 - v^2)^2 + c^2 v^2}\right) \tag{10}$$

an, die sich für Schiffe durch $\chi = 0$ noch etwas vereinfacht.

Mit

$$1 + \operatorname{tg}^2\chi = \frac{1}{\cos^2\chi}, \quad \frac{\varkappa_1}{\cos^2\chi} = \varkappa, \quad A_1 \cos^2\chi = A \tag{10a}$$

kann man auch an Stelle von (10) schreiben

$$W = \mu l v + \varkappa F v^2\left(1 + \frac{A v^4}{(a^2 - v^2)^2 + c^2 v^2}\right). \tag{10b}$$

Daraus erkennt man, daß durch die Rotation des Körpers um seine in die Bahntangente fallende Achse das Gesetz des Widerstandes formal keine Änderung erleidet. Wir dürfen daher erwarten, daß die Formel (10a) sowohl für Schiffe, als auch für rotierende Langgeschosse gültig bleibt, wobei a im ersteren Falle die von der Wassertiefe abhängige Fortpflanzungsgeschwindigkeit der vom Schiff erregten Wasserwellen, im anderen dagegen die Schallgeschwindigkeit in der Luft bedeutet.

Für die graphische Verdeutlichung trennen wir zweckmäßig den Gesamtwiderstand in die beiden Bestandteile W_1 und W_2 und erhalten nach Division mit v^2

$$\frac{W_1}{v^2} = \varkappa F\left(1 + \frac{A v^4}{(v^2 - a^2)^2 + c^2 v^2}\right), \quad \frac{W_2}{v^2} = \frac{\mu l}{v}. \tag{11}$$

Hiervon stellt das Reibungsglied als Funktion der Geschwindigkeit eine gleichseitige Hyberbel dar, während das erste Glied

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } v = 0 \quad \text{den Wert} \quad \frac{W_1}{v^2} = \varkappa F \\ &\text{„} \quad v = \infty \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{W_1}{v^2} = \varkappa F(1 - A) \end{aligned}\right\} \tag{11a}$$

annimmt und durch Differentiation nach v

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{W_1}{v^2}\right) = 2\varkappa F v\left(\frac{2 A v^2}{(v^2 - a^2)^2 + c^2 v^2} - \frac{A v^4(2(v^2 - a^2) + c^2)}{((v^2 - a^2)^2 + c^2 v^2)^2}\right) \tag{12}$$

ergibt. Dieser Ausdruck verschwindet offenbar für $v = 0$, $v = \infty$ und

$$v^2 = v_0^2 = \frac{2a^4}{2a^2 - c^2} > a^2, \qquad (12a)$$

wonach die Kurve der $W_1 : v^2$ die erste der beiden Geraden (11a) im Ausgangspunkt, die andere dagegen asymptotisch berührt und weiterhin für $v = v_0$ den Höchstwert

$$\left(\frac{W_1}{v^2}\right)_0 = \varkappa F\left(1 + \frac{A v_0^4}{v_0^4 - a^4}\right) \qquad (12b)$$

besitzt. Die Asymptote $\varkappa F(1 + A)$ wird von der Kurve $W_1 : v^2$ in einem Punkte geschnitten, dessen Abszisse sich aus

$$v^2 = \frac{a^4}{2a^2 - c^2} = \frac{v_0^2}{2} \qquad (12c)$$

zu $v = 0{,}7\, v_0$ berechnet. Hiernach zeigt die Kurve der $W : v^2$ den durch Fig. 2 wieder-

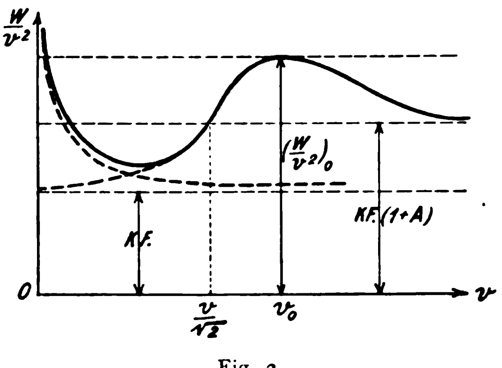


Fig. 2.

gegebenen Verlauf, der auch durch Versuche an Schiffen[1]) sowie mit Geschossen[2]) gut bestätigt wurde. In den empirisch aufgenommenen Kurven wird man zunächst den Höchstwert (12b) festlegen und dann aus dessen Abszisse v_0 durch (12c) die Lage der oberen Asymptote ermitteln. Damit ist zugleich $\varkappa F(1 + A)$ bestimmt, während die Auswertung der Konstanten $\varkappa F$ und A noch eine weitere Formel erfordert. Diese ist dann durch (12c) gegeben, in der allerdings auch die Schallgeschwindigkeit a bekannt sein muß, mit deren Hilfe aus (12a) und (12c) die Konstante c, welche die Dämpfung enthält, folgt. Das für das Reibungsglied $W_2 : v^2$ maßgebende Produkt μl kann wenigstens angenähert aus dem Verlaufe des an der Ordinatenachse aufsteigenden Kurvenendes mit Hilfe der dazugehörigen Hyperbelasymptote $\varkappa F$ entnommen werden. Es spielt indessen für praktisch ballistische Zwecke nur eine so untergeordnete Rolle, daß man sich hierfür unbedenklich mit der Anwendung der vereinfachten Widerstandsformel

$$W_1 = \varkappa F v^2 \left(1 + \frac{A v^4}{(v^2 - a^2)^2 + c^2 v^2}\right) \qquad (11b)$$

begnügen darf, deren Verlauf den aus der Theorie erzwungener Schwingungen wohlbekannten Resonanzkurven entspricht. Von ihnen unterscheidet er sich nur durch die über dem Ausgang liegende Asymptote infolge der Zunahme des Zählers des (zweiten) Wellengliedes in der Klammer von (11c) mit der Geschwindigkeit v, während bei gewöhnlichen Schwingungsvorgängen dieser Zähler konstant bleibt. Der asymptotische Verlauf nach Überschreitung der Wellengeschwindigkeit besagt ferner eine erneute Annäherung an das quadratische Widerstandsgesetz, welches mit Vernachlässigung der Oberflächenreibung W_2 auch für kleine Geschwindigkeiten hinreichend genaue Geltung besitzt. Man kann die Zunahme der Konstante von $\varkappa F$ auf $\varkappa F(1 + A)$ beim Übergang von einer Bewegungsart in die andere auch durch eine Vermehrung der mitgeführten Flüssigkeit in der Umgebung des bewegten Körpers infolge der mit ihm fortschreitenden, in den Machschen Lichtbildern deutlich sichtbaren Stauwelle erklären, die wie ein vergrößerter Querschnitt wirken muß.

Die praktische Verwendung der Widerstandsformel bietet keine Schwierigkeiten, solange es sich um eine gleichförmige Bewegung mit vorgelegter Geschwindigkeit handelt. Ändert sich die letztere dagegen auf dem Wege s, so wird die Einführung der aus (10b) bzw. (11b) durch Division mit der Masse m folgenden Verzögerung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds} = \frac{W}{m} \qquad (13)$$

in die Bewegungsgleichungen nötig, deren Integration in geschlossener Form danach aussichtslos erscheint. Man wird sich also auch hier, wie schon bisher, mit graphischen Integrationen unter Zuhilfenahme von Mittelwerten der Verzögerung in bestimmten Geschwindigkeitsintervallen begnügen und danach für die Ballistik Schußtabellen berechnen, für die nach dem Kriege ein reiches Erfahrungsmaterial zu Gebote stehen dürfte. Hier wollen wir uns auf die angenäherte Ermittelung der Abnahme der kinetischen Energie (Wucht) längs einer horizontalen Bahn auf Grund der abgekürzten Formel (11b) beschrän-

1) Paulus, Versuche zur Ermittlung des Einflusses der Wassertiefe auf die Geschwindigkeit der Torpedoboote, Zeitschr. d. V. D. Ingenieure 1904, S. 1870, wo auch auf ältere Versuche von Rasmussen und Rota Bezug genommen wird, sowie Schütte, Verhandl. d. Int. Schiffahrtskongresses zu Düsseldorf 1902.

2) Becker und Cranz, Messungen über den Luftwiderstand für große Geschwindigkeiten, sowie v. Eberhardt, Neue Versuche über Luftwiderstand, Artill. Monatshefte 1912.

ken. Zu diesem Zwecke benutzen wir sogleich in Fig. 3 die Geschwindigkeitsquadrate v^2 als Abszissen, denen wir nach oben die Widerstände W_1, nach unten dagegen die zurück-

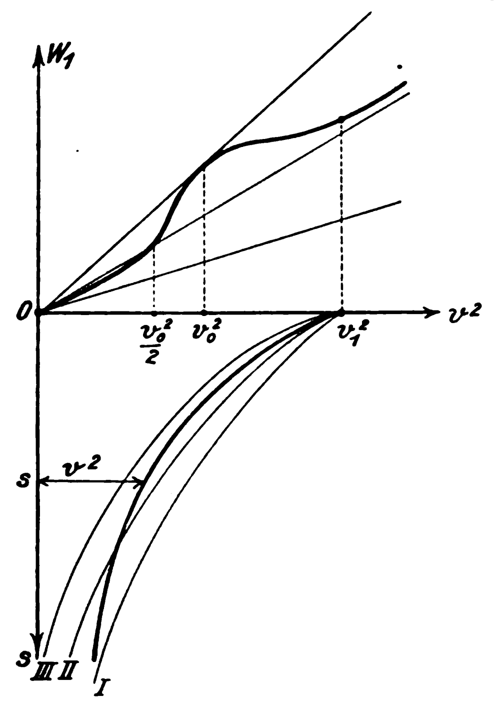


Fig. 3.

gelegten Wege s zuordnen. In diesem Diagramm erscheinen die beiden Geraden $\varkappa F$ und $\varkappa F(1+A)$ als vom Koordinatenanfang ausgehende Strahlen. Da ferner

$$\frac{dW_1}{d(v^2)} = \varkappa F\left(1 + \frac{3Av^4}{(v^2-a^2)^2+c^2v^2} - \frac{Av^6(2(v^2-a^2)+c^2)}{((v^2-a^2)^2+c^2v^2)^2}\right) \quad (14)$$

für $v^2 = v_0^2$ wegen des Verschwindens der Klammer von (12) in

$$\left(\frac{dW_1}{d(v^2)}\right)_0 = 1 + \frac{Av_0^4}{v_0^4 - a^4} = \left(\frac{W_1}{v^2}\right)_0 \quad (14a)$$

übergeht, so entspricht auch der Tangente an den Höchstwert in Fig. 2 eine Gerade durch 0 in Fig. 3, welche die Widerstandskurve für die Abszisse v_0^2 berührt. Ebenso entsprechen sich auch die Schnittpunkte der Widerstandskurven mit den Asymptoten

$$\varkappa F(1+A) \text{ bzw. } \varkappa F(1+A)v_0^2$$

in Fig. 2 und Fig. 3. Da nun für ein rein quadratisches Widerstandsgesetz

$$\frac{d(v^2)}{ds} = -kv^2 \quad (15)$$

sich durch Integration von einer vorgelegten Anfangsgeschwindigkeit v_1

$$sk = \lg n \frac{v_1^2}{v^2} \quad (15a)$$

ergibt, so entsprechen den drei von 0 ausgehenden Geraden im Widerstandsdiagramm der Fig. 3 drei logarithmische Kurven im zugehörigen Energie-Wegdiagramm mit demselben Ausgangspunkt v_1^2 auf der Abszissenachse, nämlich

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.} \quad 2\varkappa Fs &&= m \lg n \frac{v_1^2}{v^2}, \\ &\text{II.} \quad 2\varkappa Fs(1+A) &&= m \lg n \frac{v_1^2}{v^2}, \\ &\text{III.} \quad 2\varkappa Fs\left(1 + \frac{Av_0^4}{v_0^4 - a^4}\right) &&= m \lg n \frac{v_1^2}{v^2}. \end{aligned}\right\} \quad (15b)$$

Zwischen ihnen verläuft die stark ausgezogene Energie-Wegkurve mit der Differentialgleichung

$$\frac{d(v^2)}{ds} = -2\frac{\varkappa F}{m}v^2\left(1 + \frac{Av^4}{(v^2-a^2)^2+c^2v^2}\right) = 2\frac{W_1}{m}, \quad (13a)$$

deren graphischer Integration praktisch nichts im Wege steht, wenn die Konstanten, wie oben angedeutet, einmal gegeben sind. Man erkennt übrigens, daß infolge Festlegung der Integrationskonstanten durch den Ausgangspunkt v_1^2 der Schnittpunkt im oberen und unteren Diagramm nicht mehr dieselbe Abszisse besitzen kann, während eine Berührung der Energie-Wegkurve mit der logarithmischen Linie III entsprechend dem Höchstwerte von $W_1 : u^2$ überhaupt nicht zustande kommt.

Zum Schluß möge noch eine kurze Bemerkung über die bisherigen Versuche einer Theorie des Widerstandes Platz finden. Diese darf für kleine Geschwindigkeiten, bei denen die Wellenbildung nur eine untergeordnete Rolle spielt, auf hydrodynamischer Grundlage durch Überlagerung einer Parallelströmung und einer Zirkulation nach den Ansätzen von Kutta und Joukovsky unter Hinzunahme der Grenzschichtentheorie Prandtls sowie der v. Kármánschen Wirbelablösung als befriedigend gelöst betrachtet werden. Es geschah dies vorwiegend unter dem Einfluß der Entwicklung der Luftschiffahrt, welche hierdurch ihre theoretische Grundlage erhielt.

Für große Geschwindigkeiten habe ich, angeregt durch ein von Cranz im Artikel Ballistik der Enzykl. d. math. Wissensch., Bd. IV, wiedergegebenes Diagramm der bis dahin (1903) vorliegenden Versuchsergebnisse, eine erste Widerstandstheorie in meiner Techn. Wärmelehre (1904) § 13 auf Grund vorangehender Untersuchungen über Gasströmungen aufgestellt. Da hierbei die innere Reibung (Dämpfung) unberücksichtigt

blieb, so ergab sich für die Übereinstimmung der Bahn- und Schallgeschwindigkeit $v = a$ ein Geschoß mit unendlich großem Widerstandsquotienten $W:v^2$, der danach einer Konstanten asymptotisch zustrebte. Nach dem Bekanntwerden der oben erwähnten Versuche an Schiffen griff ich den Gegenstand 1907 (Zeitschr. d. Ver. D. Ing. S. 1824) nochmals auf, indem ich zu der wie oben empirisch festgelegten Vorstromgeschwindigkeit den Höchstwert der gleich gerichteten Wellengeschwindigkeit hinzufügte. Unter Berücksichtigung einer Dämpfung für die letztere in der Nachbarschaft des bewegten Körpers ergab sich dann in der Tat das versuchsmäßig festgestellte Resultat des Quotienten $W:v^2$ nach Überschreiten der Wellengeschwindigkeit. Daß es sich hierbei um eine Verbindung des Reibungs- und Wellenwiderstands handelte, wurde sowohl von Sommerfeld, der in der Klein-Sommerfeldschen Theorie des Kreisels (Heft IV, 1910, S. 925) eine praktisch allerdings unbrauchbare Analogie aus dem Verhalten der Elektronen heranzog, als auch von Prandtl in seinem ausgezeichneten Artikel „Gasbewegung" im Handwörterbuch der Naturwissenschaften 1913 anerkannt, beiderseits ohne Erwähnung meiner Ansätze. Diese waren freilich insofern nicht einwandfrei, als in ihnen nur die der Bahn parallele Komponente der Schwingungsbewegung zum Ausdruck gelangte, und fernerhin unnötigerweise als klein gegen die Körperbewegung angesehen wurde. Diesen Mängeln habe ich in der vorliegenden Neubearbeitung durch Addition der Energiebeträge unter gleichzeitiger Mittelwertsbildung über die Wellenbewegung abgeholfen, wodurch deren lineare Glieder aus der Widerstandsformel herausfallen, die somit gegen früher eine bemerkenswerte Vereinfachung erfährt. Dadurch wird außerdem die Bedeutung der einzelnen Konstanten, die Cranz in der zweiten Auflage seiner äußeren Ballistik (1910, S. 43) nicht mit Unrecht beanstandet hatte, aufgeklärt und ihre Ermittlung aus Versuchskurven erleichtert. Die seitdem von Cranz und Becker sowie von Eberhardt in den Artilleristischen Monatsheften 1912 veröffentlichten Versuchskurven zeigen übrigens eine so gute Übereinstimmung mit dem theoretischen Widerstandsgesetz Fig. 2, daß dieses trotz seiner rein phänomenologischen Herleitung wohl als Grundlage für weitere Arbeiten, insbesondere zur Schußtafelberechnung benutzt werden kann.

(Eingegangen 2. Mai 1917.)

Erfahrungen mit photoelektrischen Zellen.

Von E. Barkow.

Nach den günstigen Erfahrungen, die Elster und Geitel[1]) mit der Verwendung lichtelektrischer Zellen zu photometrischen Zwecken gemacht hatten, wurden am Meteorologisch-Magnetischen Observatorium zu Potsdam Messungen der Sonnenhelligkeit mit einer Kalizelle in das Beobachtungsprogramm aufgenommen. Bei den Beobachtungsterminen wurde zwei Jahre lang (April 1914—April 1916) ein Kaliphotometer von Elster und Geitel in einer Montierung von Günther & Tegetmeyer in Braunschweig benutzt. Der Tubus des Instruments wurde mit Hilfe einer Visiervorrichtung auf die Sonne gerichtet. Bei den großen zu messenden Helligkeiten wurden die Photoströme galvanometrisch gemessen. Das untere Ende des Tubus war durch eine matte Quarzscheibe verschlossen, so daß immer nur diffuses, unpolarisiertes Licht gleichmäßig auf die Zelle fiel. Die nötige Reduktion der Helligkeit wurde anfänglich durch eine Irisblende, später durch Einsteckblenden bewirkt, um immer einen passenden und nicht zu großen Ausschlag des Galvanometers zu erhalten. Abgesehen von der ersten Zeit wurde nur dann beobachtet, wenn während der Messungszeit die Sonne wolkenfrei war; dabei konnte immer die kleinste Blende von 3 mm Durchmesser in Anwendung kommen. Als Galvanometer diente während des ersten Jahres ein altes Galvanometer von Keiser & Schmidt, das später durch ein Drehspulgalvanometer von Siemens & Halske ersetzt wurde, mit dem auch alle weiter unten besprochenen Messungen ausgeführt wurden. Da seine Empfindlichkeit etwas zu groß war, wurde sie durch einen Nebenschluß auf etwa den vierten Teil herabgesetzt, wodurch auch eine sehr nahe aperiodische Dämpfung erreicht wurde. Ausschlag und Stromstärke waren genau proportional. Die Empfindlichkeit betrug $2{,}38 \cdot 10^{-9}$ Amp. für ein Millimeter Ausschlag. Als Hilfsspannung wurde eine kleine Hochspannungsakkumulatoren-Batterie nach Zehnder von 20 Zellen, also rund 40 Volt benutzt. Bei der kleinsten Blende und dieser Spannung betrug die Maximalbelastung der Kalizelle immer unter 10^{-6} Amp., vielleicht abgesehen von der ersten Zeit, wo versehentlich infolge zu großer Blende ein stärkerer Strom hindurchging.

Die regelmäßige Benutzung der Zelle erstreckte sich auf die Zeit vom April 1914 bis April 1916. Das Messungsschema war in der

1) Diese Zeitschr. **13**, 739—744, 1912; **14**, 741—752, 1913; **15**, 610—611, 1914.



Regel das folgende. Bei abgedeckter Zelle Einschalten der Spannung, Einstellen auf die Sonne, Ablesen der Ruhelage des Galvanometers, Exposition der Zelle, Ablesen des Ausschlags, Vorschalten eines Flintglases, um die kurzwelligeren Strahlen abzuhalten, Ablesen, zweite Ablesung ohne Flintglas, Ruhelage, Abschalten der Spannung. Zwischen den beiden gleichartigen Ablesungen ohne Flintglas ergaben sich häufig Differenzen bis zu einigen Prozent. Erkennbare Ursachen waren nicht vorhanden, da ja immer nur bei klarem Himmel gemessen wurde. Wenn auch kurzdauernde Schwankungen der Sonnenstrahlung an der Erdoberfläche vorkommen, so hätte sich dies doch nur dadurch bemerkbar machen können, daß sich die Abweichung einmal in dem einen Sinne zeigte und ein anderes Mal im entgegengesetzten Sinne. Auffällig war die Einseitigkeit, mit der die zweite Messung meist geringere Werte ergab; auch waren die vorkommenden Abweichungen nach oben meist von geringerer Größe. Andererseits waren bestimmte Regeln nicht ableitbar.

Diese Verhältnisse erforderten jedenfalls eine nähere Untersuchung. Auch mußten noch die Konstanten der Kalizelle bestimmt werden, die zur Zurückführung der gemessenen Photoströme auf Helligkeiten notwendig waren. Über diese Untersuchungen soll in den folgenden Zeilen näher berichtet werden.

Da es bekannt ist, daß die Intensität der Sonnenstrahlung auch bei ganz klarem, wolkenfreiem Himmel kurzdauernden Schwankungen unterliegt, so mußte zur Untersuchung eine konstante, künstliche Lichtquelle gebraucht werden, von solcher Helligkeit, daß Photoströme von derselben Größe wie bei der Sonne erzeugt wurden. Vorversuche mit einer 100 kerzigen Halbwattlampe zeigten, daß diese Forderung erfüllt werden konnte. Die vorhandene Gleichstromanlage des Observatoriums setzte der Wahl einer hellen Lampe aber eine gewisse Grenze. Es wurde daher eine Nitra-Projektionslampe von 300 Watt beschafft, die bei 50 Volt und etwa 6 Amp. der vorhandenen Spannung von 56 Volt und dem Leitungsnetz angepaßt war. Bei den Versuchen wurde sorgfältig darauf gesehen, daß die Akkumulatorenbatterie während der Messungen gar nicht anderweitig benutzt wurde. Außerdem wurde der Lampenstrom genau unter Kontrolle gehalten, so daß er bis auf 0,1 Proz., der Ablesegenauigkeit des 10 Ohm Präzisions-, Volt- und Ampèremeters von Siemens & Halske, konstant blieb. Die Helligkeit der Lampe wurde mit einem Weberschen Milchglasplatten-Photometer an die Normal-Hefner-Kerze angeschlossen und ergab sich bei verschiedenen Strombelastungen zu folgenden Werten (Tabelle I).

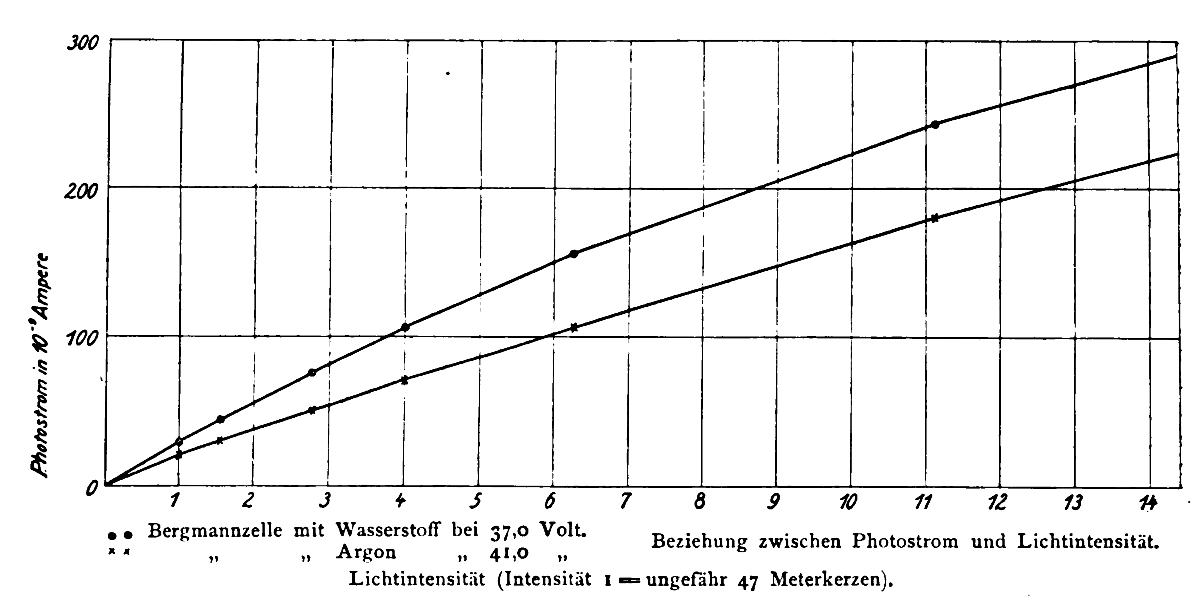
Tabelle I.

Amp.	Helligkeit in Meterkerzen
5,450	620,7
5,400	589,3
5,350	556,2

Aus der Genauigkeit der Strommessung folgt daher eine Konstanz der Helligkeit von etwa $^1/_2$ Proz., so daß Änderungen von einem Proz. wohl noch als zulässig gelten können. Selbstverständlich wurde vor Beginn jeder Messung die Projektionslampe etwa 10—15 Minuten gebrannt, damit sich Lampe, Widerstände, usw. auf ihren stationären Wert einstellen konnten.

Es waren für diese Untersuchung hauptsächlich vier Fragen von Wichtigkeit, deren Beantwortung zum Teil auch notwendig war für die weitere Verwertung der Messungen: Welche Beziehung besteht zwischen Helligkeit und Photostrom; wie hängt der Photostrom von der angelegten Spannung ab; zeigen sich vorübergehende Ermüdungserscheinungen; ist die Zelle zeitlich konstant?

Die oben erwähnten Beobachtungen deuten jedenfalls auf Ermüdungserscheinungen. Es erschien die Feststellung von Wichtigkeit, ob die Vorgänge etwa nur eine besondere Eigenschaft der in Potsdam benutzten Kalizelle waren oder nicht. An eine Selbstherstellung von Zellen konnte nicht gedacht werden, da hierzu alle Einrichtungen fehlten. Eine zweite Zelle derselben Herkunft, die von Dr. Kähler über ein Jahr in Kolberg ebenfalls zu Messungen der Sonnenhelligkeit benutzt war, konnte auch mit untersucht werden. Außerdem erboten sich die Bergmann-Elektrizitätswerke, die seit einiger Zeit solche Zellen herstellen, dankenswerterweise dazu, zwei Zellen leihweise zu diesen Versuchen zur Verfügung zu stellen. Beide waren ebenfalls Kalizellen, die eine mit Wasserstoff gefüllt, die andere mit Argon. Die Potsdamer und die Kolberger Zelle wurden in ihren festen Montierungen mit den dazu gehörigen matten Quarzscheiben gemessen. Die beiden Bergmannzellen wurden gut isoliert in einen schwarzen Holzkasten gesetzt, der vorne durch eine Mattglasscheibe verschlossen war. Davon wurde nur eine runde Öffnung von 30 mm Durchmesser frei gelassen. Der Mittelpunkt der Zelle war etwa 13 cm von der Mattglasscheibe entfernt. Das auf die Zelle fallende Licht war so ganz diffus. Durch Änderung des Abstands der Projektionslampe von der Mattscheibe zwischen



•• Bergmannzelle mit Wasserstoff bei 37,0 Volt.
×× „ „ Argon „ 41,0 „

Beziehung zwischen Photostrom und Lichtintensität.

Lichtintensität (Intensität 1 = ungefähr 47 Meterkerzen).

Fig. 1.

20 und 100 cm konnte die Belichtung der Zelle im Verhältnis von 25 zu 1 verändert werden. Um einen ungefähren Anhalt über die absoluten Werte des einfallenden Lichtes zu erhalten, wurde der lichtschwächende Einfluß der Mattscheibe bestimmt. Die. Photoströme ohne und mit Milchglasscheibe verhielten sich wie 13,3 : 1, wenn die Abstände vom Mittelpunkt der Zelle bzw. von der Mattscheibe in Rechnung gestellt wurden. Die benutzten Intensitäten sind also 47 bis etwa 1200 Meterkerzen.

Die Photoströme sind in diesem Bereich nicht streng proportional den Helligkeiten, wie Fig. 1 zeigt. Die Zunahme des Photostroms ist geringer als die der Intensität. Die höchste vorgekommene Strombelastung der Zelle betrug etwa $5 \cdot 10^{-7}$ Amp.

Für die Potsdamer Zelle (Fig. 1) liegen zwei Messungsreihen vor. Beide ergeben mit sehr großer Annäherung eine lineare Beziehung zwischen Lichtintensität und Photostrom. Die Änderung der Helligkeit konnte hier erstens durch Abstandsänderung und zweitens durch die Wahl verschiedener Blenden, also in noch größerem Umfang als bei den Bergmann-Zellen bewirkt werden. Es wurden drei Blenden angewandt von 3, 10 und 30 mm Durchmesser. Die Helligkeiten hätten sich im Verhältnis des Quadrates der Blendendurchmesser ändern müssen, also $10^2/3^2 = 11{,}11$; $30^2/5^2 = 100{,}0$; $30^2/10^2 = 9{,}00$. Es ergaben sich aber folgende Zahlen (Tabelle II).

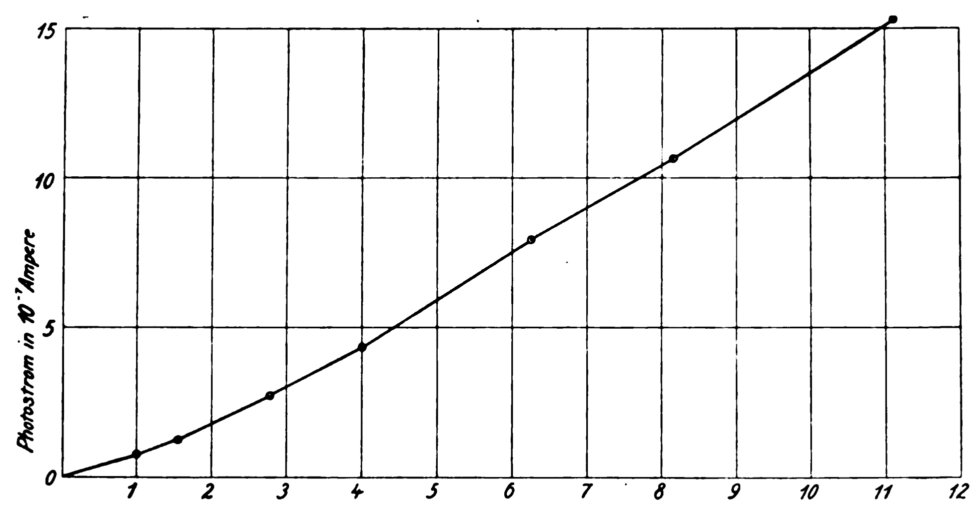
Sie weichen zum Teil erheblich ab von den theoretischen Zahlen. Das mag zum Teil daher rühren, daß die Blenden nicht genau die angegebene Größe besitzen, daß ferner das

Tabelle II.

Lampenabstand cm	Blendenverhältnis 10/3	30/3	30/10
40,0	11,57	90,89	7,85
60,0	11,68	89,72	7,69
80,0	12,23	—	—
100,0	11,23	88,56	7,88

einfallende Licht nicht parallel ist, Mattscheibe und Blende liegen ja nicht genau in einer Ebene, und daß schließlich, und das ist wohl der Hauptgrund, vor allem bei größeren Blenden die Randteile der Mattscheibe auf die Zelle nicht mehr mit ihrer ganzen Fläche einwirken, sondern zum Teil durch die Wände der Zelle abgeblendet werden. Weitere Ungenauigkeiten beruhen darauf, daß bei kleinen Blenden die Photoströme selbst klein sind und daher weniger genau gemessen werden können, wodurch natürlich auch ihr Quotient weniger sicher wird. Ich kann aber die Zahlen der Tabelle II jedenfalls dazu benutzen, die Messungen bei verschiedenen Blenden aufeinander zu reduzieren. Die Helligkeiten bei derselben Blende, aber verschiedenen Lampenabständen sind recht genau umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernungen. Nehme ich die Lichtmenge, die die Kalizelle bei 100 cm Abstand und der kleinsten Blende von 3 mm erhält, als Einheit an, so erhalte ich die Werte der Tabelle III.

Die Zahlen gelten für eine Hilfsspannung von 41,2 Volt; der Lampenstrom betrug 5,500 Amp. Trage ich mir die Zahlen der Tabelle III graphisch auf, so erhalte ich mit größter Annäherung eine Gerade. Eine zweite



Lichtintensität (Einheit = 556 Meterkerzen auf die Mattscheibe von 30 mm Durchmesser).
Beziehung zwischen Lichtintensität und Photostrom bei 42 Volt.

Fig. 2. Kalizelle Kolberg.

Tabelle III.

Lichtstärke	Photostrom in 10^{-9} Amp.
1	1,46
1,56	2,15
2,78	3,99
6,25	8,90
11,2	16,4
19,1	26,3
32,5	46,0
72,3	103,0
88,6	129,3
249,0	358,5
568,1	808,9

Reihe von Messungen rund 4 Monate später (14. Dezember 1915 bzw. 27. April 1916) ergab ebenfalls Proportionalität zwischen Photostrom und Belichtung.

Die Kolberger Kalizelle zeigte hingegen ein anderes Verhalten, sowohl als die Bergmannzellen als auch die Potsdamer Zelle. Der Photostrom steigt stärker, als es die Lichtintensität tut (Fig. 2).

Die Krümmung der Kurve ist besonders im unteren Teil nicht unerheblich.

Alle diese Beziehungen zwischen Photostrom und Lichtstärke sind aber nicht einmal eindeutig. Sie hängen unter anderm noch von der der Zelle angelegten Spannung ab. Lasse ich Lampenabstand und Lampenstrom ungeändert, und wechsele nur die Blende, so wäre zu erwarten, daß der Quotient der Photoströme unveränderlich wäre. Das ist aber nicht der Fall, sondern er wechselt mit der Höhe der angelegten Spannung auch bei der Potsdamer Zelle, was nach der obigen linearen Beziehung zwischen Helligkeit und Photostrom nicht erwartet werden konnte. Wie Tabelle IV zeigt, hat bei der Potsdamer Zelle der Quotient ein Minimum bei mittleren Spannungen, während er bei der Kolberger Zelle mit steigender Spannung dauernd zunimmt. Dies Verhalten läßt vermuten, daß die gefundene lineare Beziehung bei der Potsdamer Zelle nur ein zufälliges Resultat ist, das bei der gerade gewählten Spannung von rund 40 Volt eintritt, während es bei anderen Spannungen nicht vorhanden ist.

Tabelle IV.

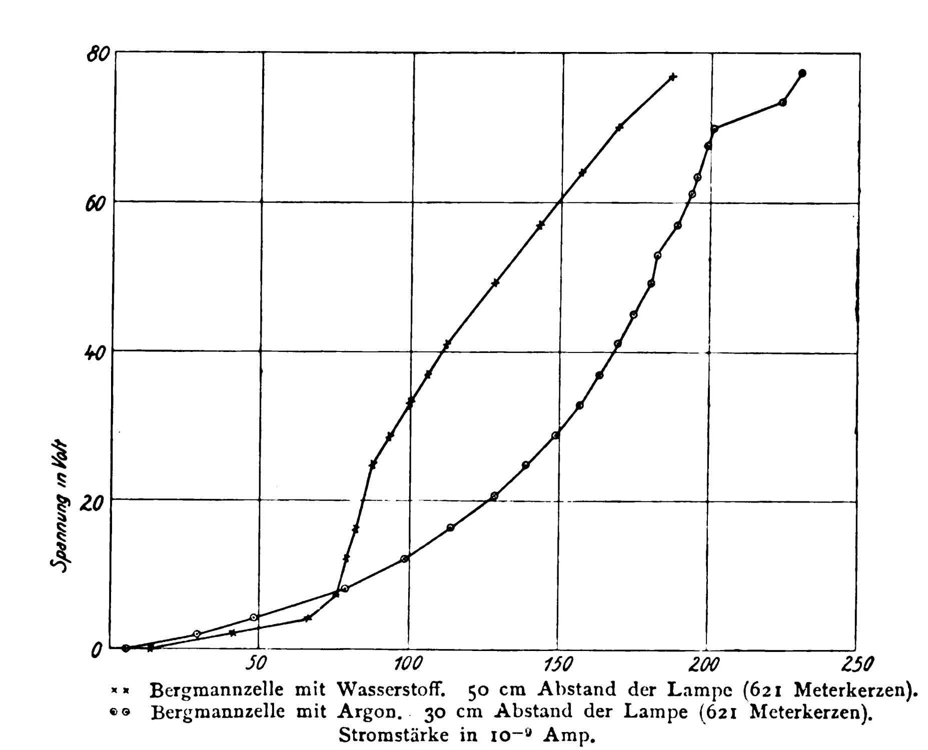
Spannung Volt	Photostrom in 10^{-9} Amp.					
	Blende		Quotient	Blende		Quotient
	30 mm	10 mm		30 mm	10 mm	
0	24,0	2,8	8,57	33	4,8	6,88
10	242	32,2	7,49	346	47,0	7,36
20	350	46,9	7,46	471	62,2	7,57
30	438	60,3	7,26	583	75,7	7,70
40	557	72,0	7,74	741	93,6	7,92
50	670	87,7	7,64	990	120,6	8,21
60	817	105,5	7,74	1370	160,3	8,55
70	991	125,7	7,88	—	219,0	—
80	1183	147,4	8,03	—	—	—
	Potsdamer Zelle			Kolberger Zelle		

Auch die beiden Bergmann-Zellen zeigen ein ähnliches Verhalten. Wenn ich hier den Abstand der Lichtquelle ändere, so ist auch hier das Verhältnis der beiden Photoströme nicht gleich bleibend, sondern ändert sich mit der Spannung. Die Zahlenwerte sind in Tabelle V mitenthalten, die noch eine andere Erscheinung zeigt, auf die ich gleich zu sprechen kommen werde.

Da die Akkumulatorenspannung sich im

×× Kalizelle Potsdam } 40 cm Abstand der Lampe (556 Kerzen).
•• Kalizelle Kolberg }

Fig. 3.



×× Bergmannzelle mit Wasserstoff. 50 cm Abstand der Lampe (621 Meterkerzen).
⊙⊙ Bergmannzelle mit Argon. 30 cm Abstand der Lampe (621 Meterkerzen).
Stromstärke in 10^{-9} Amp.

Fig. 4.

Laufe der Zeit etwas ändert[1]), so muß auch die Abhängigkeit des Photostroms von ihr bestimmt werden, um den gemessenen Photostrom auf eine als normal angenommene Spannung zu ermöglichen. Dabei beschränkte ich mich nicht auf den kleinen für diesen Zweck notwendigen Bereich, sondern änderte die Spannung zwischen 0 und etwa 80 Volt. Die Stromspannungskurve wurde in der Weise aufgenommen, daß bei gleichbleibender Helligkeit der Photostrom gemessen wurde unter Änderung der angelegten Spannung. Und zwar wurde gemessen bei den Spannungen 2, 4, 8 usw. in Stufen von 4 Volt bis 80 Volt. Dasselbe geschah bei anderen Helligkeiten, die durch Lampenabstand oder auch Blende verändert wurden. Der qualitative Charakter der Kurven war bei den verschiedenen Helligkeiten derselbe, wechselte aber mit der benutzten Zelle. Die Form der Kurve ist demnach als Charakteristikum der Zelle aufzufassen. Sie ist bedingt durch den nicht überall gleichen Abstand der beiden Elektroden voneinander[2]). Es scheint sich bei nicht zu hohen Intensitäten Sättigungsstrom ausbilden zu wollen; bei höheren Spannungen tritt Stoßionisation ein, die den Gesamtstrom wieder stärker ansteigen läßt und zunächst in den Teilen der Zelle einsetzt, wo die beiden Elektroden am nächsten benachbart sind und sich bei wachsenden Spannungen über den ganzen Zellraum ausdehnt. Die kritische Spannung ist verschieden je nach Lichtempfindlichkeit, also Ionenproduktion, Gasdruck und Dimensionen der Zelle. Schließlich kommt auch noch die gegenseitige Beeinflussung benachbarter Stromfäden hinzu. Zum Teil dürfte auch die Inkonstanz des Quotienten der Photoströme damit zusammenhängen. Fig. 3 und 4 zeigen die Form der Stromspannungskurve für die vier Zellen.

Eine weitere sehr wichtige Frage ist die nach der Unveränderlichkeit der Zellen, ob vorübergehende oder dauernde Veränderungen der Lichtempfindlichkeit vorkommen und welche Beträge sie erreichen.

Zunächst wurde der Einfluß einer längeren Belichtungszeit auf die beiden Bergmannzellen untersucht. Nachdem erstmalig die Stromspannungskurve am 18. Februar 1916 aufgenommen war, wurde sie nach drei Tagen völliger Dunkelheit vom 21.—22. Februar 1916 24 Stunden lang einer

Tabelle V.

Datum der Messung	Spannung	Wasserstoffzelle: Photostrom × 10⁻⁹ Amp. Abstand cm 50	30	20	Quotient 20/50	30/50	Argonzelle: Photostrom × 10⁻⁹ Amp. Abstand cm 50	30	20	Quotient 20/50	30/50
18. Februar 1916	20	84,0	200,6	375	4,49	2,39	50,0	127,3	258	5,16	2,55
	40	110,4	270,6	506	4,59	2,45	64,7	167,7	344	5,32	2,59
	60	148,7	360,0	682	4,59	2,42	75,1	192,0	386	5,14	2,56
	75	178,3	432,0	814	4,57	2,42	88,1	227	475	5,39	2,58
22. Februar 1916	20	67,0	178,0	371	5,63	2,66	44,5	114,5	232	5,20	2,57
	40	86,6	230,0	490	5,66	2,66	56,8	150,0	309	5,44	2,64
	60	112,3	305	650	5,79	2,72	65,1	173,6	355	5,46	2,67
	75	136	367	800	5,88	2,70	78,7	204,5	417	5,30	2,60
24. Februar 1916	20	62,5	170,0	358	5,72	2,72	45,2	111,5	234	5,18	2,47
	40	83,0	220,0	475	5,72	2,65	58,3	148	307	5,27	2,54
	60	107,0	294	645	6,03	2,75	65,0	170	352	5,42	2,61
	75	131	355	772	5,90	2,71	76,5	—	427	5,58	—
26. Februar 1916	20	68,0	182,0	386	5,68	2,68	44,5	110	230	5,17	2,47
	40	87,5	237	510	5,83	2,71	58,0	148	300	5,17	2,55
	60	114,5	315	680	5,94	2,75	65,0	168,5	344	5,29	2,59
	75	139	378	830	5,97	2,72	76,0	198	408	5,37	2,61
28. Februar 1916	20	67,0	180	382	5,71	2,69	44,5	111,5	235	5,28	2,51
	40	87	231	505	5,80	2,66	57,5	148,5	307	5,43	2,58
	60	115	311	678	5,70	2,89	65,5	169,0	351	5,36	2,58
	75	139	374	820	5,90	2,69	77,0	202	420	5,45	2,62
29. April 1916	20	66,0	174	355	5,38	2,64	46,0	114,5	236	5,13	2,49
	40	87,5	227	468	5,35	2,59	60,0	152,0	311	5,18	2,53
	60	114	302	628	5,51	2,65	68,0	173	353	5,19	2,54
	75	136	361	760	5,59	2,65	78,0	210,5	434	5,56	2,70

1) Bei allen diesen Messungen wurde die Spannung mit einen Präzisionsvoltmeter gemessen; das Instrument lag dauernd an der Akkumulatoren-Batterie.

2) H. E. Ives (Astrophysical Journal **39**, 428 bis 458), 1914 und H. E. Ives, Saul Dushman und E. Karrer (ebenda **43**, S. 9—35) haben die Frage nach der Proportionalität zwischen Helligkeit und Photostrom eingehend untersucht und haben auf Grund ihrer Feststellungen photoelektrische Zellen konstruiert, bei denen genaue Proportionalität vorhanden ist.

Belichtung einer 32 kerzigen Glühlampe ausgesetzt, die von den Zellen $^1/_2$ m entfernt war. Durch die Zelle floß dabei ein Strom. Es lagen 40 Volt an der Zelle und ein Ballastwiderstand von 12000 Ohm lag außer der Zelle im Stromkreis. Darauf wurde bei drei Helligkeiten, die sich wie 25 : 9 : 4 verhielten, bei Abständen der Projektionslampe von 20, 30 und 50 cm, wieder die Stromspannungskurve aufgenommen. Zuletzt wurde nur die eine bei dem mittleren Abstand mit derselben Genauigkeit wie beim ersten Mal, die andern nur bei wenigen geeigneten Punkten. Das wurde nach je zwei Tagen völliger Dunkelheit im ganzen dreimal wiederholt. Die letzte Messung war am 28. Februar 1916. Die Ergebnisse wurden graphisch aufgetragen und daraus die Stromstärke für die ganzen Volt, 20, 40, 60 und 75 Volt entnommen. Diese Werte zeigt Tabelle V. Es zeigte sich überall eine nicht unbedeutende Herabminderung der Empfindlichkeit von rund 10 Proz. Diese Abnahme setzte sich noch für einige Tage fort, um dann langsam wieder zurückzugehen. Bei der Wasserstoffzelle zeigte sich am vierten Tage ein Maximum, das bei der größten Helligkeit sogar etwas über den Anfangswert hinausging, aber dann wieder nachließ. Die Argonzelle schien sich ganz langsam wieder zu erholen, ohne jedoch den Anfangswert wieder zu erreichen. Eine Wiederholung der Messungen am 29. April 1916, also nach zwei Monaten, zeigt für die Argonzelle ein langsames Weitersteigen der Empfindlichkeit und für die Wasserstoffzelle ein weiteres Herabgehen. Fig. 5 zeigt für die mittlere Helligkeit und die Spannung von 40 Volt das Verhalten der beiden Zellen. Wie schon aus den eben gemachten Angaben hervorgeht, hat sich auch die Stromspannungskurve wenn auch nicht ihrem Charakter nach, so doch in ihren quantitativen Abmessungen verändert. Das zeigt deutlich das Verhalten der Quotienten für die verschiedenen Lichtstärken bei jeweils gleichen Spannungen. Am deutlichsten zeigt sich eine Änderung der Wasserstoffzelle infolge der Belichtung.

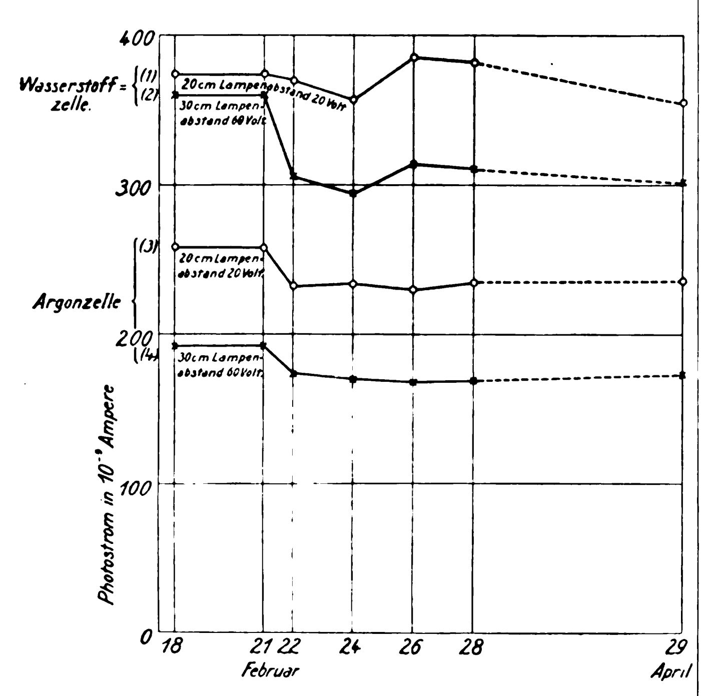


Fig. 5. Empfindlichkeitsänderungen der Bergmannzellen.

Da die beiden andern Zellen nach allen vorhergehenden Messungen auch etwas Ähnliches erwarten ließen, wurde zunächst eine derartige lange Belichtung nicht gemacht. Vor allem die Potsdamer Zelle sollte ja noch zu weiteren Untersuchungen dienen. Vor dem Abschluß der Messungsreihe erschien eine so lange dauernde Beanspruchung nicht ratsam zu sein. Daß aber auch sie nicht konstant ist, zeigt die folgende Messungsreihe.

Anfänglich wurde erwähnt, daß sich bei den Helligkeitsmessungen der Sonne häufig ein Zurückgehen der Ausschläge zeigte. Am 25. September 1915 wurden bei klarem Himmel diese Änderungen näher verfolgt, um unter anderm auch einmal die Größe der Helligkeitsänderungen in kürzerer Zeit festzustellen. Die Sonnenstrahlung wurde etwa $^1/_2$ Stunde lang dauernd gemessen und das Galvanometer alle 10 Sekunden abgelesen. Etwa jede 5 Minuten mußte das Instrument von neuem auf die Sonne eingestellt werden und wurde dabei abgedeckt, wobei immer die Nullage des Galvanometers festgestellt wurde. Das Ergebnis in graphischer Darstellung zeigt Fig. 6. Die Kurven steigen an Fig. 6 im Mittel, wie auch die Sonnenhöhe während der Messung stieg. Der Kurve sind kleine Zacken aufgesetzt, die vermutlich reelle Schwankungen der Strahlung verursacht durch Schlierenbildung der Atmosphäre oder dergleichen darstellen. Bei jedem Abdecken tritt aber ein Rückgang des Ausschlags ein, der mit durchschnittlich drei Skalenteilen ungefähr 1—2 Proz. des Gesamtausschlages ausmacht. Die Ruhelage des Galvanometers zeigt nur geringe Änderungen um einige Zehntel Teilstriche. Auf die Abdeckung allein ist übrigens der Rückgang nicht zurückzuführen, wie die Fortsetzung der Versuche zeigt. Es wäre natürlich ein großer kaum annehmbarer Zufall, wenn dieses Zurückgehen nach je etwa 5 Minuten wirklich reell wäre und einer etwa ebenso langen Periode der Sonnenstrahlung zuzuschreiben wäre. Bei einer andern Versuchsreihe an einem Nachmittage, also bei abnehmender Sonnenhöhe, zeigte sich

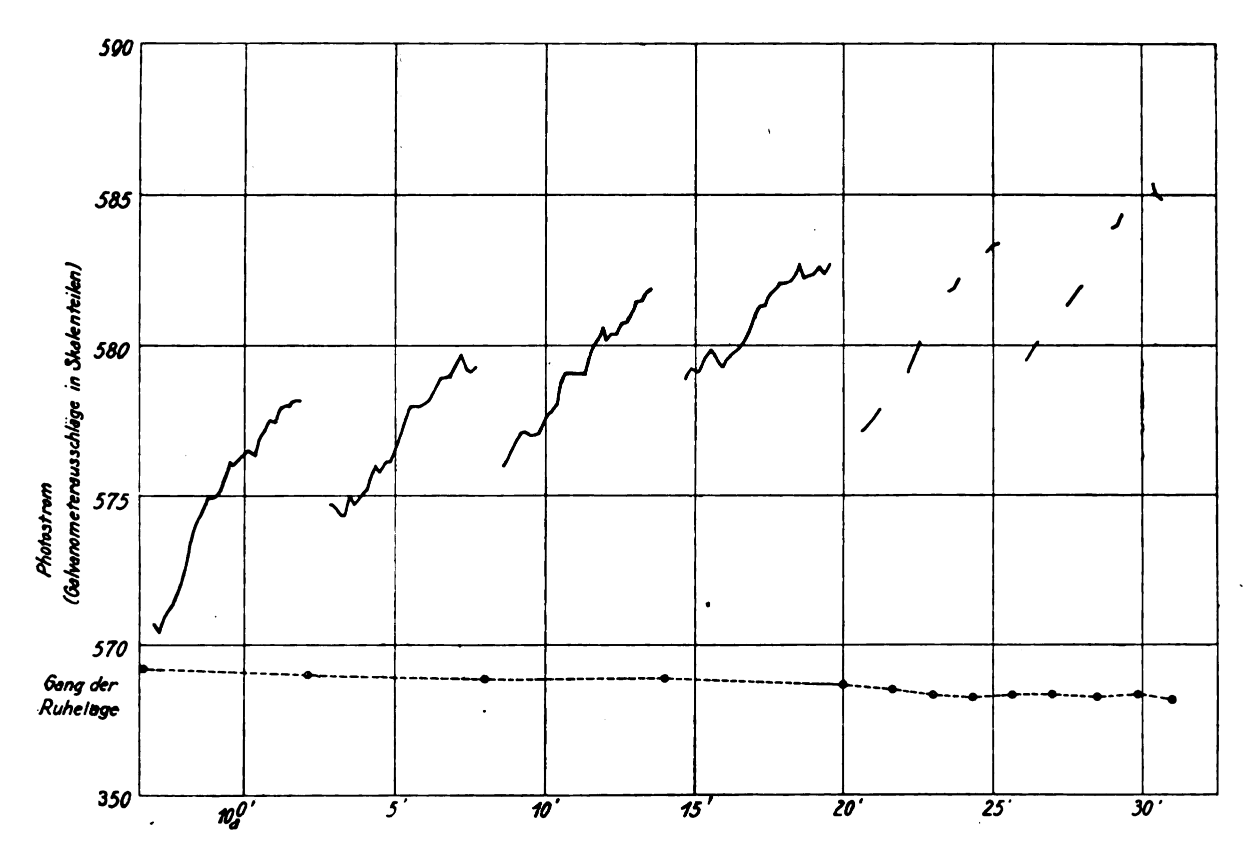


Fig. 6. Messung der Sonnenstrahlung mit dem Kaliphotometer am 25. September 1915.

trotzdem ein Zunehmen der Ausschläge, das auch nicht gerade wahrscheinlich ist und nicht reell sein dürfte. Bei der Vormittagsreihe war der Anstieg offenbar auch stärker als der Zunahme der Sonnenhöhe entsprach. Nach diesen Versuchen schien es also höchst wünschenswert zu sein, den Vorgängen experimentell nachzugehen. Die Nitra-Projektionslampe war nun hell genug, um ähnliche Photoströme wie die Sonne hervorrufen zu können. Bei Anwendung großer Blenden gelang es auch noch größere Stromstärken zu erzielen.

Aus einer größeren Anzahl Versuchen sei eine Reihe herausgegriffen. Es zeigte sich fast durchweg ein Herabgehen der Empfindlichkeit nach kurzer Zeit und schien einem konstanten Wert zuzustreben. Ferner wurde etwa ein Photostrom hergestellt, der ungefähr dem bei Sonnenlicht entsprach und dann die der Zelle anliegende Spannung geändert. Der prozentuale Abfall betrug bei 82,2 Volt 1,36 Proz., bei 61,8 Volt 0,86 Proz., bei 41,5 Volt 0,86 Proz. und schließlich bei 20,4 Volt 0,95 Proz. im Verlaufe von 5 Minuten nach Einsetzen der Belichtung. Bei den höheren Spannungen war allerdings der Strom noch nicht stationär geworden.

Ganz eigenartige Erscheinungen traten auf, als ich die Intensität der Strahlung noch steigerte auf etwa das 2—3 fache. Bei 30-mm-Blende und einem Abstand der Projektionslampe von 30 cm waren die Ergebnisse folgende. Zuerst zeigte sich der übliche Rückgang des Ausschlags in 5 Minuten um 6 Teilstriche von 480, dann 20 Minuten Dunkelheit, die nächsten 5 Minuten Strahlung brachten diesmal 24 Teilstriche Rückgang und wieder Annäherung an einen konstanten Wert. Nach einer Minute Dunkelheit geringer Abfall um 7 Skalenteile. Die Zelle blieb dann in völliger Dunkelheit bis zum nächsten Tage stehen unter Spannung von 41 Volt. Die erste Ablesung war etwa 70 Skalenteile höher als am Vortage, also etwa 14 Proz., stieg weitere 4 Minuten lang um weitere 30 Skalenteile und ging zuerst sehr schnell und dann langsamer um 110 Skalenteile herab, d. h. um rund 20 Proz. des Gesamtausschlags. Nach weiteren kurzen Ruhezeiten zeigte sich wieder das alte Verhalten, geringes Zurückgehen. Am nächsten Tage war die Lichtempfindlichkeit

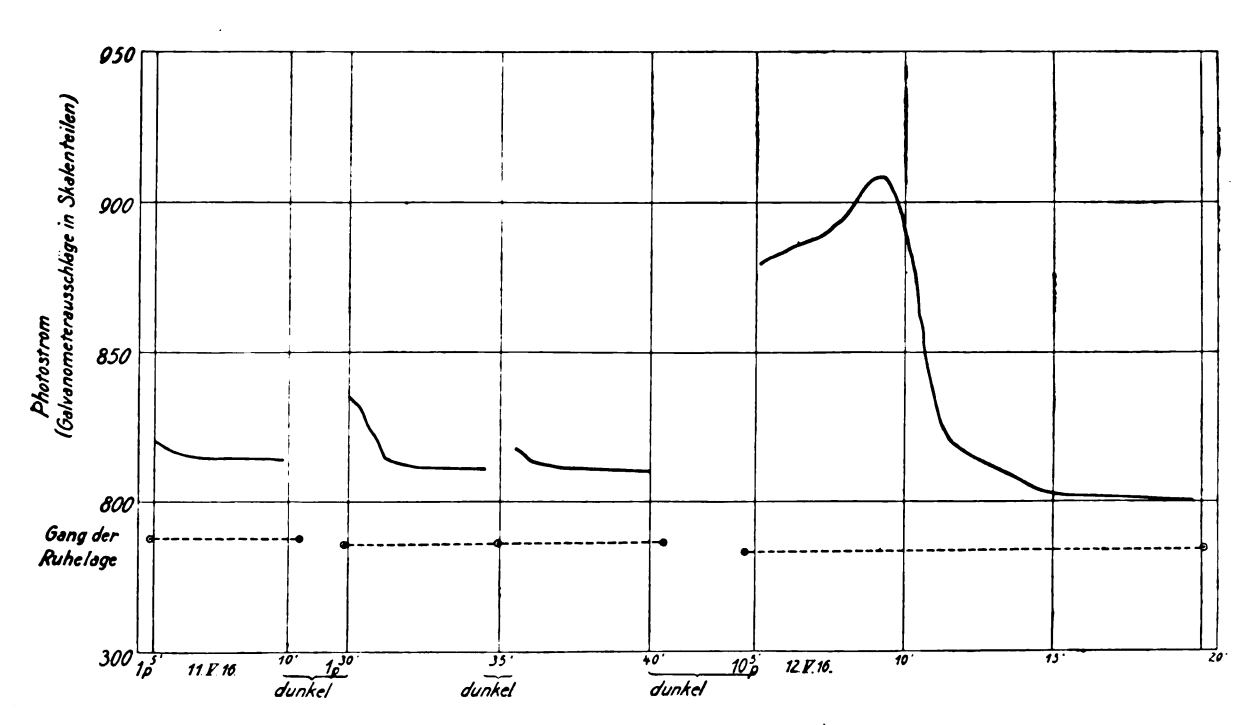


Fig. 7. Ermüdungserscheinungen der Kalizelle Potsdam.

wieder sehr hoch, ging bei der Belichtung zunächst etwas herab, um dann erneut zu steigen. Der folgende Abfall war wieder sehr schnell und schien sich dann asymptotisch ungefähr dem zuerst gemessenen Werte zu nähern. Fig. 7 zeigt den Gang bei einem dieser Versuche. Eine bestimmte Beziehung zwischen der Dauer der Dunkelheit und der Größe und Anfangszeit des schnellen Abfalls konnte nicht gefunden werden. Die Frage wurde auch nicht weiter verfolgt. Es war ja damit auch gezeigt, daß die Kalizelle nicht unerheblichen Änderungen unterliegt. Es ist ja auch nicht die Aufgabe dieser Untersuchung, die Frage bis zur Entscheidung physikalisch durchzuführen. Ein meteorologisches Observatorium kann nur die Aufgabe haben, die gegebenen Instrumente und Methoden auf ihre Brauchbarkeit hin zu untersuchen und gegebenenfalls zu verbessern.

Da für Messungen der Sonnenstrahlung eine Genauigkeit und Beständigkeit von der Größenordnung von 1 Proz. gefordert werden muß, so zeigen diese Ergebnisse, daß, um mich vorsichtig auszudrücken, das vorliegende Instrument für diese Messungen noch nicht geeignet ist; denn die tatsächlichen Schwankungen sind weit größer. Es dürfte aber wohl gelingen nach Feststellung aller Eigenschaften solcher Zellen, schließlich brauchbare Meßinstrumente auf photoelektrischer Grundlage zu bauen, die allen Anforderungen genügen. Dann wird man auch an die wichtige Aufgabe herantreten können, fortlaufend die Himmelshelligkeit und die Sonnenstrahlung zu registrieren.

Nicht alle Zellen zeigen dasselbe Verhalten wie die Kalizelle, die in Potsdam benutzt wurde. Die Bergmannzelle mit Wasserstoffüllung zeigte bei Photoströmen derselben Größe ein dauerndes Steigen des Galvanometerausschlages. Während einer Belichtungsdauer von 50 Minuten stieg der Ausschlag ganz stetig und gleichmäßig, schwächer als linear, und schien sich asymptotisch einem Endzustand zu nähern. Die Spannung an der Zelle betrug bei diesem Versuch 82 Volt. Der Ausschlag stieg um 70 Skalenteile, d. h. von 460 auf 530, also um rund 15 Proz. Die Empfindlichkeit ging bei Dunkelheit allmählich wieder zurück, zuerst schneller, dann langsamer, erreichte aber nach etwa $10^1/_2$ Stunden noch nicht wieder den Anfangswert. Nach dem oben Mitgeteilten dürfte die Empfindlichkeit noch weiter sinken, und zwar noch unter den Anfangswert herab. Doch wurde das jetzt nicht noch einmal untersucht. Ich halte es aber auch für möglich, daß sich die Zelle jetzt anders verhalten hätte.

Die Bergmannzelle mit Argonfüllung war wesentlich konstanter. Nur bei höheren Belastungen zeigte sich ein geringes Absinken der Empfindlichkeit, das aber unter 1 Proz. blieb; wie gewöhnlich war der Rückgang zuerst schneller als später.

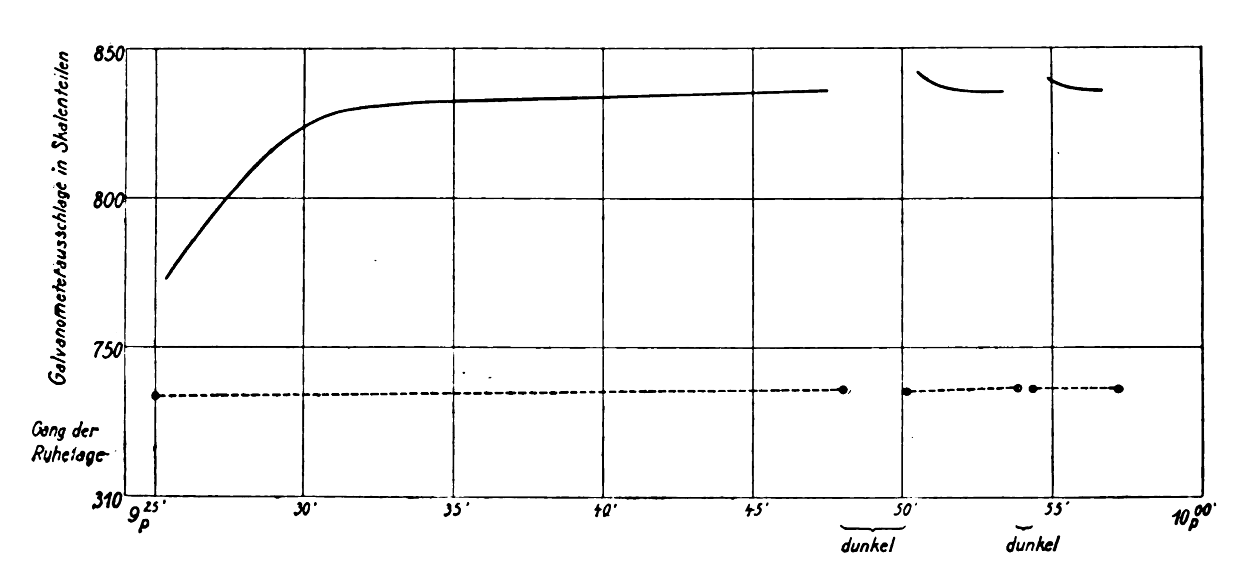


Fig. 8. Änderung der Kalizelle Kolberg bei Belichtung (16. Juli 1916).

Die Kolberger Zelle zeigte wieder einen anderen Typus. Bei geringerer Belastung war ihr Verhalten ähnlich dem der Potsdamer Zelle; eine anfängliche Ermüdung, d. h. eine geringe Abnahme der Stromstärke nach Einsetzen der Belichtung. In einzelnen Fällen nahm auch die Stromstärke etwas zu. Als ich auch hier zu größeren Helligkeiten überging, die Photoströme von ungefähr $1 \cdot 10^{-6}$ Amp. bei 40 Volt Spannung erzeugten, traten auch hier Besonderheiten auf. Bei einem anfänglichen Ausschlag von 430 Skalenteilen an stieg der Strom zuerst schnell, dann langsamer um 55 Skalenteile, also um etwa 12 Proz. in 14 Minuten und hatte damit sein Ende anscheinend noch nicht erreicht. Nach einer Verdunklung von 15 Minuten Dauer wurde erneut belichtet. Der Ausschlag stieg um einige Skalenteile und ging um etwa ebensoviel zurück, worauf von neuem eine Tendenz zum Steigen einsetzte. Nach einer Dunkelpause von $1^h 50'$ betrug der Ausschlag 16 Skalenteile weniger, um im Verlauf von 10 Minuten wieder um etwa 20 Skalenteile zu steigen. Nach erneuter siebenstündiger Pause war die Empfindlichkeit wieder die anfänglich bestimmte und stieg erst schnell, dann langsamer um 64 Skalenteile an. Nach 3 Minuten Dunkelheit war der Ausschlag noch etwas gestiegen und ging darauf um einige Teilstriche wieder zurück. Dasselbe wiederholte sich nach einigen erneut eingelegten Dunkelpausen. Nach weiteren 11 Stunden Dunkelheit trat derselbe Vorgang wieder ein, zuerst starkes Steigen auf einen hohen Wert usw. wie vorher beschrieben.

Da die Zellen nicht selbst hergestellt waren und sie in dem Zustande untersucht werden mußten, in dem sie nun einmal waren, auch ihre Vorgeschichte nicht immer genau bekannt war, so können über die Ursache der Empfindlichkeitsänderung nur Vermutungen ausgesprochen werden. Es scheint so, als ob in der Zelle zwei Prozesse nebeneinander hergehen. Eine Neubildung einer Substanz mit größerer Lichtempfindlichkeit, die durch die Belichtung angeregt wird, sich während der Dunkelheit weiter ausbildet und schließlich wieder zerfällt und zweitens eine andere Verbindung, die unter dem Einflusse des Lichtes zerstört wird. Beide Vorgänge überdecken sich und je nach ihrem prozentualen Anteil treten die verschiedenen Kombinationen auf, die dann tatsächlich beobachtet werden. Vielleicht handelt es sich auch um Änderungen der Größe der kolloidalen Kaliumteilchen. Ob diese Änderungen durch zu starke Belastung herbeigeführt worden sind, bleibt dahingestellt. Die Möglichkeit dazu ist wohl anfänglich vorhanden gewesen[1]).

Wie dem auch sei, die Tatsache bleibt bestehen, daß besonders bei größeren Helligkeiten die benutzten photoelektrischen Zellen nicht konstant sind, sondern beträchtliche Schwankungen ihrer Empfindlichkeit zeigen, die ihre Verwendung für exakte Messungen zurzeit noch nicht gestatten. Vielleicht ist unter den hier und da

1) Wie ich nachträglich fand, hat schon Richtmeyer (Zeitschr. f. Beleuchtungswesen usw. 1913, S. 507) festgestellt, daß bei höheren Lichtintensitäten (er benutzte eine Bogenlampe von 2000 Kerzen in 65—100 cm Abstand) die Zellen veränderlich werden, so daß sie später auch bei schwächeren Helligkeiten nicht mehr reproduzierbare und konstante Photoströme geben, während vorher die Zelle gleichmäßig und konstant gewesen war. Diese Nachwirkung zeigte sich noch nach Wochen.

benutzten Zellen die eine oder die andere frei von solchen Änderungen, wenn es auch noch nicht gelungen ist, sie regelmäßig und mit vorherbestimmter Empfindlichkeit herzustellen[1]). Es ist die Vermutung nicht ganz von der Hand zu weisen, daß auch bei geringen Lichtintensitäten ähnliche Veränderungen vorkommen, wenn auch vielleicht in prozentual geringerem Maße. Die vier zur Verfügung stehenden Zellen wurden nach dieser Richtung hin nicht untersucht, das hätte hier zu weit geführt. Jedenfalls zeigt obige Untersuchung, daß man den photoelektrischen Zellen immer noch mit Mißtrauen gegenübertreten und sie vor ihrer praktischen Anwendung genau untersuchen muß.

Die Vorbereitungen zu der umfangreichen Erweiterung des Arbeitsprogramms des Meteorologischen Observatoriums in bezug auf Messungen, Helligkeit und Sonnenstrahlung, das, wie oben erwähnt, von April 1914 bis April 1916 durchgeführt wurde, lag in den Händen Dr. Kühls einschließlich der Überwachung der ersten Messungen bis in den September 1914. Nach Fertigstellung obiger Mitteilung schrieb Dr. Kühl während eines militärischen Urlaubs einen kurzen Bericht über seine Erfahrungen u. a. über die Kalizellen, dem ich mit seiner Erlaubnis folgendes entnehme:

„Zu dem von Günther & Tegetmeyer im Herbst 1913 gelieferten Kaliumphotometer war zunächst vorhanden ein Zeigergalvanometer von Siemens & Halske mit innerem Widerstand von 750 Ohm und einem Skalenwert von $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ Amp. für den Teilstrich; als Spannungsquelle diente anfangs ein Satz Taschenlampenbatterien, die aber bald durch zwei Zehnder-Akkumulatorenbatterien von je 20 Elementen, also etwa 40 Volt, ersetzt wurden. Als Filter, das die ultravioletten Strahlen und das kurzwelligste Ende des sichtbaren Spektrums von Wellenlängen von etwa 400 $\mu\mu$ an auszuschließen gestattet, konnte ein planparalleles Flintglas vorn auf den Tubus des Instruments gesteckt werden. Ganz die gleiche Ausrüstung war für das Observatorium Kolberg der Zentralstelle für Balneologie beschafft und die Untersuchung dieses Instrumentariums konnte zunächst mit Dr. Kähler (dem Leiter dieses Observatoriums) gemeinschaftlich vorgenommen werden. Wegen der geringen Empfindlichkeit des Galvanometers mußte mit Strömen von mehr als 10^{-6} Amp. gearbeitet werden[2]), die bei zulässigen Spannungen nur durch unmittelbare Sonnenstrahlung zu erreichen sind. Bei solchen gleichzeitigen Messungen mit beiden Instrumenten zeigten sich nun von vornherein merkwürdige Unstimmigkeiten, und weitere Versuche schienen auf eine starke „Ermüdung" der Zellen bei dieser Beanspruchung zu führen. So war am 5. Februar 1914 das Potsdamer Photometer im Mittel 12:10 empfindlicher als das Kolberger, dagegen war am 6. nach dem ersten Teil einer Blendeneichung, bei der Ströme von 10^{-5} Amp. (wenn auch nur auf einige Sekunden Dauer) vorgekommen waren, das Verhältnis nahezu 10:10, nach dem zweiten Teil, bei dem die Stromstärke auf fast $2 \cdot 10^{-5}$ Amp. heraufgegangen war, sogar nur 9:10. Die Vergleichung wurde mit großer Stromstärke (starke Belichtung — Blende 20 = halb offen) gemacht, das Kolberger Instrument war sonst abgedeckt. Eine nähere Untersuchung dieser Erscheinungen war zunächst nicht möglich, da eine konstante, hinreichend helle Strahlungsquelle fehlte, und es blieb nur übrig, mit möglichst kleinen Stromstärken zu arbeiten. Bei Benutzung des Zeigergalvanometers kann das natürlich nur bis zu einem gewissen Grade durch Einschränkung auf kleinere Ausschläge (bis etwa 20 Teilstriche) mittels Variation der Blende geschehen. Für Potsdam schien es aber dringend erwünscht, ein empfindlicheres, wenn auch weniger bequemes Instrument zu benutzen." ...

„Mit diesem Instrumentarium wurden meist nach Abreise Dr. Kählers nach Kolberg eine Reihe von Versuchen angestellt über den Einfluß der Spannungsänderung, das Verhältnis der Blendenöffnungen (das der meist benutzten Einstellungen 3 nach Teilung = 0,01 der vollen Öffnung 30, 5 = 0,0278, 10 = 0,111 wurde empirisch als 0,0094, 0,0394, 0,125 bestimmt und so zur Reduktion benutzt[1])) und über die Proportionalität der Ausschläge mit der Helligkeit. Da für all diese Versuche keine konstante hinreichend helle Lichtquelle zur Verfügung stand, sondern mit der Sonne oder einer Nernst-Projektionslampe gearbeitet werden mußte, die mit Netzstrom gebrannt und nur durch ein grobes Wechselstrom-Voltmeter kontrolliert werden konnte, so haben ihre Ergebnisse nur orientierenden Wert und können hier um so eher fortgelassen werden, als ja Dr. Barkow später mit viel

1) Das zeigen deutlich z. B. die Untersuchungen von W. Voege (Zeitschr. f. Beleuchtungswesen usw. 1914, H. 11 und 1915, H. 21/22).

2) Zur Zeit dieser Messungen erschien eine Belastung von dieser Größe durchaus unbedenklich, da Elster und Geitel in ihren ersten Veröffentlichungen aus den Jahren 1912 und 1913 ausdrücklich Zeigergalvanometer empfohlen hatten und selbst ihre Zellen stärker belastet hatten. Erst in einer späteren Mitteilung (diese Zeitschr. **15**, 610 bis 611, 1914) warnen sie vor stärkerer Belastung als etwa 10^{-6} Amp.

1) Anfänglich trug das Kaliphotometer eine Irisblende, worauf sich obige Angaben beziehen; bei einem späteren Umbau des Instruments wurde sie durch exaktere feste, aber auswechselbare Blenden ersetzt.

besseren Hilfsmitteln gründliche Untersuchungen angestellt hat. Scharf genug bestimmt war der Einfluß der Spannung, der innerhalb der vorkommenden Schwankungen bei 40 Volt hinreichend genau durch eine Verbesserung des Stromwertes a um $-0{,}017 \cdot \triangle \cdot a$ berücksichtigt wurde, worin $\triangle$ die Abweichung von 40 Volt bedeutet. Die Proportionalität mit der Helligkeit ergab sich (durch Blendenvariation bei Vorschaltung verschiedener Filter) als nicht ganz vollständig, doch waren die Abweichungen zu klein und zu unsicher bestimmt, um berücksichtigt werden zu können. Ganz schlimm stand es mit der Prüfung der zeitlichen Konstanz der Zelle, die Hoffnung, eine solche wenigstens roh mit der Nernstlampe ausführen zu können, wurde durch das Ergebnis der optischen Messung dieser Lampe, das unerwartet große Änderung in kurzer Zeit ergab, vereitelt, da man nun auch eine hinreichende Proportionalität zwischen optischer und photoelektrischer Helligkeit nicht mehr annehmen konnte — übrigens hätte unter dieser Annahme die Zelle vom 25. Mai bis 27. Juli 1914 um rund 5 Proz. an Empfindlichkeit verloren."

(Eingegangen 27. April 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über die Resonanztheorie des Hörens.

Von E. Budde.

A. Die Wahrnehmung des stationären einfachen Tones.

Als Ausgangspunkt nehme ich etwa den Stand der Dinge um 1904. Eine zusammenfassende Darstellung desselben war gegeben durch das Kapitel „Gehör" von Karl L. Schaefer in Nagels Handbuch der Physiologie; Stumpfs Tonpsychologie war vorhanden, und die Arbeiten von v. d. Goltz waren soweit durchgedrungen, daß man sich ziemlich allgemein daran gewöhnt hatte, die halbkreisförmigen Kanäle und das Vestibulum als Gleichgewichts- bzw. Orientierungsorgane anzusehen. Seit Kriegsbeginn war die Beschaffung der Literatur so erschwert, daß ich von ausländischen Arbeiten nur diejenige Kenntnis nehmen konnte, welche durch die „Fortschritte der Physik" vermittelt wurde.

§ 1. Die Gehörknöchelchen. Helmholtz hat bekanntlich die Reihe der Gehörknöchelchen als dasjenige Organ angesehen, welches wesentlich die Leitung der Schallerschütterungen vom Trommelfell auf die Schnecke überträgt. Dem widersprach in manchen Fällen die praktische Erfahrung der Ohrenärzte. F. Bezold hat die ursprüngliche Helmholtzsche Auffassung verteidigt; er hat zusammen mit M. Th. Edelmann[1]) ein bewegliches Modell des Schallleitungsapparates gebaut und mit Hilfe desselben das Übersetzungsverhältnis zwischen dem Hammerstiel und dem Steigbügel zu 1:24 bestimmt. Die Erfahrungen der Ohrenärzte zeigen aber deutlich, daß jedenfalls neben der Leitung durch die Knöchelchenreihe noch eine andere, vermutlich die Knochenleitung, nicht zu vernachlässigen ist. Patienten, denen auf beiden Seiten der Amboß fehlt, hören bis zur kleinen Oktave herab noch recht leidlich. Zuletzt haben Schaefer und Sessous[1]) festgestellt, daß für Patienten, denen die Paukenknöchelchen auf beiden Seiten durch Radikaloperation entfernt sind, die untere Grenze der Zuleitung meist in der Kontraoktave liegt. Unterhalb dieser Grenze scheint die Anwesenheit der Gehörknöchelchen für die Wahrnehmung unerläßlich zu sein. Dennert[2]) kommt zusammenfassend zu dem Ergebnis, daß der Schall auf drei Wegen, 1. durch den Paukenhöhlenapparat, 2. durch die Knochenleitung, 3. direkt vom Trommelfell aus durch das runde Fenster ins Labyrinth gelangen kann, daß aber der Weg durch den Paukenhöhlenapparat zweckmäßiger als die beiden anderen Wege entwickelt ist. Da der Verschluß des runden Fensters durch eine wesentlich zum Ausweichen bestimmte Membran bewirkt wird, scheint mir, daß die dritte seiner Modalitäten wohl nur in Betracht kommen kann, wenn die normale Verbindung von Steigbügel und Trommelfell unterbrochen ist; im ganzen erhält man aus der Literatur den Eindruck, daß der Paukenhöhlenapparat unter normalen Verhältnissen das Hauptorgan für die Schallleitung ist, daß aber die beiden anderen Arten der Leitung aushelfend und gegebenenfalls vikariierend eintreten können. Beyer[3]) faßt die Beobachtungen über Mittelohrleitung zusammen

1) F. Bezold und M. Th. Edelmann, Passow und Schaefers Beiträge **2**, 272, 1909.

1) K. L. Schaefer und H. Sessous, Verh. d. D. Otol. Ges. 1908, S. 87.

2) Dennert, Verh. d. D. Otol. Ges. 1910, S. 41.

3) Beyer, Verh. d. D. Otol. Ges. 1911, S. 408.

und meint, daß die Gehörknöchelchen mehr der Regulierung des Gleichgewichts für den Labyrinthinhalt dienen als der Tonübermittlung. Es ist aber nicht recht einzusehen, wie sie diese Regulierung des Gleichgewichts bewirken sollen. F. Bezold[1]) kommt auf Grund seiner Untersuchungen über Knochenleitung zu dem Schluß, daß im normalen Ohr wahrscheinlich nur diejenigen Töne durch Knochenleitung perzipiert werden können, welche auf ihrem Wege zum Labyrinth den Schalleitungsapparat passiert haben.

§ 2. Schnecke als Ganzes. O. Kalischer[2]) hat Hunde darauf dressiert, daß sie beim Angeben eines bestimmten Tones (Freßton) nach dargebotenen Fleischstücken schnappten, bei anderen Tönen aber die Fleischstücke liegen ließen. Er hat dann das Labyrinth auf der einen Seite vollständig zerstört, wodurch die Dressur nicht benachteiligt wurde; dann hat er Teile der zweiten Schnecke zerstört und gefunden, daß die Tondressur auf die beiden Töne c^3 und A_1 erhalten blieb. Er will auch festgestellt haben, daß das Tier die sämtlichen Töne aus fünf verschiedenen Oktaven wahrnimmt, wenn ein auch nur kleiner Teil der Schnecke erhalten war. War die zweite Schnecke völlig zerstört, aber der Vestibularapparat erhalten, so soll der Hund immer noch das Vermögen der Tonunterscheidung behalten haben. Kalischer schließt, daß jeder Teil der Schnecke hohe und tiefe Töne in gleicher Weise aufnehmen kann und daß auch der Vestibularapparat bei der Unterscheidung von Tönen beteiligt sei. Denker[3]) hat diese Versuche kritisch behandelt und namentlich mit großem Recht darauf hingewiesen, daß man bei der Reaktion eines Hundes auf einen vorgeschriebenen Ton niemals sicher ist, ob das Tier nicht seinem Herrn am Gesicht usw. abliest, wann die richtige Handlung erfolgt ist. (Es sei an den bekannten Hund von Huxley erinnert.) Er kommt zu dem Schluß, es sei durchaus daran festzuhalten, daß die Schnecke das eigentliche Organ der Gehörswahrnehmung ist. Für diesen Schluß sprechen nun sehr entschieden Versuche von A. Blau[4]). Er hat bei Katzen und Hunden das runde Fenster experimentell mit Plomben aus dem Material der Zahnärzte verschlossen und gefunden, daß die Tiere nachher auf Schallwirkungen nicht reagierten. Eine Reihe von Autoren[5]), darunter Lucae und Habermann, bestätigen dieses Ergebnis. Ferner haben dieselben Autoren bei der Sektion taubstummer Menschen gefunden, daß die Krankheit nicht selten in festem Verschluß der Fenster begründet war.

1) F. Bezold, Zeitschr. f. Ohrenheilkunde **48** (1, 2), 107, 1904.
2) O. Kalischer, Arch. f. Anat. u. Physiol., physiol. Abt. 1909, S. 303.
3) Denker, Verh. d. D. Otol. Ges. 1910, S. 70.
4) A. Blau, Verh. d. D. Otol. Ges. 1905, S. 130.
5) Zusammengestellt bei Beyer, Passow und Schaefers Beiträge **6**, 92, 1913.

Die älteren Experimente, wie die von Munk und Baginsky, bei denen die Rolle der Schnecke dadurch festgestellt werden sollte, daß man auf einer Seite eines Tieres die ganze Schnecke ausrottete, auf der anderen Seite Teile derselben zerstörte und konstatierte, welche Gehörsreaktionen danach übrigblieben, scheinen mir wenig beweiskräftig; das Verfahren ist deshalb zu roh, weil man weder die Entzündungs- noch die Restitutionsvorgänge beherrschen kann, die den starken Eingriffen folgen. Feinere Versuche sind zuerst von Wittmaack[1]) ausgeführt worden. Er hat fünf Meerschweinchen wiederholt mit einer starktönenden c^3-Pfeife angepfiffen, hat sich dann aber nicht auf ihre Reaktionen im Leben verlassen, sondern die Tiere getötet und untersucht. Dabei stellte sich in allen fünf Fällen ein gut umschriebener totaler Defekt des Cortischen Organs in der Höhe der zweituntersten Windung heraus, während die übrigen Windungen im wesentlichen unverletzt waren. Diese Versuche sind von verschiedenen Seiten wiederholt worden; insbesondere hat Yoshii[2]) mit höheren und tieferen Tönen operiert und gefunden, daß der Ort der Verletzung bei den höheren Tönen näher an den Fenstern, bei den tieferen näher am Hamulus liegt. Eine Zusammenstellung weiterer Versuche findet sich bei Röhr[3]). Im allgemeinen zieht man aus den sämtlichen Versuchen den Schluß, daß die erkrankte Stelle um so ausgedehnter ist, je mehr die Intensität des Reizes übertrieben wurde, immer natürlich unter der Voraussetzung, daß der zur Reizung benutzte Ton in der Gegend der Tonleiter liegt, für welche die Tiere (Meerschweinchen) maximale oder wenigstens normale Empfindlichkeit besitzen. Töne, welche außerhalb dieser Region liegen (C oder c^6), bringen auch bei größter Stärke keine pathologischen Erscheinungen hervor.

Wittmaack ist der Ansicht, daß der Nerv primär verletzt werde und daß die Schädigungen des Cortischen Organs in einer Störung der trophischen Wirkung des Nerven begründet seien. Auffallend ist ein Resultat von Grünberg (zitiert bei Röhr), der seine Meerschweinchen mit a^3 reizte, und dann bei denjenigen, die nach 7 Tagen getötet wurden, Degeneration in der zweiten Windung, bei denjenigen aber, die nach 14 Tagen getötet wurden, Degeneration in der

1) Wittmaack, Pflüg. Archiv **120**, 249, 1907.
2) Yoshii, Zeitschr. f. Ohrenheilkunde **58**, 201, 1909.
3) Röhr, Passow und Schaefers Beiträge **5**, 390, 1912.

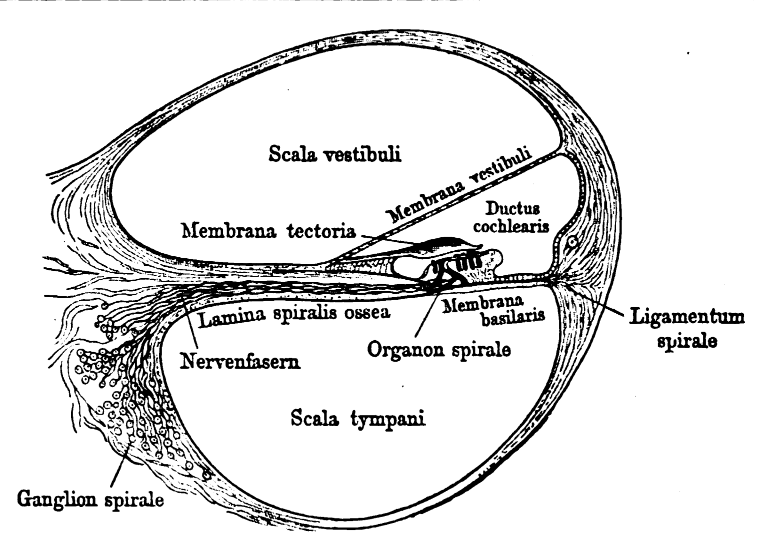


Fig. 1.

dritten Windung erzielte, ein Kuriosum, welches die Frage nahelegt, ob einmal gesetzte Degenerationen nachträglich ausheilen und ob Verletzungen durch Töne von verschiedener Intensität verschiedene Zeit brauchen, um hervorzutreten. Wäre dem so, so könnte man bei dem Grünbergschen Versuch an Obertöne denken.

Die im vorstehenden aufgezählten Versuche werden unten in anderem Zusammenhang noch einmal kurz berührt. Wir entnehmen vorläufig aus ihnen als wahrscheinlichstes Ergebnis, daß die Schnecke, und zwar die Schnecke mit beweglichem Wasser, als derjenige Teil des Labyrinths anzusehen ist, in welchem die Reizung des Nervus acusticus zustande kommt.

§ 3. Theorien des Hörens. Die Schnecke ist bekanntlich durch die Lamina spiralis und die Basilarmembran ihrer ganzen Länge nach in zwei Hauptteile geteilt. In den einen treten die Schallwellen durch das ovale Fenster ein; der andere ist durch das runde Fenster verschlossen, dessen nachgiebige Haut sich unter dem Druck der Wellen ausbiegt. Nur am äußersten Ende, am Hamulus, besteht durch das kleine Schneckenloch (Helicotrema) eine direkte Verbindung zwischen dem Wasser beider Teile. Im übrigen kann ein Druckunterschied zwischen ihrem flüssigen Inhalt nur durch Ausbiegungen in der Basilarmembran ausgeglichen werden. Helmholtz erwähnt bezüglich des Helicotremas nur die negative Eigenschaft, daß es wegen seiner Kleinheit keinen erheblichen Prozentsatz der eintretenden Wellen durchläßt. Bei den neueren Autoren wird ihm mehrfach eine Schutzwirkung gegen starke Wellen zugeschrieben. Diese Ansicht ist aber nicht haltbar; denn wenn das Helicotrema von mäßigen Wellen nur einen kleinen Prozentsatz durchläßt, so kann es auch von starken Wellen keinen größeren Prozentsatz aufnehmen, kann also gegen schnelle Schwingungen überhaupt nicht schützen. Seine Bedeutung besteht offenbar darin, daß es keine dauernden Druckunterschiede zwischen den beiden Hälften der Schnecke zuläßt. Zu dieser Schutzwirkung ist offenbar Gelegenheit gegeben, sobald durch krankhafte Änderung des Luftdruckes in der Paukenhöhle oder durch Schwankungen des atmosphärischen Druckes bei verstopfter Tuba eine dauernde Deformation des Trommelfelles und damit ein dauernder Druck oder Zug auf den Steigbügel geübt wird. Basilarmembran und Helicotrema zusammen sind ein Analogon zu dem Hefner-Alteneckschen Luftdruckvariometer.

Einen Querschnitt durch die Schnecke zeigt Fig. 1, zu der nur zu bemerken ist, daß das ovale Fenster in die Scala vestibuli führt. Von der Scala vestibuli ist durch die Membrana vestibularis, auch Reißnersche Membran genannt, der Ductus cochlearis abgetrennt, in welchem sich die eigentlichen Hörorgane befinden. Die Flüssigkeit in der Scala vestibuli und Scala tympani heißt Perilymphe und scheint sich von physiologischer Kochsalzlösung nur wenig zu unterscheiden. Dagegen ist die Flüssigkeit im Ductus cochlearis, Endolymphe genannt, nach Angabe von Wittmaack erheblich zäher; sie scheint sich in der Konsistenz der Glasflüssigkeit des Auges zu nähern. Die Membrana vestibularis hat also zunächst offenbar den Zweck, diese zähere Flüssigkeit gegen die Perilymphe abzugrenzen. Außerdem ist zu bedenken, daß sie eine sehr biegsame, aber vermutlich wenig ausdehnbare Haut darstellt. Eine solche Haut wird transversale Druckunterschiede leicht durchgehen lassen, während longitudinale Wellen an

ihr vorbeigleiten. Dies ist schon von ter Kuile (Zitat s. Spalte 2) angedeutet. Beachtet man, daß die Wellen, welche vom ovalen Fenster her in die Scala vestibuli eintreten, an der gekrümmten Schneckenwand vielfach reflektiert werden und dadurch immer aufs neue transversale Komponenten erhalten, so ist es wahrscheinlich, daß die Membrana vestibularis zusammen mit der Form der Schnecke dazu dient, den ganzen Ductus cochlearis mit transversalen Wellen zu versorgen.

Der Reißnerschen Membran gegenüber trennt nun die Basilarmembran die Endolymphe von der Perilymphe der Scala tympani; sie ist am schmalsten (0,04 mm) in nächster Nähe der Fenster und hat ihre größte Breite am Hamulus (0,5 mm) bei einer Länge von 33,5 mm. Sie ist sicher ein elastisches Gebilde, welches in Schwingungen versetzt werden kann, wenn vom ovalen Fenster her ein einfacher stationärer Ton zugeleitet wird. Bezüglich des einzelnen bestehen noch Meinungsverschiedenheiten.

a) Helmholtz lehrt: Auf den von außen kommenden Ton reagiert nach dem Prinzip der Resonanz eine bestimmte Faser bzw. Zone der Basilarmembran; dadurch werden die Nervenfibrillen dieser Stelle gereizt, der Reiz wird also auf einen bestimmten Ort der Basilarmembran lokalisiert und nach dem Prinzip der spezifischen Sinnesenergien wird er als Tonempfindung wahrgenommen, deren Höhe durch die Lage der gereizten Stelle bestimmt ist.

Gegen diese Theorie ist von verschiedenen Seiten der Einwand erhoben worden, daß die Resonanz unter den im Ohr gegebenen Verhältnissen erheblich unscharf ist. Dieser Einwand ist vorläufig berechtigt und wird weiter unten näher beleuchtet; hier lassen wir ihn außer Betracht. Außerdem aber haben verschiedene Autoren andere Einwände erhoben und eigene „Theorien" aufgestellt. Streitigkeiten dieser Art sind schon älter und werden teilweise bis in die neueste Zeit fortgeführt. Erwähnenswert scheinen mir die Autoren Ewald und ter Kuile.

b) Ewald[1]). Gehört zu denjenigen, welche die Unschärfe der Resonanz betonen, findet die Helmholtzsche Erklärung von Konsonanz und Dissonanz ungenügend und wirft ein, daß die Intermittenz- und Differenztöne durch die Resonanztheorie nicht erklärt werden. (Diese Behauptungen sind inzwischen mehrfach polemisch behandelt, und namentlich F. A. Schulze hat eingehende Erklärungen gegeben; siehe weiter unten.) Ewald findet keine befriedigende Erklärung für den Unterschied zwischen Ton und Geräusch (das trifft wohl jede Hörtheorie; die Definition des Geräusches muß unabhängig von allen Hypothesen festgestellt werden). Er verlangt eine besondere Erklärung dafür, daß man unterscheiden kann, welcher von zwei Tönen der höhere und welcher der tiefere ist (m. E. liegt die Erklärung eben darin, daß die Nervenreizung von verschiedenen Stellen der Basilarmembran ausgeht). Er exemplifiziert auf den ursprünglichen Telegraphen von Sömmering, der, wie bekannt, zuerst 35 Drähte brauchte, um seine Signale zum Empfangsort zu leiten, und auf den Fortschritt, der darin lag, daß dieses Drahtbündel später durch zwei Drähte bzw. einen einzigen Draht ersetzt wurde. Er hat gefunden, daß sich auf einer Gummimembran stehende Wellen bilden, wenn man den Stiel einer tönenden Stimmgabel auf sie setzt, hat auch experimentell derartige stehende Wellen nachgewiesen, wenn die Membran sich unter Wasser befindet. Er denkt sich danach, daß auf der Basilarmembran durch einen erregenden Ton „quergestellte" stehende Wellen ausgebildet werden und daß die Knotenlinien dieser stehenden Wellen durch ihre Anordnung die Signale bilden, welche als „Schallbild" dem Gehirn vermittelt werden und dort die betreffende Empfindung auslösen. Dabei ist erstens außer acht gelassen, daß die Bildung stehender Wellen auf einer Membran stets von Reflexen an den Grenzen abhängt; ferner fehlt eine einleuchtende Angabe darüber, wie es geschehen soll, daß die Schallbilder als solche vom nervösen Apparat aufgenommen und fortgeleitet werden, und endlich, wenn es je einen Sömmeringwulst von Drahtleitungen gegeben hat, so ist der Hörnerv ein solcher. A. Lehmann[1]) hat gezeigt, daß elastische Membranen regelmäßige Schallbilder nur dann geben, wenn ihre Dimensionen und Spannung der Frequenz des Erregertons angepaßt sind, und daß in trapezförmigen Membranen die an einer Stelle erregten Schwingungen nicht an eine entferntere Stelle fortgepflanzt werden. Ebenso hat Stefanini[2]) gefunden, daß trapezförmige Leinenmembranen auf verschiedene Töne mit verschiedenen Teilen mitschwingen — lauter Resultate, die mit der Ewaldschen Theorie offenbar nicht vereinbar sind.

c) ter Kuile[3]). Hat brauchbare Gedanken angegeben, hat aber zwei Einwürfe gegen Helmholtz. Erstens meint er, bei gleicher Energie der Schwingung sei die Amplitude der auf tiefe Töne abgestimmten Fasern soviel größer als diejenige der auf hohe Töne abgestimmten, daß die Bewegung der ersteren not-

1) J. Rich. Ewald, Pflüg. Arch. 76, 147, 1899.

1) A. Lehmann, Folia Neuro Biologica 4, 116, 1910.
2) Stefanini, Cim. (6) 8, 149. 1915.
3) E. ter Kuile, Pflüg. Archiv 79, 146 u. 484, 1900, sowie 89, 333, 1902.



wendig die feinen Hörhärchen, von denen weiter unten die Rede ist, zerreißen müßte. Die Zerreißungsfähigkeit einer Schwingung hängt aber nicht direkt von der Amplitude, sondern von der Beschleunigung ab, und eine sehr einfache Rechnung zeigt, daß bei gleicher Energie die Faser mit dem tieferen Ton die geringere Beschleunigung hat. Zweitens verweist er darauf, daß, wenn zwei zusammengesetzte Klänge ein und denselben einfachen Ton enthalten, zwischen den beiden Wellenzügen dieses einfachen Tones eine Interferenz eintreten muß, die ev. dahin wirken kann, daß der Ton ganz aus dem Klang verschwindet. Und er sieht darin einen Widerspruch gegen die Behauptung von Helmholtz, nach welcher die akustische Wirkung eines Klanges unabhängig ist von der Phase der in ihm enthaltenen Töne. Abgesehen davon, daß die Interferenzerscheinung im Raume weit verwickelter ist, als ter Kuile sie vorstellt, liegt darin kein Widerspruch; denn Helmholtz hat seine Behauptung nur für diejenigen Töne ausgesprochen, die in einem an einer Stelle des Raumes erzeugten Klang enthalten sind. ter Kuile[1]) stellt nun eine Theorie auf, wonach beim Einpressen des Labyrinthwassers durch den Steigbügel eine Ausbuchtung an demjenigen Ende der Basilarmembran entsteht, welches proximal zu den Fenstern liegt. Diese Ausbuchtung soll während einer halben Periode fortwandern bis zu einem bestimmten Punkte E der Basilarmembran, in dem sie endigt, und die Erregung an bzw. bis zu diesem Endpunkt soll wahrgenommen werden. Wie das zugeht, bleibt unklar; die Schallgeschwindigkeit im Labyrinthwasser läßt eine derartige Beschränkung der Druckwirkung nicht zu, und die Wittmaackschen Versuche widerlegen sie experimentell.

Auf weitere „Theorien" gehe ich nicht ein. Offenbar ist die Helmholtzsche Lehre die einzige, die wirklich den Namen einer Theorie verdient; denn sie liefert eine mit den Grundsätzen der Mechanik vereinbare Erklärung für die Lokalisation des Reizes auf eine bestimmte Stelle der Basilarmembran und mit dieser Lokalisation einen Anhalt dafür, wie der Reiz nach dem Prinzip der spezifischen Sinnesenergien zu einer bestimmten Tonempfindung führt.

Es ist noch zu erwähnen, daß bei den Otologen eine Zeitlang die Frage eine erhebliche Rolle spielte, ob es sich bei den Vorgängen im Ohr um „massale" oder „molekulare" Bewegungen handele, wobei das Wort „molekulare" mißverständlich für „deformatorische" gebraucht wird. Dem hat Brünings bei der Otologenversammlung 1910 ein Ende gemacht durch Hinweis auf das alte Helmholtzsche Argument, wonach die Wellenlänge der höchsten deutlich wahrnehmbaren Töne immer noch sehr groß ist gegen die Dimensionen der Einzelorgane, die für das Hören in Betracht kommen.

1) Hierzu auch P. Bonnier, Journ. de Phys. (4) 5, 578, 1906.

§ 4. Die Unschärfe der Resonanz. Schon Ewald hat den Einwurf erhoben, daß die Resonanz der gedämpften Basilarfasern eine erhebliche Unschärfe haben müsse. Dieser Tatsache ist sich Helmholtz offenbar bewußt gewesen; denn er sagt selbst, daß eine Figur, die eine äußerliche Ähnlichkeit mit der Maxwellschen Wahrscheinlichkeitskurve hat, in übertriebenem Maße die periodische Deformation darstelle, welche an der Basilarmembran unter der Einwirkung eines einfachen Tones auftritt. Weitere Erörterungen hierüber hat er offenbar der Zukunft überlassen. Nun hat aber M. Wien die Empfindlichkeit des menschlichen Ohrs für Töne verschiedener Höhe neu bestimmt und dabei Empfindlichkeiten gefunden, welche in der Region von 700 bis 3000 Schwingungen die altbekannten Werte von Toepler und Boltzmann sowie diejenigen von Lord Rayleigh noch weit übertrafen. Gestützt auf diese Versuche hat er im Jahre 1905[1]) den Ewaldschen Einwurf in einer Weise verschärft, die geradezu epochemachend wirkte. Wenn die Schwingungen des Labyrinthwassers mit der gleichen periodischen Kraft auf alle Fasern der Basilarmembran wirken, so müßte nach seiner Rechnung, wenn die gewöhnlichen Resonanzgleichungen gültig sein sollen, ein stationärer tiefer Ton in den auf höhere Töne abgestimmten Fasern eine Bewegung hervorrufen, die unter Umständen die Empfindlichkeitsschwelle viele tausend Mal überschreiten würde. Man müßte also, wenn jede schwingende Faser eine Tonempfindung erzeugt, statt des einen Tones ein Chaos von falschen Tönen hören. Da das aller Erfahrung widerspricht, schien die Resonanztheorie des Hörens ernstlich gefährdet. Es wird sich nun später eine Erwägung ergeben, welche dartut, daß die Voraussetzung, wonach das schwingende Labyrinthwasser alle Teile der Basilarmembran mit derselben periodischen Kraft affiziert, nicht richtig ist. Aber zugleich wird sich auch zeigen, daß eine ganz erhebliche Unschärfe der Resonanz unabweisbar ist. Wir wollen also an dieser Stelle die Tatsache der Unschärfe als gegeben hinnehmen. Dann entsteht die Frage, wie es zugehen kann, daß die Reizung einer ausgedehnten Strecke der Basilarmembran zu einer

1) M. Wien, Festschrift für Wüllner, S. 28, Leipzig 1905.



einfachen Tonwahrnehmung führt. Mit dieser Frage hat sich O. Fischer[1]) beschäftigt.

Fischers Grundgedanke lautet dahin, daß nur die Deformationen der Basilarmembran empfunden werden, nicht aber die Schwingungen, welche die Membran als Ganzes ausführt. Diesen Gedanken habe ich[2]) aufgenommen und dahin zugespitzt, daß die Tonempfindung vom Gehirn an derjenigen Stelle der Basilarmembran lokalisiert wird, wo der periodische Ausschlag der Membran ein Maximum besitzt. (Nachträglich habe ich gefunden, daß diese Hypothese schon von Brünings bei der Versammlung der Deutschen Otologischen Gesellschaft vom Jahre 1910 ausgesprochen, übrigens nicht weiter verfolgt ist.) Unter der Annahme, daß die gewöhnlichen Resonanzgleichungen für die Fasern der Basilarmembran angenähert gültig seien, habe ich ihn rechnerisch auf die Schwebungen zweier einfacher Töne angewendet, und zwar zunächst auf tiefe Töne mit geringer Differenz der Schwingungszahl; dabei habe ich ferner angenommen, daß die Dämpfung im Ohr ungefähr den von Helmholtz angegebenen Betrag habe.

Bei langsamen Schwebungen unterscheidet man bekanntlich deutlich im Ohr wie in der graphischen Darstellung eine Verstärkungszeit, in welcher sich die den erregenden Tönen entsprechenden Amplituden addieren, und eine Schwächungszeit, in welcher sie einander entgegenwirken.

Sind zwei erregende Töne m und n gegeben (n der höhere), so stellt Fig. 2 in leicht ver-

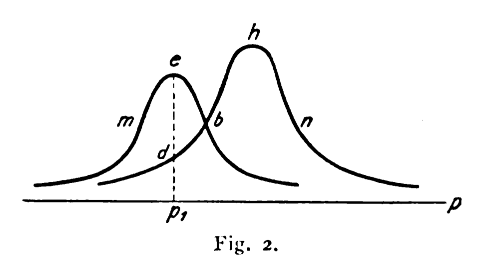


Fig. 2.

ständlicher Weise die übertriebenen Deformationszustände dar, welche durch m und n periodisch auf der Basilarmembran hergestellt werden, wenn die Töne einzeln erklingen. Wäre m allein vorhanden, so läge das Maximum der durch ihn hervorgerufenen Schwingung im Punkte e, welcher dem Punkt p_1 der nicht deformierten Membran entspricht; nach der zugrunde gelegten Hypothese würde also die Reizung vom Gehirn in p_1 lokalisiert werden, und p_1 wäre die Stelle der Basilarmembran, deren Reizung die Empfindung des Tones m auslöst. Entsprechendes gilt für n und h. Sind beide Töne gleichzeitig wirksam, so erhält man zur Verstärkungszeit ihre (in der Zeichnung nicht dargestellte) Resultante durch Addition der Ordinaten beider Kurven. Da sieht man leicht folgendes:

a) Liegen beide Töne nahe zusammen, so liefert die Addition eine Kurve, die nur ein Maximum hat, man hört nur einen offenbar zwischen m und n liegenden Ton.

b) Rücken sie weiter auseinander, so erhält man, wenn ihre Amplituden nicht zu verschieden sind, zwei Maxima, d. h. man hört zwei Töne. Nun steigt aber bei d die untere Kurve noch merklich nach rechts an; das linke Maximum liegt also nicht genau über e, sondern etwas rechts davon; ebenso liegt das rechte Maximum etwas links von h. Die beiden Maxima ziehen einander also scheinbar ein wenig an.

c) Verstärkt man den einen Ton, etwa n, bedeutend, so kann der Abfall der Kurve hbd so stark werden, daß er das auf m bezügliche Maximum verdeckt. Man kann also den einen der beiden Töne durch genügende Verstärkung des anderen zum Verschwinden bringen.

d) Rücken m und n allmählich weiter auseinander, so ergibt sich ein durchaus sanfter Übergang von dem Zustand mit einem Maximum zu dem mit zweien; für den Abstand zwischen m und n, bei welchem zuerst ein doppelter Ton gehört wird, lassen sich also nur Schwellenwerte angeben.

Zur Schwächungszeit liegen die beiden Kurven wie Fig. 3 zeigt. Die Ordinaten sind zu

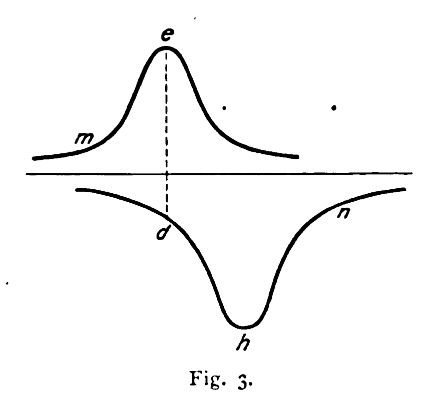


Fig. 3.

subtrahieren, aber es ist zu beachten, daß überall nur der absolute Wert der Differenz in Betracht kommt. (Das algebraische Minimum bei h ist für die Erregung durch n ein Maximum.) Im einzelnen findet sich:

e) Bei ungefähr gleicher Intensität von m und n hört man, wie unter a) und b), einen oder zwei Töne, je nachdem m und n mehr oder weniger weit auseinanderliegen.

1) O. Fischer, Ann. d. Phys. (4) **25**, 18, 1908.

2) E. Budde, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 369, 1916.

f) Die unter b) hervorgehobene Anziehung verwandelt sich in eine scheinbare Abstoßung; die Kurve n der Fig. 3 hat bei d noch so viel Steigung, daß das linke Maximum der resultierenden Kurve nicht unter e, sondern links davon liegt. Entsprechendes gilt für die rechte Hälfte der Figur. Die nähere Rechnung zeigt, daß diese Abstoßung gegebenenfalls recht merkliche Werte erlangen kann. Wählt man z. B. für m einen Ton mit der Kreisfrequenz 414, für n 417 bei gleicher Intensität, so liegen die Kreisfrequenzen der beiden empfundenen Töne bei 410 und 421. Man hört also zwei Töne, zwischen deren Schwingungszahlen ein Unterschied von $\frac{11}{2\pi}$ Schwingungen besteht, und dieser Unterschied ist für viele Menschen wahrnehmbar.

g) Ist der eine der beiden konkurrierenden Töne erheblich stärker als der andere, so verdeckt er diesen.

h) In diesem Falle verlangt die Theorie das von Guéroult empirisch gefundene Ergebnis, welches Helmholtz[1]) in den Tonempfindungen mitteilt. Er sagt:

„Zu der Zeit, wo die Tonstärke im Minimum ist, liegt die Höhe des gehörten Tones höher als beide erregenden Einzeltöne, wenn der stärkere Ton gleichzeitig der höhere ist, dagegen tiefer als beide, wenn der stärkere Ton der tiefere ist.“

Helmholtz selbst bestätigt die Wahrnehmung, ebenso Taylor. Dagegen haben später Stumpf[2]) und Waetzmann[3]) die angegebenen Schwankungen in der Höhe des schwebenden Tones nicht wahrgenommen. Da der Widerspruch nicht wohl auf Mängel der Beobachtung zurückzuführen ist, habe ich weiter untersucht, ob die Theorie erhebliche individuelle Verschiedenheiten zuläßt. Es findet sich in der Tat, daß die fraglichen Erscheinungen, namentlich zur Schwächungszeit, wesentlich von der Stärke der vorausgesetzten Dämpfung abhängen. Je schwächer die Dämpfung, desto weniger werden die hier hervorgehobenen Eigentümlichkeiten merklich.

Weiterer Aufschluß wird durch Versuche zu gewinnen sein, und zwar wohl am besten durch genaue Feststellungen über Dämpfung und Schwebung an den Ohren einzelner bestimmter Individuen, die bezüglich der Dämpfung möglichst verschieden ausgewählt werden müssen.

1) Helmholtz, Tonempfindungen, 4. Aufl., Braunschweig 1877, S. 274 und Beilage XIV.
2) Stumpf, Tonpsychologie II, 477, Leipzig 1883 und 1890.
3) Waetzmann, Die Resonanztheorie des Hörens, S. 95, Braunschweig 1912.

Es ist hier noch einmal auf die in § 2 erwähnten Versuche der Physiologen zurückzukommen, bei denen durch übermäßige Reizung Degeneration in der Schnecke erzielt wurde. Marx[1]) betont, daß die Intensität des Tones von Einfluß auf die Ausdehnung des Degenerationsgebietes ist und findet, daß der degenerierte Bezirk immer eine „unverhältnismäßige“ Ausdehnung habe; er ist der Ansicht, daß diese Ergebnisse gegen die Resonanztheorie sprechen. Geht man aber von der Tatsache aus, daß die Resonanz wesentlich unscharf ist, so liegt auf der Hand, daß der degenerierte Bezirk immer eine gewisse Ausdehnung haben muß. Ferner muß die mitschwingende Region der Basilarmembran in um so größerer Ausdehnung diejenigen Grenzen überschreiten, innerhalb deren die übermäßige Reizung pathologisch wirkt, je stärker der erregende Ton ist. Der erste von Marx hervorgehobene Punkt bildet also sicher keinen Einwurf gegen Helmholtz. Was aber als unverhältnismäßig zu gelten habe, das wird wohl z. Z. niemand bestimmen können, namentlich solange man nicht weiß, ob der durch eine übermäßige Reizung gesetzte pathologische Zustand auf die unmittelbar gereizten Teile beschränkt bleibt, oder ob er sich rein vegetativ auch auf benachbarte Teile ausdehnen kann. Das letztere ist an sich nicht undenkbar und wird sogar ziemlich wahrscheinlich, wenn man mit Wittmaack annimmt, der Degenerationsprozeß in den Cortischen Organen sei sekundär und erst durch Ernährungsstörungen von seiten der Nerven eingeleitet. Nach alledem bilden die Erwägungen von Marx keinen sicheren Einwand gegen die Helmholtzsche Theorie.

§ 5. Der Wiensche Einwurf[2]). Die Basilarmembran ist eine zusammenhängende Haut, welche den Durchtritt des Labyrinthwassers an keiner Stelle ihrer Erstreckung gestattet. Man denke sich dieselbe gestreckt und LM (Fig. 4) sei ihre Spur (Längsschnitt durch die Mitte). Sie sei in schwingungsfähige Zonen geteilt, PQ

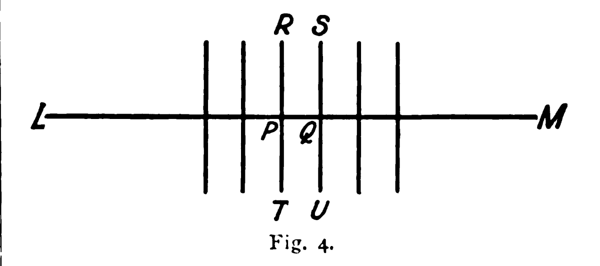


Fig. 4.

1) Marx bei Röhr l. c.
2) Vgl. zu diesem und dem folgenden Paragraphen meine Abhandlung in Verh. d. D. Phys. Ges. 19, 22, 1917.

sei eine solche Zone und sei in transversaler Schwingung begriffen. Dann müssen die Wasserteilchen, welche von beiden Seiten dem PQ anliegen, eine Geschwindigkeitskomponente normal zu PQ haben, welche gleich der Geschwindigkeit von PQ selbst ist; denn wenn das nicht der Fall wäre, würde sich das Wasser von der Membran entfernen, was offenbar nicht zulässig ist. Dies schließt nicht aus, daß zwischen dem Membranteil PQ und dem über bzw. unter ihm liegenden Wasser eine gewisse Phasendifferenz besteht; eine solche wird sich durch kleine Verdichtungen und Verdünnungen im Wasser merklich machen, aus denen Druckkräfte hervorgehen, die ihrerseits mit den elastischen Kräften der Membran in Wechselwirkung treten. Nun sind die Elastizitätskonstanten der einzelnen Zonen von LM vollständig unbekannt, aber wenn man bedenkt, daß z. B. in der Nähe des Hamulus eine Faser von 0,5 mm Länge nur ca. 30 Schwingungen in der Sekunde macht, so kommt man, auch unter Berücksichtigung der Dämpfung durch das Wasser, zu dem Schluß, daß die Membran akustisch bedeutend weicher sein muß als das Labyrinthwasser, daß ihre Elastizität also sehr wahrscheinlich nicht ausreicht, um im Wasser nennenswerte Verdichtungen und Verdünnungen herbeizuführen. Dann folgt, daß zwischen PQ und dem darüber und darunter befindlichen Wasser höchstens eine sehr kleine Phasendifferenz herrschen kann.

Nehmen wir zunächst den extremen Fall, diese Phasendifferenz sei tatsächlich verschwindend klein, so ergibt sich: Wenn PQ in Schwingung ist, so schwingt auch das ganze Wasser in einem Raum $RTUS$, der nach oben und unten nicht fest zu begrenzen ist, mit gleicher Phase und gleicher Amplitude wie PQ selbst. Dann folgt aber weiter: Ist PQ eine durch Resonanz bevorzugte Zone, welche stärker schwingt als ihre Nachbarn, so ist auch das ganze Wasser in dem Raum $RTUS$ in bevorzugter Schwingung begriffen, es schwingt stärker als das Wasser in der Nachbarschaft anderer Zonen. Soll sich also unter der Einwirkung eines stationären Tones ein stationärer Zustand herausgestellt haben, bei dem PQ mit maximaler Amplitude schwingt, so muß sich auch gleichzeitig eine stationäre Verteilung der Schwingungen im Labyrinthwasser hergestellt haben, derart, daß das Labyrinthwasser in der Gegend von PQ Schwingungen von maximaler Amplitude ausführt. Die Schwingungen des Labyrinthwassers müssen sich ebensowohl wie diejenigen der Basilarmembran resonanzmäßig anordnen und verteilen, so daß der maximale Energietransport durch die Zone stärkster Resonanz geleitet wird.

Diese Folgerung bleibt offenbar annähernd erhalten, wenn man annimmt, der Phasenunterschied zwischen PQ und dem anliegenden Wasser sei zwar nicht verschwindend klein, aber doch recht klein, und zu dieser Annahme ist, wie oben gesagt, Grund vorhanden.

Dadurch wird aber dem Wienschen Einwurf eine wesentliche Grundlage entzogen. M. Wien rechnet nämlich mit der oben schon hervorgehobenen Annahme, daß das Labyrinthwasser alle Fasern der Basilarmembran mit der gleichen Kraft angreife. Nach dem Vorstehenden ist das nicht der Fall, sondern die Kraft konzentriert sich auf diejenigen Fasern, welche an der Stelle maximaler Resonanz liegen.

Es folgt aber aus der Betrachtung, daß zur Herstellung einer stationären Tonempfindung eine größere Anzahl von erregenden Schwingungen erforderlich ist, da ja diese Schwingungen Zeit haben müssen, eine stationäre Anordnung der Wellen im Wasser herbeizuführen. Damit stimmen nun die altbekannten Versuche von S. Exner und Urbantschitsch sehr gut überein: Nach Exner sind bei einem erregenden Ton von 128 Schwingungen ca. 48 Schwingungen erforderlich, um eine stationäre Empfindung auszulösen, nach Urbantschitsch können bei normalhörigen Personen zwei Sekunden und mehr vergehen, ehe sie eine Tonwahrnehmung haben, wenn der erregende Reiz minimal ist. Die bekannten Versuche von Pfaundler, F. Kohlrausch, sowie die neueren von O. Abraham und L. Brühl, welche ergeben haben, daß in tieferen und mittleren Lagen schon zwei Schwingungen eine wahrnehmbare Tonempfindung erzeugen können, stehen damit nicht im Widerspruch, da die fraglichen Tonempfindungen weit davon entfernt sind, stationär zu sein. Übrigens läßt sich gegen alle Versuche dieser Art immer noch das Bedenken erheben, daß bei ihnen Tonquellen mit starken Obertönen verwendet sind. Es würde auch Interesse haben, festzustellen, ob der wahrgenommene Ton wirklich dieselbe Höhenempfindung auslöst wie ein stationärer Ton von der gleichen Schwingungszahl.

§ 6. Neuere Anatomie; Desiderata. Die Abhandlung von H. Held[1]) „Zur Kenntnis des Cortischen Organs und der übrigen Sinnesapparate des Labyrinthwassers von Säugetieren" bringt gegenüber den älteren Untersuchungen von Retzius[2]) eine gerade für die physikalische Betrachtung interessante Verschärfung, insofern Held ein Färbungsverfahren angewendet hat, welches die faserigen und elastischen Bestand-

1) H. Held, Abhandl. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 49 (Bd. 28 d. math.-phys. Klasse), 3, 1904.

2) G. Retzius, Das Gehörorgan der Wirbeltiere, Stockholm 1881.

teile des Cortischen Organs stark hervortreten läßt. Fig. 5 gibt eine der bezeichnenden Fi-

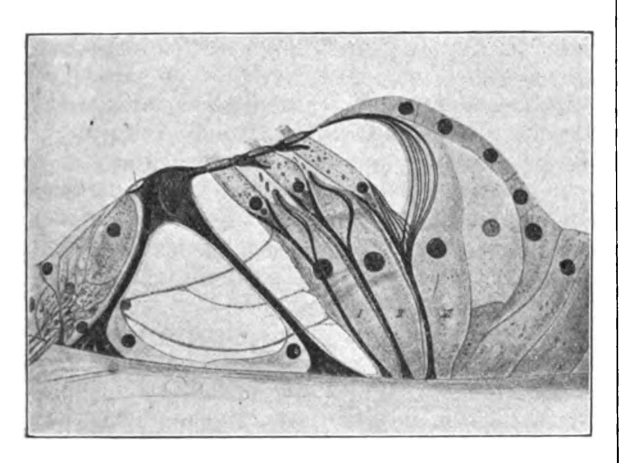


Fig. 5.

guren von Held wieder. Das Heldsche Original ist nicht durch Photographie, sondern durch Zeichnung hergestellt und läßt die zahlreichen verwickelten weichen Organe (Deiterssche Zellen usw.) beiseite, welche vermutlich der Ernährung dienen.

In Fig. 6 ist dieselbe Figur zum Skelett weiter schematisiert; die schönen elastischen

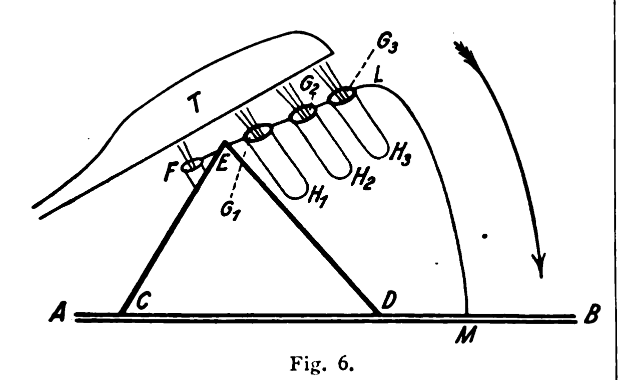


Fig. 6.

Fasern, welche den rechtsseitigen Teil des schwingungsfähigen Systems stützen, sind auf eine einzige, LM, reduziert, und es ist ein Pfeil beigesetzt, der die ungefähre Richtung angibt, in welcher die Schwingungen der Endolymphe vor sich gehen. Ferner ist ein Organ angedeutet, welches in das Heldsche Original nicht aufgenommen wurde, die Membrana tectoria oder Cortische Membran T.

Wie bekannt, sitzt im Durchschnitt ein Cortisches Organ auf je vier Fasern der Basilarmembran; den Komplex dieser vier Fasern nenne ich der Kürze wegen „die Basilarfaser". Die Bezeichnungen „oben", „unten" usw. beziehen sich auf die Lage in der Zeichnung.

AB stellt die Basilarfaser dar. Am linken Ende A schließt sich dieselbe an die knöcherne Lamina spiralis an. CE ist der innere, ED der äußere Cortische Pfeiler. Die Partie der Basilarmembran, welche zwischen den Fußpunkten C und D der Pfeiler liegt, heißt Zona arcuata und ist nicht deutlich gefasert. Die Partie zwischen D und B dagegen heißt Zona pectinata, ist ziemlich straff und zeigt deutliche Fasern. Der innere Pfeiler CE besitzt nach Helmholtz eine erhebliche Elastizität und strebt, wenn er aus seinen Verbindungen gelöst wird, sich weiter aufrecht zu stellen. Der äußere, ED, scheint mehr die Bedeutung eines unausdehnbaren Fadens zu haben. ter Kuile l. c. hat darauf aufmerksam gemacht, daß die Spannung des inneren Pfeilers schon in der Ruhe den Fußpunkt D etwas in die Höhe ziehen muß, bis die Spannung der Zona pectinata durch ihre Gegenwirkung einen Gleichgewichtszustand herstellt. Helmholtz hat, wie bekannt, ursprünglich den inneren Pfeiler als das elastische Organ angesehen, von welchem die Resonanz abhängt, später hat er der Basilarfaser diese Funktion zugeschrieben; wahrscheinlich ist wohl, daß beide mit Spannung und Gegenspannung gegeneinander wirken, daß also der „gekämmte" Teil der Basilarfaser zusammen mit dem inneren Pfeiler das schwingungsfähige Element darstellt, dem die Aufgabe zufällt, auf einfallende aktive Töne zu resonieren. Für das Prinzip der Resonanztheorie ist es natürlich gleichgültig, welchem Organ diese Funktion zugeschrieben wird, wenn nur ein solches vorhanden ist. An den Punkt E schließt sich nun links ein kurz und fest angesetzter Ring F, rechts zwischen E und L drei ähnliche Ringe G_1, G_2, G_3; in jeden dieser Ringe ist eine lange zarte Zelle eingelassen; die zu F gehörige ist nicht weiter bezeichnet, die drei rechts gelegenen sind G_1H_1, G_2H_2, G_3H_3. An die unteren H-Enden dieser Zellen legen sich die letzten Ausläufer der Hörnervenfibrillen an, und dadurch sind sie offenbar als Sinneszellen oder Hörzellen charakterisiert, welche die Aufgabe haben, den auf sie geübten mechanischen Reiz in Nervenerregung umzusetzen. Die vier Ringe F, G_1, G_2, G_3 umfassen ihre oberen Enden wie feste Kragen, so daß die Zellenköpfe die Bewegungen dieser Ringe mitmachen müssen. Auf der Cuticula der Zellenköpfe sitzen je 12 bis 20 Haare, die sogenannten Hörhärchen, und man nimmt allgemein an, daß gerade diese Hörhaare bestimmt sind, den Reiz auf die Sinneszellen zu üben. Nach Held sind die Hörhaare am unteren Ende, wo sie auf der Cuticula sitzen, verdickt und mit einer pfeilartigen Spitze versehen. Auf die Hörhaare legt sich nun die Membrana tectoria T, und dafür, daß gerade

die Gegenwirkung zwischen dieser Deckmembran und den Hörhaaren eine bedeutende Rolle beim Hörakt spielt, spricht die Tatsache, daß die Membrana tectoria gleichzeitig mit den Hörhaaren schon bei den niedrigsten Wirbeltieren, die überhaupt ein Labyrinth besitzen, erscheint.

Denkt man sich statt des einzelnen Querschnittes die ganze Basilarmembran in der Größe der Zeichnung dargestellt, so liegt ein Teil derselben vor, ein anderer hinter der Zeichnung. Die verschiedenen (F- und) G-Ringe der hintereinanderliegenden Basilarfasern sind miteinander verkittet oder verwachsen und bilden eine mehr oder weniger fest zusammenhängende Membran, die Membrana reticularis v. Köllikers.

Betrachten wir nun die Bewegung der Zellenköpfe, welche durch eine Schwingung des ganzen in den Fig. 5 und 6 gezeichneten Systems hervorgerufen wird, und beschränken uns dabei im Ausdruck auf die Partie EL, weil F ganz von selbst die gleichen Bewegungen mitmacht. Die Schwingungen sind unter normalen Verhältnissen jedenfalls so klein, daß man die Bewegung des Punktes E mit genügender Annäherung als geradlinig ansehen kann. Die Schwingung von E erfolgt dann offenbar in einer Richtung, die senkrecht auf CE steht. Diese Schwingungsrichtung macht mit der Richtung von EL einen Winkel α, der in den verschiedenen Teilen der Basilarmembran merklich variiert. Es können weder die vorhandenen Zeichnungen noch die Messungen von Retzius als auf 1^0 genau angesehen werden, nicht bloß wegen der Dicke und Gestalt der Pfeiler, sondern auch weil die Vorbereitungen, namentlich die Härtung der mikroskopischen Präparate, augenscheinlich viele Verzerrungen herbeiführen; wir begnügen uns mit der Angabe, daß der fragliche Winkel α zwischen 25 und 45^0 zu liegen scheint. Die Bewegung von E zerlegt sich dadurch von selbst in zwei Komponenten; ist A die Amplitude von E, so steht die eine Komponente, $A \sin \alpha$, senkrecht auf EL, die andere, $A \cos \alpha$, fällt in die Richtung von EL.

Die erste von diesen muß etwas näher betrachtet werden. Sie ergreift zunächst nur das linke Ende von EL, aber erstens wirkt das Labyrinthwasser (vgl. die Richtung des Pfeiles) direkt auf das elastische Gebilde EL, zweitens ist zu beachten, daß die Fasern LM mit ihrem Fußpunkt M auf einem bewegten Teil der Basilarfaser aufstehen, daß also auch sie den Punkt L in Schwingung versetzen. Somit nimmt auch das rechte Ende von EL an der direkten Erregung teil. Zu einer quantitativen Rechnung fehlen natürlich alle Mittel. Das einfachste Ergebnis wäre, wenn durch diese vereinten Einwirkungen der Punkt L eine Schwingung senkrecht zu EL erhielte, die gleichfalls den Betrag $A \sin \alpha$ hätte. Dann würde das ganze System EL wie ein starrer Körper eine Schwingung senkrecht zu EL ausführen. Wir wollen uns der Kürze wegen so ausdrücken, als ob dies der Fall wäre; dafür, daß das wenigstens annähernd erreicht ist, läßt sich ein Zweckmäßigkeitsgrund angeben; wenn nämlich L eine wesentlich andere Bewegung hätte als E, so würde daraus offenbar eine Zerrung der Hörzellen hervorgehen. Ist die fragliche Bedingung nicht erfüllt, so ergibt sich außer der Gesamtschwingung von EL noch eine Undulation, die hier schon aus Mangel an näherer Kenntnis nicht berücksichtigt wird. Die Komponente $A \sin \alpha$ hat demnach im ganzen den Erfolg, daß die Hörhaare gegen die Membrana tectoria gestaucht werden. Sie möge daher hier die „stauchende Komponente" heißen. Der Betrag der Stauchung hängt offenbar ab von dem Phasenunterschied zwischen den Schwingungen der Deckmembran und den stauchenden Schwingungen der Ringgruppen G. Es darf angenommen werden, daß die Deckmembran dieselbe Phase hat wie das Labyrinthwasser, während die Phase der G-Ringe von den unbekannten Elastizitätsverhältnissen des Systems Basilarfaser plus Cortisches Organ abhängt.

Die zweite Komponente $A \cos \alpha$ zieht die Zellenköpfe in der Richtung von EL hin und her. Die Schwingungen des Labyrinthwassers fallen an der Stelle EL sehr nahe in die Richtung der Hörhaare selbst, gleiten also an diesen vorbei, ohne sie merklich zu affizieren, aber die Haare sind ihrer Feinheit wegen jedenfalls gedämpft, und zwar sehr stark gedämpft, einerlei, ob das Wasser in Ruhe oder in Schwingung begriffen ist. Sie werden also hinter der Bewegung der Zellenköpfe zurückbleiben und die Relativbewegung der Haare gegen die Hörzellen ist dieselbe, als wären die Hörzellen in Ruhe und die Hörhaare in transversaler Schwingung begriffen. Wir wollen daher die Komponente $A \cos \alpha$ die „schaukelnde" nennen, weil sie die Haare relativ hin- und herschaukelt.

Hensen und Helmholtz haben die Stauchung der Haare gegen die Deckmembran als dasjenige angesehen, was den Reiz auf die Hörzellen ausübt. Auch O. Fischer hat sich in seiner früher zitierten Abhandlung dieser Ansicht angeschlossen. ter Kuile dagegen hält die schaukelnde Bewegung für dasjenige, was den Reiz auslöst. Bei allseitiger Betrachtung muß man wohl als wahrscheinlich annehmen, daß beide Komponenten für die Auslösung des Reizes zusammenwirken. Bei den Tieren, die kein Cortisches Organ besitzen, z. B. bei den Vögeln, sitzen die Sinneszellen direkt auf der

Basilarmembran, über ihnen liegt die Deckmembran, und daraus ist zu schließen, daß bei ihnen die stauchende Bewegung das Wesentliche für den Reiz ist. Sollte bei Säugetieren die Stauchung allein wirksam sein, so ist nicht einzusehen, welchem Zweck der künstliche Aufbau der Cortischen Organe dient. Also ist wohl mit Sicherheit anzunehmen, daß auch die schaukelnde Bewegung bei Herstellung des Reizes mitwirkt. Daß sie aber allein dazu dienen sollte, ist auch nicht anzunehmen, denn wenn die Natur dies erreichen wollte, so wäre es durch eine mäßige Abänderung in der Lage der Organe, welche den Winkel α nahe auf Null brächte, zu erzielen gewesen.

Nun ist aber vor allem darauf hinzuweisen, daß, wie oben bemerkt, die G- und F-Ringe der verschiedenen Elemente, aus denen die Basilarmembran nebst ihren Anhängen zusammengesetzt ist, alle miteinander zusammenhängen und verwachsen oder verkittet sind, so daß es nicht bloß anatomisch, sondern auch mechanisch gerechtfertigt ist, wenn man die ganze Reihe derselben mit v. Kölliker als eine zusammenhängende Membrana reticularis bezeichnet. Schon die Fig. 5 enthält in dieser Beziehung eine Ungenauigkeit; die drei G-Zellen liegen nicht, wie die Zeichnung es darstellt, annähernd in einer Ebene, welche durch die Schwingungsrichtung von AB geht. Schaut man von oben auf die Membrana reticularis, so ist nicht zu erkennen, daß je drei Sinneszellen der Ebene einer Basilarfaser angehören, die Zellen sind nicht einer bestimmten Faser, sondern der Netzmembran als Ganzem angeheftet. Schon Helmholtz[1]) bemerkt, es sei nicht sehr wahrscheinlich, daß die Fasern erster Reihe (innere Pfeiler) sich einzeln viel bewegen, weil ihre seitlichen Verbindungen dazu zu stark sind. Die Netzmembran kann nach dem Vorstehenden nur ähnliche Schwingungen ausführen wie eine dünne und schmale elastische Membran. Daß ein einzelnes Element derselben für sich resonierend schwingt, ist ausgeschlossen, und darin liegt nun der Grund dafür, daß die Resonanz im Cortischen Organ, rein mechanisch betrachtet, sicherlich eine erhebliche Unschärfe hat.

Nun ist denkbar, daß gerade das Zusammenwirken der beiden Komponenten, der schaukelnden und der stauchenden, Veranlassung dazu geben könnte, daß trotz der mechanischen Unschärfe der Schwingung der Nervenreiz verschärft, d. h. auf einen engen Bezirk in der Nähe der maximal resonierenden Faser beschränkt würde. Macht man nämlich passende Annahmen über die Phasendifferenzen, welche in den verschiedenen Teilen des Cortischen Organs auftreten können, so kann man z. B. herausrechnen, daß die Hörhaare an der Stelle maximaler Resonanz und nirgendwo anders gerade in dem Augenblick ihre Ruhelage relativ zu den Hörzellen haben, wo sie am stärksten gegen die Deckmembran gestaucht werden. Sie würden also an der Stelle maximaler Resonanz in ihrer eigenen Richtung gestaucht, während sie in allen anderen Regionen stärker seitlich ausgebogen würden, und damit wäre offenbar eine Verschärfung des Reizes gegeben, wenn man weiter annimmt, daß der eigentliche Reiz immer noch von der Stauchung ausgeht. Ich bemerke aber ausdrücklich, daß ich dies nicht als Anfang einer Theorie, sondern nur als vagen Hinweis auf die Art der Möglichkeiten aufgefaßt sehen möchte, welche vielleicht später in Betracht zu nehmen sind.

Hier liegen nämlich noch folgende Schwierigkeiten vor:

1. wissen wir nichts Näheres über die Steifheit der Hörhaare, auch nicht darüber, ob ihre Einheftung in die obere Cuticula der Hörzellen ihnen ein erhebliches Direktionsmoment gibt.

2. bestehen noch schwerwiegende Meinungsverschiedenheiten bezüglich der Membrana tectoria. So viel scheint festzustehen, daß ihr oberer Teil weich ist, während sie an der unteren Seite ein härteres, mehr oder weniger elastisches Gefüge besitzt. Hensen erklärt ausdrücklich, sie schwebe sicherlich frei über den Hörhaaren. Dagegen hat Kishi[1]) Präparate abgebildet, in welchen der äußere Rand der Deckmembran mit dem Rande der Netzmembran verwachsen ist, und der Amerikaner Shambough (mir nicht direkt zugänglich) äußert sich in gleichem Sinne. Die neueren Physiologen schließen sich zum Teil dem einen, zum Teil dem anderen an. Wittmaack stellt sich auf die Seite Hensens. Gerade bei Gelegenheit der Wittmaackschen Experimente hat sich gezeigt, daß Verklebungen der Membranen nicht selten auf Grund pathologischer Vorgänge stattfinden. Dagegen, daß Kishi einen Normalzustand beobachtet hat, scheint auch eine bereits von O. Fischer l. c. zitierte Beobachtung von A. Kreidl und Y. Yanase[2]) zu sprechen, wonach bei jungen Ratten, solange sie noch nicht hören können, die Deckmembran fest mit der Unterlage verbunden ist, während die Verbindung gelöst wird, wenn die Hörfähigkeit beginnt. Auf der anderen Seite ergibt aber auch die tägliche Erfahrung, daß gerade durch die Präparation Verzerrungen

1) H. Helmholtz, l. c. S. 231.

1) K. Kishi, Pflüg. Archiv **116**, 112, 1907.

2) A. Kreidl und Y. Yanase, Zentralblatt f. Physiologie **21**, 507, 1907.

stattfinden, welche in situ vorhandene Verbindungen lösen können; so zeigt schon ein Blick auf die Zeichnungen von Retzius, daß gerade die Deckmembran häufig zurückgeschlagen ist. Die offenbar schwierige Entscheidung ist nur durch weitere Untersuchungen möglich; es liegt aber auf der Hand, daß gerade die Frage, ob die Deckmembran frei auf den Haaren aufliegt oder ob sie mit deren Grundlage verklebt ist, gelöst sein muß, ehe man sich eine genaue Vorstellung über die Relativbewegung der Haare machen kann.

Sonach kann die Untersuchung zurzeit nur mit der Angabe dessen schließen; was für das weitere Eindringen zunächst wünschenswert wäre: Von seiten der Anatomen und Physiologen nähere Aufklärung über die wirkliche Lage der Deckmembran und über die Eigenschaften der Hörhaare; von seiten der Physiker Theorie der Anordnung von Wellen in einer zum Teil zähen Flüssigkeit, welche eine resonanzfähige Membran enthält, und Theorie der Schwingungen einer dünnen, schmalen, langen, weich-elastischen Platte, bei der ev. noch vorauszusetzen ist, daß sie nach ihren zwei möglichen Schwingungsrichtungen verschieden gedämpft sei.

(Schluß folgt.)

BESPRECHUNGEN.

E. Dennert, Das chemische Praktikum. Ein kurzer Leitfaden für Schule und Selbstunterricht. Fünfte, neu bearbeitete Auflage. 8°. 71 S. Leipzig, Leopold Voß. 1917. M. 1.70.

Das Praktikum von E. Dennert gibt in vier Kursen und einem Anhang eine Zusammenstellung einfacher chemischer Versuche und eine Einführung in die qualitative Analyse. Überall zeigt sich in dem Buche das Bestreben den Schüler zu genauer naturwissenschaftlicher Beobachtung zu erziehen, zahlreiche in den Text eingestreute Fragen unterstützen wirksam dieses Ziel.

Theoretische Erörterungen finden sich nicht; ebensowenig sind Versuche aus dem Gebiete der allgemeinen und physikalischen Chemie angeführt. Bei ausreichender Erläuterung durch den Lehrer wird das Buch gute Dienste leisten, für den Selbstunterricht scheint es weniger geeignet, da die Vorschriften, besonders in der qualitativen Analyse, zu kurz und zu ungenau gefaßt sind.

Sehr erwünscht wäre es, wenn endlich in diesen und ähnlichen Werken eine einheitliche Nomenklatur der anorganischen Verbindungen durchgeführt würde.

Windaus.

Berichtigungen.

In dem Aufsatz „Resonanzerregung durch periodisch wiederholte Impulse" von E. Budde auf S. 71 dieses Bandes ist in Gl. (13) $(A + B \cot pT)$ statt $(A + B)$ zu setzen. Ebenso in der zweiten Zeile des auf Gl. (13) folgenden Textes.

In dem Aufsatz von A. Kirschmann, Das umgekehrte Spektrum und seine Komplementärverhältnisse soll es auf Seite 195, zweite Spalte, 8. Zeile heißen: 4 Milliarden in der Sekunde statt 4 Millionen in der Sekunde.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Leipzig Dr. Wilhelm Wilke für technische Physik, an der Böhmischen Technischen Hochschule Prag Gymnasialprofessor Dr. Franz Radl für höhere Mathematik, an der Universität Breslau Dr. Eberhard Buchwald für Physik.

Ernannt: Der Privatdozent an der Technischen Hochschule Hannover Dr.-Ing. Alexander Brückmann zum a. o. Professor für Elektrotechnik an derselben Hochschule, Dr. A. A. Bennett zum a. o. Professor für Mathematik an der Universität von Texas in Austin, Dr. R. L. Borger zum Professor der Mathematik an der Ohio-Universität zu Athens, Dr. A. R. Crathorne zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität von Illinois in Urbana, Dr. W. V. Lovitt zum a. o. Professor der Mathematik an der Purdue-Universität in Lafayette, Dr. R. L. Moore zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität von Pennsylvanien in Philadelphia, Dr. W. H. Roever zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität in Washington, der Abteilungsvorstand im Zeißwerk Jena Dr. C. Pulfrich (vom Preußischen Kultusministerium in Anerkennung seiner wissenschaftlichen Leistungen) zum Professor.

Verliehen: Dem ord. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen Dr. Max Noether der Titel Geh. Hofrat, dem Privatdozenten für technische Physik an der Universität Kiel Dr. Oskar Martienssen der Titel Professor.

Auszeichnung: Der ord. Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Wien Hofrat Dr. Karl Hochenegg wurde als lebenslängliches Mitglied in das österreichische Herrenhaus berufen.

Gestorben: Der Herausgeber des Bulletin des Wheater-Bureau in Washington Professor Cleveland Abbe, das Mitglied für Mechanik an der Akademie der Wissenschaften Dr. Henry Léauté, der ord. Professor für rationelle Mechanik an der Universität Catania Dr. Giovanni Pennacchietti, der ord. Professor für Photogrammetrie und Wildbachverbauungen der Hochschule für Bodenkultur in Wien Ministerialrat Ferdinand v. Wang.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 11. 1. Juni 1917. 18. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 12 am 4. Juni 1917.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Beobachtungen der neutralen Polarisationspunkte aus größerer Höhe.

Von Albert Wigand.

Bei der Fortführung meiner Untersuchungen über das Verhalten der ultravioletten Sonnenstrahlung in der Erdatmosphäre[1]) erschien es mir wünschenswert, festzustellen, ob sich die am Erdboden beobachteten Erscheinungen der Polarisation des diffusen Himmelslichtes wesentlich ändern, wenn man sie aus größerer Höhe untersucht.

Am geeignetsten hierzu wären über einen längeren Zeitraum erstreckte Beobachtungen von verschiedenen hohen Berggipfeln aus. Jedoch wird man auch durch Hochfahrten im Freiballon zum Ziele kommen, obgleich dabei das Beobachtungsmaterial bezüglich Seehöhe und Ort weniger gleichmäßig wird; dafür sind aber größere Seehöhen auf diesem Wege erreichbar. Von einer geplanten Reihe solcher Ballonfahrten zur Beobachtung der neutralen Punkte von Arago und Babinet konnte wegen des Krieges nach den beiden ersten Aufstiegen kein weiterer erfolgen. Bei der zweiten Fahrt am 12. VII. 1914 waren die Beobachtungen wegen starker Ci-Bedeckung zwecklos. Die Ergebnisse des ersten Aufstiegs am 3. V. 1914 dürften wenigstens zur vorläufigen Orientierung für Seehöhen von 3100 bis 5850 m ausreichen und sollen hier mitgeteilt werden.

Zur Messung des Höhenwinkels der neutralen Punkte diente ein Jensenscher Pendelquadrant mit Savartschem Polariskop von der Firma Dörffel & Faerber, Berlin[2]). Es wurde auf die letzten deutlich erkennbaren Spuren der Fransen ober- und unterhalb des neutralen Punktes eingestellt und das Mittel aus den beiden Einstellungen als Höhe des neutralen Punktes genommen. Die Differenz dieser beiden Einstellungen ergibt die Größe der neutralen Brücke. Die zugehörigen Sonnenhöhen wurden aus Zeit und Ort berechnet.

Die Einzelwerte der Punktabstände sind nach einem rechnerisch-graphischen Ausgleichsverfahren zu Mittelwerten für die Mitten der einzelnen Gradintervalle der Sonnenhöhe (... 1,5; 0,5; — 0,5; — 1,5; — 2,5 ...) vereinigt worden.

Zur Prüfung des Instruments und zum Vergleich wurde vor der Ballonfahrt an 5 Tagen zwischen dem 30. III. und 22. IV. 1914 in Halle a. S. beobachtet. Diese Messungen (Tab. I—III) sind zwar zur Bildung von sicheren Mittelwerten nicht zahlreich genug, stimmen aber befriedigend überein mit gleichzeitigen Messungen an anderen Orten, z. B. in Hamburg und Nowawes[1]). Die dortigen Arago-Kurven für das zweite Quartal 1914 fallen mit der Halleschen Kurve fast zusammen. Die Halleschen Babinetwerte reihen sich zwischen die Kurven des zweiten Quartals 1914 für Hamburg und Nowawes gut ein (Fig. 2), wobei es sich zeigt, daß der Großstadt- und Industriedunst in Halle die Punktabstände ähnlich beeinflußt wie in Hamburg. Nach der großen Störung von 1912 waren die Punktabstände 1914 wieder annähernd normal.

Die Ballonfahrt am 3. Mai 1914 im Ballon „Erfurt II" (1680 m³) wurde als Nachthochfahrt unternommen, damit man um Sonnenaufgang bereits in größerer Höhe sein konnte. Sie führte im Kern eines umfangreichen Hochdruckgebiets bei hervorragend klarem Wetter von Bitterfeld, wo um 3ª 14 MEZ. aufgestiegen wurde, zunächst

1) A. Wigand, diese Zeitschr. **14**, 1144, 1913; Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 1090, 1913.
2) F. Busch und Chr. Jensen, Tatsachen und Theorien der atm. Polarisation, Jb. d. Hamb. Wiss. Anst. **28**, 1910, 5. Beiheft, S. 292.

1) Chr. Jensen, Jb. d. Hamb. Wiss. Anst. **33**, 1915, 3. Beiheft, S. 51.



in vorwiegend südöstlicher Richtung bis zur größten Höhe von 5935 m bei — 26,0° C über Grimma. Während der Polarisationsmessungen von $3^a 59$ bis $5^a 35$ (Tab. I—III) stieg der Ballon von 3100 bis 5850 m Höhe. Die Bestimmung von Zeit und Ort zur Berechnung der Sonnenhöhen konnte mit hinreichender Genauigkeit durchgeführt werden. Im weiteren Verlaufe der Fahrt wurden lichtelektrische Messungen der ultravioletten Sonnenstrahlung und Ionenzählungen ausgeführt. Als Beobachter beteiligten sich die Herren H. Koppe und K. Stoye. Nach vielfachen Winddrehungen, die den Ballon über Zinnwald, Dresden und Meißen trieben, fand die Landung um $5^p 50$ bei Zahna an der Strecke Wittenberg—Jüterbog statt.

Aus den Beobachtungen, die wegen ihrer geringen Anzahl noch sehr der Nachprüfung und Ergänzung, besonders für größere Seehöhen, bedürfen, ergibt sich bereits folgendes:

Die Abstände des Aragoschen Punktes vom Gegenpunkt der Sonne für Sonnenhöhen von + 7,5 bis — 5,5° bleiben in Höhen von 3400 bis 5850 m unverändert dieselben wie am Erdboden. Die im Ballon gefundene Kurve für die Abhängigkeit des Punktabstands von der Sonnenhöhe (Fig. 1) deckt sich vollständig mit den Bodenbeobachtungen in Halle, Hamburg und Nowawes aus dem gleichen Zeitraum; ihre Abweichungen etwa von der in Fig. 1 mit eingezeichneten Hamburger Mittelwertkurve des zweiten Quartals 1914 liegen innerhalb der Grenzen, die für einzelne Beobachtungsreihen desselben Zeitraums auch dort vorkommen.

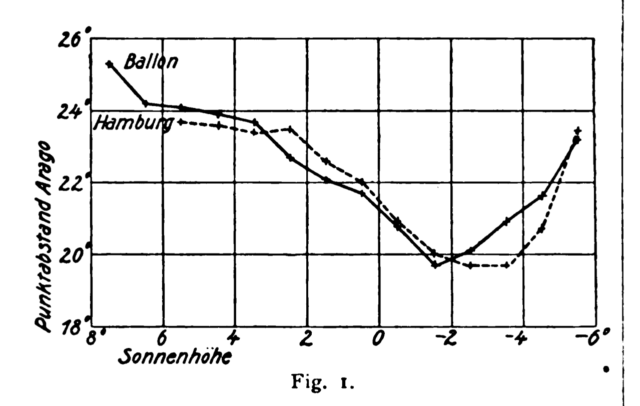


Fig. 1.

Die Abstände des Babinetschen Punktes von der Sonne für Sonnenhöhen von — 2,5 bis — 6,5° zeigen in Höhen von 3100 bis 4450 m gegenüber den Erdbodenwerten ebenfalls keine Veränderung, die mit Sicherheit der Höhenänderung zuzuschreiben wäre. Die tiefere Lage der Kurve (Fig. 2) läßt sich durch die größere Reinheit der Luft erklären; denn auch

Tabelle I.

Abstand des Aragoschen Punktes vom Gegenpunkt der Sonne in Graden, darunter Anzahl der Einzelbeobachtungen (und Ballonhöhen).

Datum, Ort \ Sonnenhöhe	14°,5	13°,5	12°,5	11°,5	10°,5	9°,5	8°,5	7°,5	6°,5	5°,5	4°,5	3°,5	2°,5	1°,5	0°,5	—0°,5	—1°,5	—2°,5	—3°,5	—4°,5	—5°,5
30. III. 1914 p Halle	—	—	—	—	—	—	—	—	23,5 4	24,3 3	24,2 4	24,3 3	23,4 5	—	—	—	—	—	—	—	—
31. III. 1914 p Halle	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	24,1 2	23,6 3	22,6 5	21,3 4	—	—	—	—	—	—
1. IV. 1914 a Halle	—	—	—	—	—	—	—	—	25,2 3	25,2 3	25,3 1	24,4 4	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3. IV. 1914 p Halle	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	24,6 5	24,2 4	24,0 2	23,7 4	22,1 5	20,8 5	20,0 5	18,5 3	17,6 2	—	—
22. IV. 1914 p Halle	22,7 2	23,1 5	23,2 3	22,8 4	22,9 3	23,0 5	22,8 3	23,1 4	23,2 2	23,4 3	22,7 3	22,2 3	22,2 2	21,5 2	21,2 3	20,4 3	19,5 3	—	—	—	—
Gesamtmittel p Halle	22,7	23,1	23,2	22,8	22,9	23,0	22,8	23,1	23,4	23,9	24,0	23,7	23,3	22,8	21,6	20,7	19,8	18,5	17,6	—	—
3. V. 1914 a Ballon, Delitzsch-Grimma	—	—	—	—	—	—	—	25,3 2 (5850)	24,2 3 (5800)	24,1 2 (5800)	23,9 2 (5750)	23,7 4 (5750)	22,7 3 (5700)	22,1 2 (5700)	21,7 2 (5550)	20,8 3 (5250)	19,7 4 (4700)	20,1 2 (4500)	20,9 2 (4050)	21,6 2 (3600)	23,2 2 (3400)

Tabelle II.

Abstand des Babinetschen Punktes von der Sonne in Graden, darunter Anzahl der Einzelbeobachtungen (und Ballonhöhen).

Sonnenhöhe / Datum, Ort	6°,5	5°,5	4°,5	3°,5	2°,5	1°,5	0°,5	—0°,5	—1°,5	—2°,5	—3°,5	—4°,5	—5°,5	—6°,5
31. III. 1914 p Halle	—	—	—	—	—	—	—	22,3 3	—	—	—	—	—	—
1. IV. 1914 a Halle	—	—	24,1 4	23,9 2	24,4 3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3. IV. 1914 p Halle	—	—	—	21,6 4	22,4 3	22,9 2	21,8 2	20,7 2	21,7 2	20,9 3	—	—	—	—
22. IV. 1914 p Halle	16,2 3	18,1 2	18,9 3	19,4 3	20,7 3	21,4 3	22,2 2	22,4 3	21,6 3	20,8 2	—	—	—	—
Gesamtmittel p Halle	16,2	18,1	18,9	20,6	21,5	22,0	22,0	21,9	21,6	20,9	—	—	—	—
3. V. 1914 a Ballon, 10 km östl. Delitzsch	—	—	—	—	—	—	—	—	—	18,0 1 (4450)	16,4 4 (4200)	16,1 2 (3550)	15,9 1 (3150)	14,8 2 (3100)

Tabelle III.

Datum, Ort	Mittlere Brückengröße Arago	Mittlere Brückengröße Babinet	Intensität der Fransen	Bewölkung	Luft	Himmel	Wind (Beaufort-Sk.)
30. III. 1914 p Halle	7,2	—	schwach	Ci im W, E wolkenfrei	sichtig 2/4, Dunst	mäßig blau	SE 2
31. III. 1914 p Halle	5,9	13,0	schwach	einzelne Cu überall	sichtig 2/4, wenig Dunst	mäßig blau	W 2
1. IV. 1914 a Halle	5,4	16,5	schwach	Ci Str dünn überall	sichtig 3/4, Dunst	weißblau	W 1
3. IV. 1914 p Halle	4,3	10,1	schwach	Ci Str über W-Horizont, abnehmende Cu über E-Horizont	sichtig 2/4, wenig Dunst	weißblau	NW 2
22. IV. 1914 p Halle	3,8	10,9	stark	wolkenfrei	sichtig 2/4, wenig Dunst, E dunstfrei	kräftig blau	E 1—2
3. IV. 1914 a Ballon, Delitzsch-Grimma	3,2	5,7	sehr stark	wolkenfrei	sichtig 4/4, über d. Boden schwache Dunstschichten, in der Höhe dunstfrei	tiefblau	NNW 2—4

für Orte am Boden mit verschieden reiner Luft (Hamburg—Nowawes) kommen Unterschiede von derselben Größe vor. Immerhin sind die kleinen Punktabstände bei größerer Sonnentiefe bemerkenswert und bedürfen wegen der geringen Anzahl der Beobachtungen noch der Nachprüfung.

Während die Ballonbeobachtungen für die Punktabstände nichts Neuartiges ergaben, lassen diese Beobachtungen auf eine auffallend hohe Polarisationsgröße des Himmelslichtes schließen. Denn die Fransen im Polariskop waren von ungewohnt großer Intensität. Dasselbe hat schon früher Herr Wendt im Ballon aus 2000 bis 4000 m Höhe beobachtet[1]). Für die neu-

1) F. Busch und Chr. Jensen, l. c. S. 444 u. 451.



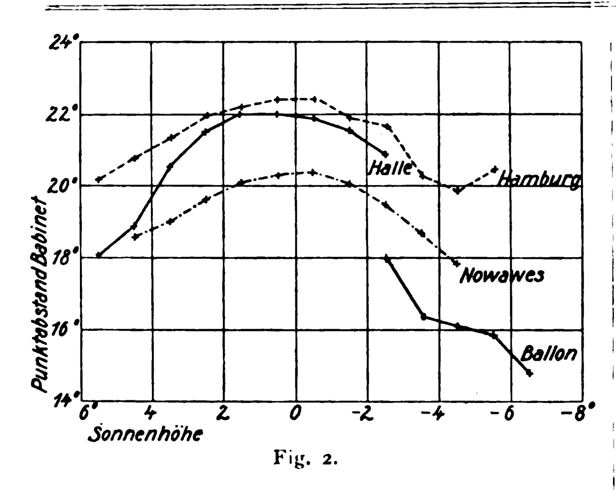


Fig. 2.

trale Brücke (Tab. III) fand ich im Ballon merklich kleinere Werte als gewöhnlich am Erdboden. Trotzdem konnte der Babinetsche Punkt nach Sonnenaufgang (bei etwa —2,5° Sonnenhöhe in 4500 m), ungeachtet der günstigen atmosphärischen Verhältnisse, nicht mehr aufgefunden werden. Daß hierin eine grundsätzliche Abweichung von den am Erdboden beobachteten Verhältnissen vorläge, ist jedoch im Hinblick auf die Ergebnisse für den Aragoschen Punkt nicht wahrscheinlich.

Aus den mitgeteilten Ballonbeobachtungen geht jedenfalls so viel hervor, daß die an der Ausbildung der neutralen Punkte in erster Linie mitwirkenden Vorgänge der atmosphärischen Polarisation in einer Höhe stattfinden, die erheblich über 6000 m liegt, also wohl jedenfalls nicht in der Troposphäre; die in dieser befindlichen Trübungen (Wolken, Dunst, Staub) sind nur von sekundärem Einfluß. Da nach der am meisten befriedigenden Theorie von Soret und Hurion für das primäre Phänomen der Polarisation des Himmelslichts die Rayleighsche Lichtzerstreuung eine Hauptrolle spielt, ist deren Sitz wohl gleichfalls oberhalb der Troposphäre anzunehmen.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Ursache für die Begrenzung des Sonnenspektrums im Ultraviolett ebenfalls oberhalb der Troposphäre zu suchen ist, da sich diese Spektrumsgrenze bis zur Höhe von 9000 m nicht ändert[1]). Falls die Erklärung dieser Tatsache durch die Rayleighsche Lichtzerstreuung zutrifft, was aber noch unentschieden ist, würde sich aus den erwähnten Spektralbeobachtungen und den Polarisationsmessungen im Ballon dieselbe untere Grenze für die Höhenlage der gemeinsamen Ursache ergeben.

Man kann es im Ballon auch direkt beobachten, daß die durch Rayleighsche Lichtzerstreuung entstandene Blaufärbung des Himmels nicht in der Troposphäre zustande kommt. Bei mehreren Hochfahrten in 6000 bis 9000 m Höhe an Tagen ohne Trübung der hohen Luftschichten durch Cirren oder Staub fand ich nach Schätzung mit dem Auge das Himmelsblau zwar stark gesättigt, jedoch nicht erheblich dunkler, als man es an manchen Tagen auch am Erdboden beobachten kann. Es fehlt in diesen Höhen nur die durch den Dunst der unteren Schichten bewirkte weißliche Beimischung zum reinen Himmelsblau. —

Die Kosten dieser Untersuchungen wurden aus den Mitteln des Aerophysikalischen Forschungsfonds Halle bestritten.

(Halle a. d. S., Universität.) Im Felde, April 1917.

(Eingegangen 16. Mai 1917.)

1) A. Wigand, l. c.

Zum Ursprung der γ-Strahlenspektren und Röntgenstrahlenserien.

(Zu Herrn R. Swinnes gleichnamigem Aufsatz.)

Von W. Kossel.

Herr Swinne verwendet in einem interessanten Aufsatz[1]), der den oben angeführten Titel hat, u. a. einige vom Verf. aufgestellte Beziehungen[2]) und stößt bei seiner Behandlungsweise z. T. auf Unstimmigkeiten, so daß er zu dem Schluß kommt (§ 3, Abs. 1):

„Während hier die Sommerfeldsche Theorie der mehrfachen Spektralserienlinien eine schöne Anwendung findet, versagt die Kosselsche Verknüpfung der einzelnen Serien miteinander, wenngleich sie angenähert gilt."

Ich möchte kurz darauf hinweisen, daß Herr Swinne die Verknüpfungsgleichungen hier nicht so direkt prüft, wie ich sie gegeben habe und wie es dem Sinn der einfachen Ableitung entspricht. Er fügt vielmehr eine unberechtigte Annahme (§ 3, Abs. 1, letzter Satz) hinzu, deren Folgen sich nicht nur darin zeigen, daß seine Ansätze in den erwähnten Beziehungen versagen, sondern auch in noch direkterer Prüfung den experimentellen Resultaten zuwiderlaufen, wie Herr Swinne auch selbst bemerkt (§ 3, Abs. 4). Die Unzulässigkeit solcher Annahmen, auf die man sehr leicht durch eine Extrapolation von Herrn Sommerfelds[3]) so glänzend bewährten Formeln für die Linienstruktur geführt werden kann, mit der über Herrn Sommerfelds Grundgedanken herausgegriffen wird, ist bereits in den

1) Diese Zeitschr. **17**, 481, 1916.
2) W. Kossel, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 953, 1914.
3) A. Sommerfeld, Ber. d. Kgl. Bayr. Ak. d. W. Math.-naturw. Klasse, S. 425, 459, 1915; Ann. d. Phys. **51**, 1, 125, 1916.

letzten Abschnitten eines etwa gleichzeitig mit Herrn Swinnes Arbeit erschienenen kleinen Aufsatzes[1]) behandelt. Herrn Swinnes Berechnungsweise ist ein Beispiel der dort (§ 16, Abs. 6, S. 357) als unzulässig gekennzeichneten Verwendung „virtueller" Terme in energetischen Beziehungen. Dort[2]) ist auch gezeigt, daß anders als diese groben Differenzen, die unter Annahmen erhalten werden, von denen man leicht einsieht, daß sie unberechtigte Vereinfachungen enthalten, gewisse kleine Abweichungen zu bewerten sind, die sich bei direkter, einwandfreier Anwendung der Gleichungen äußern und auf die Herr Swinne[3]) gleichfalls gestoßen ist. Diese Abweichungen, die freilich gerade eben erst über die Meßgenauigkeit hinausgehen und deshalb ihrem Betrage nach noch nicht recht zu verwerten sind, können recht wohl reell sein und, wenn sie sich bewähren, würden gerade diese unscheinbaren Größen tatsächlich prinzipiell von Bedeutung sein, wie dort näher erläutert ist. Es ist zu wünschen, daß hier von Anfang an scharf auseinandergehalten wird, — deshalb möchte ich auch in dieser Zeitschrift auf die dort gegebene Diskussion der Verhältnisse hinweisen.

Der weitaus größte Teil von Herrn Swinnes interessanten übrigen Überlegungen hängt von der oben erwähnten Annahme nicht ab und wird davon, daß sie hinfällig ist, nicht berührt.

1) W. Kossel, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 339, 1916.
2) l. c. S. 339, Anm. 3.
3) Die erste Feststellung eines solchen Falles hat Herr E. Wagner gemacht: Ann. d. Phys. (4), **46**, 890, 1915.

(Eingegangen 15. Mai 1917.)

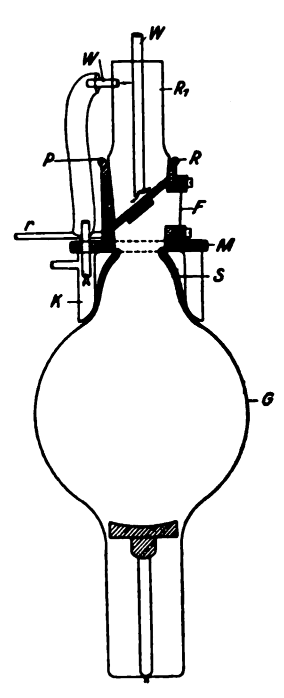
Eine Röntgenröhre für physikalische Zwecke.

Von Heinrich Rausch von Traubenberg.

Für wissenschaftliche Daueraufnahmen sind die üblichen medizinischen Röntgenröhren hauptsächlich wegen ihrer relativ kurzen Lebensdauer und daraus sich ergebender Kostspieligkeit wenig geeignet; ich habe deswegen eine Röntgenröhre konstruiert, welche billig im Betriebe, möglichst intensive Röntgenstrahlen variabler Härte liefert und das Antikathodenmaterial leicht auszuwechseln gestattet, um mit Fluoreszenzstrahlungen verschiedener Stoffe arbeiten zu können.

Die Röhre besteht, wie die Figur im Durchschnitt zeigt, aus einem Metallkopf M und einem Glasteil G; der Glasteil enthält die Kathode eventuell noch eine Hilfsanode und wird mit Siegellack bei S vakuumdicht an M angekittet. Der Metallkopf besteht aus einer Röhre R aus Messing, welche das Fenster F enthält; dieses wird aus einem Aluminiumblech von ca. $1/_{20}$ mm Dicke gebildet, welches unter Anwendung von Pizeïn als Dichtungsmittel mit Schrauben und Preßring am Flansch festgehalten wird.

Der untere doppelwandige Teil K der Röhre wird von Kühlwasser durchflossen, um jede Erwärmung der Kittstellen zu verhindern. Der obere Teil von R ist konisch erweitert, in den Konus paßt die eingeschliffene Röhre R_1, welche bei P mit Pizeïn abgedichtet wird; am unteren abgeschrägten Ende lassen sich mit verschiedenem Antikathodenmaterial belegte Kupferbleche anschrauben oder einfach in eine Führung einschieben; zwei Röhren W besorgen den Zu- und Abfluß des Kühlwassers, welches dann mit einem Gummischlauch in den Kühlkasten K weitergeleitet wird.



Durch das Röhrchen r bleibt die Röntgenröhre mit der Gaedepumpe dauernd verbunden.

Der Glasteil ist am oberen Teil des eingekitteten Halses etwas verengert, damit die aus dem Hauptstrahl abweichenden Kathodenstrahlen nur auf das Glas auftreffen. Ist das Glas durch Anlagerung von Zerstäubungsprodukten unbrauchbar geworden, so läßt es sich nach Anwärmen des Metallkopfes leicht ablösen und durch ein neues ersetzen.

Ein weiterer Vorteil der Röhre besteht darin, daß man sehr nahe an die Antikathode herangehen kann, und so durch das sehr wenig absorbierende Aluminiumfenster relativ hohe Intensitäten erhält.

Die Röhre wird von Reiniger, Gebbert & Schall in Erlangen ausgeführt.

Mit einer der eben beschriebenen im wesentlichen nachgebildeten Röntgenröhre haben Herr Debye und Herr Scherrer ihre auch in dieser Zeitschrift publizierten Versuche ausgeführt[1]).

1) P. Debye u. P. Scherrer, diese Zeitschr. **17**, 277, 1916.

Göttingen, Physikalisches Institut, Abteil. für Experimentalphysik.

(Eingegangen 7. Mai 1917.)

Die Vermeidung der Verbreiterung von Röntgenspektrallinien infolge der Tiefe der wirksamen Schicht.

Von H. Seemann.

(Mit Tafel VII.)

Die kürzlich angegebene[1]) röntgenspektroskopische Methode, bei der der Kristall zwischen Strahlungsquelle und Spalt steht, so daß Spalt und Projektionsfläche (photograph. Platte, Film, Leuchtschirm) eine gewöhnliche Lochkamera bzw. Spaltkamera bilden, — ich möchte sie daher Lochkameramethode nennen — hat den sehr wichtigen Vorzug, die durch die Eindringungstiefe hervorgerufene einseitige Verbreiterung der Linien und Bandkanten zu eliminieren. Sie eignet sich daher sehr zur Untersuchung der kurzwelligen Gebiete des Spektrums, insbesondere auch der γ-Strahlspektren, und ist unentbehrlich bei Benutzung sehr leichter Kristalle auch für langwellige Strahlung.

Der Einfluß der „wirksamen" Schicht bei den verschiedenen Methoden ist aus Fig. 1 u. 2 ersichtlich[2]). Fig. 1 zeigt die „Schneidenmethode". Fig. 2 stellt die alte Braggsche Spaltmethode dann dar, wenn A die Strahlenquelle und B die Projektionsfläche bedeutet und gleichzeitig die neue „Lochkameramethode", wenn umgekehrt B die Strahlenquelle und A der Projektionsschirm ist. In beiden letzteren Fällen der Fig. 2 bedeutet S den Spalt und K den Kristall, dessen wirksame reflektierende Oberflächenschicht durch die gestrichelte Linie begrenzt ist.

Zur Einführung in die Optik der Reflexion möge wiederholt werden, daß bei der Braggschen Spaltmethode von allen von A durch S auf K gelangenden homogenen Strahlen nur derjenige reflektiert wird, der unter einem durch die Wellenlänge bedingten Interferenzwinkel (Glanzwinkel) und seinen höheren Ordnungen auf die reflektierenden Kristallschichten fällt. Größere Wellenlängen werden unter größeren Glanzwinkeln reflektiert. Aus einem weißen Strahl bestimmter Neigung gegen den Kristall wird daher immer nur eine Wellenlänge reflektiert werden (ferner auch alle diejenigen kürzeren Wellenlängen, deren Glanzwinkelsinus ein ganzzahliger Bruchteil des Sinus dieses Neigungswinkels sind). Der Spektralrest des Strahls geht unabgelenkt weiter (nicht gezeichnet).

Die starke Absorption des größten Teils des Röntgenspektrums selbst in leichteren Kristallen bewirkt, daß nur die in dünner Oberflächenschicht reflektierten Strahlen in merklicher Stärke wieder aus der Schicht herausgelangen. Nur diesem Umstande ist es zu danken, daß bei der Braggschen Spektralmethode mit leichteren Kristallen relativ scharfe Spektrallinien des Gebietes bis etwa zur Ag-Bandkante entstehen. Ein sehr dünnes Strahlenbündel dieses Spektralbereichs wird wieder als dünnes Bündel reflektiert. Anders bei leichten organischen Salzen, z. B. Zucker, die auch aus Millimetertiefe noch reflektierte weiche Strahlung in merklicher Stärke herausgelangen lassen. Von einem unter dem Glanzwinkel einfallenden Strahl spaltet sich hier beim Durchdringen der „wirksamen" Schicht ein nach außen gelangendes reflektiertes Bündel wie eine Fahne von ihrem Schaft ab (vgl. Fig. 2). So kommt es, daß die von der Gesamtheit der einfallenden Strahlen reflektierten fahnenförmigen Bündel auf der Projektionsfläche statt einer scharfen senkrecht zur Zeichenebene gerichteten Linie, die bei punktförmigem oder doch sehr kurzem Spalt S einen Kegelschnittbogen darstellt, ein ebenso gekrümmtes Band entworfen wird, das als Verbreiterung der Linie aufzufassen ist.

Diese Verbreiterung ist einseitig in der Richtung des einfallenden Strahles und ist in ihrer Helligkeit abgetönt, da die von den obersten Schichten stammenden reflektierten Strahlen weit weniger durch Absorption geschwächt worden sind als die aus tieferen Schichten. Die Helligkeitsabnahme ist jedenfalls exponentiell. In Fig. 2 ist diese Abtönung durch abgestufte Dicke der Linien CB bis DB zum Ausdruck gebracht.

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei der Schneidenmethode, wie Fig. 1 zeigt. Dort wird aber nicht nur ein Strahl von den Netzebenen der gesamten wirksamen Schicht reflektiert, sondern auch sämtliche ihm (innerhalb der Zeichenebene) parallelen aus der völlig ungeordnet einfallenden Strahlung. Von diesen parallelen Strahlen sind in der Figur nur solche gezeichnet, von denen reflektierte Strahlen an der Schneide S vorbei in merklicher Stärke wieder aus dem Kristall herausgelangen können. Es tritt also auch hier eine wirksame Schicht

1) H. Seemann, Ann. d. Phys. **51**, 391, 1916 (Fig. 1).
2) H. Seemann, Ann. d. Phys. **49**, 470, 1916 (Fig. 4, 5 u. 6).

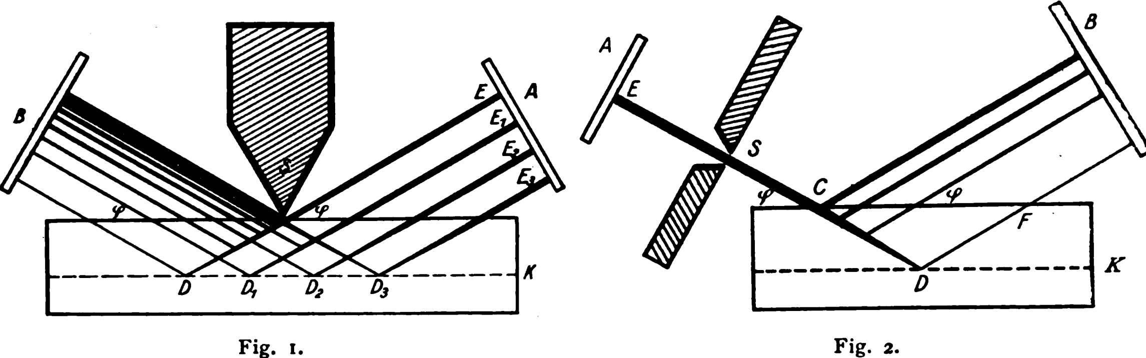


Fig. 1. Fig. 2.

in Erscheinung, die jedoch wesentlich dünner ist als die analoge bei der oben gekennzeichneten Braggschen Methode. Die Helligkeitsabtönung ist nämlich hier viel steiler als dort, weil die austretende parallele Strahlenfahne SDB durch Überlagerung aller der reflektierten Fahnen zustande kommt, die von sämtlichen parallel ED einfallenden Strahlen herrühren. Von diesen ist die von ED (Fig. 1) stammende genau gleich der in Fig. 2. Dieser überlagert sich jedoch die Fahne des Strahles E_1D_1, E_2D_2, E_3D_3, in der Weise, daß der an und für sich schon hellere Rand der Fahne bei S noch mehr verstärkt wird, wenn auch die Breite und Intensität der Strahlenfahnen mit wachsendem Abstand der einfallenden Strahlen von S schnell abnimmt. In der Fig. 1 ist diese Addition durch die Anzahl der Strahlen und die Helligkeit der einzelnen durch ihre Stärke angedeutet.

Der Helligkeitsabfall der reflektierten Strahlen mit wachsendem Abstand von S etwa auf $^1/_{100}$ des Wertes bei S ist bei der Schneidenmethode daher in geringerem Abstand von S erreicht als bei der Braggschen Methode. Sie ergibt demnach schärfere Linien als jene in allen den Fällen, in denen die wirksame Schicht merklich ist. Bei sehr leichten Kristallen ist die Verbreiterung jedoch auch bei der Schneidenmethode selbst für stark absorbierbare Linien noch zu groß, um eine Spektroskopie mit ihnen zuzulassen.

Das Spektrogramm Nr. 2 auf Tafel VII zeigt das nach der Schneidenmethode an Zucker aufgenommene Spektrum der L-Linien des Platins in der 1., 2. und 3. Ordnung 5,6fach vergrößert. Die Silberbande liegt links außerhalb der Aufnahme etwa in demselben Abstand wie in Nr. 4 und 5, wo sie mit aufgenommen wurde. An der am stärksten belichteten Linie $L\alpha_1$ in 3. Ordnung ganz rechts kann man die Verbreiterung nach der kurzwelligen Seite zu recht gut erkennen, desgl. auch an den beiden hellen β-Linien links davon. Die rechten Ränder der Linien sind schärfer als die linken, wenn auch bei α_1 nicht ganz geradlinig, da sie in der Längenmitte weit stärker belichtet ist als an den Enden infolge der entsprechenden Helligkeitsverteilung des Brennflecks der Röntgenröhre. Sie wäre also auch bei sehr geringer Dicke der wirksamen Schicht in der Mitte ausgebaucht, wie alle Spektrallinien dort, wo sie überbelichtet sind. Die Helligkeitsabtönung in ihrer Längsrichtung läßt indessen umso besser erkennen, wie mit zunehmender Intensität der einfallenden Strahlung immer tiefere Schichten sich merklich an der Reflexion beteiligen. Die einseitige Verbreiterung ist in der Mitte am stärksten, an den schwach belichteten Spitzen am geringsten. Die Verbindungslinie der Spitzen, die die genaue Lage der Spektrallinie angibt (für kleine Glanzwinkel und kurze Linien), bildet zwar nicht ganz genau die Kante des Linienbandes aus den eben genannten Gründen, liegt aber unverkennbar unsymmetrisch nach längeren Wellen zu. Der linke Rand des Bandes ist geradezu die graphische Kurve der Helligkeitsabtönung längs ihres Querschnittes. Der Schwärzungsabfall selbst ist auf dem Originalnegativ unter dem Mikroskop deutlich sichtbar, verschwindet jedoch bei der Reproduktion, bei der durch äußerste Kontraststeigerung darauf hingearbeitet wurde, die unsymmetrische Lage der Spitzen klar herauszubringen, da diese Darstellungsweise leichter erkennbar ist. Daß die oberen Spitzen stumpfer sind als die unteren, rührt von einem im Wege stehenden Blendenrand (von M_1, vgl. unten Fig. 3), der das durch einen Bleispalt der Röntgenröhre ausgeschnürte Projektionsbündel des Brennfleckbildes nachträglich noch etwas abblendete.

Eine dritte Darstellungsweise ist die, eine Reihe verschieden stark belichteter Aufnahmen zu machen. Aus der einseitig wachsenden Breite der Linien mit wachsender Belichtungszeit, d. i. mit wachsender Teilnahme immer tieferer Kristallschichten an der Reflexion merklich kräftiger Strahlen, kann gleichfalls auf diese Wirkung geschlossen werden. Bei genauer Dosierung

und genau konstanter Härte der Strahlen kann die ganze Erscheinung auch messend erforscht werden. Einige verschieden stark belichtete Aufnahmen zeigten, daß tatsächlich durch immer knappere Belichtung die Linien immer schärfer wurden. Um aber z. B. die beiden starken β-Linien 1. Ordnung noch aufzulösen, mußte so knapp belichtet werden, daß außer ihnen und der α_1-Linie in schwächster Andeutung nichts zu sehen war. Die Aufnahme 2 der Tafel ist etwa 5 mal so lange belichtet worden. Ihre rechten Linienränder sind demnach als überbelichtet zu betrachten. Tatsächlich ergab die Photometrierung der α-Linie 3. Ordnung statt eines exponentiellen Schwärzungsabfalles vom scharfen Rande aus zunächst sogar ein geringes Ansteigen bis etwa zu $^1/_6$ ihrer Breite vom Schwärzungswert $S = 0{,}54$ bis $S = 0{,}57$ und dann im letzten $^2/_3$ ein lineares Abfallen von $S = 0{,}54$ bis $S = 0{,}15$. Ihre Gesamtbreite, wie sie auf dem Photogramm erscheint, beträgt etwa 0,5 mm.

Mit der neuen Lochkameramethode ist es nun möglich, mit demselben Kristall, mit dem Nr. 2 der Tafel aufgenommen worden ist, ein Spektrogramm zu liefern, das an Schärfe die besten Aufnahmen an schwereren Kristallen mit den anderen Methoden übertrifft. Nr. 3 zeigt eine solche Aufnahme.

Die Wirkungsweise der Methode ist aus Fig. 2 ersichtlich. Macht man dort B statt A zur Leuchtquelle, so kann von allen unter dem Glanzwinkel φ reflektierten Strahlen nur der eine DE auf die Projektionsfläche A gelangen, der durch den Spalt S hindurchtrifft. Er wird erzeugt von sämtlichen unter dem Glanzwinkel φ einer bestimmten Wellenlänge einfallenden Strahlen BD bis BC, die ihn schneiden. Kein anderer unter φ reflektierter (in der Zeichenebene verlaufender) Strahl kann durch S hindurchgelangen. Die unter anderen Glanzwinkeln φ_1, φ_2, φ_3 ... reflektierten Strahlen, die demnach eine andere Wellenlänge haben oder dieselbe Wellenlänge in anderer Ordnung darstellen, treffen, soweit sie durch S hindurchgelangen, andere Punkte E_1, E_2, E_3.... Sämtliche im Raume unter dem Glanzwinkel φ von K reflektierten Strahlen, die durch S hindurchtreffen, bilden einen Doppelkegelmantel, dessen Spitze in S liegt und dessen Schnittkurve mit der Projektionsfläche A die Spektrallinie darstellt. Diese muß demnach theoretisch linienförmig scharf sein, falls S punktförmig ist. In der Praxis kann S auch ein wenige Millimeter langer Spalt sein, wenn er parallel der reflektierenden Oberfläche läuft, ohne daß die Schärfe der Linien bei kleineren Glanzwinkeln darunter leidet, wie an anderer Stelle näher ausgeführt werden soll.

Die Lochkameramethode kann also, wie ersichtlich, als Umkehrung der gewöhnlichen Spaltmethode aufgefaßt werden. Physikalisch richtiger ist es jedoch, zu sagen, daß es optisch gleichgültig ist, an welcher Stelle des Strahlenganges zwischen Strahlenquelle und Projektionsfläche die Aussonderung des homozentrischen (oder astigmatischen) Bündels aus dem diffus einfallenden Licht erfolgt, ob vor, auf oder hinter dem Kristall von der Leuchtquelle aus gerechnet, ebenso wie es prinzipiell gleich ist, ob man die Bildumkehrung eines phot. Bildes durch einen ebenen Spiegel vor, in oder hinter dem Objektiv erfolgen läßt oder ob man einen Polarisator vor, in oder hinter den Linsensystemen eines Instrumentes anbringt. Da die reflektierende ebene Kristallschicht bei sehr leichten Kristallen jedoch eine merkliche Dicke besitzt, so daß dort nicht mehr von einer Spiegelung an einer Ebene sondern von einer Volumenreflexion gesprochen werden muß, ist die Reihenfolge der Erzeugung des geordneten Strahlenbündels der relektiven Reflexion am Kristall nicht mehr gleichgültig. Nur die Aussonderung des homozentrischen Strahlenbündels n a c h der Volumenreflexion führt zu scharfen Linien. Die gewöhnliche umgekehrte Methode ist in solchen Fällen unbrauchbar. Das Spektrum Nr. 3 ist nach der neuen Methode in demselben Zuckerkristall wie das von Nr. 2 mit feinstem Spalt aufgenommen und zeigt klar den gewaltigen Unterschied gegenüber Nr. 2 wie auch ihre Überlegenheit gegenüber den anderen Methoden, wenn man bedenkt, daß die Lochkameramethode ihre Eigenschaften für das ganze Röntgen- und γ-Strahlenspektrum beibehält, während die anderen Methoden im kurzwelligen Gebiete auch bei weniger leichten Kristallen versagen. Glimmer bildet hier insofern eine günstige Ausnahme, als man die wirksame Schicht leicht dadurch beliebig klein machen kann, daß man entsprechend dünne Spaltblätter benutzt. Zur Untersuchung des kurzwelligen Spektralgebietes kommt er aber leider wegen seiner geringen Auflösung wohl nicht in Frage.

Um noch deutlicher zu zeigen, daß die Linienverbreiterungen der Aufnahme Nr. 2 nicht etwa durch schlechtes Anliegen der Schneide oder Eindrücken der Kristallfläche durch zu starken Druck der Schneide erfolgt ist, ist in Nr. 1 noch eine Aufnahme an dem gleichen Zuckerstück nach der neuen Methode, aber mit weitem Spalt wiedergegeben. An der homogenen Schwärzung der Linien über ihre ganze Breite, die sich im Gegensatz zu Aufnahme 2 in der unveränderten durch die Spaltweite gegebenen Breite der Linien bis an ihre dunkel auslaufenden Enden äußert, ist zu erkennen, daß der Spalt tatsächlich ein paralleles Bündel

homogener Strahlen aus der Gesamtheit der parallel reflektierten homogenen Strahlen ausblendet.

Die Belichtungszeiten der verschiedenen Aufnahmen waren bei gleicher Stromstärke und Härte der Röhre (13 Milliampere, 7—8 Wehnelt), 5 cm Abstand Antikathode-Schneide und 139 mm Abstand Schneide-Platte, bei Nr. 1 und 2 je 5 Minuten, bei 3 20 Minuten, bei 4 (Platin-Doppelsalz) 40 Minuten, bei 5 40 Minuten, bei 6 30 Minuten. Da der Öffnungswinkel der vom Brennfleck der Röhre zum Spalt gelangenden konvergierenden Strahlen nicht groß genug war, um den gesamten Spektralbereich von 40°, der auf dem Spektrogramm der Tafel nur zum Teil wiedergegeben ist, zu umfassen, wurde der Spektralapparat etwa zu $^1/_3$ der gen. Zeiten so gedreht, daß die Strahlen das kurzwellige Gebiet umfaßten und in der übrigen Zeit so, daß sie das langwellige entwarfen. Da der Rand des Brennflecks allmählich in der Helligkeit abklingt, so war die Belichtung im mittleren Spektralgebiet, wo die Einzelbestrahlungen beider Gebiete sich überlagern, nicht sehr viel anders belichtet, als die Spektralenden. Immerhin sind die Spektren ungleichmäßig exponiert und die verschiedene Helligkeit gleicher — auf der Tafel übereinanderliegender — Winkelgebiete der einzelnen rührt daher. Die Röhre besaß einen ganz metallischen Entladungsraum mit einem schlitzförmigen, die Schneide des Spektrographen senkrecht kreuzenden Fenster aus *Al*-Blech von $^1/_{20}$ mm Dicke und intensive Wasserkühlung.

Die benutzten Zuckerkristalle waren besonders schöne Exemplare aus der Zuckerfabrik Lüps & Melcher in Uerdingen, die in wochenlanger Kristallisation an Fäden (Fadenkandis) gewonnen worden waren. Die eingeschlossenen Fäden verhindern die Bildung von Wassereinschlüssen und lassen Flächen mit optisch ebenen Stellen entstehen. Auch die am Boden aufgewachsenen Kristalle ohne Fäden sind von derselben Güte. Die unvermeidlichen oft starken Sprünge im Innern beeinträchtigen die Güte der äußeren Fläche nicht. Starke Temperaturschwankungen, z. B. durch Anfassen mit warmen Fingern, bewirken jedoch ein ruckartiges Weiterentwickeln der Sprünge bis zum Zerfall des Individuums.

Herrn Dr. Melcher, dessen Liebenswürdigkeit ich einen großen Vorrat solcher Kristalle verdanke, spreche ich hiermit meinen verbindlichsten Dank aus.

Flächen, auf denen durch mechanische Einwirkung oder durch Antrocknen der Mutterlauge nach dem Herausnehmen Unregelmäßigkeiten hervorgerufen sind, lassen sich durch vorsichtiges Abschleifen auf feinem Schmirgelpapier mit Alkohol, dann durch Polieren mit Polierrot der Uhrmacher (feinst geschlämmtes Pariserrot) auf einer mit einem oft gewaschenen Taschentuch bespannten Spiegelglasplatte leicht beseitigen. Das Polierrot wird an eine Stelle des Tuches eingerieben und das ganze Tuch mit Alkohol getränkt. Zunächst wird an der mit Polierrot versehenen Stelle leicht gerieben, dann allmählich auf die nur mit Alkohol getränkten übergegangen. Die schwach lösende Wirkung des Alkohols bzw. seines Wassergehaltes spielt die Hauptrolle dabei. Eine Fassung für den Kristall während des Bearbeitens, die aus einem kurzen weiten Rohr besteht, in das der Kristall womöglich nachstellbar mit Klebwachs so eingesetzt ist, daß seine zu bearbeitende Fläche mit dem unteren Rande des Rohres abschneidet, ist wünschenswert.

Zur Unschädlichmachung von geringen Strukturunregelmäßigkeiten kann der Kristall während der Aufnahme in beliebiger Richtung parallel verschoben oder die reflektierende Fläche in ihrer Ebene gedreht werden. Die reflektierenden kreisringförmigen Volumenzonen, deren Querschnitt in Fig. 2 das Dreieck FDC für die durch den Glanzwinkel φ gekennzeichneten Wellenlänge ist, wandert dann durch alle Unebenheiten der wirksamen Schicht hindurch und liefert einen mehr oder minder genauen scharfen Mittelwert der Spektrallinie in E.

Um die Brauchbarkeit[1]) der Schneidenmethode bei Verwendung guter schwerer Kristalle darzutun und das eben beschriebene *Pt*-Zuckerspektrum Nr. 2 richtig deuten zu können, ist in Nr. 4 ein *Pt*-Spektrum, das an Lithium-Kalium-Platincyanür $[Li\,K\,Pt\,(CN)_4 + 3\,H_2O]$ mittels der Schneidenmethode gewonnen ist, bei gleichem Abstand der Schneide-Platte (139 mm) wiedergegeben und in Nr. 5 ein ebensolches an Glimmer. Die Spektren 1—5 sind auf dem Photogramm 5,6 fach vergrößert. Alle sind bei ruhendem Kristall aufgenommen worden. An der vorzüglichen Auflösung der beiden β-Linien 1. Ordnung, die auf der Originalplatte ca. 0,04 mm breit sind bei starker Schwärzung — die schwachen Linien ca. 0,01 mm — kann erkannt werden, daß sie die Vorzüge, die ihr in der zuerst zitierten Arbeit nachgerühmt wurden, tatsächlich besitzt, selbstverständlich nur bei Benutzung eines tadellosen, wenn auch noch so kleinen Kristallflächenstückchens. Bei beiden gen. Kristallen waren die ganzen Flächen von dieser gleichmäßigen Güte. Dabei war der *Pt*-Kristall in freier Hand poliert und dadurch erheblich krumm geschliffen worden. Der Glim-

1) Vgl. M. Siegbahn, Jahrb. d. Rad. u. El. **13**, 304 (Fußnote), 1916.

mer war ziemlich bucklig, wie er durch das Spalten und Schneiden zu werden pflegt. Da sich nur das 1 mm lange, sehr schmale Oberflächenelement, auf dem die Schneide aufliegt, an der Reflexion der auf die Platte gelangenden Strahlen beteiligt, so machen sich selbst erhebliche Krümmungen der Kristallstruktur nicht bemerkbar, wofern nur das reflektierende Element nicht zerrissen oder sonstwie unregelmäßig deformiert ist. Solche Fehler sind aber an der Form der Linien sofort erkennbar. Es ist dann so lange nach einer guten Stelle zu suchen, bis die Linien so glatt und scharf erscheinen, wie in der reproduzierten Aufnahme. Dafür fällt bei der Schneidenmethode das schwierige Zentrieren der Kristalloberfläche fort und der Spektralapparat nimmt die denkbar einfachste Form an, die keinerlei genau gearbeiteter drehbarer Teile bedarf. Nur die Schneide muß scharf geschliffen sein und einen festen Abstand von einem gut ebenen Anschlagrahmen für die photographische Platte haben.

Die Gitterkonstante der drei Salze ist etwa 7 mal größer als die des am häufigsten benutzten Steinsalzes. Um das Aussehen des *Pt*-Spektrums an letzterem mit den obigen vergleichen zu können, ist es in Nr. 6 der Tafel wiedergegeben, jedoch nur in 2 facher Vergrößerung, also 2,83 mal geringer als die anderen Spektren. Die Auflösung der β-Linien 1. Ordnung ist dort naturgemäß größer als bei den anderen und würde noch besser sein, wenn die Aufnahme knapper belichtet wäre. Die Linien sollten aber im vorliegenden Falle nicht nur in möglichster Schärfe, sondern auch möglichst vollständig erscheinen. Um beiden Anforderungen gerecht zu werden, mußte länger belichtet werden als es für die hellsten Linien richtig gewesen wäre, aber für die schwachen Linien doch nur so knapp, daß sie soeben sichtbar wurden. Um sie dann bei der Reproduktion mit Sicherheit miterscheinen zu lassen, mußten sie etwas nachgearbeitet werden (durch Radieren). An den Aufnahmen 1—5 ist jedoch kein solcher künstlicher Eingriff gemacht worden, insbesondere nicht an der Begrenzung der Linien. Nur Flecken und Plattenfehler auf dem dunklen Hintergrunde sind dort beseitigt worden.

In Nr. 6 ist die 1. und 2. Ordnung der *L*-Serie des *Pt* gut zu erkennen. Die Vergrößerung ist so gewählt, daß die 2. Ordnung der Serie etwa ebenso groß ist wie die 3. der übrigen Spektrogramme. Das weiße Kreuz bedeutet den Fußpunkt des von der Schneide auf die (ebene) Platte gefällten Lotes, desgl. in Nr. 5. Die Lot-Fußpunkte der anderen Spektrogramme liegen genau über letzterem. Die Zugehörigkeit der beiden schwachen Linien in der Nähe der *Ag*-Bandkante ist nicht klar. Die 3. oder 4. Ordnung der *K*-Serie des *Pt* können sie nicht darstellen. Es handelt sich wahrscheinlich um die 1. Ordnung der *K*-Serie einer leichten Verunreinigung des *Pt*.[1])

Über die stark verschiedene Helligkeit der *Ag*-Bande, die bei Glimmer in 1., 3. und 5. Ordnung, bei Zucker in 1. und 3. (die 1. liegt nicht mehr auf dem Photogramm) 3., bei $LiKPt(CN)_4$ nur in 1. Ordnung erschienen ist, gegenüber der etwa gleichen Helligkeit der *L*-Linien, ferner auch über das Helligkeitsverhältnis der *l*-Linie zu den anderen bei den verschiedenen Kristallen läßt sich noch nichts Bestimmtes aussagen.

Spektrograph für die Schneiden und Lochkameramethode.

Die Konstruktion eines Spektrographen sowohl für die Schneiden als auch für die Lochkameramethode ist in ihren Grundzügen in Fig. 3 angedeutet. Auf der horizontalen Grundplatte *A* aus Messing oder Zink steht die Bleiplatte *Pb* senkrecht, deren rechte vordere Kante *S* die Schneide bildet, die am besten aus eingesetztem Wolfram besteht. Auf ihrer rechten Stirnfläche sitzen zwei gerade dreikantige prismatische Messing- oder Wolframklötze $M_1 M_2$ übereinander, deren linke vordere senkrechte Kanten an *S* anliegen und die zwischen ihren oberen bzw. unteren Grundflächen einen horizontalen parallelflächigen Spalt von 1—3 mm frei lassen, durch den von hinten rechts die Röntgenstrahlen horizontal einfallen und an seiner vorderen sichtbaren rechteckigen Öffnung auf die dort unmittelbar anliegende Kristallfläche fallen. Sie dienen also als Blende und gleichzeitig als Anschlagfläche für den Kristall, der links bis über *S* hinausragt und gleichfalls an *S* anliegt, sofern es sich um die Schneidenmethoden handelt. Abstandsänderung von der Anschlagfläche und *S* kann durch zwischengelegte Papierstückchen bewirkt werden. Die Hilfsvorrichtung zum Andrücken des Kristalls, die im wesentlichen aus Bleiklötzen oder Winkeln zum Anklemmen an die Grundplatte bestehen, sind nicht gezeichnet. Die Prismen dienen ferner der Blende *B* als Anschlag, die alles von vorn rechts kommende Nebenlicht bis auf das streifend auf die Kristallfläche einfallende abhält. Um ihr etwaiges unvollkommenes Anliegen und das dadurch bedingte starke Nebenlicht in der Nähe des Nullpunktes des Spektrums zu beseitigen, sind noch einmal außen rechts zwei Bleiblechstreifen *C* vor diesem Zwischenraum befestigt, die den

1) Anmerkung bei der Korrektur: Wie mir Herr M. Siegbahn auf Anfrage soeben freundlichst mitteilt, handelt es sich wahrscheinlich um $K\alpha$ von *Pd* und *Rh*, die als Verunreinigungen von *Pt* vorkommen.



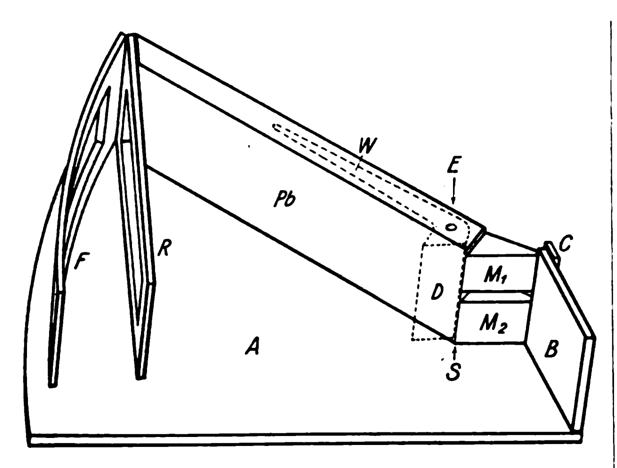


Fig. 3.

horizontalen Spalt zwischen den Prismen freilassen. Außer diesen Blenden ist es immer vorteilhaft links von S auf der Grundplatte eine aus einem Bleiblechwinkel bestehende Blende dicht neben dem Kristall aufzustellen, deren hintere Kante ungefähr mit der Verlängerung der Anschlagfläche des Kristalls abschneidet. Sie fängt das durch den Kristall oder rechts an ihm vorbeigegangene Licht auf und verhindert so, daß der über das ganze gestülpte Bleiblechdeckel auf seiner vorderen vertikalen Innenfläche bestrahlt wird und Sekundärstrahlen auf die Platte gelangen läßt. Letztere wird von links gegen den Anschlagrahmen R gepreßt. Wenn mit Film und Verstärkungsschirm (Kalziumwolframat-Kollodiumemulsion) gearbeitet wird, dient der zylindrische um S als Achse gebogene Rahmen F als Anschlag, um den zuerst der Film mit der Schicht nach links und darüber der Verstärkungsschirm mit der matten Seite nach rechts mittels eines darüber gezogenen Papier- oder Stoffstreifens gespannt wird.

Der ganze Apparat sitzt auf einer womöglich isolierenden Säule, um das Durchschlagen der Glasröntgenröhren zu erschweren und ist meßbar um diese drehbar. Säule und Schneide brauchen weder parallel noch zentriert zu sein. Die Schneide braucht um so weniger genau parallel dem Plattenrahmen RF zu sitzen, je kürzer das von ihr zur Wirkung gelangende, von den beiden Prismen freigelassene Stückchen ist. Als einzige Konstanten des Apparats muß der Fußpunkt und die Länge des Lotes von der Mitte dieses Schneidenstückchens auf die Platte bestimmt werden. Falls mit Films exakte Messungen gemacht werden sollen, muß außerdem das Schneidenstückchen genau in der Zylinderachse des Rahmens F liegen.

Die Umwandlung des Apparats für die Lochkameramethode besteht einfach in der Ergänzung der Schneide S zu einem Spalt, in dem das gestrichelt gezeichnete Bleiblech B, das an dem Winkelhebel W sitzt, der um die vertikal in Pb hineinzusetzende Achse E drehbar ist, mit seiner rechten Kante der Schneide S gegenüber gebracht wird. Die hintere Fläche von D liegt ungefähr in der Ebene der Anschlagfläche $M_1 M_2$. Der Winkelhebel wird durch Feinverstellung bewegt und durch Federkraft zurückgedrückt. D ist neigbar an ihm angebracht. Eine auf A angebrachte Parallelverschiebung von D wäre schwieriger herstellbar und nähme viel Platz fort.

Der Kristall wird für diese Anordnung rechts vom Spalt DS parallel in geringem Abstande von der Anschlagfläche $M_1 M_2$ aufgestellt. Er wird vorteilhaft an einer Parallelverstellung angebracht, die senkrecht auf die Anschlagflächen gerichtet ist. Nach links muß er so dicht als möglich an den Spalt DS heranreichen, um auch unter größeren Glanzwinkeln ausfallende Strahlen durch DS gelangen zu lassen. Als Drehverschiebung innerhalb seiner reflektierenden Spaltfläche zwecks Elimination kleiner Strukturfehler hat sich eine Drehung um eine horizontale dicht bei R gelegene Achse, die auch gleichzeitig die Parallelverstellung senkrecht zu $M_1 M_2$ mittels Mikrometerschraube ermöglicht, gut bewährt. Der Kristall sitzt dabei an einem langen zu dieser Achse führenden Hebel, der auf einer exzentrisch drehbaren Walze ruht, die während der Aufnahme stetig oder schrittweise ein oder mehreremal herumgedreht wird.

Der Gesamtapparat kann durch leicht abnehmbare Ansätze beliebig nach links verlängert werden, um die Auflösung zu erhöhen. Eine Grundlänge von 150 mm Schneide-Platte hat sich als vorteilhaft erwiesen. Eine Verdoppelung dieses Abstandes erhöht die Auflösung noch nicht viel. Für die Fläche $M_1 M_2$ dürfte 5 cm Höhe und 3—4 cm Breite fast immer ausreichen[1]).

Anwendung auf die Laue-Diagramme.

Das Prinzip der Lochkameramethode läßt sich auch auf die Laue-Friedrichsche Methode, bei der ein linienförmiges Bündel durch zwei feine Löcher ausgeblendet wird, anwenden. Da die Laue-Diagramme bei mittleren und schweren Kristallen, sofern diese nicht in außerordentlich dünnen Schliffen oder Spaltblättern bestehen, spektral fast ausschließlich Teile der reflektierten Silberbande des Spektrums — in mehreren Ordnungen — darstellen, kann von einer wirksamen

1) Der Apparat kann von dem Institutsmechaniker Wendel in einigen Wochen Lieferzeit bezogen werden; bis auf weiteres jedoch mit Gold statt Wolframschneide.

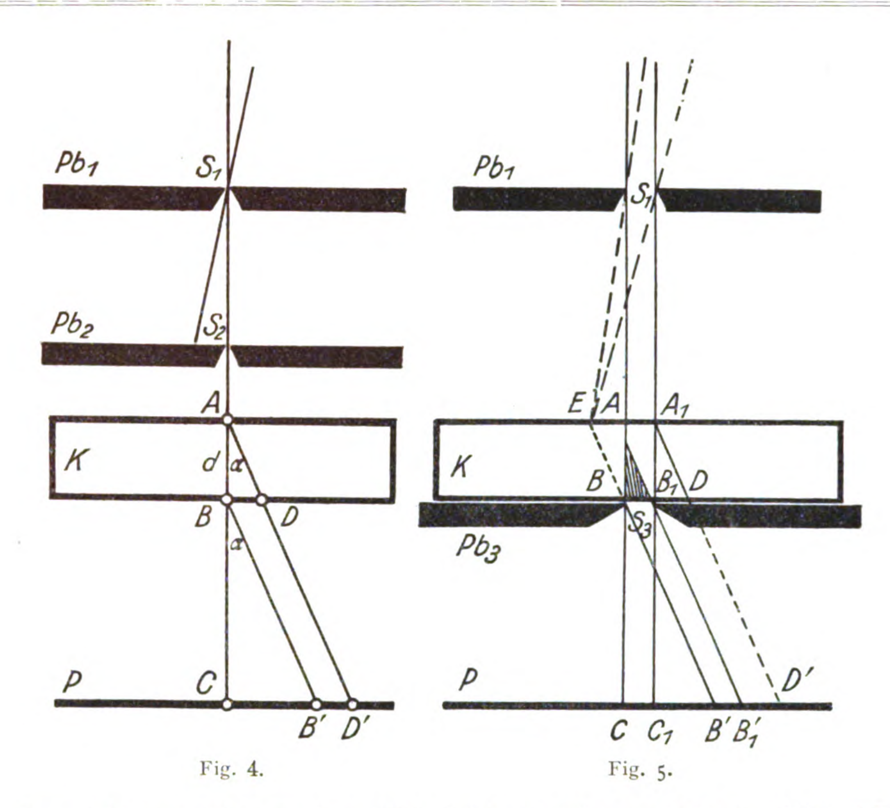


Fig. 4. Fig. 5.

Schicht wie oben nicht gesprochen werden. Vielmehr ist die ganze Dicke des durchdrungenen Kristalls als wirksame Schicht aufzufassen, wenigstens solange es sich um geringe Ablenkung des reflektierten Strahls von der Richtung des einfallenden handelt.

Die Verhältnisse sind in Fig. 4 und 5 dargestellt. Fig. 4 zeigt die bisherige Anordnung mit ideal engen Blendenlöchern S_1 und S_2, die nur ein linienförmiges Bündel durch den Kristall K hindurch auf die Platte P gelangen lassen. Beim Durchstrahlen von K zwischen A und B werden von einer senkrecht zur Zeichenebene zu denkenden Strukturfläche, die den Neigungswinkel (Glanzwinkel) $\frac{\alpha}{2}$ gegen AB hat, von sämtlichen Punkten von AB Strahlen unter dem doppelten Glanzwinkel α innerhalb der Zeichenebene abgespalten. Diese entwerfen auf der Projektionsebene P die beleuchtete Linie $B'D' = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$ statt, wie beabsichtigt, einen Punkt.

Die Helligkeit von $B'D'$ nimmt nun zwar nach D' zu ab, da der Weg AD, den der gleich anfangs von A abgespaltene Strahl im Kristall zurückzulegen hat, größer ist als der Weg $AB = d$, den der in B abgespaltene zurückzulegen hat, nämlich

$$AD = \frac{d}{\cos \alpha}.$$

Dieses Längenverhältnis $AD : AB$ ist jedoch selbst bei größeren Werten von α klein gegenüber den analogen Verhältnissen bei der Oberflächenreflexion, wie sie oben beschrieben wurde. Wenn also dort schon durch kräftige Belichtung die Wirkung außerordentlich verschieden stark reflektierender Lagen der Oberflächenschicht deutlich in Erscheinung tritt, so ist es bei der Laue-Friedrichschen Methode mit Sicherheit zu erwarten. Die harten Strahlen, die überhaupt noch in solcher Intensität nach B gelangen, daß sie kräftige reflektierte Strahlen liefern, geben auch in A, wo sie noch ungeschwächt sind, so intensive Reflexstrahlen ab, daß letztere nach Zurücklegung des wenig längeren Weges AD noch merkliche Intensität besitzen.

Es ist nun ein leichtes, den beschriebenen Einfluß der Kristalldicke, d. i. die Projektion der in ihm durchstrahlten Spur AB auf P, zu verhindern und einen punktförmigen Fleck zu bekommen, indem man eine dritte feine Lochblende S_3 auf der Unterseite von K derart anbringt, daß nur der Punkt B noch freiliegt. Alle von der Spur AB reflektierten Strahlen mit Ausnahme von BB' werden von dieser Blende abgefangen. Die Blende S_2 kann nur dann fortfallen, wenn der Abstand Pb_1K oder der Abstand der Röntgenröhre von Pb_1 so groß ist, daß das durch S_1 einfallende homozentrische Strahlenbündel in nächster Umgebung von B genügend genau parallel ist.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so würden beim Fortlassen der Blende S_2 die in Fig. 5 dargestellten Störungen eintreten. Die Figur dient gleichzeitig zur Beschreibung des Einflusses der endlichen Dicke des ausgeblendeten Strahlenbündels. Man sieht ohne weiteres, daß von sämtlichen von dem parallelen Bündel $S_1 S_3$ innerhalb des Zylinders $A A_1 \; BB_1$ reflektierten Strahlen nur die in dem schraffierten Volumenelement gespiegelten durch S_3 hindurch gelangen. Letzteres projiziert sich als Ellipse mit der kleinen Achse $B'B_1'$. Wäre Pb_3 nicht vorhanden, so würde der ganze reflektierende Zylinder $A A_1 \; BB_1$ sich auf P in Parallelprojektion $(B'D')$ projizieren.

Fehlt die Blende S_2, so können auch reflektierte Strahlen, die nicht von dem parallelen Bündel $S_1 S_3$ abgespalten sind, durch S_3 hindurchgelangen, z. B. der Strahl EB, der von anderen Strukturflächen, die zufällig in Reflexionsneigung gegen $S_1 E$ liegen, reflektiert worden ist. Der Punkt B wäre also der Projektionsfleck verschiedener Strukturflächen, d. h. es würde praktisch bei B' ein Zusammenfließen benachbarter Flecke stattfinden. Die Anbringung der Blende S_2, wie in Fig. 4, beseitigt diesen Fehler vollkommen. Die ganz ähnliche, wenn auch schwächere Wirkung der Divergenz des Bündels $S_1 S_3$, falls der Abstand $S_1 S_3$ oder der der Röntgenröhre von S_1 nicht groß genug gegenüber den Lochdurchmessern ist, vermag sie dagegen nicht zu beeinflussen.

Die experimentelle Nachprüfung der eben beschriebenen Verbesserungen der Laue-Friedrichschen Anordnung konnte noch nicht in Angriff genommen werden. Es ist nach Obigem klar, daß die Verbreiterung der Flecke nach außen, d. i. die merkliche Mitwirkung auch der oberen Teile von $A A_1 \; BB_1$ an der Reflexion, bei kleinen Winkeln α nicht stört, desgl. nicht, wenn K dünn im Vergleich zum Durchmesser der Blenden S_1 ist. In diesen Fällen kann auf S_3 verzichtet werden.

Zusammenfassung.

1. Die vom Verf. früher (l. c.) angegebene Spektralmethode, die „Lochkameramethode" genannt wird, da der Spalt in der Strahlenrichtung hinter dem Kristall liegt, so daß er mit der photographischen Platte eine Lochkamera bildet, hat den besonderen Vorzug vor der alten Braggschen Methode und der „Schneidenmethoden" des Verf., daß sie unabhängig ist von der Dicke der wirksamen reflektierenden Kristallschicht. Sie liefert selbst mit leichtesten Kristallen, sofern diese fehlerlos sind oder ihre Fehler durch Parallelverschiebung während der Aufnahme ausgeglichen werden, ebenso scharfe Linien härtester Strahlung, wie sie mit den anderen Methoden im günstigsten Falle erreicht werden können. Dies wird mit Hilfe von Photogrammen des Pt-Spektrums am Zucker einerseits und $Li\,K\,Pt(CN)_4$, Glimmer und Steinsalz anderseits bewiesen. Die einseitige Verbreiterung der L-Serienlinien an Zucker bei Benutzung der Schneidenmethode, die sonst weniger von der Dicke der wirksamen Schicht abhängig ist, als die Braggsche Methode, ist auf dem Photogramm direkt sichtbar.

2. Die Laue-Diagramme lassen sich durch ähnliche Anordnung eines dritten Diaphragmas unmittelbar hinter dem Kristall ebenfalls unabhängig von der Dicke der Kristallplatte machen.

3. Ein Spektrograph für die Schneidenmethode und die Lochkameramethode wird beschrieben.

Würzburg, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 5. Mai 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über die Resonanztheorie des Hörens.

Von E. Budde.

(Schluß.)

B. Unterbrechungstöne, Phasenwechseltöne, Reflexionstöne, Kombinationstöne.

§ 7. Unterbrechungstöne. K. L. Schaefer und O. Abraham[1]) haben ältere Versuche von Zwaardemaker verfolgt und verbessert. Als Schallquelle dient ihnen eine Stimmgabel oder eine Lippenpfeife vor einem Mikrophon. Vom Mikrophon aus wird die elektrische Vermittlung des Schalles in ein anderes Zimmer geleitet und dort von einem Telephon aufgenommen. Die elektrische Leitung kann durch einen vibrierenden oder rotierenden Unterbrecher 64 bis 1800mal in der Sekunde unterbrochen werden Es sei p die Schwingungszahl des Primärtones, u die Zahl der Unterbrechungen; dann zeigt das Experiment: Der Primärton wird geschwächt oder

1) K. L. Schaefer und O. Abraham, Ann. d. Phys. **13**, 996, 1904.

verschwindet gänzlich, solange die Unterbrechung funktioniert; an seine Stelle tritt ein mehr oder weniger verwickelter Klang, in dem ein eigentlicher „Unterbrechungston" nur unter besonderen Umständen hörbar ist. Liegt p zwischen u und $2u$, so hört man vorwiegend $p - u$, daneben auch $2u - p$. In letzterem Fall schweben $p - u$ und $2u - p$ miteinander, wenn ihre Tonhöhen hinreichend wenig differieren. Analoge Tonbildungen treten auch dann auf, wenn $u > p$ ist und demnach mehr Stromunterbrechungen als Schwingungen des Primärtones stattfinden. Fällt nämlich u zwischen p und $2p$, so resultieren Sekundärtöne von der Form $u - p$. Bei größeren Differenzen zwischen p und u ergeben sich Töne wie $p - 2u$, $p - 3u$, $p - 5u$, $p - 12u$, $\frac{1}{2}u - p$, $3u - p$, $4u - p$, $7u - p$, $13u - p$. Nachträglich haben die Verfasser auch Töne $p + u$, $p + 2u$ beobachtet. Töne, die den zwischenliegenden Differenztönen entsprechen, sind nur vereinzelt beobachtet worden. Ein Ton von der Schwingungszahl u wurde regelmäßig dann, aber auch nur dann vernommen, wenn $p = u$ oder ein ganzes Vielfaches von u war, dann ohne hörbare Nebentöne. Wich p um eine kleine Anzahl von Schwingungen von u oder dessen Vielfachen ab, so hörte man u schweben, und die Zahl der Schwebungen wird gleich der Differenz von p und u. Das Gesamtergebnis lautet also dahin, daß die Sekundärtöne, was ihre algebraischen Verhältnisse angeht, sich verhalten wie die Kombinationsprodukte zweier Töne p und u mit harmonischen Nebentönen. Das kann aber nicht so aufgefaßt werden, als ob u ein wirklicher Ton wäre, da in der Mehrzahl der Fälle p und u selbst im Telephonklang verschwinden. Die Sekundärtöne lassen sich durch Resonatoren verstärken; auch eine empfindliche Flamme reagiert auf sie. Die Verfasser schließen: Die Versuche geben keinen Anhalt dafür, daß im inneren Ohr infolge der Auflösung eines Tones in eine Reihe von Tonstößen besondere „Unterbrechungstöne" zustande kommen. Wenn man überhaupt das Wort Unterbrechungstöne beibehalten will, so bezeichnet es einen rein physikalischen Begriff.

F. A. Schulze[1]) weist nach, daß die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchung sich in vollständiger Übereinstimmung mit der Helmholtzschen Resonanztheorie befinden. Bei Intensitätsschwankungen kann man die Amplitude A als Fouriersche Reihe ansetzen in der Form

$$A = a_0 + a_1 \sin(2\pi u t + \delta_1) + a_2 \sin(4\pi u t + \delta_2) + \cdots \text{ usw.}$$

1) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. **26**, 217, 1908.

Findet also eine Luftbewegung von der Schwingungszahl p mit dieser variabeln Amplitude statt, so ist die Elongation eines bewegten Teilchens

$$\begin{aligned} A \sin(2\pi p t + \varepsilon) &= a_0 \sin(2\pi p t + \varepsilon) \\ &+ a_1 \sin(2\pi p t + \varepsilon) \cdot \sin(2\pi u t + \delta_1) \\ &+ a_2 \sin(2\pi p t + \varepsilon) \cdot \sin(4\pi u t + \delta_2) + \cdots \text{ usw.} \\ &= a_0 \sin(2\pi t + \varepsilon) \\ &+ \frac{a_1}{2}[\cos\{2\pi(p-u)t + \varepsilon - \delta_1\} \\ &\qquad + \cos\{2\pi(p+u)t + \varepsilon + \delta_1\}] \\ &+ \frac{a_2}{2}[\cos\{2\pi(p-2u)t + \varepsilon - \delta_2\} \\ &\qquad + \cos\{2\pi(p+2u)t + \varepsilon + \delta_2\}] \\ &\qquad + \cdots \text{ usw.} \end{aligned} \tag{1}$$

Schon Seebeck hat diese Entwicklung gekannt und daraus in seinem bekannten Streit gegen Ohm geschlossen, daß die vorstehenden Töne eine entsetzliche Dissonanz liefern müßten. Das tun sie in der Tat unter Umständen, z. B. wenn man eine Stimmgabel vor einem Resonator rotieren läßt. Nötig ist das aber nicht. Erfolgt die Amplitudenschwankung nahezu nach dem Gesetz $a(1 - \cos 2\pi u t)$, so entstehen wesentlich nur die Töne p, $p - u$, $p + u$.

Die Intensitäten der Töne p, $p - u$ usw. lassen sich natürlich nur angeben, wenn die Art der Intermittenz oder der Intensitätsvariation bekannt ist. Dies ist der Fall bei denjenigen Versuchen von Schaefer und Abraham, wo die Intermittenz durch die periodische absolute Unterbrechung der elektrischen Leitung hergestellt war. Die Intensität von p hatte dann ihren vollen Wert, solange der Kontakt vorhanden war, um plötzlich auf Null abzunehmen und Null zu bleiben, solange der Strom offen war. Auf Grund dieser Tatsache berechnet F. A. Schulze die Intensität der Töne p, $p - u$ und $p + u$ und findet, daß das Ergebnis der Rechnung mit demjenigen der Versuche übereinstimmt. Ein bemerkenswertes Sonderergebnis der Untersuchung von Schaefer und Abraham besteht darin, daß u immer gehört wird, wenn p ein Vielfaches von u ist. Dazu ist darauf hinzuweisen, daß der Ton u sowohl im Ohr wie in der Telephonmembran als Differenzton gebildet werden kann, nämlich als (n eine ganze Zahl)

$$[p - nu] - [p - (n - 1)u]$$

und

$$[p + nu] - [p + (n \pm 1)u].$$

Schulze verweist auch auf die Töne, welche man hört, wenn man die Löcher einer Sirene teilweise verstopft. Hat z. B. eine Sirene 60 Löcher und man verschließt immer sechs benachbarte, während weitere sechs offen bleiben, so ist die

Grundperiode der Teilung 60/12. Man hört also den Ton 5 und dessen Obertöne, zu denen auch der Ton 60 gehört. Das ist aber nicht bloß der Fall, wenn die verstopften Löcher so angeordnet sind

○ ○ ○ ○ ○ ○ ● ● ● ● ● ●,

sondern auch bei Anordnungen wie

○ ○ ○ ○ ○ ○ ● ○ ● ● ○ ○,

○ ○ ○ ○ ○ ○ ● ○ ○ ● ● ○ usw.

Die sogenannten Unterbrechungstöne bilden danach überhaupt keine besondere Klasse von Tönen mehr, sondern sind nur ein besonderer Fall der Variationstöne und unterliegen wie diese der Gl. (1).

§ 8. Phasenwechseltöne. Bekanntlich hat R. König sich lange Zeit bemüht, die Youngsche Stoßtheorie der Kombinationstöne gegen Helmholtz wieder zu Ehren zu bringen, hat aber keinen Erfolg damit gehabt. Zur Widerlegung der Königschen Schlüsse hat eine Abhandlung von L. Hermann[1]) „Beiträge zur Lehre von der Klangwahrnehmung" wesentlich beigetragen. Aber in derselben Abhandlung ist Hermann wieder auf die Periodiktheorie zurückgekommen und hat Versuche beschrieben, die nach seiner damaligen Ansicht mit der Helmholtzschen Theorie in Widerspruch stehen sollten. Er arbeitete mit Zahnradsirenen, deren Zähne so ausgeschnitten waren, daß sie periodische Phasenumkehrungen bewirkten. Die verschiedenen von ihm verwendeten Formen des Scheibenrandes sind prinzipiell ziemlich gleichwertig. Wir betrachten daher hier nur eine derselben. Die Sirene war geschnitten wie Fig. 7 zeigt. Der

Fig. 7.

Rand enthält Zähne in solchem Abstande, daß sich bei gleichmäßiger Anordnung 180 Zähne auf dem Umfang befunden hätten. Nach je sechs Zähnen war aber einer von doppelter Breite angebracht, und das hat die Folge, daß die Phase der Schwingung nach jedem breiteren Zahn, also nach je $^1/_{24}$ der Peripherie, umgekehrt wird. Hermann will nun, wenn die Scheibe eine Umdrehung in der Sekunde macht, den Unterbrechungston von 24, und außerdem auch deutlich den Hauptton von 180 Schwingungen gehört haben. Er schließt daraus, daß ein Ton auch dann gehört wird, wenn er nach einer mäßigen Anzahl von Schwingungen jedesmal seine Phase umkehrt, und benutzt diesen Satz als Argument gegen die Helmholtzsche Theorie der Kombinationstöne.

1) L. Hermann, Pflügers Archiv 56, 467, 1894.

Die Frage blieb theoretisch in der Schwebe, bis F. A. Schulze[1]) sie vollständig klarstellte. Es handelt sich auch bei dem Hermannschen Versuch um Variationstöne, und zwar um den vorhin schon besprochenen Spezialfall, daß p ein ganzzahliges Vielfaches von u ist. Die Resonanztheorie kennt natürlich keine Phasenwechseltöne. Die Grundperiode der Teilung ist in der vorstehenden Figur der Abstand von der Mitte eines verbreiterten Zahnes bis zur Mitte des nächstfolgenden, d. h. sie umfaßt 8 Zähne und 7 Zahnlücken, zusammen 15^0, also $^1/_{24}$ des Umfanges. Bei einer Rotation pro Sekunde muß man also den Ton 24 und seine harmonischen Obertöne hören. F. A. Schulze hat nun die Koeffizienten, welche diesen Obertönen in der Fourierschen Reihe zukommen, aus der Anordnung der Zähne berechnet, und wenn die Amplitude des Grundtones = 1 gesetzt wird, so finden sich für die verschiedenen Partialtöne die nachstehenden Werte:

(Die erste Zeile enthält die Ordnungsnummern der Partialtöne, die zweite die entsprechenden Amplituden.)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1,00	1,03	2,11	1,38	1,62	2,05	6,41	5,56	3,00

Man sieht, daß der siebente und achte Partialton besonders stark sind; sie entsprechen den Tonhöhen 168 und 192, und der wiederholte Versuch ergibt deutlich, daß man in der Tat die Töne 168 und 192, nicht aber den von Hermann angegebenen Ton 180 hört. Letzteren auch nicht mit dem Resonator; während die von der Theorie geforderten Töne durch den Resonator verstärkt werden. Die Versuchsergebnisse Schulzes stimmen überein mit älteren von Pipping[2]). Seine Theorie ist auf dem Gebiete der elektrischen Schwingungen von Rogowski[3]) sowie von Straßer und Zenneck[4]) zum Teil vorweggenommen worden.

G. Jaeger[5]) hat in seiner Abhandlung „Zur Theorie der Exner-Pollakschen Versuche" ältere Versuche von Exner und Pollak behandelt, die denjenigen von Hermann im Prinzip ähnlich sind. Exner und Pollak haben z. B. einen Ton in ein Telephon aufgenommen, von diesem zu einem zweiten Telephon fortgeleitet und in die metallische Leitung, welche

1) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. 45, 283, 1914.
2) H. Pipping, Zeitschr. f. Biologie 31, N. F. S. 13 und 524, 1894.
3) H. Rogowski, Ann. d. Phys. 20, 766, 1906.
4) B. Straßer und J. Zenneck, Ann. d. Phys. 20, 759, 1906.
5) G. Jaeger, Sitzber. Wien. Akad. d. Wiss. 113, IIa, 314, 1904.

die beiden Telephone verbindet, einen Kommutator eingesetzt, der periodisch die Phasen im Empfangstelephon umkehrt. G. Jaeger behandelt also die Aufgabe, eine gewöhnliche periodische Schwingung mit plötzlichen periodischen Umkehrungen mathematisch zu behandeln. Dazu benutzt er die Tatsache, daß die Reihe

$$\sin\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi + \cdots$$

für $0 < \varphi < \pi$ den Wert $\frac{\pi}{4}$, dagegen für $\pi < \varphi < 2\pi$ den Wert $-\frac{\pi}{4}$ und damit die Eigenschaft eines Diskontinuitätsfaktors hat. Setzt man also

$$\frac{A}{m} = B\Big(\sin 2\pi mt + \frac{1}{3}\sin 6\pi mt + \frac{1}{5}\sin 10\pi mt + \cdots\Big), \quad (2)$$

so besitzt A abwechselnd die Werte $\frac{\pi mB}{4}$ und $-\frac{\pi mB}{4}$. Für einen Ton, dessen erzwungene Schwingungszahl n sein würde, wenn keine Phasenumkehr stattfände, ergibt sich mit der periodischen Phasenumkehr eine Schwingungsgleichung von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + q^2x = \frac{A}{m}\sin 2\pi nt. \quad (3)$$

Mit Gl. (2) ergibt sich daraus für die rechte Seite der Gl. (3) eine unendliche Reihe aus Gliedern von der Form

$$C\sin 2k\pi mt \cdot \sin 2\pi nt,$$

wo k jede ungerade Zahl von 0 bis ∞ sein kann. Jedes derartige Produkt läßt sich in bekannter Weise in die Summe zweier Cosinus zerlegen, und damit ergeben sich die von Exner und Pollak experimentell gefundenen Tatsachen: Bei langsamem Wechsel der Stromrichtung erhält man den Eindruck von Schwebungen; bei zunehmender Zahl sinkt die Tonstärke, und schließlich macht der Ton einem Geräusch Platz. Das letztere tritt bereits ein, wenn die Wechselzahl klein ist im Vergleich zur Schwingungszahl des primären Tones.

Die zitierte Abhandlung von F. A. Schulze enthält noch viele Einzelheiten von erheblichem Interesse, insbesondere Intensitätsbestimmungen; doch muß ich hier, wo es wesentlich darauf ankommt, die größeren Linien des Fortschrittes aufzuzeigen, für diese auf die Originalarbeit verweisen.

§ 9. Reflexionstöne. In ähnlicher Weise wie die Phasenwechseltöne hat F. A. Schulze[1]) die Reflexionstöne oder Pfaundlerschen Töne behandelt. Bekanntlich hat Baumgarten (früher schon Savart) beobachtet, daß man zwischen einem Wasserfall und einer wenige Meter davon entfernten Mauer stehend aus dem Geräusch einen Ton heraushört, dessen Höhe bei Annäherung an die reflektierende Mauer steigt. Er hat sich die Erscheinung durch die Annahme zu erklären versucht, daß jeder Geräuschimpuls das Ohr erst direkt und dann noch einmal nach der Reflexion trifft. Die Wellenlänge des Tones ist dementsprechend gleich dem Doppelten des Abstandes zwischen Ohr und Wand. Pfaundler hat die Beobachtung in eine Form gebracht, welche dem Experiment leicht zugänglich ist. Er hat an der Lochreihe einer Sirene zwei Blasröhren angebracht, von denen die eine feststand, während die andere längs der Lochreihe bewegt werden konnte. Bei einem gegebenen Abstand der beiden Anblaserohre wird, wenn die Lochscheibe rotiert, jedes einzelne Loch zweimal hintereinander angeblasen, es werden also je zwei Stöße in die Luft geschickt, deren einer von der festen, der andere von der beweglichen Anblaseröhre ausgeht, analog wie bei der Baumgartenschen Beobachtung der direkte und der reflektierte Impuls in bestimmtem zeitlichen Abstand das Ohr treffen. Je mehr die beiden Pfaundlerschen Anblaserohre einander genähert werden, desto kürzer ist die Zeit zwischen den beiden Anstößen. Nach der Periodiktheorie sollte man also einen Ton hören, der dem Abstande der beiden Anblaseröhren entspricht und der stetig in die Höhe gehen würde, wenn man die beiden Röhren einander nähert. Der Versuch ergab bei Pfaundler, daß man den Reflexionston nicht deutlich wahrnahm, wenn die beiden Röhren in konstanter Entfernung voneinander gehalten wurden, daß er aber sofort hervortrat, wenn man den Abstand und damit die Höhe des „Reflexionstones" variierte. Hermann[1]) hat den Versuch wiederholt, glaubt, die Existenz der Pfaundlerschen Töne experimentell vollständig nachgewiesen zu haben und zieht daraus den Schluß, daß es Tonempfindungen gibt, die nicht auf Resonanz beruhen können.

F. A. Schulze hat nun die Pfaundlersche Versuchsanordnung einer genauen kritischen Rechnung unterworfen und hat berechnet, welche Partialtöne nach der Resonanztheorie zu erwarten sind und welche Intensität denselben bei verschiedenen Winkelabständen der beiden Anblaserohre zukommen muß. Die genaue Beobachtung zeigt, daß das Experiment diese Folgerungen mit hinreichender Schärfe bestätigt:

1) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. **49**, 683, 1916.

1) L. Hermann, Pflügers Archiv **146**, 249, 1912.



Man hört in dem entstehenden Klang die von der Resonanztheorie geforderten Teiltöne schätzungsweise in einer Stärke, wie sie von der Resonanztheorie verlangt wird. Töne dagegen, die abweichend von der Resonanztheorie durch die Periodiktheorie gefordert werden, hört man nicht. Die Pfaundlerschen Töne bilden somit keine besondere durch die Benennung „Reflexionstöne" auszuzeichnende Klasse.

Die Pfaundlersche Versuchsanordnung, mit der auch Hermann und Schulze gearbeitet haben, ist der Beobachtung reflektierter Wassergeräusche insofern nicht ganz analog, als die einzelnen Doppelstöße bei Benutzung der Sirene ganz regelmäßig aufeinander folgen, während sie bei der ursprünglichen Baumgartenschen Beobachtung zeitlich recht unregelmäßig verteilt sind. Das hat aber zunächst nur die Wirkung, daß die Theorie sich schärfer auf den Pfaundlerschen Versuch anwenden läßt.

H. Starke[1]) hat eine Auffassung angegeben, welche die Baumgartenschen Töne auch ohne das intensive Eingehen Schulzes erklären soll. Danach ist in dem Geräusch des Wassers eine große Menge von Tönen verschiedener Höhe vorhanden, und von diesen Tönen wird jedesmal derjenige besonders stark gehört, dessen durch Reflexion an der Mauer gebildete stehende Welle im Ohr des Beobachters einen Knotenpunkt hat. Eine Erklärung dieser Art ordnet sich offenbar der Resonanztheorie unter, aber sie hat auch ein Bedenken gegen sich: Nach ihr müßte, wenn das Ohr der Mauer stetig genähert wird, der gehörte Reflexionston stetig in die Höhe steigen, oder, da vermutlich nicht alle möglichen Töne im Wassergeräusch vorhanden sind, müßte er sich in kleinen unregelmäßigen Sprüngen ändern — und das stimmt nicht mit den quantitativen Feststellungen Schulzes.

In letzter Zeit habe ich[2]) eine kleine Untersuchung veröffentlicht, welche die beiden Sätze ergibt: 1. Gleichgerichtete periodische Impulse von unendlich kurzer Dauer regen einen schwingungsfähigen Punkt zu periodischen Schwingungen an, und wenn die Periode des Punktes mit derjenigen der Impulse übereinstimmt, reagiert der erstere fast genau so wie er auf eine harmonisch variierende Kraft resonieren würde; 2. stark gedämpfte Schwingungen, die sich in kurzen Perioden wiederholen, wirken auf einen schwingungsfähigen Punkt annähernd wie unendlich kurze Impulse. Tonbildungen, wie das Summen eines Teekessels, das Anschlagen eines Kartenblattes an die Zähne eines Zahnrades usw. können also nicht für die Periodiktheorie in Anspruch genommen werden, sondern ordnen sich der Resonanztheorie unter.

1) H. Starke, Verh. d. D. Phys. Ges. **10**, 285, 1908.
2) E. Budde, diese Zeitschr. **18**, 69, 1917.

Damit ist denn wohl der letzte Einwand gegen die Resonanztheorie gefallen, der aus Beobachtungen von der Art der hier besprochenen geschöpft werden könnte.

§ 10. Kombinationstöne. Bekanntlich hat schon Helmholtz[1]), wenn auch nicht mit voller Konsequenz, zwei Arten von Kombinationstönen unterschieden:

1. Objektive, die unabhängig vom Ohr existieren und sich leicht durch Resonatoren verstärken lassen,

2. subjektive, die bei der gewöhnlichen Beobachtung erst im Ohr zustande kommen.

Die Unterscheidung zwischen Summations- und Differenztönen ist demgegenüber für das Folgende weniger wichtig und wird hier als hinreichend bekannt und unbestritten nicht besonders betont. Dagegen besteht in der Tat ein Unterschied zwischen den beiden angeführten Arten, der sich im Laufe der Zeit etwas verwischt hat, der aber, wenn keine Unklarheit eintreten soll, von vornherein im Auge behalten werden muß. Nur entspricht, wie schon Waetzmann hervorgehoben hat, die Trennung in subjektive und objektive Töne nicht den wirklichen Verhältnissen. Es sind vorläufig zu unterscheiden:

I. Kombinationstöne erster Art; sie existieren im Luftraum objektiv und, damit das resonierende Organ auf sie reagiere, braucht ihm nicht die Eigenschaft zugeschrieben zu werden, daß es an sich eine nicht lineare Schwingungsgleichung besitzt;

II. Kombinationstöne zweiter Art, die nur wahrnehmbar werden, wenn das resonierende Organ an sich eine nicht lineare Schwingungsgleichung hat.

In beiden Fällen wird vorausgesetzt, daß zwei primäre Tonquellen von den Schwingungszahlen m und n gegeben seien.

ad I. Töne der ersten Art entstehen nach Helmholtz vor allem bei Blasinstrumenten, die derart gebaut sind, daß dieselbe Luftmasse von den beiden Primärtönen in heftige Erschütterung versetzt wird. Z. B. in der mehrstimmigen Sirene, bei welcher zwei Löcherreihen aus demselben Windkasten gleichzeitig angeblasen werden. Ebenso beim Harmonium, wenn zwei Töne ihren Wind aus einem gemeinschaftlichen Blasebalg beziehen.

Waetzmann[2]) hat entsprechende Töne erzeugt, indem er die Stiele zweier Stimmgabeln aneinanderdrückte; Hermann[3]) hat zwei König-

1) H. Helmholtz, l. c. Beilage XII.
2) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. **20**, 837, 1906.
3) L. Hermann, Ann. d. Phys. **25**, 697, 1908.

sche longitudinal schwingende Glasstäbe auf ein und demselben Brett befestigt und dabei kräftige Kombinationstöne erhalten. Er hat auch den Waetzmannschen Versuch mit Erfolg dahin modifiziert, daß er zwei Stimmgabeln auf ein Tannenholzbrett schraubte.

In all diesen Fällen werden Resonatoren, die auf einen „Kombinationston" abgestimmt sind, zum Mitschwingen gebracht.

Sieht man sich nun aber die physikalischen Bedingungen dieser Versuche näher an, so erkennt man sofort ihre gemeinschaftliche Eigentümlichkeit: Die beiden primären Tonerzeuger sind mechanisch miteinander gekoppelt. Im Fall der Sirene und des Harmoniums mit einfachem Blasebalg funktioniert die Luft der Windkästen als koppelnde Verbindung, im Fall der Glasstäbe und aufgeschraubten Stimmgabeln die tragenden Bretter. Die fraglichen Töne unterliegen daher theoretischen Betrachtungen über Kopplung von der Art, wie sie M. Wien[1]) in seiner Abhandlung „Über die Rückwirkung eines resonierenden Systems" gegeben hat. (Wien braucht in derselben das Wort Resonanz in anderem Sinne als es hier geschehen ist, man könnte es bequem durch „Unisono" ersetzen; doch kommt eben das Unisono für die hier vorliegenden Versuche nicht in Betracht.) Tatsächlich enthält der letzte Teil der Beilage XVI von Helmholtz eine Kopplungsrechnung unter vereinfachten Bedingungen. Ich möchte danach vorschlagen, die fraglichen Töne aus dem Umfang des Begriffes Kombinationstöne überhaupt auszuscheiden und sie als Kopplungstöne zu bezeichnen. Da sie objektiv in der das Ohr umgebenden Luftmasse vorhanden sind, werden sie als objektive Töne vom Ohr aufgenommen und unterscheiden sich für die Resonanztheorie nicht von gewöhnlichen Tönen anderer Entstehungsweise.

Ein Versuch von Hermann ist noch besonders zu besprechen. Nach Hermann entstehen „Kombinationstöne" erster Art in ein und demselben Harmonium auch dann, wenn jede der beiden primär tönenden Zungen von einem besonderen Windkasten gespeist wird; sie kommen aber nicht zustande, wenn die beiden Zungen zwei getrennten Harmoniums angehören. Eine Erklärung, die im Anschluß an das Vorstehende naheliegt, ist gegeben, wenn man annimmt, daß im ersten Fall der Holzkörper des Harmoniums durch seine Schwingungen die mechanische Kopplung zwischen den beiden Zungen herstellt. Hermann selbst nimmt an, im trocknen Holz des Harmoniumkörpers seien Partien vorhanden, die zu unsymmetrischer Schwingung neigen und dadurch zur Entstehung von wirklichen Kombinationstönen (siehe ad II) Veranlassung geben. Eine Entscheidung zwischen den beiden Erklärungsarten dürfte wohl nicht ohne besondere Versuche zu treffen sein. Jedenfalls enthält der Versuch eine Andeutung, daß man unter Umständen nicht mit reinen Kopplungs- oder Kombinationstönen, sondern mit einem Gemisch von beiden zu tun haben kann.

ad II. Sind die beiden primären Tonerreger nicht gekoppelt, so wirken auf das resonierende Objekt zwei voneinander unabhängige Wellenzüge. Es darf als bekannt vorausgesetzt werden, daß diese keinen Kombinationston hervorbringen, wenn das resonierende Objekt für sich eine symmetrische (lineare) Schwingungsgleichung von der Gestalt

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + q^2x = F \sin 2\pi mt + G \sin(2\pi nt + c) \quad (4)$$

hat. Sollen also Kombinationstöne durch die Resonanz zum Vorschein kommen, so muß ein resonierendes Objekt vorhanden sein, in dessen Schwingungsgleichung ein nichtlineares Glied eingeht. Die Luft kommt dafür nicht in Betracht, weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Gasen nicht in merklichem Grade von der Intensität abhängt. Waetzmann[1]) hat experimentell nachgewiesen, daß auch die Schwingungsgleichung einer tropfbaren Flüssigkeit (Wasser) nicht merklich von der Linearität abweicht.

Helmholtz (Beilage XII) hat, wie bekannt, angenommen, es sei im menschlichen Ohr ein mitschwingendes Organ vorhanden, bei welchem die elastische Kraft nicht einfach mit x proportional ist, sondern ein Glied mit x^2 enthält. Seine Schwingungsgleichung lautet demgemäß, wenn zwei Primärtöne mit den Amplituden F und G einwirken (Differentiationen nach der Zeit sind durch Striche bezeichnet)

$$x'' + ax + bx^2 = F \sin mt + G \sin(nt + c). \quad (5)$$

Seine allbekannte Integrationsmethode beruht darauf, daß er x in eine Potenzreihe entwickelt. Gegen sein Verfahren sind verschiedentlich berechtigte Einwürfe erhoben worden[2]). Erstens war die Konvergenz der von ihm benutzten Reihe nicht sichergestellt, zweitens hat er in seine Gleichung kein Dämpfungsglied aufgenommen; ein solches ist aber wesentlich, da es sich bei der Resonanz in erster Linie um erzwungene Schwingungen handelt, deren Eintreten und Be-

1) M. Wien, Wied. Ann. **61**, 151, 1897.

1) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. **33**, 1209, 1910.
2) Vgl. E. Waetzmann, „Zur Helmholtzschen Resonanztheorie", Habilitationsdissertation und Ann. d. Phys. **24**, 75, 1907.

trag von der Dämpfung abhängt. Der Helmholtzsche Ansatz ist wesentlich erweitert worden von Cl. Schaefer[1]). An die Stelle der Gl. (5) setzt Schaefer einen allgemeineren Ansatz von der Form

$$x'' + q^2 x + \sum a_{\alpha\beta} x^{(\alpha)} x^{(\beta)} = F \cos mt + G \cos nt, \quad (6)$$

in welchem $x^{(\alpha)}$ und $x^{(\beta)}$ die αte bzw. βte Ableitung von x nach der Zeit bedeuten und das Summenzeichen eine endliche Summation andeutet. (Für $\alpha = \beta = 0$ reduziert sich die Gleichung auf die Helmholtzsche.) Schaefer zeigt, daß diese Gleichung sich durch eine der Helmholtzschen ganz ähnliche Reihenentwicklung integrieren läßt. Sie behält diese Eigenschaft auch dann, wenn man ein gewöhnliches Dämpfungsglied $2bx'$ auf der linken Seite zufügt. Die Konvergenz der von ihm verwendeten Reihe ist für hinreichend kleine Anfangswerte von Poincaré dargetan. Die Integration der Differentialgleichung führt in ganz ähnlicher Weise, wie bei Helmholtz selbst, auf Kombinationstöne, in erster Annäherung auf solche von den Schwingungszahlen $m-n$ und $m+n$. Es ergibt sich also, daß jede Differentialgleichung von der Gestalt (6), die sich physikalisch interpretieren läßt, eine mögliche Theorie der Kombinationstöne liefert.

Ein erstes Beispiel dieser Art erhält man, wenn man setzt

$$x'' + q^2 x + b x'^2 = F \cos mt + G \cos nt. \quad (7)$$

Das Glied bx'^2 läßt sich als Reibungsglied deuten, das dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Nur muß man bei dieser Deutung berücksichtigen, daß die Reibungskraft mit der Geschwindigkeit das Vorzeichen wechselt; betrachtet man also b als positiven Absolutwert, so muß die Reibungskraft gleich bx'^2 gesetzt werden, solange die Geschwindigkeit des schwingenden Punktes negativ ist; bei der Rückschwingung aber, wo die Geschwindigkeit positiv ist, muß das Reibungsglied lauten $-bx'^2$. Die Durchführung der Integration unter diesen Bedingungen liefert die Kombinationstöne, speziell diejenigen erster Ordnung von den Schwingungszahlen $m-n$ und $m+n$. Das Bezeichnende an diesem Fall ist, daß dabei weder Asymmetrie noch große Amplitude des resonierenden Objektes zur Bildung der Kombinationstöne erforderlich sind; es genügt vielmehr eine dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionale Dämpfung, wie sie z. B. bei in Luft schwingenden Platten auftritt.

Cl. Schaefer behandelt ferner eine Differentialgleichung, welche sich physikalisch deuten läßt als Schwingungsgleichung eines mit Flüssigkeit gefüllten Röhrensystems, das an einem Ende durch eine elastische Membran verschlossen ist. Als ein solches Röhrensystem ist aber die Schnecke anzusehen, der das runde Fenster als elastischer Verschluß dient. Sonach könnte das Schneckenwasser an sich Veranlassung zu Kombinationstönen geben. Doch wird diese Folgerung etwas unsicher dadurch, daß nach Schaefers eigener Rechnung, wenn ein Kombinationston zustandekommen soll, ein merklicher Größenunterschied zwischen dem Anfangs- und dem Endquerschnitt des fraglichen Röhrensystems vorhanden sein muß. Ob ein solcher Unterschied zwischen dem ovalen und dem runden Fenster beim Durchschnitt der Menschen nachweisbar ist, muß wohl vorläufig dahingestellt bleiben; auch setzt die ganze Rechnung eine Flüssigkeit voraus, die in ein starres Röhrensystem eingeschlossen ist, und es kann wohl nicht mit Sicherheit behauptet werden, daß sie auch dann noch gilt, wenn die eine Hälfte des Rohres, wie in der Schnecke, von der anderen durch eine elastische Zwischenwand getrennt ist.

F. A. Schulze[1]) hat eine Rechnung angestellt, die mit der Schaeferschen Rechnung zu Gl. (7) Ähnlichkeit hat. Er untersucht nämlich eine Differentialgleichung, die der Helmholtzschen darin ähnlich ist, daß sie ein quadratisches Glied bx^2 enthält; er nimmt aber an, daß die Konstante b bei jedem Durchgang durch die Ruhelage einen Vorzeichenwechsel erleidet. Er findet, was nach dem Obigen selbstverständlich ist, Kombinationstöne. Auch hier ist in der Schwingungsgleichung keine Asymmetrie mehr vorausgesetzt, sondern nur eine Größe der Amplitude, welche die Abweichung von der Linearität bedingt.

Ferner hat Waetzmann[2]) ein neues Element in die theoretische Betrachtung gebracht. Eine Membran wird beim Auftreffen kurzer Schwingungen durch den Schalldruck einseitig verschoben, sobald die Schwingungszahl der auftreffenden Welle größer ist als die Eigenschwingungszahl der Membran. Durch den Schalldruck kommt also eine gewisse Asymmetrie in die Membran und Waetzmann hat auch nachgewiesen, daß eine Membran bei hinreichend starker Erregung außer der einseitigen Ausbuchtung erzwungene Schwingungen zeigt. Danach können also auch durch den Einfluß des Schalldruckes Kombinationstöne entstehen.

Eine ältere Theorie von W. Voigt, die von

1) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. **33**, 1216, 1910.

1) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. **34**, 817, 1911.
2) E. Waetzmann, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 424, 1914.



Auerbach[1]) in Winkelmanns Handbuch wieder aufgenommen ist, schließt sich der Periodiktheorie an und darf nach allem Obigen als widerlegt angesehen werden; vgl. dazu auch Waetzmann in dieser Zeitschrift **12**, 237, 1911.

Die bisher betrachteten theoretischen Erörterungen bedienen sich sämtlich der Vereinfachung, welche darin liegt, daß das schwingende Objekt durch einen elastisch befestigten Massenpunkt ersetzt wird. Bleiben wir zunächst bei dieser Vereinfachung, so wird die theoretische Auffassung der Kombinationstöne schon jetzt eher durch einen Überfluß als durch Mangel an möglichen Theorien erschwert. Es ist nun zu untersuchen, wie sich die Erfahrung dazu stellt.

Vorher ist noch folgendes zu bemerken: Die Experimentatoren haben sich vielfach mit der Frage befaßt, ob die Kombinationstöne der hier behandelten Art objektiv oder subjektiv seien. Mir scheint die Fragestellung nicht ganz den Verhältnissen angepaßt. Die Kopplungstöne sind im Luftraum immer objektiv vorhanden. Schließen wir sie aus, so sind die eigentlichen Kombinationstöne in der schwingenden Luft nicht vorhanden, sie werden erst objektiv am resonierenden Objekt, und zwar auf Grund der besonderen Eigenschaft dieses Objektes, eine nichtlineare Schwingungsgleichung zu haben. Ob das Objekt nun im Kopf liegt oder außerhalb desselben, das ist für die Theorie seiner Schwingung offenbar unwesentlich; eine Telephonplatte z. B. oder ein singender Lichtbogen (siehe unten), an dem sich die Kombinationstöne objektiv nachweisen lassen, spielt dieselbe Rolle wie ein außerhalb des Kopfes gelegenes Ohr. Man kann hiernach, wenn man will, die Kombinationstöne, welche erst im Ohr gebildet werden, als subjektiv, und diejenigen, welche außerhalb des Ohres entstehen, als objektiv bezeichnen, muß aber dabei im Auge behalten, daß sie im Grunde physikalisch gleichartig sind. Nur ein Unterschied existiert notwendig. Treten zwei im Luftraum vorhandene Einzeltöne erst im Ohr zusammen, so ist das Ergebnis die Bildung von Kombinationstönen im Ohr, und diese werden nicht wie ein von außen kommender Ton „angehört", sondern sie werden direkt in Nervenreiz umgesetzt und als solcher wahrgenommen. Zwei verschiedene Kombinationstöne, die erst im Ohr gebildet sind, können also im Ohr nicht unter sich noch weitere Kombinationstöne bilden. Wenn dagegen eine Telephonplatte Kombinationstöne bildet, so liegen dieselben zunächst objektiv außerhalb des Ohrs und werden im eigentlichen Sinne gehört. Sie existieren objektiv in der Luft, und demgemäß müssen auch zwei Kombinationstöne, die von zwei verschiedenen Telephonplatten ausgehen, im Ohr noch einmal weitere Kombinationstöne bilden können. Stumpf[1]) gibt als Versuchsresultat an, daß Kombinationstöne weder unter sich noch mit Primärtönen neue Kombinationstöne bilden. Die sehr kurze Notiz ist so gehalten, als ob der Verfasser die Primärtöne direkt auf sein Ohr habe wirken lassen. Das stimmt mit dem ersten der vorstehenden Sätze, berührt aber den zweiten nicht.

Betrachten wir nun zunächst das menschliche Ohr. Helmholtz sah das Trommelfell als diejenige Membran an, die ihrer ganzen Struktur nach zu asymmetrischen Schwingungen befähigt sei. Es liegt auch wohl heute noch kein Grund vor, daran zu zweifeln, daß asymmetrische Schwingungen des Trommelfells im normalen Ohr zustande kommen. Doch sind schon seit 1891 Fälle in nicht geringer Zahl bekannt, wo Personen ohne Trommelfell Kombinationstöne hörten. Hier ist nun aber zu bemerken, daß nach der unter A. § 4 gegebenen Darstellung die einzelne Basilarfaser mit dem aufgesetzten inneren Cortischen Pfeiler zusammen ein Schwingungselement bildet, welches unzweifelhaft nicht vollkommen symmetrisch gebaut ist und welches demgemäß auch asymmetrische Schwingungen machen kann. Demnach fehlt auch bei Personen ohne Trommelfell der asymmetrische Apparat nicht, den die ursprüngliche Helmholtzsche Theorie voraussetzt. Soweit die Kopfknochen für die Schalleitung in Betracht kommen, ist gleichfalls vollkommene Symmetrie nicht vorauszusetzen, und das gleiche gilt für die harte Hirnhaut, die nach einer merkwürdigen Beobachtung von Iwanoff[2]) den Schall besser leiten soll als die Knochen.

Ein hübsches Analogon zum Trommelfell hat Waetzmann[3]) geliefert. Er bezieht die Mündung eines Helmholtzschen Resonators mit einer Glyzerinseifenlamelle. Ist der Resonator auf den Differenzton zweier unabhängigen primären Töne gestimmt, so gerät die Lamelle in Schwingungen, die an sich allerdings zu schwach sind, um wahrgenommen zu werden; aber wenn man die Kombinationsschwingungen mit einem benachbarten primären Ton schweben läßt, so werden diese Schwebungen an der Lamelle sichtbar. Ist die Seifenlamelle weich und hat nahe der Mitte ein Tröpfchen, so ahmt sie offenbar das Trommelfell nach, wenn sie etwas

1) F. Auerbach, Handbuch **2**, 636, 1909.

1) C. Stumpf, Berl. Sitzungsberichte 1907, S. 1.
2) A. Iwanoff, Zeitschr. f. Psychologie **31**, 266, 1903.
3) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. **20**, 837, 1906.



gegen die Horizontale geneigt wird. Aber auch ohne das Tröpfchen hat sie notwendig eine leichte Asymmetrie; es dürfte an sich schwierig sein, eine vollkommen symmetrische Seifenlamelle über eine Öffnung zu ziehen, und außerdem hat die durch sie abgeschlossene Luft des Resonators andere Schwingungsbedingungen als die Luft in der freien Umgebung.

Sogenannte objektive Kombinationstöne, d. h. also Kombinationstöne, bei denen der resonierende Rezipient außerhalb des menschlichen Kopfes beobachtet werden kann, sind ferner dargestellt worden, indem empfindliche Flammen[1]), Membranen, singende Bogenlampen[2]) als Resonatoren benutzt wurden.

Karl Schaefer[3]) hat die Primärtöne von Stimmgabeln oder Lippenpfeifen in einem Mikrophon aufgefangen und sie zu einem Stentortelephon weiter geleitet. Es ergaben sich deutliche Differenz- und Summationstöne, die natürlich an der Telephonplatte als objektiv vorhanden nachgewiesen werden konnten.

An diesen Versuch schließt sich eine lehrreiche Untersuchung von Waetzmann[4]). Eine für sich untersuchte Telephonmembran ergab symmetrische Eigenschwingungen und dementsprechend bei Zuführung zweier primärer Töne keinen merklichen Kombinationston. Leitet man aber der Telephonplatte die beiden Töne durch ein Mikrophon zu, so liefert sie deutliche Kombinationstöne. Zur näheren Untersuchung des letzteren Falles wurden der Telephonplatte die Primärtöne durch das Mikrophon einzeln zugeleitet und photographisch registriert. Die entstehenden Kurven sind auffallend unsymmetrisch; der mittlere Widerstand des Mikrophons ist während der Bewegung ein anderer als in der Ruhe. Im Mikrophon-Telephonkreis ist also das Mikrophon derjenige Rezipient, der eine kräftige Asymmetrie herbeiführt.

Endlich haben Waetzmann und Mücke[5]) sich die Aufgabe gestellt, Klangkurven herzustellen, welche Kombinationstöne enthalten. Stimmgabeln von 200 bis 4000 Schwingungen, Orgelpfeifen von 128 bis 1024 Schwingungen, und hauptsächlich kleine Glaspfeifen von etwa 1800 bis 3000 Schwingungen wurden benutzt. Die Primärtöne wurden durch ein Mikrophon einem lautsprechenden Telephon zugeleitet, dessen Empfindlichkeit durch Verstellen seiner Membran verändert werden konnte. Die Schwingungen dieser Telephonmembran wurden mit Hilfe einer empfindlichen Spiegelanordnung photographiert, die Kurven ausgemessen und nach Fourier analysiert. Mit den Glaspfeifchen wurden überraschend starke Differenztöne wahrgenommen, die in den resultierenden Kurven deutlich hervortraten.

1) Belas und Barrett, Proc. Roy. Dublin Soc. N.S. **10**, June 1905.
2) E. Waetzmann, diese Zeitschr. **8**, 316, 1907.
3) K. L. Schaefer, Ann. d. Phys. **17**, 572, 1905.
4) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. **42**, 729, 1913.
5) E. Waetzmann und G. Mücke, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 59, 1913.

Waetzmann[1]) hat objektive Kombinationstöne in einer Telephonmembran hervorgebracht, wenn dieselbe unter der Luftpumpe auf einem Druck von wenigen Zentimetern gehalten wurde, also unter Umständen, wo der quadratische Widerstand der Luft gegen die Plattenbewegung wohl zu vernachlässigen ist. Dieser Versuch spricht offenbar nicht gerade für die Anwendbarkeit der Gl. (7).

Die im Vorstehenden zusammengestellten Erfahrungstatsachen vertragen sich offenbar bei weitem am besten mit der ursprünglichen Helmholtzschen Theorie, wie sie in Gl. (5) ausgedrückt ist. Es treten aber Schwierigkeiten hervor, sobald man die Intensitätsverhältnisse der Kombinationstöne ins Auge faßt. Die Differenztöne erster Ordnung spielen dabei die wichtigste Rolle und sind hier etwas näher zu betrachten.

a) Von den beiden Tönen m und n sei m der höhere. Ist dann $m > 2n$, so ist $m - n > n$. Der Differenzton $m - n$ fällt also dann zwischen m und n. Diese „zwischenliegenden" Differenztöne sind auffallend schwach oder gar nicht hörbar, und die bisher erörterten Theorien liefern keine Erklärung dieser Erscheinung. Es werden wohl neue Versuche notwendig sein, welche die betreffenden Tatsachen für eine Reihe von Primärtönen in verschiedener Höhe genau festlegen, wenn man sich in ihnen zurechtfinden will.

b) Aus der Helmholtzschen Gleichung ergibt sich: Sind F und G die Amplituden der Primärtöne, so ist die Amplitude ihres Differenztones proportional mit FG. Sind also F und G schwach, so würde ihr Produkt sehr schwach sein, bei leisen Primärtönen sollte der Differenzton unwahrnehmbar werden. Dem widerspricht die Erfahrung; es ist seit langem bekannt, daß z. B. zwei ausklingende Stimmgabeln einen gut wahrnehmbaren Differenzton liefern. Dieses Argument ist verschiedentlich und namentlich wiederholt von Hermann gegen die Helmholtzsche Theorie ins Feld gefürht worden. Waetzmann[2]) hat dagegen mit Recht bemerkt, daß es überhaupt eine gewagte Sache sei, aus physiologischen Empfindungen Schlüsse auf physikalische Intensitäten zu ziehen; das

1) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. **35**, 378, 1911.
2) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. **28**, 1067, 1909.

genügt aber wohl nicht zur Klarstellung der Frage. Offenbar wären Messungen wünschenswert, welche die Intensität der Primärtöne und diejenige des Kombinationstones unter Benutzung von Mikrophon-Telephonkreisen oder ähnlichen Vorrichtungen objektiv feststellen. Damit wäre wenigstens ein Anhalt für den Vergleich der physiologischen mit der physikalischen Intensität gegeben, wenn auch die Schwierigkeit der Schätzung von physiologischen Intensitäten stets bestehen bleiben wird.

c) Die Beobachtung zeigt, und namentlich die letzterwähnte Untersuchung von Waetzmann und Mücke bestätigt ganz deutlich, daß die Kombinationstöne um so stärker hervortreten, je höher die Primärtöne liegen. Wählt man Primärtöne, deren Schwingungszahl oberhalb des M. Wienschen Empfindlichkeitsmaximums liegt, so kann schon die Gestalt der Empfindlichkeitskurve herangezogen werden, um wenigstens einen Teil dieser Erscheinung zu erklären; bei Galtonpfeifen und bei longitudinal schwingenden Glasstäben kann es vorkommen, daß der Differenzton von einer Partie der Basilarmembran aufgenommen wird, die bedeutend empfindlicher ist als die Region, in welche die Primärtöne fallen. Dieses Argument versagt aber offenbar, wenn nachgewiesen ist, daß die beschriebene Abhängigkeit des Differenztones sich auch bei Primärtönen von etwa 3000 oder weniger Schwingungen findet. Die Helmholtzsche Gleichung gibt an sich keine Erklärung der Erscheinung.

Die Diskussion der Gl. (6) zeigt nun, daß alle die speziellen Gleichungen, welche aus ihr hervorgehen, mit der Helmholtzschen Gleichung (5) eine Eigenschaft gemein haben: In den Ausdruck für die Amplitude der Kombinationstöne erster Ordnung geht das Produkt FG aus den Amplituden der Primärtöne ein. Also bleibt auch die verallgemeinerte Theorie von Cl. Schaefer dem Hermannschen Einwurf bis auf weiteres ausgesetzt. In einer Beziehung aber zeigt sich die Schaefersche Gl. (7) der Helmholtzschen überlegen: Während die Helmholtzsche Gleichung Kombinationstöne erster Ordnung mit dem konstanten Faktor FG liefert, ergibt die Schaefersche solche mit dem Faktor $FGmn$; die letztere würde sich also den Beobachtungen von Waetzmann und Mücke erheblich besser anschließen als die erstere; doch bleibt demgegenüber zu betonen, daß die übrigen Erfahrungstatsachen, welche vorhin erwähnt wurden, sich besser mit dem Helmholtzschen Ansatz vertragen.

Es bestehen also noch Schwierigkeiten, möglicherweise Widersprüche, von denen es fraglich ist, ob sie gelöst werden können, wenn man nicht auf die Vereinfachung verzichten will, die darin liegt, daß die Gleichung des resonierenden Objektes durch diejenige eines elastisch befestigten Punktes von einem Freiheitsgrad ersetzt wird. Demgemäß ist an die Theorie die Forderung zu stellen, daß sie die Resonanzgleichungen eines saiten- oder plattenförmigen Objektes aufstelle. Cl. Schaefer und E. Juretzka[1]) haben sich der Aufgabe unterzogen, die Grundzüge einer solchen verschärften Theorie zu geben. Die allgemeine Behandlung des Saitenproblems (das elastische Potential wird als Funktion dritten Grades der Deformationskomponenten angesetzt) führt auf sehr verwickelte Differentialgleichungen. Schaefer und Juretzka haben deswegen eine Vereinfachung eingeführt, welche darin besteht, daß sie, analog wie in Gl. (7), in die gewöhnliche Schwingungsgleichung der Saite ein quadratisches Dämpfungsglied einführen und die Amplituden der Primärtöne als konstant betrachten. Dann lautet die Schwingungsgleichung der Saite (η die Elongation)

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - S \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \pm k \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 = F \cos mt + G \cos nt \tag{8}$$

mit den Randbedingungen

$$\eta(0) = \eta(1) = 0.$$

Mit derselben Vereinfachung ergibt sich für eine quadratische Membran, die in der xy-Ebene liegt und die Kantenlänge 1 hat, die Differentialgleichung (ζ die Elongation)

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - S\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) \pm k \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 = F \cos mt + G \cos nt \tag{9}$$

mit der Randbedingung, daß ζ am Rande überall gleich Null ist. Die Integration wird analog wie bei Helmholtz durch eine Reihenentwicklung vorgenommen und führt auf Kombinationstöne erster Ordnung, deren Amplitude wiederum den Faktor $FGmn$ enthält. Die Theorie zeigt also wieder, daß die Amplituden der Kombinationstöne mit der Höhe der Primärtöne ansteigen, wenn die Reibung dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Außerdem aber liefert sie Faktoren, welche von den Schwingungseigenschaften der freien Saite bzw. der freien Membran abhängen, und gibt damit erste Hinweise darauf, daß und wie die Eigenschaften der benutzten Membran erst für sich zu studieren und dann mit den Eigenschaften der an ihnen erzeugten Kombinationstöne in Verbindung zu setzen sind. Modifikationen der Differentialgleichung (9) wären dabei nicht auszuschließen.

1) Cl. Schaefer und E. Juretzka, Ann. d. Phys. 41, 581, 1913.



C. Nachträge.

§ 11. **Dämpfung.** Im Laufe der Zeit sind zahlreiche Versuche über die Dämpfung der resonierenden Organe des Ohrs angestellt worden. Die Deutung derselben beruht aber immer auf der Annahme, daß die einzelnen Resonanzelemente gesondert schwingen können; nach Abschnitt A kann diese Annahme offenbar nicht aufrechterhalten werden, und es muß eine eingehende Umdeutung der Experimente vorgenommen werden, wenn man aus ihnen Schlüsse ziehen will. Deshalb gehe ich hier auf die Dämpfungsversuche nicht näher ein.

§ 12. **Theorie von Lux.** Als das Vorstehende nahe abgeschlossen war, erhielt ich Kenntnis von einer handschriftlichen Abhandlung des Herrn Fritz Lux in Mannheim. Dieselbe enthält einen neuen Grundgedanken, der mir durchaus beachtenswert erscheint und den ich hier mit Erlaubnis des Verfassers heraushebe.

An ein festes Rohr MN (Fig. 8) sei eine

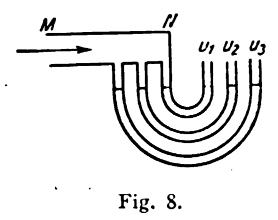


Fig. 8.

Reihe von U-Röhren u_1, u_2, u_3 usw. von verschiedener Länge angesetzt und mit Wasser gefüllt. Das Wasser in der einzelnen U-Röhre hat natürlich seine bestimmte Schwingungsperiode. Wird die Luft in dem Rohr MN einem periodischen Druck ausgesetzt, so werden die sämtlichen Wasserfüllungen kleine Bewegungen machen. Wenn aber die Periode des Druckes mit der Periode eines bestimmten U-Rohres u_n übereinstimmt, so wird die Bewegung des Wassers in diesem Rohr offenbar resonanzmäßig verstärkt und das Wasser von u_n wird in kräftige stehende Schwingungen geraten. Anstatt nun aber das Wasser auf verschiedene U-Röhren zu verteilen, kann man den Apparat auch so einrichten, wie Fig. 9 zeigt. Ein Bassin $ABCD$ wird bis zur Höhe AD mit Wasser gefüllt, auf welches von M her ein periodischer Druck geübt werden kann. Das Bassin ist durch eine feste Wand EF in zwei Teile geteilt und in dieser festen Wand sind Löcher 1, 2, 3 usw. angebracht, durch welche die beiden Hälften des Wassers miteinander kommunizieren können. Es liegen dann also gewissermaßen mehrere mögliche kommunizierende Röhren übereinander. Die erste geht von A durch das Loch 1 nach D

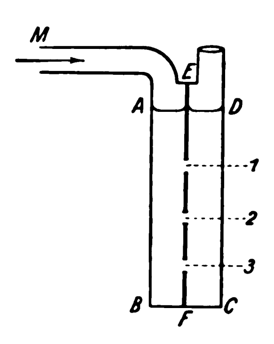


Fig. 9.

hin, die zweite ebenso von A durch das Loch 2 nach D usw. Es können sich also Schwingungen des Wassers durch die verschiedenen Löcher hindurch ausbilden, und wenn die Periode einer solchen Schwingung, z. B. die Periode der Schwingung $A2D$ mit der Periode eines von M herkommenden Druckantriebes übereinstimmt, so zeigt auch in diesem Falle das Wasser eine Resonanzschwingung, die auf dem Wege durch das Loch 2 erfolgt. Entsprechendes gilt selbstverständlich für jedes einzelne Loch.

Man kann nun noch einen Schritt weitergehen und die durchlöcherte Wand EF durch eine nicht durchlöcherte, aber elastische Zwischenwand ersetzen. Herr Lux teilt mit, er habe experimentell festgestellt, daß auch in diesem Falle Resonanzschwingungen gebildet werden. Es bildet sich eine verstärkte Schwingung aus, die von A über irgendeinen Punkt G der Zwischenwand nach D hingeht, wenn die Lage des Punktes G so bemessen ist, daß die U-förmige Wassersäule AGD dieselbe Schwingungsperiode hat wie der periodische, von M her erfolgende Antrieb. Herr Lux hat diesen Antrieb dadurch hergestellt, daß er in die linke Hälfte des Gefäßes $ABCD$ oben eine kleine feste Scheibe einführt, die auf und nieder bewegt wird und dann ähnlich wie der Steigbügel auf das Wasser wirkt. Dieser Versuch läßt sich nun unmittelbar auf die Verhältnisse in der Schnecke übertragen, nur mit folgendem Unterschied: Bei dem beschriebenen Experiment liefert die Schwere die rücktreibende Kraft, von der die Resonanz abhängt; in der Schnecke ist die Schwerewirkung offenbar zu vernachlässigen, dafür haben wir aber als rücktreibende Kraft die Elastizität der Membran des runden Fensters in Verbindung mit derjenigen der Basilarmembran. Es können sich also in der Schnecke Resonanzschwingungen des Wassers ausbilden, die vom Steigbügel ihren Ausgang nehmen, durch eine bestimmte Region des Ductus cochlearis (mit Reißnerscher Membran, Basilarmembran und Cortischen Organen) auf das Wasser der Scala tympani übergehen

und in diesem zum runden Fenster zurückkehren. Für die mechanischen Verhältnisse dieser Schwingungen wird auch die Elastizität derjenigen basilaren Schwingungselemente mitwirken, durch welche die Schwingung hindurchgeht. Das mit der Tonhöhe variable Element wird teils durch die Elastizität der Basilarfasern usw., teils durch die verschiedene Trägheit der Wasserschichten von verschiedener Länge hineingebracht. Die Theorie ordnet sich offenbar der Resonanztheorie unter; die von ihr geforderte Schwingung des Wassers kombiniert sich mit der Eigenschwingung der affizierten Basilarelemente. Eine theoretische und experimentelle Durcharbeitung des Grundgedankens ist wünschenswert und würde ihre Aufmerksamkeit besonders auf diese Kombination zu richten haben. Vorläufig gibt die Theorie von Lux zum erstenmal einen Anhalt für die Erklärung einer Tatsache, die von manchen Autoren für paradox gehalten wurde, der Tatsache nämlich, daß die kürzesten Fasern der Basilarmembran proximal zu den Fenstern liegen, während die längeren einen größeren Abstand von den Fenstern haben. Die Zweckmäßigkeit dieser Einrichtung leuchtet sofort ein, wenn man sich sagt, daß die resonierende Wasserdoppelsäule um so kürzer sein muß, je höher der erregende Ton ist.

(Eingegangen 17. April 1917.)

BESPRECHUNGEN.

M. Geitel, Schöpfungen der Ingenieurstechnik der Neuzeit. (Aus Natur u. Geisteswelt Bd. 28). 8⁰. 106 Seiten, 32 Abbildungen, Leipzig, B. G. Teubner. 1914. M. 1.25. geb. M. 1.50.

In großen Zügen wird ein Bild der berühmtesten Bauwerke, maschinellen Anlagen, Wasser- und Luftfahrzeuge entworfen. Es wird eingehend auseinandergesetzt, welcher Aufwand an wissenschaftlich geschulter Geistesarbeit und praktischer Tatkraft nötig waren, um die neuzeitlichen technischen Anlagen ins Leben zu rufen. Beim Durchblättern des Buches wird auch der unserer Technik fernstehende Leser erkennen, daß fast jeder wissenschaftliche Fortschritt einen praktischen Erfolg haben kann, wenn er mit der nötigen Tatkraft und Sachkenntnis der Anwendung zugänglich gemacht wird. Andererseits sieht man auch, daß nur eine auf wissenschaftlicher Erkenntnis und Gedankenschärfe beruhende Ingenieursarbeit wirklich erhebliche technische Fortschritte zeitigen kann. H. Thoma.

Zum Andenken an Alfred Kleiner. Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich. 1916. Nr. 18. 144 S. Mit 2 ganzseitigen Bildern. Zürich, Gebr. Leemann & Co. 1916. M. 3.60.

Die Physikalische Gesellschaft Zürich hatte beabsichtigt, ihrem Ehrenmitgliede Alfred Kleiner bei seinem Scheiden aus dem Amte als Professor für Experimentalphysik an der Universität Zürich, das er 37 Jahre lang innegehabt hatte, ein Heft ihrer „Mitteilungen“ als Ehrengabe zu überreichen. Der Tod des verdienten Mannes vereitelte diese Absicht, und die Physikalische Gesellschaft konnte ihm nur noch ein Erinnerungsheft widmen; sie tat es in der Form, daß sie eine größere Anzahl von Arbeiten vereinigte aus der Feder von Kollegen und Schülern des Verewigten. Wie der Aktuar der Gesellschaft und Redakteur der „Mitteilungen“ in seinem warm empfundenen Nachruf hervorhebt, hat Kleiner es vermieden, die Arbeiten in seinem Institut auf ein bestimmtes Spezialgebiet physikalischer Forschung zu beschränken. So finden wir denn in dem Erinnerungsheft Arbeiten aus den verschiedensten Gebieten experimenteller und theoretischer Physik: Optik und Elektrodynamik, Elektrotechnik, kinetische Theorie der Materie, physikalische Meteorologie. Ein ehrendes Zeugnis, zugleich für Kleiner wie für die, bei Berufungen von ihm beratene Fakultät der Universität bildet die Liste der Autoren, denen wir hier begegnen; wir brauchen bloß Namen wie Einstein, Debye, Laue zu nennen. Die Photographie des Physikalischen Instituts der Universität Zürich, sowie diejenige seines nunmehr dahingeschiedenen langjährigen Leiters schmücken das Heft. V. Pieck.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Wien Regierungsrat Dr. Julius Mauthner zum ord. Professor für angewandte medizinische Chemie an derselben Universität, der Betriebsleiter der Carbid- und Ferrosiliziumfabrik zu Borregaart in Norwegen Dr. Hans Thorvald Lindeman zum Professor der technischen anorganischen Chemie an der Technischen Hochschule Trondjhem.

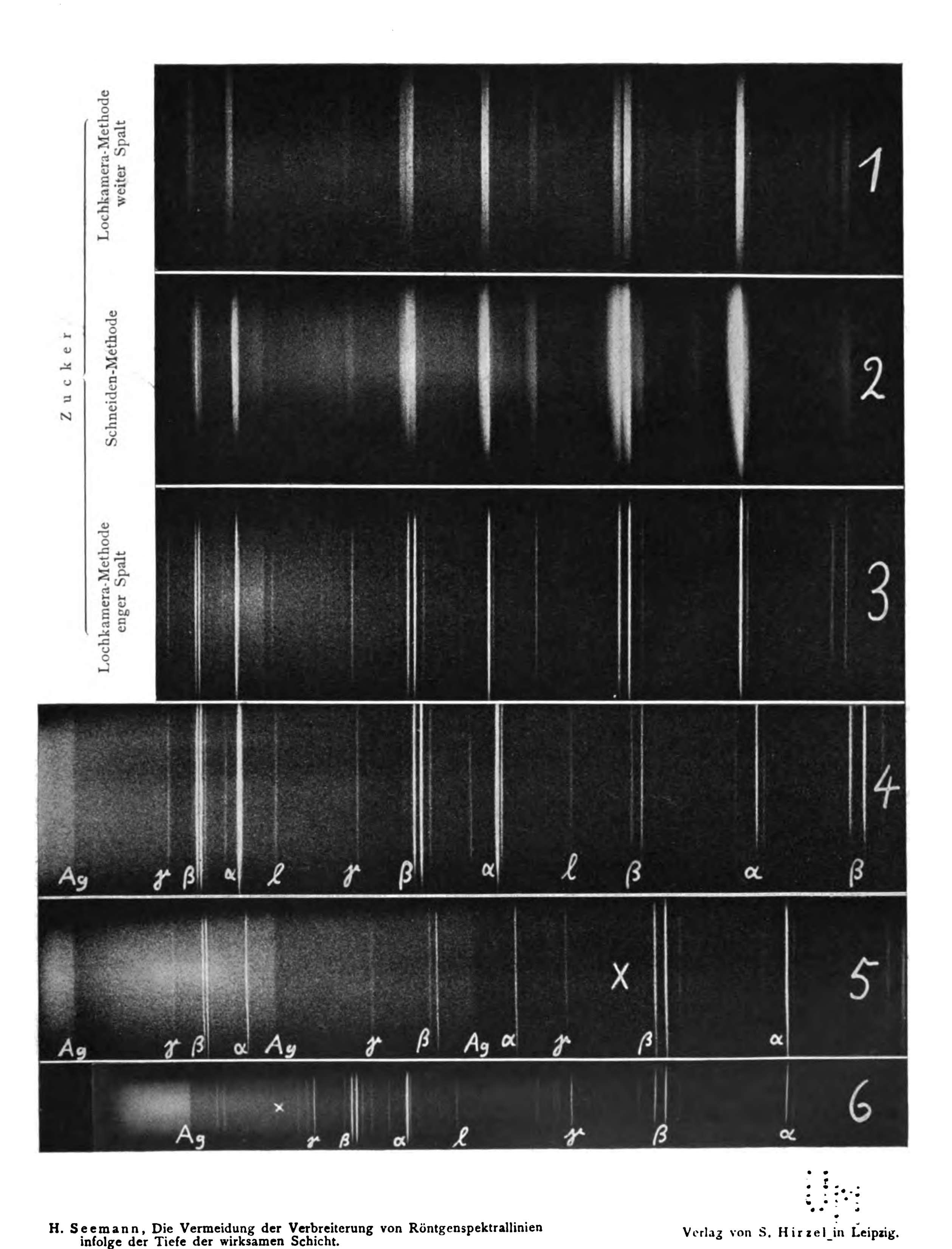
Verliehen: Dem a. o. Professor der angewandten medizinischen Chemie an der Universität Wien Dr. Otto Ritter v. Fürth Titel und Rang eines ordentlichen Universitätsprofessors.

Auszeichnungen: Die Akademie der Wissenschaften in Wien verlieh den Liebenpreis (3000 Kr.) dem ord. Professor der Chemie an der Universität Wien Dr. Wilhelm Schlenk für seine Forschungen über Kohlenstoff, den Baumgartnerpreis (3000 Kr.) an das Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Berlin Professor für Physik Dr. Albert Einstein und Professor für Physik an der Technischen Hochschule Delft Dr. M. de Haas für Arbeiten über die Ampèreschen Molekularströme, den Haitingerpreis (3000 Kr.) an den a. o. Professor für Physik an der Universität Wien Dr. Felix Ehrenhaft für seine Arbeiten über Ladung des Elektrons.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Chemie und Pharmazie am Karolinska Institutet in Stockholm Dr. Severin Jolin.

Gestorben: Der Chemiker und Lehrer an der Königl. Färbereischule zu Krefeld Professor Dr. Wilhelm Massot, der a. o. Professor der Chemie an der Universität Kiel Geh. Regierungsrat Dr. Leopold Rügheimer, der Herausgeber des Pharmaceutical Journal and Pharmacist Dr. Benjamin Horatio Paul in London.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



H. Seemann, Die Vermeidung der Verbreiterung von Röntgenspektrallinien infolge der Tiefe der wirksamen Schicht.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 12. | 15. Juni 1917. Redaktionsschluß für No. 13 am 22. Juni 1917. | 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Schallfelder und Schallantennen. II.

Von W. Hahnemann und H. Hecht.

Im ersten Teil unsérer Arbeit über Schallfelder und Schallantennen[1]) haben wir den Strahlungskörper nullter Ordnung, der durch eine pulsierende Kugel dargestellt wird, mathematisch behandelt und daraus einige praktische Nutzanwendungen gezogen. Von den Strahlungskörpern höherer Ordnung interessiert am meisten derjenige erster Ordnung. Wir wollen daher im folgenden zunächst die Ableitung der Formeln des Strahlungskörpers erster Ordnung auf Grund der Rayleighschen Berechnungen geben. Hinsichtlich der Strahler von höherer als der ersten Ordnung begnügen wir uns für die Praxis mit dem Hinweis, daß es wohl stets gelingen wird, falls Körper zweiter oder noch höherer Ordnung vorliegen, diese durch einfache Übertragungen auf Körper erster Ordnung zurückzuführen.

Im zweiten Kapitel der vorliegenden Arbeit wollen wir die Resultate, die wir früher für den Nullstrahler gewonnen haben, dazu benutzen, um an einem Beispiel zu zeigen, wie man Strahlergebilde, die sich mathematisch exakt nicht mehr behandeln lassen, praktisch mit genügender Genauigkeit berechnen kann.

Im dritten Kapitel sollen experimentelle Bestimmungen der berechneten Größen folgen, die eine Kontrolle und Bestätigung der theoretischen Ergebnisse gestatten.

I. Die Theorie des Strahlers erster Ordnung.

Um die Strahler der verschiedenen Ordnungen mathematisch behandeln zu können, wählt Rayleigh die Kugelform und stellt das Geschwindigkeitspotential als Kugelfunktion dar. Der Strahler nullter Ordnung ist dargestellt als eine Kugel, deren Oberfläche in allen ihren Teilen konphase Bewegungen gleicher Amplitude ausführt. Eine solche Kugel nennen wir eine pulsierende oder atmende Kugel. Der Strahler erster Ordnung ist dargestellt durch eine um eine Gleichgewichtslage hin und her schwingende Kugel. Während also beim Strahler nullter Ordnung nur eine radiale Bewegung des Mediums möglich ist, tritt jetzt gleichzeitig eine tangentiale Bewegung des Mediums ein, die zur Strahlung keinen Anteil liefert. Diese tangentiale Bewegung wollen wir Schlüpfung des Mediums nennen. Die Schlüpfungsbewegung bedeutet nur ein Hin- und Herschieben von Massen, ohne daß diese auf Druck kommen und akustisch wirksam werden, während die radiale Bewegung die eigentliche Druck- oder Strahlungsbewegung ist. Wieviel von der gesamten Mediumsbewegung Schlüpfungsbewegung und wieviel Strahlungsbewegung ist, hängt von dem Verhältnis der Größe des Strahlers erster Ordnung zur Wellenlänge ab.

Man sieht schon ohne jede Rechnung, daß immer mehr Schlüpfung auftreten muß, je kleiner der Strahler wird. Auch beim Strahler nullter Ordnung tritt eine gewisse Schlüpfung auf, nur ist diese im Medium anders verteilt und wird groß, wenn der Strahler so klein ist, daß die Divergenz, d. h. die Vergrößerung der Querschnitte, durch die gleichen Energiequanten treten, im Abstande einer Wellenlänge

---

1) Diese Zeitschr. **17**, 601 ff., 1916. Wir benutzen die Gelegenheit, einen Fehler zu berichtigen. Es muß Seite 603, Spalte 2, Zeile 21 heißen: „worin das Rayleighsche A durch Q ersetzt ist und den Maximalwert des durch die schwingende Kugel erzeugten Mediumstromes bedeutet, ..." Zwischen Volumenänderung der Kugel Δv und Mediumstrom Q besteht bei sinusförmiger Schwingung die Beziehung $\pi n \Delta v = Q$. Die in einer halben Periode transportierte Mediummasse ist nämlich ausgedrückt durch den Maximalwert des Mediumstromes

$$\int_{t=0}^{t=1/2n} Q \sin 2\pi n t \, dt = \frac{Q}{\pi \cdot n}$$

und diese Mediummenge ist gleich dem Deformationsvolumen Δv der Kugel.

in Richtung des fortschreitenden Schallstrahles groß ist.

Im folgenden wollen wir die von Rayleigh[1]) abgeleitete Kraftgleichung des Strahlers erster Ordnung in anderer Form aufstellen.

Während wir beim Strahler nullter Ordnung, bei dem der Druck auf der ganzen Oberfläche konstant ist, aus diesem Grunde die Druckgleichung aufstellten, hat es physikalisch kaum einen Sinn mehr, dasselbe beim Strahler erster Ordnung zu tun, bei dem der Druck von den Polen zum Äquator hin vom Maximalwerte bis Null zu abnimmt, wenn die Schwingung in Richtung der Polachse erfolgt. Wir summieren daher gleich über die ganze Oberfläche und stellen die Kraftgleichung auf.

Wir führen dieselben Bezeichnungen wie im Teil I unserer Arbeit ein und ersetzen insbesondere wieder das Rayleighsche $x = \frac{n}{a}$ durch $\frac{2\pi n}{a}$, c durch R, Ξ durch k und die Konstanten p und q durch α und β. Dann nimmt die Kraftgleichung die Form an:

$$k = \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho \alpha \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{8\pi^2}{3} R^3 \varrho n \beta i.$$

Hierin haben die Konstanten α und β die Bedeutung

$$\alpha = \frac{2 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2}{4 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^4}$$

und

$$\beta = \frac{\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^3}{4 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^4}.$$

Aus der Kraftgleichung finden wir ebenso wie früher aus der Druckgleichung den Dämpfungsfaktor zu

$$\delta = \frac{\frac{8\pi^2}{3} R^3 \varrho n \beta}{2 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho \alpha} = \pi n \frac{\beta}{\alpha}$$

und die Dämpfung zu

$$\mathfrak{d} = \pi \frac{\beta}{\alpha} = \pi \frac{\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^3}{2 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2}.$$

Dieser Ausdruck für die Dämpfung nimmt einfache Werte an, wenn $\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2$ klein oder groß gegen 2 ist. In den beiden Grenzfällen wird:

$$\mathfrak{d}_{R \ll \lambda} = 4\pi^4 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^3$$

$$\mathfrak{d}_{R \gg \lambda} = 2\pi^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right).$$

Während die Formel für den zur Wellenlänge kleinen Strahler zeigt, daß die Dämpfung der dritten Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional ist und damit ein bemerkenswertes Analogon zu den Antennen der elektromagnetischen Schwingungen liefert, die wir in unserer Terminologie auch Strahler erster Ordnung nennen müssen, erkennen wir in dem Ausdrucke für den zur Wellenlänge großen Strahler die Dämpfungsformel für den Nullstrahler wieder. Auch dies ist physikalisch leicht verständlich, da bei Körpern erster Ordnung, die bereits eine halbe Wellenlänge groß geworden sind, eine nennenswerte Schlüpfungsbewegung kaum mehr eintreten kann, durch deren Fehlen aber gerade der Strahler nullter Ordnung charakterisiert war. Die Schallfelder des Nullstrahlers und des zur Wellenlänge großen Strahlers erster Ordnung sind allerdings wesentlich verschieden: Das erstere ist unpolarisiert, das zweite polarisiert in Richtung der Schwingungsachse.

Wie weit die vereinfachten Dämpfungsformeln für den Strahler erster Ordnung Gültigkeit haben, geht aus Tabelle I hervor, in der in der ersten Kolumne die Größe des Strahlers im Verhältnis zur Wellenlänge, in der zweiten, dritten und vierten, die Dämpfung, berechnet nach der Formel für Körper beliebiger Größe, klein und groß zur Wellenlänge, steht.

Tabelle I.

$\frac{R}{\lambda}$	$\pi \frac{\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^3}{2+\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2}$	$4\pi^4 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^3$	$2\pi^2 \frac{R}{\lambda}$
1	19	390	20
1/2	8	49	10
1/5	1,7	3,1	4
1/10	0,32	0,39	2
1/20	0,048	0,049	1
1/50	0,0031	0,0031	0,4
1/100	0,00039	0,00039	0,2

Diese Tabelle zeigt, daß man Strahler erster Ordnung von der Größe 1/10 Wellenlänge ab als klein und über 1/2 Wellenlänge als groß zur Wellenlänge betrachten darf. Dazwischen liegt ein Übergangsgebiet, in dem man die exakte Formel benutzen muß.

1) Rayleigh, Theorie des Schalles. Deutsche Ausgabe von Neesen II, S. 281.



Durch Vergleich der Strahlungsdämpfung in der zweiten Kolumne mit den Werten der letzten Kolumne, die gleichzeitig die Strahlungsdämpfung einer gleich großen, aber in allen Teilen gleichphasig schwingenden Kugel angibt, finden wir, daß die Strahlungsdämpfung eines Körpers erster Ordnung von der Größe $^1/_{50}$ Wellenlänge nur noch 1 Proz. von derjenigen eines gleich großen Körpers nullter Ordnung ist.

Die mitschwingende Mediummasse finden wir aus der Kraftgleichung ohne weiteres zu

$$M = \frac{4\pi R^3 \varrho}{3} \cdot \frac{2 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2}{4 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^4}.$$

Betrachten wir wieder die beiden extremen Fälle, wenn der Strahler klein oder groß zur Wellenlänge ist, so wird

$$M_{R << \lambda} = \frac{2\pi}{3} R^3 \varrho$$

und

$$M_{R >> \lambda} = \frac{R \lambda^2 \varrho}{3\pi}.$$

Für die praktische Anwendbarkeit dieser beiden Formeln gelten dieselben Grenzen, wie für die entsprechenden der Dämpfung.

II. Die Theorie der Membran als Strahler nullter Ordnung.

Rayleigh hat den Fall einer starren kreisförmigen Platte behandelt, die in einer gleich großen kreisförmigen aus einer unendlich großen starren ebenen Platte ausgeschnittenen Öffnung schwingt[1]).

Die mathematischen Ableitungen und Resultate sind schwierig und unübersichtlich und geben einfache Resultate nur, wenn die schwingende Platte klein zur Wellenlänge ist. Wir beschränken uns im folgenden auf diesen für die Praxis meist genügenden Fall. Dann sind Druck und Bewegung des Mediums an der Membranoberfläche quasi-stationär und die Druckgleichung der Kolbenmembran, wie wir die Rayleighsche Platte nennen wollen, nimmt die Form an

$$p = \frac{8}{3\pi} R \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{a\varrho}{2}\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2 i.$$

Hierbei haben wir dieselben Bezeichnungen wie in unserer ersten Abhandlung gewählt und insbesondere das Rayleighsche $\varkappa = \frac{n}{a}$ durch $\frac{2\pi n}{a}$ ersetzt, während die Dichte mit ϱ statt mit σ und die Geschwindigkeit mit i statt mit $\dot{\xi}$ bezeichnet wird.

Führen wir in diese Druckgleichung statt des Radius R die Größe F der strahlenden Fläche ein, so wird

$$p = \frac{8}{3\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{F} \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + 2\pi a \varrho \frac{F}{\lambda^2} i.$$

Strahlt nun die Platte nicht, wie bisher angenommen, in einen von einer starren Ebene begrenzten Halbraum, sondern in das nach allen Richtungen hin unendlich ausgedehnte Medium, jedoch so, daß nach wie vor nur eine Seite der Platte an das Medium stößt, während die andere Seite durch einen schließenden Zylinder überdeckt ist, der selbst klein zur Wellenlänge ist, so kann man durch folgende Überlegungen diesen Fall auf den vorigen zurückführen.

Das Schallfeld, das ein in einer starren Wand befindlicher Strahler nullter Ordnung in dem Halbraum erzeugt, ist gleich dem Schallfelde, das zwei konphase Strahler nullter Ordnung der gleichen Größe c. p. in dem ganzen Raume erzeugen, vorausgesetzt, daß ihr Abstand klein zur Wellenlänge ist. Mithin stellt unsere obige Druckgleichung auch den Fall von zwei Strahlern der Größe F oder eines Strahlers der Größe $2F$ im freien Medium dar, da die Voraussetzung ihrer Kleinheit im Verhältnis zur Wellenlänge uns diese einfache Addition gestattet.

Mithin ist die Druckgleichung einer Kolbenmembran der Größe F im freien Medium

$$p = \frac{8}{3\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi}} \sqrt{F} \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \pi a \varrho \frac{F}{\lambda^2} i.$$

Wir wollen hiermit die Druckgleichung eines kugelförmigen Nullstrahlers, der ebenso wie die Kolbenmembran als klein zur Wellenlänge angenommen werde, vergleichen. Aus Teil I unserer Arbeit finden wir für diesen Spezialfall

$$p = R\varrho \frac{\partial i}{\partial t} + a\varrho \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2 i.$$

Führen wir auch hier durch die Beziehung

$$F = 4\pi R^2$$

die Größe der strahlenden Fläche ein, so wird die Druckgleichung des Kugelstrahlers

$$p = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{F} \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \pi a \varrho \frac{F}{\lambda^2} i.$$

Die beiden Druckgleichungen für Membran und Kugel lauten demnach

$$p_{\text{Membran}} = 0{,}34 \varrho \sqrt{F} \frac{\partial i}{\partial t} + \pi a \varrho \frac{F}{\lambda^2} i$$

$$p_{\text{Kugel}} = 0{,}28 \varrho \sqrt{F} \frac{\partial i}{\partial t} + \pi a \varrho \frac{F}{\lambda^2} i.$$

1) Rayleigh, l. c. II, S. 193—204.

Tabelle II.

	Gleichung der Kurve	Deformationsvolumen $= 2\pi \int y x dx$	Formfaktor	Schwingungsmasse $2\pi d \varrho' \int \left(\frac{y}{h}\right)^2 x dx$	Massenfaktor
Kegel	$y = h\left(1 - \frac{x}{R}\right)$	$\frac{1}{3} h \pi R^2$	$\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}58$	$\frac{1}{6} \varrho' d \pi R^2$	$\sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}41$
Elastische Linie des an beiden Enden eingespannten Trägers. Kraft greift im Mittelpunkt an.	$y = h\left(1 - 3\left(\frac{x}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{R}\right)^3\right)$	$0{,}3 h \pi R^2$	$\sqrt{0{,}3} = 0{,}55$	$\frac{6}{35} \varrho' d \pi R^2$	$\sqrt{\frac{6}{35}} = 0{,}41$
Elastische Linie des an beiden Enden eingespannten, gleichmäßig belasteten Trägers.	$y = h\left(1 - 2\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{x}{R}\right)^4\right)$	$\frac{1}{3} h \pi R^2$	$\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}58$	$\frac{1}{5} \varrho' d \pi R^2$	$\sqrt{\frac{1}{5}} = 0{,}45$
Sinuslinie.	$y = h \cos \frac{\pi x}{2 R}$	$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{8}{\pi^2} h \pi R^2 = 0{,}46 h \pi R^2$	$\sqrt{0{,}46} = 0{,}68$	$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\right) \varrho' d \pi R^2 = 0{,}30 \varrho' d \pi R^2$	$\sqrt{0{,}30} = 0{,}55$

Wir finden also für die so verschieden gestalteten Flächen einer ebenen Kolbenmembran und einer Kugel eine sehr nahe Übereinstimmung, vorausgesetzt, daß die Dimension des Strahlers klein zur Wellenlänge ist. Die eigentlichen Strahlungsglieder der beiden Druckgleichungen sind vollständig identisch, und die die mitschwingende Mediummasse liefernden Glieder unterscheiden sich voneinander nur um 20 Proz. Man wird daher viele Probleme der praktischen Akustik, für die sich das Geschwindigkeitspotential nicht mehr aufstellen läßt und die der strengen mathematischen Behandlung große Schwierigkeiten bereiten, näherungsweise durch Einreihung und Anlehnung an diese beiden Fälle lösen können.

Als Beispiel wählen wir die am Rande fest eingespannte, kreisförmige Membran, die uns gestattet, die erhaltenen theoretischen Resultate sowohl mit den Ergebnissen streng mathematischer Ableitungen zu vergleichen, wie auch experimentell leicht nachzuprüfen.

Wegen der Ähnlichkeit der strahlenden Fläche nach Krümmung und Begrenzung wählen wir den Zahlenfaktor der Druckgleichung der Kolbenmembran.

Aus der Druckgleichung der Kolbenmembran finden wir ihre Kraftgleichung, indem wir über die ganze Fläche summieren zu

$$k = \frac{8}{3\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi}} F \sqrt{F} \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \pi a \varrho \left(\frac{F}{\lambda}\right)^2 i,$$

wenn k die durch die Mediumbewegung hervorgerufene und auf die ganze Kolbenfläche wirkende Gesamtkraft darstellt. Führen wir statt der Flächengröße wieder den Radius ein, so wird

$$k = \frac{8}{3\sqrt{2}} R^3 \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \pi^3 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 i.$$

Die betrachtete Kolbenmembran denken wir uns nun ersetzt durch eine am Rande fest eingespannte kreisförmige Membran. Diese Membran wird einer Kolbenmembran entsprechen, wenn beide das gleiche Verschiebungsvolumen haben. Um das Verschiebungs- oder Deformationsvolumen, das bei der Kolbenmembran $\pi R^2 h$ ist, für die am Rande eingespannte Membran zu finden, müßten wir die Kurvenform für die deformierte Membran kennen. Diese Kurvenform hängt von der Einspannung, der Angriffsart der die Deformation hervorrufenden Kraft usw. ab. Wir wollen einige wahrscheinliche Kurvenformen annehmen, für sie das Deformationsvolumen berechnen und uns dann für einen mittleren Formfaktor entscheiden und mit diesem die weitere Rechnung beispielsweise durchführen. Wir wählen hierzu vier Kurvenformen, und zwar, den einfachen Konus, die elastische Linie des an beiden Enden eingespannten und in der Mitte belasteten Trägers[1]), die elastische Linie des an beiden Enden eingespannten, gleichmäßig belasteten Trägers[1]) und die Sinuslinie.

In der Tabelle II befindet sich für diese vier Kurvenformen in der zweiten Kolumne die Gleichung der Kurven, in der dritten das Deformationsvolumen, in der vierten der Formfaktor, mit dessen Quadrat die Grundfläche zu multiplizieren ist, um das einer Kolbenmembran gleicher Amplitude entsprechende Deformationsvolumen zu finden, in der fünften Kolumne die

1) Hütte I, 566 und 568, 1911.



im Membranmittelpunkt konzentriert anzunehmende Schwingungsmasse der Membran und in der sechsten der Massenfaktor, mit dessen Quadrat die Gesamtmasse der Membran zu multiplizieren ist, um die im Mittelpunkt angreifend gedachte Schwingungsmasse zu finden. Diesen Massenfaktor werden wir später bei Ableitung der Schwingungszahl der Membran gebrauchen, haben aber jetzt schon die Gelegenheit benutzt, um ihn für diese vier Kurvenformen auszurechnen.

Wie man erkennt, unterscheiden sich alle vier Kurvenformen nicht wesentlich voneinander. Als Formfaktor wählen wir 0,6, weil dieser Wert ein guter Mittelwert für die vier Kurvenformen ist und am besten der wahrscheinlichsten Kurve, nämlich derjenigen des an beiden Enden eingespannten, gleichmäßig belasteten Trägers entspricht. Wir werden später sehen, daß das Experiment diese Wahl bestätigt.

Wir erhalten aus der Kraftgleichung der Kolbenmembran diejenige der eingespannten Membran, indem wir R durch 0,6 R ersetzen, zu

$$k = \frac{8 \cdot 0{,}6^3}{3\sqrt{2}} R^3 \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \pi^3 \cdot 0{,}6^4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 i$$

oder

$$k = 0{,}4\, R^3 \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + 4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 i.$$

Dieser Ausdruck für k stellt die von der Mediumbewegung herrührenden Kräfte dar, wenn i die Geschwindigkeit des Membranzentrums ist, und zwar der erste Term eine wattlose Kraft, der zweite eine Wattkraft. Die Größe 0,4 $R^3\varrho$ liefert mit $\frac{J^2}{2}$ multipliziert die leerschwingende Energie des Systems, wenn J den Maximalwert von i darstellt; wir nennen deshalb 0,4 $R^3\varrho$ die mitschwingende Mediummasse. Die Größe $4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2$ liefert mit $\left(\frac{J}{\sqrt{2}}\right)^2 = J^2_{\text{eff.}}$ multipliziert die vom System in Form von akustisch-mechanischer Arbeit abgegebene Energie; wir nennen deshalb $4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2$ den akustischen Strahlungswiderstand.

Um die vollständige Schwingungsgleichung der Membran zu finden, haben wir noch die von der Membran selbst herrührenden Kräfte hinzuzufügen. Diese sind teils elastischer Natur, teils Massen- oder Trägheitskräfte, herrührend von der Schwingungsmasse der Membran selbst.

Die Elastizität C einer am Rande fest eingespannten Membran ist nicht nur von den Dimensionen und Material der Membran, sondern auch von Spannungen, geringen Deformationen usw. in hohem Maße abhängig. Einen genauen, zahlenmäßigen Wert anzugeben, ist kaum angängig; wir wählen beispielsweise denjenigen aus der Hütte[1]), der für den Fall der spannungsfreien, ebenen Membran lautet

$$C = \frac{0{,}22\, R^2}{d^3 E}$$

wenn E der Elastizitätsmodul und d die Dicke der Membran ist.

Um die Schwingungsmasse der Membran, d. h. den im Mittelpunkt schwingend anzunehmenden Teil der gesamten Membranmasse zu berechnen, ist das Integral über die Massenelemente, multipliziert mit dem Quadrat des Amplitudenverhältnisses zu bilden. Diese Rechnung ist bereits in Tabelle II für vier verschiedene Kurvenformen ausgeführt. Wie bei der Aufstellung der Kraftgleichung entscheiden wir uns wieder für die Kurvenform des an beiden Enden eingespannten, gleichmäßig belasteten Trägers und wählen als Massenfaktor 0,45. Auch für die Wahl dieses Faktors wird das Experiment später den Beweis der Richtigkeit erbringen. Wir nehmen also zunächst die Schwingungsmasse m der Membran zu

$$m = (0{,}45\, R)^2 \pi d \varrho'$$

an, wenn ϱ' die Materialdichte ist.

Wir erhalten nunmehr, wenn e die aufgedrückte, die Schwingungen der Membran erhaltende Kraft ist, die vollständige Kraftgleichung

$$e = (0{,}4\, R^3 \varrho + 0{,}2\, \pi R^2 d \varrho') \frac{\partial i}{\partial t} + 4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \cdot i + \frac{d^3 E}{0{,}22\, R^2} \int i\, dt.$$

Aus dieser Gleichung finden wir ohne weiteres die uns interessierenden Größen, wie mitschwingende Mediummasse, Schwingungszahl und Dämpfung. Die mitschwingende Mediummasse ist

$$M = 0.4\, R^3 \varrho,$$

die Schwingungszahl unter Vernachlässigung des Einflusses der Dämpfung

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{d^3 E}{0{,}22\, R^2 (0{,}4\, R^3 \varrho + 0{,}2\, \pi R^2 d \varrho')}}$$

und die Dämpfung

$$\mathfrak{d} = \frac{\delta}{n} = \frac{4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2}{2 \cdot n \cdot 0{,}4\, R^3 \varrho} \cdot \frac{M}{M + m}$$

$$\mathfrak{d} = 5 \frac{R}{\lambda} \frac{M}{M + m}.$$

1) Hütte I, 621, 1911.

Die Schwingungszahl wird, wenn man die Mediummasse gegen die Membranmasse vernachlässigen kann, wie dies bei Metallmembranen in Luft wohl immer der Fall sein wird[1]),

$$n_l = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{d^3 E}{0{,}22\, R^2\, 0.2\pi R^2 d \varrho'}}$$

$$n_l = 0{,}43\,\frac{d}{R^2}\sqrt{\frac{E}{\varrho'}}.$$

Diese Formel zur Berechnung der Schwingungszahl von Membranen in Luft ist, wie wir schon oben erwähnten, infolge des angenommenen, unsicheren Wertes der Elastizität ungenau und wenig zuverlässig. Man wird in der Praxis umgekehrt diese Schwingungszahl immer experimentell zu bestimmen suchen, um aus ihr und der einwandfreier zu berechnenden Schwingungsmasse die Elastizität zu finden.

Der Ausdruck für die Dämpfung

$$\mathfrak{d} = 5\,\frac{R}{\lambda}\,\frac{M}{M+m}$$

stellt nur den Wert für die Strahlungsdämpfung dar. Innere, schädliche und durch besondere Einrichtungen (Mikrophon, Telephon) abgebremste Nutzdämpfungen sind nicht berücksichtigt; sie würden für die Schwingungsgleichung noch ein Glied von der Form $w \cdot i$ liefern, wobei man w den akustischen Bremswiderstand nennen kann.

Betrachten wir wieder den Fall einer Metallmembran in Luft, so nimmt die Strahlungsdämpfung den Wert an

$$\mathfrak{d} = 5\,\frac{RM}{\lambda m}$$

oder nach Einsetzung der Werte für M und m

$$\mathfrak{d} = 5\,\frac{R}{\lambda}\,\frac{0{,}4\, R^3 \varrho}{0{,}2\,\pi R^2 d \varrho'}$$

$$\mathfrak{d} = 3{,}2\,\frac{R^2}{d}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Da für diesen Fall die Schwingungszahl gegeben ist zu

$$n = 0{,}43\,\frac{d}{R^2}\sqrt{\frac{E}{\varrho'}},$$

so wird die Dämpfung nach Einsetzung dieses Wertes

$$\mathfrak{d} = 3{,}2\,\frac{0{,}43\sqrt{\frac{E}{\varrho'}}}{n}\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{\varrho}{\varrho'}$$

$$\mathfrak{d} = 1{,}4\,\frac{\varrho}{a}\sqrt{\frac{E}{\varrho'^3}}$$

wenn a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Luft ist. Wir erhalten also das sehr interessante Resultat, daß die Strahlungsdämpfung von Membranen — die Eigenmasse als groß gegen die mitschwingende Luftmasse vorausgesetzt — unabhängig von ihrer Größe und Abstimmung und nur noch abhängig vom Material ist. Die Dämpfung steigt mit dem Verhältnis Elastizitätsmodul zu Dichte. Um große Dämpfungen zu erzielen, muß man also das Material von diesem Gesichtspunkte aus wählen.

Nach Einsetzung der Werte für Luft

$$a = 33\,300 \text{ cm/sec}$$
$$\varrho = 0{,}0012$$

wird die Dämpfung

$$\mathfrak{d} = 5\cdot 10^{-8}\sqrt{\frac{E}{\varrho'^3}}.$$

Für Bronzemembranen mit

$$E = 10^{12} \text{ Dyn/cm}^2$$
$$\varrho' = 8{,}5$$

wird also

$$\mathfrak{d} = 0{,}002.$$

Die Dämpfung von Membranen in Luft ist demnach in allen Fällen sehr gering. Da die schädliche Dämpfung durch innere Reibung von denselben oder gar größeren Beträgen ist, so wäre eine Bestimmung der Dämpfung in Luft zur Kontrolle unserer Dämpfungsformel nicht geeignet gewesen[1]). Wir wählten daher Wasser als Medium, in dem, wie wir gleich sehen werden, wesentlich größere Dämpfungen zu erwarten sind.

Um die Abhängigkeit der Dämpfung einer Membran in Wasser von ihrer Größe zu untersuchen, ist in der folgenden Tabelle III für eine Bronzemembran in der zweiten Kolumne bei angenommener Elastizität und konstanter Schwin-

Tabelle III.

R	d	Schwingungsmasse der Membran	Mitschwingende Wassermasse	Membranmasse / Wassermasse	$\mathfrak{d}$
1	0,0161	0,086	0,40	0,21	0,029
2	0,053	1,13	3,2	0,35	0,052
3	0,108	5,2	10,8	0,48	0,071
4	0,178	15,2	25,6	0,59	0,088
6	0,36	70	86	0,81	0,116
8	0,61	208	204	1,02	0,138
10	0,92	490	400	1,23	0,157
15	1,93	2320	1350	1,72	0,193
20	3,1	6650	3200	2,1	0,226

1) Genau gilt es natürlich nur für das Vakuum.

1) Dies ist auch der Grund dafür, daß sich Membransender für Luft nur mit sehr geringem Wirkungsgrade bauen lassen. Schallsender großer Intensität liefern Sirenen, deren Strahlungsleistung man aus den Formeln für den Nullstrahler nach geringer Umformung berechnen kann.

gungszahl von 1000 Perioden/Sekunde die Dicke berechnet, während in der dritten Kolumne die Schwingungsmasse der Membran, in der vierten die mitschwingende Mediummasse, in der fünften das Verhältnis von Membranmasse zur Mediummasse und in der sechsten die Dämpfung steht. Aus dieser Tabelle geht hervor, daß sich die Dämpfung einem Grenzwerte zu nähern scheint. Dies rührt daher, daß mit zunehmendem Radius allmählich die Membranmasse groß gegen die Mediummasse wird, und somit dieselben Verhältnisse eintreten, die in Luft von vornherein bestehen; insbesondere ist dann die Dämpfung nur noch vom Material der Platte abhängig. Auf jeden Fall sieht man, daß die Dämpfungen wesentlich größere als in Luft sind. Aus diesem Grunde geschah auch, wie wir schon erwähnten, die experimentelle Bestimmung und Prüfung der Dämpfungsformel in Wasser als Medium.

Die für die Berechnung der Strahlungsdämpfung in Wasser gültige Formel lautet, wie wir oben sahen,

$$\mathfrak{d} = 5\frac{R}{\lambda}\,\frac{M}{M+m}.$$

Um die Unsicherheit, die immerhin noch in der Berechnung der Massen M und m steckt, welch letztere häufig noch durch die Vorrichtung zur Messung der Amplitude (Telephonanker od. dgl.) vermehrt wird, zu vermeiden, kann man das Massenverhältnis durch das Verhältnis der entsprechenden Schwingungszahlen ersetzen. Stellen n_l und n_w die Schwingungszahlen in Luft und Wasser dar, so ist

$$\frac{m}{M+m} = \left(\frac{n_w}{n_l}\right)^2.$$

oder die Dämpfung

$$\mathfrak{d} = 5\frac{R}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{n_w}{n_l}\right)^2\right).$$

In dieser Form stellt sich die Dämpfung zur Kontrolle durch die Beobachtungen am geeignetsten dar.

Bevor wir jedoch daran gehen, unsere theoretisch abgeleiteten Größen durch das Experiment nachzuprüfen, wollen wir den Wert für die Strahlungsleistung einer Membran, wie er sich aus Kraftgleichung und Formfaktor ergibt, mit dem auf anderem, direkten Wege von M. Wien[1]) erhaltenen vergleichen.

Wien berechnet in der unten zitierten Arbeit die Energie, die eine in einer starren Wand befestigte, im Mittelpunkt erregte Membran in gegebener Entfernung in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit sendet, und findet dafür den Wert

$$A = \frac{0{,}147^2 p_0 k (2\pi n)^4 a^2_0 R^4}{2a^3 r^2}.$$

Um eine Übereinstimmung mit unseren bisher angewandten Bezeichnungen zu erhalten, sind folgende Änderungen eingeführt: Die Schallgeschwindigkeit c ist mit a, die Entfernung ϱ von der Schallplatte mit r und die Frequenz N mit n bezeichnet. p_0 und k stellen Luftdruck und Verhältnis der spezifischen Wärmen dar, während a_0 die Amplitude des Mittelpunktes der Membran ist. Das durch einen Druckfehler ausgelassene R^4 ist in die Formel eingefügt.

Unter Benutzung der Beziehungen

$$a = \sqrt{\frac{p_0}{\varrho}k}$$

und

$$2\pi n a_0 = J$$

wird

$$A = \frac{0{,}147^2 \varrho (2\pi n)^2 R^4 J^2}{2ar^2}.$$

Die gesamte von der Schallplatte in den Halbraum gestrahlte Leistung finden wir durch Multiplikation mit der Fläche $2\pi r^2$ zu

$$L = 4\pi^3\, 0{,}147^2 \frac{\varrho}{a} n^2 R^4 J^2$$

oder

$$L = 2{,}7\, a\varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 J^2.$$

Die Kraftgleichung der der Wienschen Rechnung zugrunde liegenden Membran finden wir aus der Gleichung der Kolbenmembran durch Einführung des Formfaktors 0,55, den wir aus Tabelle II für eine im Mittelpunkt angreifende Kraft entnehmen, zu

$$k = \frac{8}{3}\, 0{,}55^3 R^3 \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + 2\pi^3\, 0{,}55^4 a\varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 i$$

oder

$$k = 0{,}44\, R^3 \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + 5{,}6\, a\varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 i$$

und die Strahlungsleistung durch Multiplikation des Strahlungswiderstandes mit $\left(\frac{J}{\sqrt{2}}\right)^2$ zu

$$L = 2{,}8\, a\varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 J^2$$

in sehr guter Übereinstimmung mit dem obigen Wienschen Werte.

III. Experimentelle Messungen an Membranen.

1. Mitschwingende Mediummasse.

Da die mitschwingende Mediummasse in Luft gegen die Membranmasse klein ist, so

1) M. Wien, Pflügers Archiv für die ges. Physiologie **97**, 1, 1903.

wählten wir zur experimentellen Bestätigung unserer theoretisch abgeleiteten Formel als Medium Wasser.

Es wurden an mehreren Membranen verschiedener Radien und Dicken bei gleichzeitig verschiedenen Frequenzen experimentell die im Wasser mitschwingende Mediummasse bestimmt, indem im Mittelpunkt der Membran in Luft so viel Masse befestigt wurde, bis wieder derselbe Ton wie im Wasser eintrat.

In Tabelle IV sind die erhaltenen Resultate und Berechnungen zusammengestellt und zwar in der ersten Kolumne der Radius R, in der zweiten und dritten die Tonhöhen n_w und n_l der unbelasteten Membran in Wasser und Luft und in der vierten die Masse M, die in der Luft dieselbe Abstimmung hervorruft, wie sie der unbelasteten Membran im Wasser entspricht.

Tabelle IV.

R	n_w	n_l	$M_{beob.}$	$M_{ber.}$	$\frac{M_{ber.} - M_{beob.}}{M_{ber.}}$
2,1	2140	3120	4,5	3,9	— 0,15
2,1	1465	2240	3,8	3,9	+ 0,03
2,1	1160	1820	5,0	3,9	— 0,28
2,1	940	1410	3,2	3,9	+ 0,18
2,5	490	670	5,5	6,3	+ 0,13
4,0	1240	1880	23	22	— 0,05
5,6	1200	1800	60	56	— 0,07

Unter der Annahme, daß die mitschwingende Mediummasse einer Potenz des Membranradius proportional ist, d. h. der Gleichung gehorcht

$$M = x R^y,$$

sind die Beobachtungen zur Bestimmung der Konstanten x und y ausgewertet worden. Als Mittelwerte aus allen Beobachtungen folgt

$$x = 0,53$$
$$y = 2,7$$

gegen die theoretisch abgeleiteten Werte

$$x = 0,4$$
$$y = 3.$$

In der vorstehenden Tabelle stehen in der fünften Kolumne die mit den aus der Beobachtung sich ergebenden Konstanten berechneten Werte von M und in der sechsten Kolumne die Fehler. Da die Beobachtungen keineswegs als Präzisionsmessungen angestellt sind, sondern nur als technische Bestimmungen gelten können, so ist die Übereinstimmung der aus den Messungen sich ergebenden und der theoretisch abgeleiteten Konstanten zufriedenstellend.

2. Schwingungsmasse von Membranen.

Auf drei Bronzemembranen wurden in Luft Zusatzgewichte gesetzt und jedes Mal die Schwingungszahl bestimmt. Stellt n_0 die Schwingungszahl der unbelasteten, n_b diejenige der belasteten Membran dar, während m die Schwingungsmasse der Membran und z die Zusatzmasse ist, dann haben wir die Beziehungen

$$\left(\frac{n_0}{n_b}\right)^2 = \frac{m+z}{m}$$

$$m = \frac{z}{\left(\frac{n_0}{n_b}\right)^2 - 1}.$$

Wir haben diese Methode gewählt, da uns die Unsicherheit in der Berechnung und Bestimmung der Elastizität, wie wir schon oben ausführten, den direkten Weg verbot, die Schwingungsmasse aus der Schwingungszahl der unbelasteten Membran zu berechnen.

In den folgenden Tabellen Va—c steht in der ersten Kolumne die Zusatzmasse z, in der zweiten die dazugehörige Schwingungszahl und in der dritten die hieraus berechnete Schwingungsmasse der Membran.

Tabelle Va.

Membran: Radius = 2,1, Dicke = 0,06, Dichte = 8,5

z	n	m
0	1840	—
2	1200	1,48
4	960	1,50

Mittel: 1,49

Tabelle Vb.

Membran: Radius = 5,1, Dicke = 0,3, Dichte = 8,5

z	n	m
0	1760	—
11	1560	41
30	1350	43
56	1145	41,5
74	1045	40,5
109	920	41
145	840	42,5

Mittel: 41,6

Tabelle Vc.

Membran: Radius = 5,6, Dicke = 0,3, Dichte = 8,5

z	n	m
0	1810	—
2,5	1765	50
5,0	1710	41,5
7,5	1670	44
10	1640	45,5
15	1585	50
20	1530	50

Mittel: 48,5

Bestimmen wir für die drei Membranen den Massenfaktor f, so haben wir die drei Gleichungen

$$1{,}49 = \pi \cdot 2{,}1^2 \cdot 0{,}06 \cdot 8{,}5 \cdot f^2$$
$$41{,}6 = \pi \cdot 5{,}1^2 \cdot 0{,}30 \cdot 8{,}5 \cdot f^2$$
$$48{,}5 = \pi \cdot 5{,}6^2 \cdot 0{,}30 \cdot 8{,}5 \cdot f^2$$

und finden hieraus die drei Werte

$$f = 0{,}46$$
$$f = 0{,}45$$
$$f = 0{,}44$$

und als Mittelwert 0,45, den auch die Kurvenform des eingespannten gleichmäßig belasteten Trägers liefert.

Die Schwingungszahlen dieser drei Membranen weichen aus den oben teilweise angegebenen Gründen (innere Spannung, Art der Befestigung, angenommener Elastizitätsmodul usw.) von der Rechnung ab. Wenn wir in die Formel für die Schwingungszahl die Werte für Bronze

$$E = 10^{12}\ \mathrm{Dyn/cm^2}$$
$$\varrho' = 8{,}5$$

einsetzen, so ist

$$n_{\mathrm{Bronze}} = 150 \cdot 10^3 \frac{d}{R^2}.$$

In der folgenden Tabelle VI sind die beobachteten und berechneten Werte und ihre Abweichungen zusammengestellt.

Tabelle VI.

$n_{\mathrm{beob.}}$	$n_{\mathrm{ber.}}$	$n_{\mathrm{ber.}}/n_{\mathrm{beob.}}$
1840	2050	1,11
1765	1730	0,98
1810	1430	0,79

3. Dämpfungsmessungen.

Zur Bestimmung der Strahlungsdämpfung im Wasser wurden drei Bronzemembranen benutzt, in deren Mittelpunkte ein kleiner Eisenanker befestigt war, während mit dem relativ zum Mittelpunkt stillstehenden Rande der Membran ein Telephonmagnet verbunden war. Die durch die Schwingungen der Membran auf diese Weise in den Spulen des Telephonmagneten induzierte elektrische Spannung wurde mittels Gleichrichter und Galvanometer gemessen. Von der Konstanz der Gleichrichterzelle[1]) und der Proportionalität des Ausschlages mit dem Quadrate der Spannung überzeugten wir uns durch öftere Kontrolle mit geshunteter, direkt mit Voltmeter gemessener Maschinenspannung.

Die Membranen wurden in Luft und im freien Wasser in das Schallfeld eines Senders gebracht, der bei veränderlicher Frequenz mit konstanter Kraft erregt wurde. Sein Eigenton lag so weit oberhalb der höchsten benutzten Schwingungszahl, daß der Einfluß seiner eigenen Resonanz nicht berücksichtigt zu werden brauchte. Die erhaltenen Resonanzkurven sind zur Bestimmung der Dämpfung von etwa $^8/_{10}$ bis $^2/_{10}$ des Maximalausschlages benutzt worden und liefern in sich gut übereinstimmende Werte.

In der folgenden Tabelle VII befindet sich in der ersten Kolumne der Radius R, in der zweiten die Dicke d der Membran, in der dritten und vierten die Schwingungszahlen in Luft und Wasser n_l und n_w und in der fünften und sechsten die in Luft und Wasser gemessenen Dämpfungen $\mathfrak{d}_l$ und $\mathfrak{d}_w$.

Tabelle VII.

R	d	n_l	n_w	$\mathfrak{d}_l$	$\mathfrak{d}_w$
2,1	0,06	1312	1000	0,009	0,050
2,1	0,065	1542	1170	0,011	0,053
3,3	0,13	1750	1137	0,032	0,113

Zu erwähnen ist, daß bei den beiden ersten Membranen die Dämpfung in Luft bei ihren natürlichen Luftabstimmungen gemessen wurde, bei der dritten Membran dagegen die Dämpfung in Luft bei der Wasserabstimmung bestimmt wurde, nachdem die Membran in Luft durch ein Zusatzgewicht auf dieselbe Abstimmung wie in Wasser gebracht war. Dies mußte geschehen, da ihre Dämpfung durch Mitschwingen innerer Teile stark beeinflußt war. Dies Verfahren ist entschieden dem bei den beiden anderen Membranen angewandten vorzuziehen, da man sonst, wie es auch hier geschah, voraussetzen muß, daß in dem gemessenen Frequenzgebiet keine störenden Resonanzen sind.

Aus den beobachteten Werten der Dämpfungen in Luft und Wasser findet man die Strahlungsdämpfung in Wasser folgendermaßen: Die in Luft gemessene Dämpfung setzt sich aus drei Beträgen zusammen: der Strahlungsdämpfung in Luft, der inneren, schädlichen und der magnetisch-elektrischen Dämpfung. Ziehen wir also von der in Luft gemessenen Dämpfung zunächst den berechneten Wert der Strahlungsdämpfung im Betrage von 0,002 ab[1]), so erhalten wir den

1) Wir hatten die Zelle, Silber-Molybdän — ein in der Funkentelegraphie unter dem Namen Hornemann-Zelle bekannter Detektor, — nicht auf größte Empfindlichkeit eingestellt, dafür aber über Monate hin eine Konstanz des Ausschlages bis auf etwa 10 Proz. erreicht. Die Empfindlichkeit der Meßeinrichtung wurde nicht absolut bestimmt, aber durch Vergleich mit hoch empfindlichen Telephonen auf das etwa 0,1—0,01 fache von diesen geschätzt.

1) Es ist dies Verfahren zulässig, da die berechnete Luft-Strahlungsdämpfung nur eine wenig Prozent ausmachende Korrektur der beobachteten Wasser-Strahlungsdämpfung ist.

Betrag der schädlichen und magnetisch-elektrischen Dämpfung bei der Luftabstimmung. Um diesen Wert auf die größere Schwingungsmasse bei der Aufnahme in Wasser umzurechnen, multiplizieren wir den Betrag mit dem Quadrat des Verhältnisses der Schwingungszahlen in Wasser und Luft. Wenn man den so erhaltenen Wert von der Wasserdämpfung abzieht, erhält man die Strahlungsdämpfung in Wasser.

In der folgenden Tabelle VIII steht in der zweiten Kolumne der so aus den Beobachtungen gewonnene Wert der Strahlungsdämpfung in Wasser, während in der dritten Kolumne der aus der Formel

$$\mathfrak{d} = 5\frac{R}{\lambda}\left(1-\left(\frac{n_w}{n_l}\right)^2\right)$$

berechnete Wert der Strahlungsdämpfung steht und in der vierten Kolumne die prozentuale Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung.

Tabelle VIII.

R	$\mathfrak{d}_{beob.}$	$\mathfrak{d}_{ber.}$	beob. — ber.
2,1	0,031	0,031	0 Proz.
2,1	0,041	0,036	+ 14 „
3,3	0,083	0,076	+ 9 „

Die Abweichungen zwischen Beobachtung und Berechnung, die im Mittel nur 8 Proz. betragen, ergeben eine gute Bestätigung der theoretischen Ableitungen. Daß sie nur positiv sind, läßt vermuten, daß vielleicht noch andere nicht berücksichtigte Dämpfungen, z. B. Reibungsdämpfung der Membranoberfläche am Wasser, vorhanden sind und von den Beobachtungen abgezogen werden müßten, um die reine Strahlungsdämpfung zu erhalten.

Kiel, im Mai 1917.

(Eingegangen 18. Mai 1917.)

Ein Farbenmeßapparat.

Von A. v. Hübl.

Die im gewöhnlichen Leben übliche Bezeichnung der Farben ist für die Zwecke der Wissenschaft und auch für viele Zweige der Technik völlig unbrauchbar und es wurde daher mehrfach der Versuch gemacht, ein Farbensystem zu schaffen, das eine zahlenmäßige Definition aller Farben ermöglicht.

In neuester Zeit beschäftigt sich Wi. Ostwald[1]) mit diesem Problem und es ist zu erwarten, daß die Arbeiten dieses so erfolgreichen Forschers auch auf diesem Gebiete bahnbrechend wirken werden.

1) Diese Zeitschr. 17, 322, 1916.

Die Ostwaldsche Farbendefinition stützt sich auf einen 100teiligen Farbenkreis, dessen Elementen eine ganz bestimmte, jederzeit auffindbare Lage zukommt und jede Körperfarbe wird als ein Gemenge betrachtet, das aus einem dieser Farbentöne mit bestimmten Mengen Schwarz und Weiß besteht.

Alle anderen in dieser Beziehung gemachten Vorschläge gehen von der Tatsache aus, daß sich jede Farbe durch ein Gemisch von drei passend gewählten Grundfarben nachbilden läßt und daß man daher auch jede Farbe als aus diesen drei Komponenten bestehend ansehen kann. Das durch Zahlen ausgedrückte Verhältnis dieser, in einer Farbe scheinbar vorhandenen Grundfarben bildet die Farbendefinition.

Zur Ermittlung derselben kann man zwei verschiedene Wege einschlagen: Entweder trachtet man durch eine Art Farbenanalyse die Zusammensetzung der Farbe zu ermitteln, oder man vereinigt die drei Grundfarben zu einer der Originalfarbe gleichen Mischung und erfährt so, auf synthetischem Wege, das gesuchte Grundfarbenverhältnis.

Die analytische Methode dürfte zuerst von E. Detlefsen[1]) vorgeschlagen worden sein und wurde in neuerer Zeit von Dr. L. Bloch[2]) weiter ausgestaltet und warm empfohlen.

Um die Zusammensetzung einer Farbe in dieser Weise zu ermitteln, betrachtet man den Körper durch ein rotes, grünes und blaues Filter und bestimmt in passender Weise, am einfachsten durch Vergleich mit einer aus grauen Papieren gebildeten Skala, die Helligkeit des nun farblos erscheinenden Objektes. Hätte man z. B. gefunden, daß der Körper unter dem Rot-, Grün- und Blaufilter das Aussehen grauer Papiere von der Helligkeit 0,8, 0,5 und 0,1 zeigt, so remittiert er ein Lichtgemisch, das aus

0,8 Rot + 0,5 Grün + 0,1 Blau

besteht und diese Zahlen definieren seine Farbe.

Die Resultate einer solchen Analyse wären aber nur richtig, wenn die drei Filter das ganze Spektrum umfassen, also scharf begrenzte, aneinanderschließende Öffnungen besitzen würden.

Da das aber nicht der Fall ist, und da die Filteröffnungen eng gewählt werden müssen, damit der zu untersuchende Körper farblos erscheint, so tasten wir sein Absorptionsband nur an drei schmalen Stellen ab und schließen aus den dort vorhandenen Schwärzungen auf alle Eigentümlichkeiten der Farbe.

Die drei Filter sind willkürlich gewählt, die

1) D.R.P. Nr. 162888, Kl. 42, 1904.
2) Photographische Korrespondenz S. 390, 1916.

Resultate daher ohne inneren Zusammenhang und mit dem Aussehen der Farbe oft nicht in Übereinstimmung. Bei der Untersuchung schmalbandiger Pigmente, zu denen zahlreiche Teerfarbstoffe gehören, machen sich diese Fehler besonders auffallend geltend, während bei farbigen Körpern mit breiten, flach verlaufenden Absorptionsbändern relativ günstige Resultate zu erzielen sind.

Für die meisten Zwecke der Technik ist aber eine bloße Definition der Farben nicht genügend, man fordert vielmehr auch, daß sich die Farbe auf Grund ihrer Definition jederzeit und an jedem Orte objektiv herstellen läßt.

Bei den synthetischen Methoden ist das möglich, denn die zur Ermittlung der Farbendefinition dienenden Farbenmischapparate gestatten selbstverständlich auch umgekehrt die Reproduktion einer Farbe auf Grund der mit dem gleichen Apparat gefundenen Zahlen.

Die zu mischenden Farbenelemente bestehen bei diesen Apparaten entweder aus purpurroten, gelben und grünlichblauen Farbstoffschichten, in Form abgestufter Skalen, die man durch Übereinanderlegen kombiniert oder aus roten, grünen und blauen Lichtern, die additiv vereint werden.

Die Farbenmischapparate der ersten Art wie der Farbenanalysator von Kallab, das Aronsche Chromoskop, der Farbenprüfer von Klemperer haben den Nachteil, daß sie sich zur Nachbildung reiner, satter Farben nicht eignen, daß fehlerfreie Skalen aus Pigmentschichten kaum herzustellen sind und daß den subtraktiv entstehenden Mischfarben die strenge Gesetzmäßigkeit fehlt, da das Aussehen einer Farbe mit ihrer durch Farbstoffmischung gefundenen Zusammensetzung oft nicht im Einklange steht. Vollkommen frei von diesen Mängeln sind dagegen jene Apparate, bei welchen die Nachbildung der Farben durch additive Mischung farbiger Lichter erfolgt, wobei diese entweder aus dem Spektrum isoliert oder mit Hilfe von Lichtfiltern gewonnen werden.

Benutzt man Lichtfilter, so muß zunächst bezüglich ihrer Farbe eine Entscheidung getroffen werden und es unterliegt keinem Zweifel, daß dem gedachten Zwecke am besten Farben von der Beschaffenheit der Young-Helmholtzschen Grundfarben entsprechen würden.

Die verschiedenen Versuche zur Ermittlung dieser Farben haben aber kein einheitliches Resultat ergeben und eigentlich lehren sie uns nicht mehr, als daß sich mit den drei Farben: Rot, Grün und Blau alle spektralen und daher auch alle Körperfarben am besten nachbilden lassen. Die im Mischapparat zur Verwendung kommenden drei Lichter müssen daher diesen Farben, die man als Zinnoberrot, Grün und Ultramarinblau bezeichnen kann, entsprechen.

Weitere Anhaltspunkte für die Wahl ganz bestimmter Farbentöne stehen uns aber nicht zur Verfügung und tatsächlich genügt es auch, wenn die drei Filter nur ungefähr diesen Farben entsprechen, denn sie sind dann zur Wiedergabe aller Farben, welchen wir im gewöhnlichen Leben begegnen, geeignet.

Bei diesen Farbenmischapparaten bietet die Einrichtung zur additiven Vereinigung der drei Lichter einige konstruktive Schwierigkeiten, die sich am einfachsten durch Benutzung transparenter Spiegel überwinden lassen. Ein solcher Spiegelapparat, der zur Definierung und Reproduktion von Körperfarben und ebensogut auch zur Farbenbestimmung künstlicher Lichter brauchbar ist, soll in nachfolgenden Zeilen beschrieben werden.

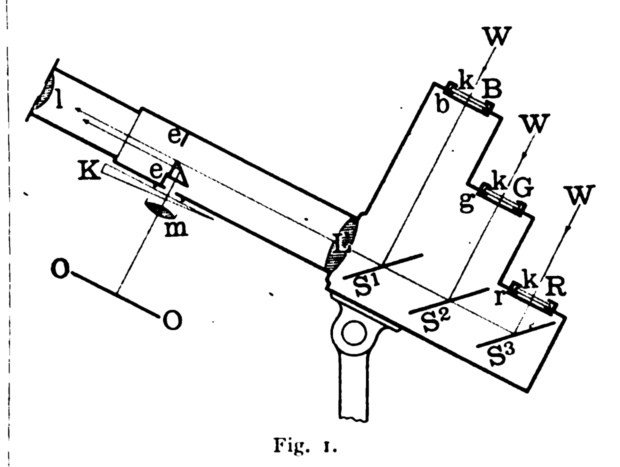


Fig. 1.

Aus Fig. 1 ist in schematischer Darstellung dessen Einrichtung ersichtlich und Fig. 2 zeigt eine Ansicht desselben.

Ein stufenförmig gestaltetes Kästchen besitzt bei R, G und B Öffnungen, die mit den drei Lichtfiltern[1]) r, g, b belegt sind und bei $S_1\, S_2\, S_3$ sind drei als Spiegel wirkende schwach versilberte Glasplättchen angebracht. Dadurch werden die Bilder der drei farbigen Öffnungen gegen die Linse L reflektiert, die ein verkleinertes Bild derselben in der Ebene ee entwirft. Betrachtet man dasselbe mit der Lupe l, so gelangt ein Gemisch von Strahlen der drei

1) Die Lichtfilter bestehen aus Glasplättchen, die mit gefärbter Gelatine überzogen sind, wozu nachstehende Farbstoffmischungen benutzt wurden:
Rot: Tartrazin 2,0 + Erythrosin 1,0 + Säurerhodamin 0,04.
Grün: Tartrazin 2,0 + Patentblau 0,8.
Blau: Patentblau 1,0 + Säurerhodamin 2,0.
Die Zahlen bedeuten Farbstoffdichten, also die Farbstoffmengen in Grammen pro Quadratmeter Filterfläche. Sämtliche Farbstoffe sind chemisch rein bei den Höchster Farbwerken erhältlich.



Fig. 2.

Filterfarben in unser Auge und bei passender Wahl ihrer Helligkeiten erscheint das Gesichtsfeld weiß.

Über den drei Öffnungen *R*, *G*, *B* sind verschiebbare Keile *k* aus einer neutral grauen Masse — etwas Glas oder Gelatine — angeordnet, welche das auf die Filter fallende weiße Licht *W* beliebig abzuschwächen gestatten[1]).

Durch Verschieben der Keile kann man jede beliebige Mischung von roten, grünen und blauen Lichtstrahlen herstellen und durch die Lupe *l* sieht man das Gesichtsfeld in der jeweilig gebildeten Mischfarbe beleuchtet.

Um diese Farbe mit der Farbe eines beliebigen Objektes *O* vergleichen zu können, ist in der Bildebene *ee* ein kleines rechtwinkliges Prisma oder ein Lummer-Brodhunscher Würfel angebracht, welches die Farbe des Objektes gegen unser Auge reflektiert. Wir sehen dann das halbe Gesichtsfeld in der Farbe des Objektes und durch Verschieben der drei Keile kann man die zweite Hälfte des Gesichtsfeldes in gleicher Farbe einstellen.

Das Verstellen der Keile erfolgt durch Zahngetriebe und kann an Millimeterstäben abgelesen werden.

1) Derartige aus geschwärzter Gelatine bestehende Keile lassen sich leicht nach dem von E. Goldberg angegebenen Verfahren herstellen, das in der „Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie" S. 238, 1912 ausführlich beschrieben ist.

Das Prisma ist, um die Zeichnung leichter verständlich zu machen, unter der Rohrachse dargestellt, es liegt aber tatsächlich seitwärts derselben und dementsprechend hat man sich auch, wie Fig. 2 zeigt, das Objekt seitwärts des Apparates zu denken. Zur Aufnahme desselben dient ein horizontales Tischchen, über welchem sich ein unter 45° geneigter Spiegel befindet, der im Vereine mit der Linse *m* und dem Vergleichsprisma ein Bild des Objektes in das Auge des Beobachters reflektiert.

Der Apparat ist für die Untersuchung undurchsichtiger Körper und transparenter Schichten gleich gut geeignet und es ist auch möglich die Farbe eines entfernten Objektes zu bestimmen, wenn man dasselbe mit Hilfe der Linse *m* in das Gesichtsfeld projiziert. Bei Objekten von nicht homogener Färbung, z. B. melierten Stoffen, verstellt man die Linse derart, das sie ein unscharfes Bild entwirft, wodurch eine gleichmäßige Mischfarbe zustande kommt, die sich anstandslos nachbilden läßt.

Der Apparat kann nur bei Tageslicht, und zwar am besten bei gleichmäßig bedecktem, oder wolkenlosem Himmel gebraucht werden und er wird in diesem Falle direkt gegen das Firmament gerichtet. Bei teilweiser Bewölkung wird vor dem Apparat eine große Mattscheibe oder ein Schirm aus paraffiniertem Papier aufgestellt. Ist die Helligkeit des Lichtes nicht konstant, so ist eine sichere Farbeneinstellung kaum möglich, doch kann man den störenden Einfluß der Helligkeitsschwankungen wenigstens zum Teile dadurch beseitigen, daß man jenen Teil des Firmamentes, gegen den der Apparat gerichtet ist, auch für die Beleuchtung des Objektes benutzt, indem man ihn mit Hilfe einer Linse auf dieses projiziert.

Die Analyse einer Körperfarbe erfolgt in nachstehender Weise: Zunächst bringt man bei *O* ein rein weißes Papier an und verstellt die Keile derart, daß beide Hälften des Gesichtsfeldes weiß und gleich hell erscheinen, wobei man zum Ausgleich der Helligkeiten den verschiebbaren Keil *K*, der vor dem Vergleichsprisma angebracht ist, benutzt.

Die Lage der drei Keile entspricht jetzt ihren Nullstellungen.

Dann ersetzt man die weiße Papierfläche durch das zu prüfende Objekt derart, daß dessen Ebene in die frühere Papierebene zu liegen kommt, damit beide Flächen die gleiche Beleuchtung erfahren und stellt durch Verschieben der Keile *k* mit Hilfe der Zahntriebe die gleiche Farbe in beiden Gesichtshälften her. Aus der dabei notwendigen Keilverschiebung läßt sich die Schwächung der drei Lichter ermitteln, und

wenn man deren Helligkeiten bei der Einstellung auf Weiß als Einheiten betrachtet, so bildet die nach der Farbeneinstellung noch übrigbleibende Rot-, Grün und Blauhelligkeit die gesuchte Farbendefinition.

Mußte der Keil über dem Rotfilter z. B. um a cm verstellt werden und wäre k die „Keilkonstante", d. i. die Dichtezunahme des Keils pro Zentimeter Länge, so ist das Rotlicht durch die Grauschicht $d = a \cdot k$ geschwächt und die übrigbleibende Helligkeit i_r der roten Komponente ist durch die Relation $d = -\log. i_r$ gegeben.

In gleicher Weise findet man die Helligkeiten i_g und i_b der grünen und blauen Grundfarbe.

Bei der Nachbildung der Farbe, z. B. die das Umschlagpapier dieser Zeitschrift zeigt, mußten die Keile über den roten, grünen und blauen Filter um 13, 17 und 29 mm verschoben werden. Die Konstante der drei Keile war mit $k = 0{,}25$ ermittelt worden und die Helligkeiten der drei Lichter sind somit $i_r = 0{,}47$, $i_g = 0{,}38$ und $i_b = 0{,}19$.

Mit diesen drei Zahlen ist die Farbe des Papiers vollkommen bestimmt.

Statt der Dezimalbrüche dürfte es sich empfehlen, die mit 100 multiplizierten Zahlen zu benutzen und ein für allemal festzusetzen, daß sie stets in der Reihenfolge Rot, Grün, Blau gebraucht werden. Die in obigem Beispiel erwähnte Farbe wird dann durch die Zahlen 47, 38, 19 definiert und auf Grund dieser Angabe ist es auch möglich die Farbe in einem zweiten Apparat einzustellen und für jedermann sichtbar zu machen.

Aus diesen Zahlen können wir uns aber auch eine Vorstellung über das farbige Aussehen des Körpers bilden, denn aus ihnen läßt sich nicht nur der Farbenton ableiten, sondern auch der Weißgehalt und die Schwärzlichkeit, also jene Eigentümlichkeiten einer Farbe, welche die Ursache sind, daß sie uns gleichsam verdünnt und verdunkelt erscheint.

Den besten Einblick in diese Verhältnisse bietet eine graphische Darstellung der Farbe, doch dürfte es zunächst geboten sein, die beiden Begriffe: Weißgehalt und Schwärzlichkeit etwas näher zu erörtern.

Der Weißgehalt einer Farbe oder ihre Weißlichkeit hängt von der Menge des weißen Lichtes ab, die das Pigment zurückwirft, wobei es gleichgültig ist, ob dieses weiße Licht aus allen Strahlen des Spektrums oder nur aus komplementären Teilen desselben besteht. Als Maß für die Menge des weißen Lichtes dient dessen Helligkeit, wobei man annimmt, daß eine weiße Fläche, die analog dem farbigen Körper beleuchtet wird, Licht von der Helligkeit Eins remittiert. Ist daher im Strahlengemisch, das ein farbiger Körper zurückwirft, weißes Licht von etwa $^1/_2$ oder $^1/_4$ dieser Helligkeit vorhanden, so bezeichnet man den Weißgehalt dieser Farbe mit $^1/_2$ oder $^1/_4$.

Die weißen Strahlen verringern die Farbenintensität und das, was man „Sättigung" einer Farbe nennt, ist lediglich von ihrem Weißgehalt abhängig.

Die Schwärzlichkeit dagegen läßt sich nicht so einfach definieren. Als schwärzlich oder „unrein" bezeichnen wir nämlich die Farbe eines Körpers, wenn ihre Helligkeit geringer ist, als sie bei gleichem Farbenton und gleicher Weißlichkeit sein könnte.

Zeigen also zwei Pigmente gleiche Farbe und gleiche Weißlichkeit, so kann man aus ihrem Aussehen leicht entscheiden, ob eines schwärzlicher ist als das andere. Besitzen sie aber verschiedene Farben oder verschiedenen Weißgehalt, so wird unser Urteil höchst unsicher und den Grad der absoluten Schwärzlichkeit vermögen wir überhaupt auch nicht annähernd anzugeben, da wir nicht wissen, welche Körperfarbe als vollkommen rein, d. h. frei von jeder Schwärzlichkeit zu betrachten ist. Man muß also zunächst den Begriff der reinen Körperfarbe feststellen, ehe man von einem Maß der Schwärzlichkeit sprechen kann.

Ein Anhaltspunkt für die Beantwortung dieser Frage ergibt sich aus der Betrachtung der spektralen Eigentümlichkeiten der Körperfarben.

Das Spektrum besteht nämlich aus drei fast gleichmäßig rot, grün und blau gefärbten Zonen, die man als die wesentlichen Bestandteile aller Körperfarben betrachten kann. Rote, grüne und blaue Körper remittieren nur die Strahlen je einer dieser Zonen; Gelb, Blaugrün und Purpur entstehen aus zwei Zonen und alle zwischenliegenden Übergangsfarben können aus allen Strahlen einer Zone und Teilen einer zweiten gebildet werden.

Die so zustande kommenden Körperfarben wären als vollkommen rein zu betrachten.

Ist aber in den von einem Pigment remittierten Strahlen keine der drei Spektralzonen ganz vertreten, so ist es gerechtfertigt, die Farbe als schwärzlich zu bezeichnen. Dabei ist es gleichgültig, ob diese Zone gleichmäßig geschwächt oder ob sie durch ein Absorptionsband verengt ist, so daß sie nur mit einem Teil ihrer Strahlen, die aber volle Intensität besitzen, zur Geltung kommt. In beiden Fällen kann das gleiche schwärzliche Aussehen hervorgerufen werden.

Die so festgelegte Weißlichkeit und Schwärz-



lichkeit läßt sich aus den drei Helligkeitszahlen leicht ermitteln. Das erwähnte Papier ergab z. B. die Zahlen 0,47, 0,38, 0,19 und trägt man diese Werte in der aus nebenstehender Fig. 3

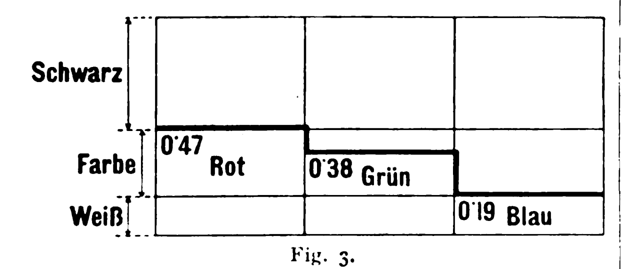


Fig. 3.

ersichtlichen Weise nebeneinander auf, so erhält man eine graphische Darstellung dieser Körperfarbe, welche deren Eigentümlichkeiten leicht übersehen läßt.

Gleiche Mengen der drei Farben geben Weiß und daher remittiert das Papier 0,19 Weiß, also etwa den fünften Teil jenes farblosen Lichtes, das eine rein weiße Fläche bei gleicher Beleuchtung zurückwerfen würde.

Farbenbildend sind somit nur

0,28 Rot + 0,19 Grün

und da durch ein Gemenge gleicher Quantitäten Rot und Grün die Empfindung Gelb bedingt wird, so kann man sich diese Farbe auch zusammengesetzt denken aus

0,09 Rot und 0,19 Gelb.

Sie entspricht also einem rötlichen Gelb und das Verhältnis Gelb : Rot ist 2 : 1.

Auch die Schwärzlichkeit ist leicht zu ermitteln, denn die drei farbigen Lichter im Mischapparat entsprechen bezüglich Farbenton und Helligkeit den aus den drei Spektralzonen gebildeten Farben, und man hat daher eine Körperfarbe als rein zu betrachten, wenn bei ihrer Nachbildung wenigstens eine Mischkomponente mit voller Helligkeit zur Verwendung kommen muß. Im vorliegenden Falle mußten aber alle drei Lichter abgeschwächt werden und daher ist die Helligkeit dieser Farbe geringer als sie bei gleicher Weißlichkeit sein könnte.

Die volle Reinheit würde dieses rötliche Gelb zeigen, wenn die Helligkeit der Rotkomponente gleich 1,0 wäre und da diese nur 0,47 ist, so ist $1,00 - 0,47 = 0,53$ die vorhandene Schwärzlichkeit.

Die Schwärzlichkeit hat hier die gleiche Bedeutung, wie der Schwarzgehalt einer Graumischung am Kreisel: die volle Kreisscheibe entspricht der Helligkeitseinheit und ein Grau von der Schwärzlichkeit 0,53, also von der Helligkeit 0,47 kommt zustande, wenn 0,53 der Kreiselfläche (191°) schwarz gedeckt ist.

Für die in Rede stehende Körperfarbe ergibt sich also, wenn man die mit Hundert multiplizierten Zahlen einführt, nachstehende Zusammensetzung:

28 Farbe bestehend aus {28 Rot, 19 Grün} oder {9 Rot, 19 Gelb}
19 Weiß und
53 Schwarz[1]).

Die so gefundenen Zahlen entsprechen der objektiven Zusammensetzung einer Körperfarbe; sie gestatten aber nicht, ohne weiteres einen Schluß zu ziehen auf die Farbe, die wir bei der Betrachtung dieses Körpers wahrnehmen.

Die Lichter werden eben nicht entsprechend ihren Helligkeiten empfunden, sondern proportional einer logarithmischen Funktion derselben und daher kommt das Weiß übermäßig zur Geltung, während sich das vorhandene Schwarz viel zu wenig bemerkbar macht; das zeigt sich auch deutlich bei Betrachtung des besprochenen Papiers, das viel heller und weißlicher aussieht, als man auf Grund der gefundenen Farbenzusammensetzung, etwa $^1/_3$ Farbe + $^1/_5$ Weiß + $^1/_2$ Schwarz annehmen sollte.

Daß die mit dem Mischapparat gefundenen Zahlen die tatsächliche Zusammensetzung einer Körperfarbe angeben, daß sie mehr sind als konventionelle Kennziffern, läßt sich mit am Kreisel hergestellten Farbengleichungen nachweisen. So wurde z. B. die Farbe des eben besprochenen gelblich grauen Papiers mit Hilfe einer roten, gelben, weißen und schwarzen Papierscheibe am Kreisel nachgebildet, wobei die Gleichung:

$$65^0 \text{ Rot} + 95^0 \text{ Gelb} + 55^0 \text{ Weiß} + 145^0 \text{ Schwarz} = 360^0 \text{ Gelbgrau}$$

erhalten wurde.

Der Mischapparat definiert die Farben des roten und gelben Papiers mit den Zahlen: 40, 9, 4 und 92, 77, 6 und der Weißgehalt der schwarzen Scheibe wurde mit 3 Proz. ermittelt. Es remittieren daher:

65° rotes Papier:	26 Rot +	6 Grün +	3 Blau
95° gelbes „	87 „ +	73 „ +	6 „
59° weißes „	59 „ +	59 „ +	59 „
Und die ganze Kreiselfläche .	172 Rot —	138 Grün —	68 Blau
Die von 360° graugelben Papier remittierten Strahlen bestehen aus	169 Rot —	137 Grün —	68 Blau.

1) Wi. Ostwald fand für dieses Papier die Farbendefinition 07, 31, 16, womit gesagt ist, daß die Farbe aus 0,31 reiner Farbe und 0,16 Weiß besteht und daß ihr Farbenton jenem der Karte Nr. 7 gleichkommt. (Diese Zeitschr. **17**, 357, 1916.) Die Karte Nr. 7 gab bei der Analyse mit dem Mischapparat die Zahlen 97, 67, 7, daher entspricht ihr Farbenton einer Mischung, bestehend

Für die rot-gelb-weiße und die gelblichgraue Kreiselscheibe wird daher das genau gleiche Farbengemisch gefunden und das ist nur möglich, wenn die Angaben des Mischapparates die wirkliche Zusammensetzung der Farben definieren.

Um die Farbe eines künstlichen Lichtes zu ermitteln, richtet man den Apparat gegen den weißbewölkten Himmel, und benutzt an Stelle des Objektes eine weiße Fläche, die man mit der zu untersuchenden Lichtquelle beleuchtet und die selbstverständlich gegen den Einfall von Tageslicht in passender Weise geschützt werden muß.

In dieser Weise wurden z. B. gefunden:
Für eine Metallfadenlampe:

100 Rot + 56 Grün + 13 Blau.

Für eine Vericolampe:

100 Rot + 79 Grün + 21 Blau.

Die Vericolampe ist eine Metallfadenlampe mit hellblauer Glashülle, wodurch der Rotstich des Lichtes verringert werden soll.

Wird die stromlose Lampe zur Ermittlung der Farbe des Glases vor den Apparat geschaltet, so ergeben sich die Zahlen $d = 0,62$, 0,30, 0,22 und da sie für das blaue Glas in doppelter Schichte gelten, so wird die einfache Glasschichte durch die Dichten $d = 0,31$, 0,15, 0,11 definiert. Das als Filter wirkende blaue Glas besitzt daher für Rot, Grün und Blau die Durchlässigkeiten $i = 0,49$, 0,71, 0,77 und das Licht der Vericolampe muß daher aus:

$$100 \times 0,49 = 40 \text{ Rot}$$
$$56 \times 0,71 = 40 \text{ Grün}$$
$$13 \times 0,77 = 10 \text{ Blau bestehen.}$$

Die Zahlen stimmen mit den oben angegebenen, für diese Lampe gefundenen, sehr gut überein, denn sie entsprechen dem Farbenverhältnis 100 : 82 : 20.

Der Apparat ermöglicht es auch, zu jeder beliebigen Licht- oder Körperfarbe die zugehörige Komplementärfarbe zu ermitteln und sie kann neben der gegebenen Farbe eingestellt und jedermann vorgezeigt werden.

Auch das Resultat einer Mischung mehrerer Farbstoffe läßt sich auf Grund ihrer Definition ermitteln und man kann auch das Verhältnis bestimmen, in welchem die Farbstoffe zu mischen sind, damit ein bestimmter Farbenton entsteht. Allerdings können die so gefundenen Resultate nur ungefähr zutreffen, da bei Konzentrationsänderungen und gegenseitiger Mischung von Farbstoffen oft auffallende Unregelmäßigkeiten auftreten, aber die Möglichkeit solche Aufgaben, wenn auch nur annähernd zu lösen, zeigt, daß der Farbenmeßapparat nicht nur eine präzise Farbenbezeichnung ermöglicht, sondern auch auf verschiedenen farbentechnischen Gebieten von einiger Bedeutung sein dürfte.

Bemerkt muß noch werden, daß der zur Verfügung stehende Apparat, weil nur provisorisch zusammengestellt, ziemlich unvollkommen war, und daß nur durch Bildung von Mittelwerten aus einer größeren Zahl von Einstellungen zutreffende Farbendefinitionen zu erhalten waren.

(Eingegangen 21. Mai 1917.)

aus 90 Rot + 60 Grün = 60 Gelb + 30 Rot und das Verhältnis Gelb : Rot ist 2 : 1.

Ein Vorlesungs-Elektroskop.

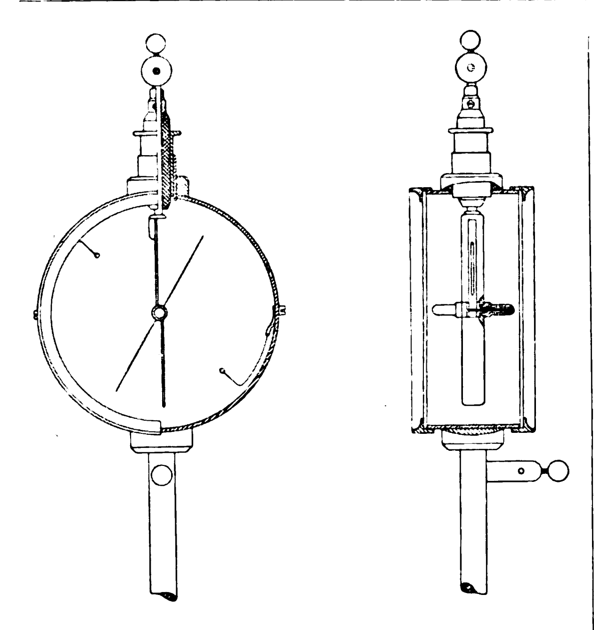
Von H. Haga.

Bei vielen elektrostatischen Vorlesungsversuchen braucht man ein Elektroskop von mittelmäßiger Empfindlichkeit, wo das Exnersche Elektroskop zu empfindlich und ein Papierelektroskop zu unempfindlich ist. Sehr viel wird das Kolbesche Elektroskop benutzt; doch hat dieses einige unangenehme Eigenschaften, welche wohl jedem bekannt sind, der mit diesem Apparat gearbeitet hat. Es sind diese Erfahrungen, die mich veranlassten zu versuchen, das Braunsche Elektrometer für Projektion einzurichten. In der Werkstätte des Instituts wurde ein Braunsches Elektrometer in kleinen Dimensionen angefertigt; es zeigte sich aber ganz unbrauchbar durch die zu große Reibung an den Spitzen der Achse.

Das Ziel wurde aber völlig erreicht durch ein als Achse zu nehmendes horizontal gespanntes vergoldetes Silberbändchen, wie es als Aufhangdraht bei Spiegelgalvanometern benutzt wird. Dadurch entstand ein Elektroskop von so angenehmer und tadelloser Wirkung, daß ich mir erlaube eine Beschreibung des Instruments zu geben.

Die Abbildungen zeigen das Instrument in ungefähr $^2/_5$ der wahren Größe. Der feste Metallstreifen wird durch ein 3 mm dickes, 4,5 cm langes Messingstäbchen getragen, welches durch Amberoid isoliert ist. Die Nadel ist aus einem 0,05 mm dicken Aluminiumblatt geschnitten; zur Erhöhung der Stabilität wurde auf dem größten Teil der Längsseite eine untiefe Furche eingepreßt. Das 27 mm lange, 0,17 mm breite und 7 μ dicke vergoldete Silberbändchen wurde mit einer Spur Schellack auf der Nadel befestigt, das Schellack mit ein wenig Goldbronze überdeckt. Das Bändchen ist zum größten Teil von einem Messingröhrchen umgeben, an dessen Enden es angelötet war.

Zur Vermeidung zu großer Ausschläge ist ein am Metallgehäuse befestigtes, federndes Metalldrähtchen angebracht; das Ende dieser Hemmung ist von einem ganz dünnen Glasröhrchen umgeben, so daß die Nadel bei etwaiger



Berührung nicht entladen wird. Was die Ablesung betrifft, so könnte man in bekannter Weise eine verteilte Skala auf einem Glimmerstreifen im Gehäuse anbringen. Ich habe eine auf dem Projektionsschirm angebrachte Skala — ein in 45 Teile geteiltes Quadrat — vorgezogen, wozu ein, wie eine Wandtafel mit Holzrollen versehener, $1,5 \times 1,5$ m großer Bogen Zeichenpapier völlig genügt.

Die Empfindlichkeit hängt bei derselben Nadel und demselben Bändchen von der Entfernung des Schwerpunktes unter der Achse ab; sie läßt sich also durch Abschneiden kleiner Stückchen der Nadel oder durch Beschweren der einen Hälfte (ein wenig Bronzepulver in der Furche) leicht regulieren.

Die Firma N. V. vorher P. J. Kipp & Zonen, Delft, hat die Anfertigung dieses Elektroskops übernommen.

Selbstverständlich könnte man eine viel größere Empfindlichkeit erreichen, wenn man einen dünnen Draht als Achse nimmt (das Gewicht der oben beschriebenen Nadel ist etwa 20 mg) und dadurch die Empfindlichkeit der gewöhnlichen Blattelektroskope erhalten ohne die Beschwerden der Kri-Kri-Erscheinung.

Auch wäre es ganz gut möglich, durch Anwendung von Spiegelablesung, das Instrument für genaue Messungen geeignet zu machen. Ein kleines leichtes Planspiegelchen ließe sich zu diesem Zweck an das Silberbändchen kitten; in einen Quadranten des Metallzylinders wäre eine schmale, spaltförmige Öffnung anzubringen und zu bedecken durch eine Skala auf Zelluloid oder Zellon; ein kleines horizontales Fernröhrchen (z. B. von der Größe des Fernröhrchens beim Kohlrauschschen Vierstabvariometer) ließe sich leicht in bequemer Weise anbringen.

In diesem Falle wäre auch Innenisolation zu empfehlen und das Bedecken oder Ersetzen der Glasscheiben durch Metall.

Physikal. Institut der Universität Groningen.

(Eingegangen 22. Mai 1917.)

Der erste Elektronenring der Atome.

Von P. Debye.

Die K-Serie der Röntgenspektren soll bekanntlich im Bohrschen Sinne erzeugt werden von einem Elektron, das sich in unmittelbarster Nähe des positiven Kernes befindet. Der Bau derselben muß uns also über das Aussehen dieses innersten Teiles der Atome Aufschluß geben können. Beschränken wir uns zunächst auf die Hauptlinie der K-Serie $K_{\alpha 1}$ (welche nach Siegbahn[1]) bei Na mit der Ordnungszahl 11 eine Wellenlänge von $11,951 \cdot 10^{-8}$ cm und bei Neodym mit der Ordnungszahl 60 die Wellenlänge $0,292 \cdot 10^{-8}$ cm hat), dann kann man den Schluß auf die alleinige Wirksamkeit des Atomkernes mit seiner nächsten Umgebung auf Grund der Interpolationsformeln machen, welche bis jetzt zur Darstellung jener Linie als Funktion der Ordnungszahl z des Kernes vorgeschlagen worden sind. Die älteste derselben lautet

$$\frac{\nu}{R} = (z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right), \qquad (1)$$

wenn mit R die Rydbergsche Konstante bezeichnet wird, welche nach Bohr mit der Elektronenladung ε, der Elektronenmasse μ und dem Wirkungsquantum h zusammenhängt mittels der Formel

$$R = \frac{2\pi^2 \mu \varepsilon^4}{h^3}$$

und der nach spektroskopischen Messungen der Wert

$$R = 2,7337 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{sec}}$$

in Schwingungszahlen (mit Lichtgeschwindigkeit $= 3,0000 \cdot 10^{10}$), bzw. der Wert

$$R = 109740 \frac{1}{\text{cm}}$$

in Wellenzahlen zukommt.

Neuerdings hat Sommerfeld[2]) auf Grund seiner Überlegungen über die Komplexität der Linien von K- und L-Serie der Formel für die $K_{\alpha 1}$-Linie die Gestalt gegeben

1) Man vergleiche den zusammenfassenden Bericht im Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 296, 1916.

2) Ann. d. Phys. 51, 1, 1916 u. 51, 126, 1916.

$$\frac{\nu}{R} = \frac{(z-1{,}6)^2}{1^2} - \frac{(z-3{,}5)^2}{2^2}. \qquad (2)$$

Dabei sind dann außerdem die ν der Formel nicht die direkt beobachteten, sondern diejenigen Schwingungszahlen, welche aus den beobachteten hervorgehen, nachdem man durch Anbringen einer Korrektion die Veränderlichkeit der Elektronenmasse eliminiert hat.

Konnte man die ältere Formel (1) noch so auffassen, daß der Kern durch ein Elektron abgeschirmt wurde und deshalb nur mit der Ladung $(z-1)\varepsilon$ wirkt, so ist Ähnliches bei der Formel (2) nicht mehr möglich, wenn man nicht mit Ehrenhaft auch Bruchteilen der Elektronenladung eine Existenzmöglichkeit zuschreiben will.

Da die Formel (2) nun der zuerst angegebenen in der Tat bedeutend überlegen ist, spitzt sich also nach Sommerfeld[1]) die Frage darauf zu, für die Zahlen 1,6 und 3,5 eine Erklärung zu finden in der Elektronenanordnung der zunächst dem Kern befindlichen Elektronen. Genau formuliert würde die Frage also folgendermaßen lauten: Wie ordne ich Elektronen an, damit einem einzelnen Elektron, das sich in dem vom Kern und den zuerst genannten Elektronen erzeugten Felde bewegt, für eine Bahn mit einem Wirkungsquantum die Energie

$$-\frac{(z-1{,}6)^2}{1^2} hR$$

und für eine Bahn mit zwei Wirkungsquanten die Energie

$$-\frac{(z-3{,}5)^2}{2^2} hR$$

zukommt?

Die $K_{\alpha 1}$-Linie würde dann nach dem zweiten Bohrschen Ansatze erzeugt werden, indem das eine Elektron von der zweiquantigen auf die einquantige Bahn übergeht.

Würde das gelungen sein, dann hätte man über den innersten Teil des Atoms klaren Aufschluß erhalten, und zwar würde die Angabe über die gemachte Elektronenanordnung nun offenbar für alle Atome zugleich Gültigkeit haben. Im folgenden möchte ich zeigen, daß die Frage, so wie sie eben formuliert wurde, nicht richtig gestellt ist. Das Bild, welches man sich bei der betreffenden Formulierung von der Entstehung der $K_{\alpha 1}$-Linie gemacht hat, betont die Wasserstoffähnlichkeit jener Linie zu stark. Tatsächlich ist die Formel (2) nur eine empirische Interpolationsformel und ist es insbesondere nicht gestattet, die beiden einzelnen Terme als Maß für die Energie zweier durch die Quantenzahl differenzierten Bahnen eines Elektrons anzusehen.

1) Man vergleiche die diesbezügliche Bemerkung Sitz.-Ber. d. K. B. Akademie d. Wiss. 1916, S. 152.

Vielmehr liegt die Sache, wie das im folgenden begründet werden soll, folgendermaßen: Im Innern des Atoms gibt es zunächst dem Kerne einen ersten Elektronenkreis, auf dem drei Elektronen in gleichen Winkelabständen mit je einem Wirkungsquantum behaftet um den Kern $z\varepsilon$ rotieren. Aus diesem Kreise kann ein Elektron entfernt werden und mit zwei Quanten versehen allein auf eine kreisähnliche Bahn gebracht werden, während die zwei übrig gebliebenen Elektronen nun dem Kern näher rücken und in 180° Winkelabstand einen neuen Kreis um den Kern beschreiben. Der Übergang der drei Elektronen von der zweiten Anordnung in die erste erzeugt die $K_{\alpha 1}$-Linie. Die so formulierte Aussage erhält ihr besonderes Gepräge durch den Umstand, daß nunmehr nicht ein Elektron, sondern deren drei gleichzeitig an der Entstehung der $K_{\alpha 1}$-Linie beteiligt sein sollen[1]).

Zu der Auffassung, daß die Sachlage sich in dem eben auseinandergesetzten Sinne klären würde, wurde ich geführt durch die Tatsache, daß die Barkla-Wagnersche Absorptionsbandkante, welche offenbar mit der K-Serie verknüpft ist, beobachtet wird am Atom in seinem natürlichen Zustande, in dem von einer vorhergehenden Lockerung der Bindung eines der Elektronen noch nicht die Rede sein kann.

In dieser Mitteilung werde ich mich darauf beschränken, die Endformeln anzugeben und die Einzelrechnung nur ihrem Gange nach skizzieren.

§ 1. Erste Formel für die Schwingungszahl.

Den vorhergehenden Überlegungen entsprechend nehmen wir an, im Normalzustande I bewegen sich eine vorläufig unbestimmte Zahl von p-Elektronen auf einem Kreis um den Kern mit der Ladung $z\varepsilon$. Jedes derselben hat das Impulsmoment $\frac{h}{2\pi}$. Wenn der Radius dieses Kreises mit a bezeichnet wird, dann wird auf jedes Elektron eine Kraft ausgeübt gleich

$$z\frac{\varepsilon^2}{a^2} - S_p \frac{\varepsilon^2}{a^2}.$$

Der erste Term mißt die Anziehung vom Kern, der zweite die Abstoßung der $(p-1)$ übrigen Elektronen des Ringes. Bekanntlich ist die Zahl S_p dargestellt durch die Summe

$$S_p = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{i=p-1} \frac{1}{\sin i\frac{\pi}{p}}.$$

1) Die Einführung eines charakteristischen Elektronenringes steht in nahem Zusammenhange mit den Ausführungen von W. Kossel, Verhdl. d. D. Phys. Ges. **16**, 953, 1914.

Die Zahlenwerte derselben für $p = 1$ bis $p = 8$ finden sich in der folgenden Tabelle.

Tabelle I.

p	S_p
1	0,
2	0,25000
3	0,57735
4	0,95710
5	1,37637
6	1,82735
7	2,3048
8	2,8049

a) Der Normalzustand.

Nennen wir noch die Masse des Elektrons μ und die Geschwindigkeit in der Bahn v, dann lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\mu v^2}{a} = (z - S_p)\frac{\varepsilon^2}{a^2}. \quad (3)$$

Die Quantenbedingung hat die Form

$$\mu a v = \frac{h}{2\pi}. \quad (4)$$

Die Gleichungen (3) und (4) zusammengenommen liefern die Beziehungen:

$$\mu v^2 = (z - S_p)^2\, 2hR, \quad (3')$$

$$\frac{\varepsilon^2}{a} = (z - S_p)\, 2hR. \quad (4')$$

Nun wird die kinetische Energie T des Systems dargestellt durch

$$T = p \cdot \frac{\mu}{2} v^2, \quad (5)$$

während die potentielle Energie U sich mit Hilfe der Summe S_p ausdrückt in der Form

$$U = -pz\frac{\varepsilon^2}{a} + pS_p\frac{\varepsilon^2}{a} = -p(z - S_p)\frac{\varepsilon^2}{a}. \quad (6)$$

Bezeichnen wir die Gesamtenergie $T + U$ mit $-W$, dann wird

$$\frac{W_I}{hR} = p(z - S_p)^2, \quad (7)$$

wobei der Index I den Normalzustand andeuten soll, für den die Rechnung gilt.

b) Der gesprengte Ring.

Wir fragen jetzt nach der Energie eines Zustandes II, bei dem auf dem einquantigen Innenringe nur mehr $p - 1$ Elektronen sich befinden, und das abgesprengte Elektron eine zweiquantige Bahn beschreibt.

Als Kraftwirkungen nehmen wir an: Für die erste Bahn die Wirkung des Kernes allein, die Störung durch die Bahn des Einzelelektrons bleibt also unberücksichtigt, für die zweite Bahn tun wir so, als ob wir die $(p - 1)$ Elektronen des inneren Ringes mit dem Kern vereinigt denken können, so daß derselbe mit der Ladung $(z - p + 1)\varepsilon$ wirkt. Unter dieser Voraussetzung gilt für die erste Bahn vom Radius a_1 und der Elektronengeschwindigkeit v_1:

$$\left.\begin{aligned} \mu v_1^2 &= (z - S_{p-1})^2\, 2hR, \\ \frac{\varepsilon^2}{a_1} &= (z - S_{p-1})\, 2hR. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Ähnlich findet sich für die zweite Bahn

$$\left.\begin{aligned} \mu v_2^2 &= \frac{1}{2^2}(z - p + 1)^2\, 2hR, \\ \frac{\varepsilon^2}{a_2} &= \frac{1}{2^2}(z - p + 1)\, 2hR, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

wenn a_2, bzw. v_2, Radius, bzw. Elektronengeschwindigkeit dieser Bahn bedeuten. Die kinetische Energie des Systems ist jetzt

$$T = (p - 1)\frac{\mu}{2}v_1^2 + \frac{\mu}{2}v_1^2, \quad (10)$$

die potentielle Energie dagegen

$$U = -(p-1)(z - S_{p-1})\frac{\varepsilon^2}{a_1} - (z - p + 1)\frac{\varepsilon^2}{a_2}. \quad (11)$$

Die negative Gesamtenergie $W_{II} = -(T + U)$ ergibt sich damit unter Benutzung von (8) und (9) zu:

$$\frac{W_{II}}{hR} = (p - 1)(z - S_{p-1})^2 + \frac{1}{2^2}(z - p + 1)^2. \quad (12)$$

c) Die Frequenzformel.

Nach dem zweiten Bohrschen Ansatze folgt die Schwingungszahl ν der Strahlung, welche bei der Rückbildung des Zustandes I aus II ausgesandt wird aus der Energiebeziehung

$$h\nu = W_I - W_{II}.$$

Nach (7) und (12) kommt also

$$\left.\begin{aligned} \frac{\nu}{R} &= p(z - S_p)^2 - (p - 1)(z - S_{p-1})^2 \\ &\quad - \frac{1}{2^2}(z - p + 1)^2, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

d. h. $\frac{\nu}{R}$ ist eine quadratische Funktion des Stellenzeigers z. Schreiben wir

$$\frac{\nu}{R} = A_p z^2 + B_p z + C_p, \quad (14)$$

dann wird

$$\left.\begin{aligned} A_p &= A = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} \\ B_p &= -2pS_p + 2(p - 1)S_{p-1} + \frac{1}{2}(p - 1) \\ C_p &= pS_p^2 - (p - 1)S^2_{p-1} - \frac{1}{4}(p - 1)^2. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

§ 2. Bestimmungen der Elektronenzahl p an Hand der Messungen über die K_{α_1}-Linie.

Von nahezu allen Elementen von Na ($z = 11$) bis Nd ($z = 60$) liegen Messungen über die Wellenlänge der K_{α_1}-Linie vor. Eine wertvolle Zusammenstellung derselben entnehme ich dem Bericht über die Röntgenspektren der chemischen Elemente von M. Siegbahn loc. cit. Aus den dort angegebenen Wellenlängen folgen die in der zweiten Spalte der Tabelle II aufgeführten Werte von $\frac{\nu}{R}$, wenn R zu 109740 angenommen wird.

Tabelle II.

z	$\frac{\nu}{R}$	$\frac{3}{4}z^2$	$\triangle$
11 (*Na*)	76,23	90,75	— 14,52
12 (*Mg*)	91,90	108,0	— 16,1
13 (*Al*)	109,0	126,7	— 17,7
14 (*Si*)	127,8	147,0	— 19,2
15 (*P*)	147,7	168,7	— 21,0
16 (*S*)	170,7	192,0	— 21,3
17 (*Cl*)	193,4	216,7	— 23,3
19 (*K*)	244,0	270,7	— 26,7
20 (*Ca*)	271,6	300,0	— 28,4
21 (*Sc*)	300,9	330,7	— 29,8
22 (*Ti*)	332,3	363,0	— 30,7
23 (*Va*)	364,8	396,7	— 31,9
24 (*Cr*)	399,0	432,0	— 33,0
25 (*Mn*)	435,4	468,7	— 33,3
26 (*Fe*)	472,6	507,0	— 34,4
27 (*Co*)	511,6	546,7	— 35,1
28 (*Ni*)	551,3	588,0	— 36,7
29 (*Cu*)	592,1	630,7	— 38,6
30 (*Zn*)	635,9	675,0	— 39,1
32 (*Ge*)	724,9	768,0	— 43,1
33 (*As*)	778,8	816,7	— 37,9
34 (*Se*)	825,4	867,0	— 41,6
35 (*Br*)	880,4	918,7	— 38,3
37 (*Rb*)	988,3	1027	— 38,7
38 (*Sr*)	1046	1083	— 37
39 (*Y*)	1091	1141	— 50
40 (*Zr*)	1156	1200	— 44
41 (*Nb*)	1217	1261	— 44
42 (*Mo*)	1283	1323	— 40
44 (*Ru*)	1413	1452	— 39
45 (*Rh*)	1482	1519	— 37
46 (*Pd*)	1554	1587	— 33
47 (*Ag*)	1622	1657	— 35
48 (*Cd*)	1694	1728	— 34
49 (*Jn*)	1787	1801	— 14
50 (*Sn*)	1871	1875	— 4
51 (*Sb*)	1947	1951	— 4
52 (*Te*)	1998	2028	— 36
53 (*J*)	2085	2107	— 22
55 (*Cs*)	2290	2269	+ 21
56 (*Ba*)	2349	2352	— 3
57 (*La*)	2450	2437	+ 13
58 (*Ce*)	2567	2523	+ 44
59 (*Pr*)	2664	2611	+ 53
60 (*Nd*)	2761	2700	+ 61

Da in Formel (15) der Faktor von z^2 unabhängig von der Elektronenzahl des Ringes gleich $\frac{3}{4}$ ist, betrachten wir an Stelle von $\frac{\nu}{R}$ selbst die Differenz $\frac{\nu}{R} - \frac{3}{4}z^2$, welche mit $\triangle$ bezeichnet wird. Die aus den Beobachtungen folgenden Werte von $\triangle$ sind in der dritten Spalte von Tabelle II zusammengestellt. Der besseren Übersicht wegen sind außerdem diese Werte von $\triangle$ als Funktion des Stellenzeigers z in Fig. 1 eingetragen.

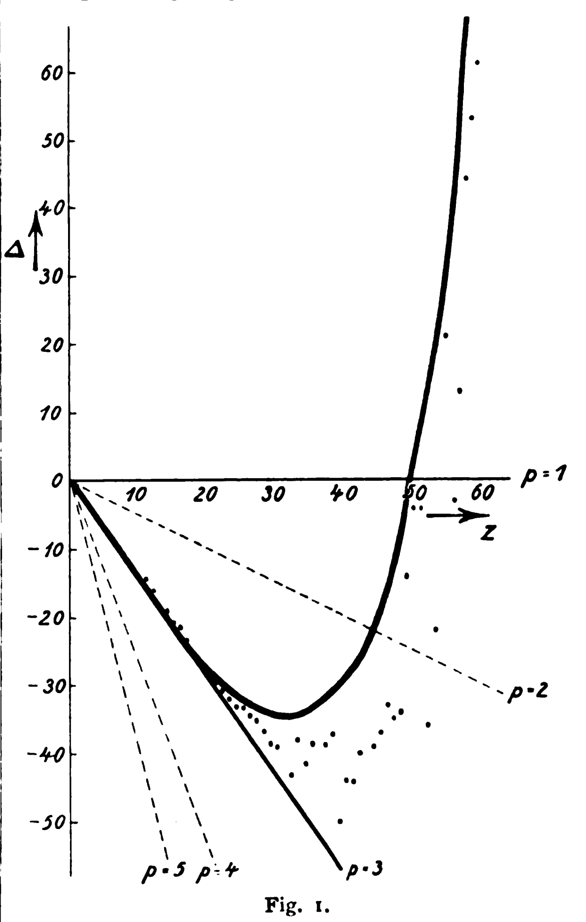


Fig. 1.

Der vorhergehenden Theorie nach sollten die $\triangle$-Werte dargestellt werden können (Formel 14) durch eine Beziehung von der Form

$$\triangle = B_p z + C_p, \tag{16}$$

d. h. sie müßten in der Figur auf einer Geraden liegen. Das ist, wie man sieht, nicht der Fall. Trotzdem tragen wir die geraden Linien für $\triangle$ nach (16) berechnet in unsere Figur ein. Die Werte B_p und C_p, welche zu dieser Konstruktion nötig sind, folgen aus (15) unter Benutzung der Tabelle I. Sie sind für die Werte $p = 1$ bis $p = 8$ zusammengestellt in Tabelle III.

Trotzdem also von einer Darstellung der $\triangle$-Werte durch eine gerade Linie im ganzen nicht die Rede sein kann, zeigt doch die Figur eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit. Die Gerade nämlich, welche zu $p = 3$ gehört (und

Tabelle III.

p	B_p	C_p
1	0	0
2	— 0,5000	— 0,1250
3	— 1,4641	— 0,1250
4	— 2,6927	+ 0,4142
5	— 4,0710	+ 1,8078
6	— 5,6645	+ 4,3132
7	— 7,3390	+ 8,1488
8	— 9,1111	+ 13,5036

damit der theoretischen Spektralformel für einen Elektronenring mit 3 Elektronen entspricht), gibt eine recht gute Darstellung der $\triangle$-Werte für die leichteren Atome. Alle anderen Geraden zeigen erhebliche und mit wachsendem p wachsende Abweichungen gegen die beobachteten Werte.

Die Darstellung möge zweitens nach der folgenden Tabelle III beurteilt werden, in der in der ersten Spalte die z-Werte, in der zweiten die beobachteten Werte von $\triangle$ und in der dritten Spalte die nach der theoretischen Formel

$$\triangle = B_3 z + C_3 = -1{,}4641\, z - 0{,}1250 \quad (17)$$

berechneten $\triangle$-Werte eingetragen sind[1]).

Tabelle III.

z	$\triangle_{beob.}$	$\triangle_{ber.}$	$\triangle_{Somm.}$
11	— 14,52	— 16,2	— 16,4
12	— 16,1	— 17,7	— 17,9
13	— 17,7	— 19,2	— 19,3
14	— 19,2	— 20,6	— 20,8
15	— 21,0	— 22,1	— 22,3
16	— 21,3	— 23,5	— 23,7
17	— 23,3	— 25,0	— 25,1
19	— 26,7	— 27,9	— 28,1
20	— 28,4	— 29,4	— 29,5
21	— 29,8	— 30,9	— 31,0
22	— 30,7	— 32,3	— 32,4
23	— 31,9	— 33,8	— 33,9
24	— 33,0	— 35,3	— 35,3
25	— 33,3	— 36,7	— 36,7

Eine dritte Probe erhalten wir, indem wir den bis jetzt berechneten Zahlen der Tabelle III noch die nach der Sommerfeldschen Formel berechneten gegenüberstellen. Wie schon in der Einleitung hervorgehoben, schlägt Sommerfeld die Formel

$$\frac{\nu}{R} = \frac{(z-1{,}6)^2}{1^2} - \frac{(z-3{,}5)^2}{2^2}$$

vor, in der die Zahlen 1,6, 3,5, 1 und 2 empirisch bestimmt sind. Auch das ist eine quadratische Funktion in z, welche sich schreiben läßt

$$\frac{\nu}{R} = \frac{3}{4} z^2 - 1{,}45\, z - 0{,}50.$$

1) Man kann noch bemerken, daß genau gilt $B_3 = 2(1-\sqrt{3})$ und $C_3 = \frac{1}{8}$.

Die oben hauptsächlich in Frage kommende Differenz $\frac{\nu}{R} - \frac{3}{4} z^2$ sollte also nach dieser empirischen Formel lauten

$$\triangle = -1{,}45\, z - 0{,}50. \quad (18)$$

Es ist nun bemerkenswert, daß der Sommerfeldsche empirische Faktor von z nach (18) beinahe genau übereinstimmt mit dem entsprechenden theoretischen Faktor nach (17)[1]). Die nach (18) berechneten Werte sind als $\triangle_{Somm.}$ in die vierte Spalte der Tabelle III eingetragen. Man sieht, daß der Anschluß der theoretischen Formel an die Beobachtung gleich gut ist.

§ 3. Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse.

Wir nehmen jetzt als Tatsache an, daß der innerste Elektronenring im Normalzustande 3 Elektronen enthält und fragen nach dem Grunde der durch die Fig. 1 illustrierten Abweichung der für große Werte von z beobachteten $\frac{\nu}{R}$-Werte von den nach (14) zu berechnenden. Wir vermuten als Grund die Veränderlichkeit der Elektronenmasse und verbessern unsere Spektralformel in dieser Hinsicht. Bemerkenswerterweise wird die Endformel auch jetzt eine geschlossene.

Bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit und U die potentielle Energie eines Elektrons, dann lautet in der Relativitätstheorie die Lagrangesche Funktion L

$$L = -\mu c^2\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1\right) - U.$$

Die Bewegungsgleichungen für eine Koordinate q folgen nach dem allgemeinen Schema

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Nimmt man nun als Koordinaten Polarkoordinaten r, φ, setzt dementsprechend

$$v^2 = \dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2$$

und bildet die Bewegungsgleichungen, dann bekommt man für eine Kreisbewegung, bei der $r = a$, $\dot r = 0$ und $\dot\varphi = \omega = \text{const}$ zu setzen ist,

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\mu a \omega^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial U}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d}{dt}\frac{\mu a^2 \omega}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

1) Eigentlich gibt Sommerfeld seine Zahlen etwas genauer an, nämlich 1,64 und 3,5; das entspräche einem Gliede 1,537 z. Nach R. Swinne (diese Zeitschr. **17**, 481, 1916) hätte man statt dessen 1,6 und 3,6, einem Gliede 1,47 z entsprechend.

Die erste derselben beschreibt das Gleichgewicht der in der r-Richtung wirkenden Kraft $-\frac{\partial U}{\partial r}$ mit der Zentrifugalkraft $\mu a \omega^2 / \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, die zweite liefert den Impuls in der φ-Richtung als eine Konstante vom Werte $\mu^2 a \omega / \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

a) der Normalzustand.

Für unser System von 3 Elektronen im Normalzustande haben wir also die zwei Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{a v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= (z-S_3)^2 \frac{\varepsilon^2}{\mu}, \\ \frac{a v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= \frac{h}{2\pi\mu}, \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

welche an Stelle von (3) und (4) treten. Aus diesen Gleichungen folgt nach leichter Rechnung

$$\left.\begin{aligned} \mu v^2 &= 2hR(z-S_3)^2, \\ \frac{\varepsilon^2}{a} &= 2hR\frac{z-S_3}{\sqrt{1-\varrho(z-S_3)^2}}, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

an Stelle von (3') und (4'), wenn wir mit ϱ die charakteristische Größe

$$\varrho = \frac{2hR}{\mu c^2}$$

bezeichnen, für welche Sommerfeld in seinen Rechnungen den Wert $5{,}30 \cdot 10^{-5}$ als den wahrscheinlichsten ansieht.

Die potentielle Energie der 3 Elektronen wird nach wie vor durch (6) dargestellt

$$U = -3(z-S_3)\frac{\varepsilon^2}{a}, \quad (22)$$

dagegen hat man nunmehr für die kinetische Energie zu schreiben

$$T = 3\mu c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \quad (22')$$

Setzt man in (22) und (22') die Werte von μv^2 und $\frac{\varepsilon^2}{a}$ nach (21) ein, dann folgt für die negative Gesamtenergie

$$W_I = -(T+U)$$

die Darstellung

$$\frac{W_I}{hR} = \frac{6}{\varrho}\left(1-\sqrt{1-\varrho(z-S_3)^2}\right). \quad (23)$$

b) Der gesprengte Ring.

Bezeichnen wir in „ionisiertem" Zustand II die negative Gesamtenergie des innersten Ringes (mit 2 Elektronen) mit W'_{II} und die entsprechende Größe für den zweiquantigen Ring (mit einem Elektron) mit W''_{II}, dann wird in Analogie mit (23):

$$\frac{W'_{II}}{hR} = \frac{4}{\varrho}\left(1-\sqrt{1-\varrho(z-S_2)^2}\right) \quad (24)$$

und

$$W''_{II} = \frac{2}{\varrho}\left(1-\sqrt{1-\frac{\varrho}{4}(z-2)^2}\right). \quad (24')$$

Die gesuchte Größe wird also

$$\left.\begin{aligned} \frac{W_{II}}{hR} &= \frac{W'_{II}+W''_{II}}{hR} \\ &= \frac{4}{\varrho}\left(2-\sqrt{(1-\varrho(z-S_2)^2)}\right) \\ &+ \frac{2}{\varrho}\left(1-\sqrt{1-\frac{\varrho}{4}(z-2)^2}\right). \end{aligned}\right| \quad (25)$$

c) Die Frequenzformel.

Aus (23) und (25) folgt nach der Beziehung

$$W_I - W_{II} = h\nu$$

für die Frequenz der ausgesandten Spektrallinie

$$\left.\begin{aligned} \frac{\nu}{R} &= \frac{1}{\varrho}\Big\{4\sqrt{1-\varrho(z-S_2)^2} \\ &+ 2\sqrt{1-\frac{\varrho}{4}(z-2)^2} - 6\sqrt{1-\varrho(z-S_3)^2}\Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

wobei also $\varrho = \frac{2hR}{\mu c^2} = 5{,}30 \cdot 10^{-5}$, während nach Tabelle I die Größen S_2 und S_3 die Werte haben $S_2 = 0{,}25000$, $S_3 = 0{,}57735$.

Bei *Nd*, dem Element mit dem größten z-Werte, für welches K_{α_1} noch beobachtet wurde, wird $\varrho z^2 = 0{,}19$, man kann also auch an Stelle von (26) die Reihenentwicklung benutzen, welche lautet:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\nu}{R} &= (3\xi^2 - 2\eta^2 - \zeta^2) \\ &+ \varrho\left(\frac{3}{4}\xi^4 - \frac{1}{2}\eta^4 - \frac{1}{4}\zeta^4\right) \\ &+ \varrho^2\left(\frac{3}{8}\xi^6 - \frac{1}{4}\eta^6 - \frac{1}{8}\zeta^6\right) \\ &+ \varrho^3\left(\frac{15}{64}\xi^8 - \frac{5}{32}\eta^8 - \frac{5}{64}\zeta^8\right) \\ &+ \varrho^4\left(\frac{21}{128}\xi^{10} - \frac{8}{64}\eta^{10} - \frac{7}{128}\zeta^{10}\right) \\ &+ \varrho^5\left(\frac{63}{512}\xi^{12} - \frac{21}{256}\eta^{12} - \frac{21}{512}\zeta^{12}\right) \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned}\right| \quad (26')$$

wenn zur Abkürzung

$$\xi = z - 0{,}57735, \quad \eta = z - 0{,}25000,$$
$$\zeta = \frac{z-2}{2}$$

gesetzt wird. Vielfach ist indessen die Rechenarbeit bei direkter Verwendung von (26) geringer.

d) Vergleich mit der Erfahrung.

Inwiefern unsere Erwartungen über die zu erreichende Verbesserung durch Ersatz unserer früheren Formel

$$\frac{\nu}{R} = \frac{3}{4} z^2 - 1{,}4641\, z - 0{,}1250$$

durch die korrigierte Formel (26) erfüllt werden, wird durch Fig. 1 gezeigt.

Die Differenz $\triangle = \frac{\nu}{R} - \frac{3}{4} z^2$, welche früher durch eine Gerade dargestellt werden mußte, bekommt nach (26) einen Zusatz, welcher im Groben proportional z^4 ist. Die Differenz wird infolgedessen erst negativ, erreicht ein negatives Minimum, um dann schnell durch 0 hindurch nach positiven Werten zu steigen. Man sieht, daß gerade dieser typische Verlauf der Differenzen den beobachteten Punkten entspricht.

Der Anschluß selbst an die Beobachtungen ist schon recht gut, wenn man bedenkt, daß in der Figur nur die verhältnismäßig kleinen Differenzen $\frac{\nu}{R} - \frac{3}{4} z^2$ aufgetragen sind. Um das noch an Hand der Zahlen für $\frac{\nu}{R}$ selbst zu zeigen, füge ich Tabelle IV ein.

Tabelle IV.

z	ν/R beob.	ν/R ber. nach (26)	Abweichung in Proz.	ν/R ber. nach (27)	Abweichung in Proz.
10	—	61,89	—	60,38	—
15	147,7	146,4	0,9	147,2	0,3
20	271,6	272,4	0,3	270,9	0,3
25	435,4	437,3	0,4	435,5	0,0
30	635,9	641,5	0,9	640,0	0,6
35	880,4	885,6	0,6	883,8	0,4
40	1156	1171	1,3	1170	1,2
45	1482	1499	1,1	1499	1,1
50	1871	1877	0,3	1875	0,2
55	2290	2297	0,3	2300	0,4
60	2761	2777	0,6	2774	0,5
65	—	3306	—	3303	—

In der ersten Spalte stehen die Ordnungszahlen, jetzt mit je 5 Einheiten steigend, in der zweiten Spalte stehen die beobachteten Werte von $\frac{\nu}{R}$; die ersten beiden Spalten bilden also einen Auszug aus Tabelle II. In der dritten Spalte folgen dann die theoretischen nach (26) berechneten Werte und in der vierten die Differenzen gegen die beobachteten in Prozenten. Man sieht, daß der Anschluß recht gut ist, insbesondere, wenn man noch bedenkt, daß in der theoretischen Formel zwei Konstanten vorkommen R und ρ, deren Zahlenwerte beide angenommen wurden auf Grund von Messungen, welche mit der K-Serie nichts zu tun haben.

Schließlich ist noch in der fünften Spalte hinzugefügt, ν/R berechnet nach der Sommerfeldschen für die Veränderlichkeit der Elektronenmasse korrigierten Interpolationsformel, welche man schreiben kann

$$\frac{\nu}{R} = \frac{2}{\rho}\left(\sqrt{1 - \frac{\rho}{4}(z-3{,}5)^2} - \sqrt{1 - \rho(z-1{,}6)^2}\right). \quad (27)$$

Die prozentualen Abweichungen dieser Werte von den beobachteten, in Spalte 6 eingetragen, sind um ganz wenig kleiner als die der Spalte 4, was übrigens bei einer Formel mit einigen den Beobachtungen angepaßten Zahlen nicht wunder zu nehmen braucht.

§ 4. Weitere Bemerkungen und Vermutungen.

Wie insbesondere die Tabelle IV zeigt, könnte man sich wohl mit der bisherigen Darstellung zufrieden geben. Indessen legt Fig. 1 bei näherer Betrachtung die Vermutung nahe, daß die theoretische Formel (26) noch nicht ganz vollständig ist. Zwar zeigen nämlich die übrig gebliebenen Differenzen zweiter Ordnung zwischen den Ordinatenwerten der theoretischen Kurve und der beobachteten Punkte nach (26) so erhebliche Schwankungen, daß man sie nicht ihrerseits wieder zu einer glatten Kurve zusammensetzen kann. Sie sind aber alle positiv genauer

$$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{berechnet}} - \left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{beobachtet}}$$

ist stets positiv. Man kann sich nun die Frage vorlegen, ob es einen Grund dafür geben kann, daß solche geringe positive Differenzen schließlich noch übrig bleiben können. Als erstes wird man bemerken, daß ein Punkt in den vorhergehenden Überlegungen nicht ganz befriedigen kann. Den Kern nämlich mit den zwei übrig gebliebenen Elektronen haben wir in seiner Wirkung so behandelt, als ob er einem einfachen Kerne mit der Ladungszahl $z-2$ gleichkäme. Man kann nun die Überlegungen

so verbessern, daß man beim Quantenansatz die gegenseitige Beeinflussung des einquantigen Ringes mit zwei Elektronen und des zweiquantigen mit einem Elektron mit berücksichtigt. Führt man das so aus, daß man sich die Ladungen über die betreffenden Kreise gleichmäßig verteilt denkt, dann werden beide Ringdurchmesser etwas abgeändert und machen schließlich eine Korrektion der Zahlenkoeffizienten nötig. Die Rechnung, deren Einzelheiten ich übergehe, ergibt an Stelle von

$$\frac{\nu}{R} = \frac{3}{4} z^2 - 1{,}4641\ z - 0{,}1250$$

die Beziehung

$$\frac{\nu}{R} = \frac{3}{4} z^2 - 1{,}4485\ z - 0{,}1555;$$

beides ohne Korrektion für die Massenveränderlichkeit. Die Änderung der Formel ist so gering, daß sie nicht wesentlich in Frage kommt.

Zu einer, wie es scheint, der Sachlage besser angepaßten Auffassung kommt man, wenn man versucht auch über die anderen Linien der K-Serie vom hier vertretenen Standpunkt aus Aufschluß zu gewinnen.

Die K_{α_2}-Linie kommt hierbei nicht in Frage, ihre Wellenlängendifferenz gegen die K_{α_1}-Linie ergibt sich mit aller wünschenswerten Genauigkeit, wenn man sie ganz im Sommerfeldschen Sinne aus dem Auftreten einer zweiquantigen Ellipse neben dem zweiquantigen Kreise erklärt.

Anders die zweitstärkste Linie K_{β_1} der Serie. Man kann vermuten, daß dieselbe auftritt beim Zurückfallen des einen Elektrons aus einem dreiquantigen Kreise in die ursprüngliche Anordnung. Es müßte dann, mit Berücksichtigung der Massenveränderlichkeit für K_{β_1}, die Beziehung gelten

$$\frac{\nu}{R} = \frac{1}{\varrho}\Big\{4\sqrt{1-\varrho(z-S_2)^2} + 2\sqrt{1-\frac{\varrho}{9}(z-2)^2} - 6\sqrt{1-\varrho(z-S_3)^2}\Big\}, \tag{28}$$

welche sich von (26) nur dadurch unterscheidet, daß im zweiten Gliede $\varrho/9$ statt $\varrho/4$ steht. Inwiefern diese Darstellung berechtigt wäre, zeigt die folgende Tabelle V.

In der ersten Spalte stehen wieder die Stellenzeiger, in der zweiten die nach (28) berechneten Werte von $\frac{\nu}{R}$ (für K_{β_1}), in der dritten die beobachteten.

Die Differenz

$$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{ber.}} - \left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{beob.}} = D$$

Tabelle V.

z	$(\nu/R)_{\text{ber.}}$	$(\nu/R)_{\text{beob.}}$	D	D in Proz.
10	72,07	—	—	—
15	169,8	156,9	12,9	7,6
20	317,0	295,3	21,7	6,8
25	511,3	479,1	32,2	6,7
30	750,9	704,2	46,7	3,7
35	1038	980,9	57	5,8
40	1372	1293	79	6,1
45	1758	1666	92	5,5
50	2201	2109	92	4,4
55	2696	2589	107	4,1
60	3250	3121	129	4,1
65	3869	—	—	—

ist in der vierten Spalte eingetragen. Sie ist wesentlich größer als bei K_{α_1}, aber auffallenderweise ebenfalls durchweg positiv. Um eine Übersicht zu gewinnen, ist in Fig. 2 die Größe D als Funktion von z eingetragen (Kreuze).

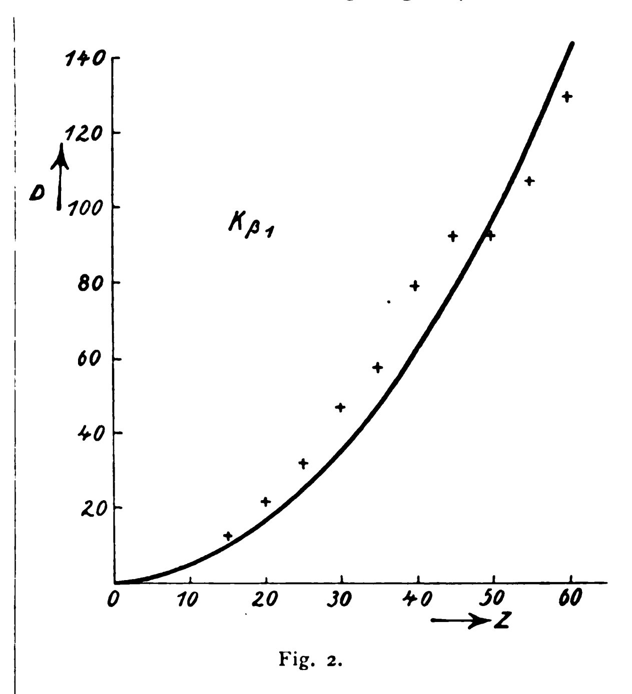


Fig. 2.

Man kann versuchen die Differenz D ihrerseits wieder durch eine Formel darzustellen, welche nun im Gegensatz zum früheren zunächst einen rein interpolatorischen Charakter hat. Setzt man

$$D = a z^2 \tag{29}$$

mit $a = 0{,}0398$, so entspricht dieser Ansatz dem Verlauf der aus den Beobachtungen berechneten D der Tabelle, wie Fig. 2 zeigt, in der (29) als Kurve eingetragen wurde.

So kommen wir im ganzen für die K_{β_1}-Linie zu folgender Darstellung:

$$\frac{\nu}{R}=\frac{1}{\varrho}\left\{4\sqrt{1-\varrho(z-S_2)^2}\right. \tag{30}$$
$$\left.+2\sqrt{1-\frac{\varrho}{9}(z-2)^2}-6\sqrt{1-\varrho(z-S_3)^2}\right\}-\alpha z^2.$$

Die Frage ist nun, ob das empirische Korrektionsglied αz^2 seine Erklärung im Atomaufbau finden kann.

Wir machen zunächst eine qualitative Bemerkung. Ebenso wie bei der K_{β_1}-Linie hatten wir bei der K_{α_1}-Linie Differenzen gegen die berechneten Schwingungszahlen gefunden. Die Abweichung hat in beiden Fällen denselben Sinn, ist aber bei K_{β_1} erheblich größer als bei K_{α_1}. Da liegt es offenbar nahe, an eine Störung zu denken, die von außen kommend auf den dreiquantigen Ring der K_{β_1}-Linie einen größeren Einfluß ausüben kann als auf den kleineren zweiquantigen Ring, der zur K_{α_1}-Linie gehört. Solche Störungen, von den äußeren Elektronen herrührend, sind von Sommerfeld[1]) einer Berechnung unterzogen worden. Er kommt zu einem Resultat, welches wir für unsere Zwecke folgendermaßen spezialisieren können. Bewegt sich ein Elektron in einem n-quantigen Ringe um einen Kern von der Ladungszahl z und wird es gestört durch einen äußeren Elektronenring, dann ergibt sich für seine negative Gesamtenergie W der Wert

$$\frac{W}{hR}=\frac{z^2}{n^2(1-\beta n^6)}, \tag{31}$$

wobei β eine Konstante bedeutet. Der Zusatzfaktor $1-\beta n^6$ im Nenner mißt die Störung.

Die Relativitätskorrektion ist in (31) unberücksichtigt geblieben; wir gestatten uns weiter erstens den Zähler z^2 an Stelle von $(z-2)^2$ stehen zu lassen und schließlich (31) zu entwickeln in

$$\frac{W}{hR}=\frac{z^2}{n^2}+\beta n^4 z^2. \tag{31'}$$

Dann sieht man, daß die von außen kommende Störung gerade ein Störungsglied von der oben gefundenen empirischen Gestalt bedingt. Worauf es dabei wesentlich ankommt, ist die Tatsache, daß das Vorzeichen des Zusatzgliedes mit dem in (30) eingeführten übereinstimmt, wenn wir annehmen, daß der dreiquantige Elektronenring gestört wird, so wie das (31') ausdrückt. Da $n=3$, entspricht $\alpha=0{,}0398$ der Wert $\beta=0{,}000491$.

Wir können nunmehr noch eine weitere Probe auf die Existenz der fraglichen Störung machen. Ist sie nämlich beim dreiquantigen Ringe vorhanden, dann muß sie, allerdings stark geschwächt, auch beim zweiquantigen Ringe der K_{α_1}-Linie in Erscheinung treten, d. h. zur Formel (26) wäre noch das Korrektionsglied

1) K. B. Akademie d. Wiss. loc. cit.

$$-\beta\cdot 2^4\cdot z^2=-0{,}00785\,z^2$$

hinzuzufügen. Tatsächlich zeigt Fig. 3, daß sich die bei der Darstellung der K_{α_1}-Linie durch (26) übriggebliebenen Differenzen, welche als Punkte eingetragen sind, wohl durch jenes Zusatzglied

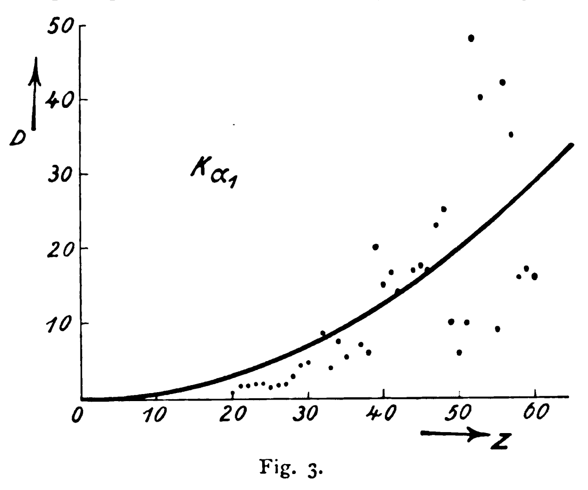


Fig. 3.

(ausgezogene Kurve) ausgleichen dürften. Man sieht aber zugleich an der wirren Lagerung der Punkte, daß die Fehler der bisherigen Beobachtungen weitere Schlüsse unterbinden.

Zum Schlusse will ich nicht unerwähnt lassen, daß es nicht ausgeschlossen ist, daß verfeinerte Beobachtungen die Unmöglichkeit eines letzten Korrektionsgliedes von so einfacher Gestalt wie oben dartun werden. Die äußeren Elektronen erzeugen dasselbe, ihre Lagerung aber wird von Atom zu Atom individuelle Unterschiede aufweisen, man kann also an das letzte Korrektionsglied nur die Forderung stellen, daß es dem Gange nach die Beobachtung wiedergibt.

Fassen wir zusammen, dann scheint mir aus dem Obigen mit erheblicher Wahrscheinlichkeit das Resultat hervorzugehen: Alle Atome (mit Ausnahme der Anfangselemente) enthalten um den Kern einen ersten, einquantigen Ring, welcher aus drei Elektronen besteht.

Göttingen, Physik. Institut.

(Eingegangen 2. Juni 1917.)

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Verliehen: Dem Privatdozenten für Pharmazeutische Chemie an der Universität Kiel Dr. Richard Horrmann der Titel Professor, dem Professor der Chemie an der Tierärztlichen Hochschule Dresden Dr. Hermann Kunz-Krause der Titel Geheimer Medizinalrat, dem Honorardozenten für darstellende Geometrie und Mathematik an der Hochschule für Bodenkultur in Wien Dr. Wilhelm Olbrich der Titel a. o. Professor.

Gestorben: Der Chemiker am Kaiser-Wilhelm-Institut für Physikalische Chemie und Elektrochemie in Berlin-Dahlem Dr. Friedrich Joseph Weil, der frühere Herausgeber der „Chemischen Revue über die Fett- und Harz-Industrie" Dr. Louis Allen in Hamburg.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 13. | 1. Juli 1917. Redaktionsschluß für No. 14 am 13. Juli 1917. | 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Bemerkungen zu zwei Arbeiten von E. Waetzmann.

Von E. Budde.

I. Ein kritischer Satz von Waetzmann.

Wir betrachten erzwungene Schwingungen eines Punktes μ von einem Freiheitsgrad, dessen Koordinate x sei. Derselbe möge von vornherein aufgefaßt werden als Repräsentant eines resonierenden Objektes, dessen Bewegungen ev. als Gehörswahrnehmungen empfunden werden. Treten an μ zwei stationäre Schwingungen von gleicher Amplitude A zusammen, deren Kreisfrequenzen m und n sind, so lautet seine Schwingungsgleichung (die Phasenkonstanten sind als unerheblich fortgelassen)

$$x = A\,(\sin mt + \sin nt). \tag{1}$$

Diese läßt sich in bekannter Weise sofort umformen in

$$x = 2A\cos\frac{m-n}{2}t\cdot\sin\frac{m+n}{2}t\,. \tag{2}$$

Sind die Amplituden der beiden zu kombinierenden Töne ungleich, so lautet die Schwingungsgleichung

$$x = A\sin mt + B\sin nt\,. \tag{3}$$

Diese läßt sich zunächst umformen in

$$\begin{aligned} x &= (A+B)\cos\frac{m-n}{2}t\cdot\sin\frac{m+n}{2}t \\ &\quad + (A-B)\sin\frac{m-n}{2}t\cdot\cos\frac{m+n}{2}t\,, \end{aligned} \tag{4}$$

und hieraus ergibt sich weiter, indem man Sinus und Kosinus desselben Arguments zusammenfaßt,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(m-n)t} \\ &\quad\cdot\sin\left[\frac{m+n}{2}t + \operatorname{arctg}\left(\frac{A-B}{A+B}\operatorname{tang}\frac{m-n}{2}t\right)\right] \end{aligned} \tag{5}$$

oder auch

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{A^2+B^2-2AB\cos(m+n)t} \\ &\quad\cdot\sin\left[\frac{m-n}{2}t + \operatorname{arctg}\left(\frac{A+B}{A-B}\operatorname{tang}\frac{m+n}{2}t\right)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

H. Starke[1]) hat die Gleichung (2) gedeutet als Darstellung einer Schwingung von der Kreisfrequenz $\frac{m+n}{2}$ mit der variabeln Amplitude

$$2A\cos\frac{m-n}{2}t\,.$$

Ich selbst[2]) habe die gleiche Zerlegung benutzt und außerdem auch die Gleichung (5) als Ausdruck einer Schwingung von der Kreisfrequenz $\frac{m+n}{2}$ und der variablen Amplitude

$$\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(m-n)t}$$

aufgefaßt. Waetzmann[3]) hat gegen diese Deutung der Formeln Einspruch erhoben. Ich halte diesen Einspruch für nicht berechtigt, und da er recht tiefgehende Fragen berührt, so erlaube ich mir, die Begründung meiner abweichenden Ansicht hier darzulegen.

Wie aus den Gleichungen (1) bis (6) ohne weiteres hervorgeht, wird dabei die übliche Vereinfachung beibehalten, welche darin besteht, daß das einzelne schwingungsfähige Organ im Ohr durch einen Punkt μ von einem Freiheitsgrad ersetzt wird. Ferner wollen wir hier nur den Fall betrachten, daß die beiden zu kombinierenden Töne gleiche Amplitude haben. Dann ziehen sich die Gleichungen (5) und (6) auf (2) zurück, und man kann $A = 1$ setzen, ohne die Allgemeinheit zu beschränken. Es sind also zunächst die beiden Gleichungen

$$x = \sin mt + \sin nt\,, \tag{7}$$

$$x = 2\cos\frac{m-n}{2}t\cdot\sin\frac{m+n}{2}t \tag{8}$$

zu betrachten. Aus Gleichung (8) leitet man in bekannter Weise die Schwebungen ab, indem

$$2\cos\frac{m-n}{2}t$$

---

1) H. Starke, Verh. d. D. Phys. Ges. **10**, 285, 1908.
2) E. Budde, Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 121, 1911.
3) E. Waetzmann, diese Zeitschr. **12**, 235, 1911.

als veränderliche Amplitude des Tones von der Schwingungszahl $\frac{m+n}{4\pi}$ aufgefaßt wird. Wesentlich ist dabei, daß man der Amplitude, weil der Kosinus nach je $\frac{2\pi}{m-n}$ Sekunden sein Vorzeichen wechselt, streng genommen abwechselnd positive und negative Werte (Phasenwechsel) zuschreiben muß. Die Intensität dagegen ist dem Quadrat des Kosinus proportional, und da

$$4\cos^2\frac{m-n}{2}t = 2 + 2\cos(m-n)t\,,$$

so folgt, daß die Periode der Intensitätsschwankung halb so groß ist wie diejenige der Amplitude. Man hört $\frac{m-n}{2\pi}$ Schwebungen in der Sekunde.

Herr Waetzmann hält diesen Schluß für bestechend, solange $m-n$ sehr klein ist, aber für irreführend. Zur Begründung seiner Kritik sagt er:

„Das Auftreten einer Sinusfunktion in dem Ausdruck für die Resultierende kann nur dann als das Vorhandensein eines Tones, dessen Schwingungszahl gleich der Periodenzahl des Sinus ist, gedeutet werden, wenn der Sinus als Summand, nicht aber wenn er als Faktor eines Produktes auftritt, dessen anderer Faktor nicht konstant ist, sondern selbst mit der Zeit variiert. Der Definition des Tones als Sinusschwingung liegt mathematisch zugrunde das Fouriersche Theorem, physikalisch die Resonanz und entsprechend physiologisch die Resonanztheorie des Hörens, die eine Konsequenz oder richtiger Voraussetzung des Ohmschen Gesetzes ist. Nur weil es mathematisch möglich ist, eine komplizierte Schwingung als Summe von Sinusschwingungen darzustellen, und weil ferner diese einzelnen Summanden durch Resonatoren tatsächlich verstärkt und auch ohne Resonatoren gehört werden, ist unsere Tondefinition berechtigt. Es hätte also keinen Sinn, die Empfindung eines einfachen Tones auf das Vorhandensein einer Sinusschwingung im Außenraum zurückführen zu wollen, wenn das Ohr keinen Resonanzapparat enthielte. *Entsprechend hat es physikalisch keinen Sinn, einen Schwingungsvorgang, der in einem der Resonatoren im Ohr vor sich geht, nochmals in Sinusschwingungen zerlegen zu wollen, da ja kein Apparat vorhanden ist, der diese Zerlegung besorgen könnte.*"

Daraus schließt Waetzmann:

„daß das Auftreten eines Sinus als Faktor eines Produktes, dessen anderer Faktor auch eine Funktion der Zeit ist, das Vorhandensein eines Tones von der betreffenden Schwingungszahl weder physikalisch noch physiologisch verständlich zu machen vermag".

Betrachten wir zunächst den (von mir) im Druck hervorgehobenen Satz; dabei braucht die Unschärfe der Resonanz im Ohr noch nicht berücksichtigt zu werden. Mir scheint, daß er auf den zur Erörterung stehenden Fall nicht anwendbar ist; denn wenn man Gleichung (8) als Schwebungsgleichung auffaßt, so mutet man dem Ohr nicht zu, die tönende Schwingung noch einmal zu zerlegen, sondern nur, ihre wechselnde Intensität zu empfinden, und das noch mit der Beschränkung, daß der Wechsel nicht zu schnell vor sich gehe, so daß das Gehirn Zeit hat, dem An- und Abschwellen des Tones zu folgen. Dafür, daß Schwebungen deutlich vernommen werden, wird ja vorausgesetzt, daß $m-n$ klein sei. Es besteht kein Zweifel darüber, daß ein gegebener Resonator zu verschiedenen Zeiten mit verschiedener Intensität schwingen kann, und daß diese Intensitätsverschiedenheit wahrgenommen werden kann, ohne daß dabei noch eine besondere Zerlegung erforderlich ist; demgemäß wird auch kein besonderer zerlegender Apparat erforderlich. Es zweifelt niemand daran, daß eine Gleichung wie

$$x = e^{-bt}\sin mt$$

eine gedämpfte Schwingung von der Kreisfrequenz m richtig wiedergibt. e^{-bt} wird dabei einfach als mit der Zeit abnehmende Amplitude aufgefaßt. Ebenso denkbar und tatsächlich ebenso herstellbar wie ein Ton, dessen Amplitude sich asymptotisch der Null nähert, ist aber auch ein Ton mit periodisch veränderlicher Amplitude, und der läßt sich, wenn φ eine periodische Funktion der Zeit ist, offenbar darstellen und nur darstellen durch eine Gleichung von der Form

$$x = \varphi(t)\sin mt\,.$$

Dabei kann φ ebensowohl ein Kosinus wie irgendeine andere periodische Funktion von t sein. Was aber für Töne im allgemeinen gilt, gilt sicherlich auch im Falle der Gleichung (8). Ich halte also die Starkesche Deutung für durchaus berechtigt. Nur der Vorbehalt ist zu wiederholen, daß das Ohr, um nach Gleichung (8) zu perzipieren, Zeit haben muß, die veränderliche Intensität als solche mehr oder weniger bequem zu erfassen. Das ist, wie bekannt, in eminenter Weise der Fall, wenn $m-n$ sehr klein ist; ist $m-n$ nicht sehr klein, aber klein oder mäßig, so merkt das Ohr noch die Intensitätsschwankungen, ohne ihren Verlauf im einzelnen verfolgen zu können, die Schwebungen werden zu „Stößen", schließlich zum Schwirren, und über eine gewisse Grenze hinaus versagt



in bekannter Weise die Fähigkeit der Stoßwahrnehmung. Ist dieser obere Grenzfall eingetreten, so ist die Gleichung (8) immer noch richtig, aber die durch sie dargestellte Tonkombination ist als Variationston aufzufassen, und die namentlich von F. A. Schulze entwickelte Theorie dieser Töne tritt in Kraft. Danach ist der Ausdruck

$$2 \cos \frac{m-n}{2} t \cdot \sin \frac{m+n}{2} t$$

in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln, und es liegt auf der Hand, daß diese Entwicklung nichts anderes liefert als die Gleichung

$$x = \sin mt + \sin nt;$$

das heißt, man hört die getrennten Töne m und n.

Die leichten Modifikationen dieser Betrachtung, welche sich ergeben, wenn man an Primärtöne denkt, die in verschiedenen Regionen der Tonleiter liegen, bedürfen wohl keines näheren Eingehens.

Ähnlich wie die Resonatoren im Ohr verhalten sich die Resonatoren außerhalb des Ohres, z. B. die von Waetzmann besonders hervorgehobenen Stimmgabeln; nur unterscheiden sich diese erstens dadurch, daß sie schwach gedämpft sind, und zweitens dadurch, daß sie ihrer größeren Masse wegen, und weil sie keine besondere resonanzverstärkende Zuleitung haben, weniger leicht ansprechen[1]). Man denke sich z. B. eine Stimmgabel, die auf 200 Schwingungen in der Sekunde abgestimmt ist, und der gleichzeitig zwei Töne von 200,25 und 199,75 Schwingungen zugeführt werden. Die Schwebung dauert dann zwei Sekunden, die mathematische Periode der Amplitude aber vier Sekunden. Während der ersten zwei Sekunden erhält die Stimmgabel Anstöße von der Anzahl 200, die erst an Stärke zunehmen, dann abnehmen, innerhalb deren aber kein Phasenunterschied vorhanden ist. Unter der Voraussetzung also, daß die Stimmgabel empfindlich genug ist, um innerhalb zwei Sekunden zum merklichen Mittönen zu kommen, wird sie diesen Anstößen folgen und wird mitschwingen. Dann aber folgt eine weitere Reihe von Anstößen, die die entgegengesetzte Phase haben wie vorhin. Diese Anstöße werden also die Stimmgabel erst zur Ruhe bringen und dann eine neue Resonanzschwingung an ihr einleiten, und so werden die verschiedenen Resonanzbewegungen der Stimmgabel periodisch aufeinander folgen, und zwar mit der Periode der Schwebungen, aber mit abwechselnder Phase — immer vorausgesetzt, daß die Stimmgabel empfindlich genug sei, die Erregung genügend anzunehmen und dabei dem Phasenwechsel der Amplitude zu folgen. Nun denke man sich denselben Hergang wiederholt, aber mit einer größeren Schwebungszahl, etwa 20 in der Sekunde; dann wird die Stimmgabel bei ihrer geringen Reizbarkeit den Schwankungen des zugeleiteten Tones nicht mehr so weit folgen, daß sie in deutliche Schwingungen gerät, und es ist nicht zu verwundern, daß ihr Mittönen sehr bald ein Ende nimmt, wenn man die Differenz $m-n$ vergrößert. Das hier Gesagte ist aber nur die etwas ins Breite gezogene Erklärung, welche H. Starke l. c. dafür gegeben hat, daß der Ton von der Kreisfrequenz $\frac{m+n}{2}$ sich vielfach durch Resonatoren nicht nachweisen läßt. Die Nachweisbarkeit kann nur verlangt werden, wenn der Resonator so empfindlich ist, daß die Tonschwingungen, welche in einer einzelnen Schwebung enthalten sind, ausreichen, um erstens eine bereits vorhandene Schwingung des Resonators von entgegengesetzter Phase auszulöschen, und dann noch zweitens eine neue Schwingung einzuleiten.

Es ist vielleicht bemerkenswert, daß das Auge sich, wenn es Schwebungskurven analysiert, der Gleichung (8) anschließt; ist $m-n$ klein, so faßt es, wie wohl jedermann aus der Ansicht zahlreicher Kurven weiß, die Resultierende von m und n als Schwingung von variabler Intensität auf. Vgl. hierzu die unten folgende Figur. (Den Vorzeichenwechsel der Amplitude beachtet es in der Regel nicht.) Wird $m-n$ größer, so folgt es der Kurve noch mit mäßiger Leichtigkeit, wenn n ein aliquoter Teil von m ist, schon etwas schwieriger, wenn das Verhältnis $\frac{m}{n}$ sich durch kleine Zahlen ausdrücken läßt; darüber hinaus wird ihm das Bild unübersichtlich.

Auf einen Punkt ist noch hinzuweisen. In Gleichung (8) faßt man in der Regel $\frac{m+n}{2}$ als die Kreisfrequenz des gehörten Tones und

$$2 \cos \frac{m-n}{2} t$$

als die veränderliche Amplitude desselben auf. Rein mathematisch wäre es offenbar ebenso berechtigt, die Gleichung aufzufassen als Darstellung eines Tones von der Kreisfrequenz $\frac{m-n}{2}$ und der variabeln Amplitude $2 \sin \frac{m+n}{2} t$. Das Auge kann dieser Auffassung in der Tat folgen, wenngleich die Zumutung, das zu tun, auf den ersten Blick etwas paradox wirken mag.

1) Schon Helmholtz, „Tonempfindungen", 4. Aufl., Braunschweig 1877, S. 276 hat Erwägungen dieser Art kurz aber deutlich ausgesprochen.

Es faßt die nachstehende Figur gewöhnlich auf als Schwingung, deren eine Periode etwa durch die Strecke *usv* dargestellt wird, und deren Amplitude von F bis u zunimmt, von v bis G wieder abnimmt usw. Man kann sie aber auch

auffassen als eine Schwingung, die von F über u, v, G, r bis H reicht, und deren Amplitude den kurzen Schwebungen, die z. B. durch die Strecke *usv* angedeutet sind, unterliegt. Das Ohr aber kann dieser Auffassung nicht folgen, einfach weil auf jeder Strecke von der Art der *usv* zwei Phasenwechsel liegen; die verschiedenen Phasen folgen also so schnell aufeinander, daß die einzelne nicht imstande ist, die resonierende Faser bis zur Empfindlichkeitsschwelle zu reizen. (Schließt man sich der Hypothese an, die ich in den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft vom Jahre 1916 behandelt habe[1]), so entspricht dem, daß die Schwingungszahl $\frac{m-n}{4\pi}$ für das Erregungsmaximum der Basilarmembran nicht in Betracht kommt.) Im Vorstehenden liegt auch schon der Beweis dafür, daß für den Fall $B \neq A$ die Gleichung (6) überhaupt nicht in Betracht kommt, sondern nur Gleichung (5). Nach alledem halte ich die von Starke l. c. gegebenen Deutungen für richtig.

Die große Bedeutung des Ohmschen Prinzips soll gewiß nicht in Abrede gestellt werden, aber den oben zitierten Sätzen von Waetzmann möchte ich die beiden folgenden Bemerkungen gegenüberstellen:

Erstens: Es lassen sich Fälle nachweisen, in welchen die Fouriersche Reihe für sich allein nicht ausreicht, um die Erfahrungstatsachen darzustellen. Das trifft schon für den einfachen Fall der Gleichung (7) zu, wenn die beiden in Betracht kommenden Töne m und n voneinander um erheblich weniger als einen halben Ton abweichen. Für diesen Fall gibt Waetzmann[2]) selbst als Erfahrungsresultat im Anschluß an Stumpf an: „Man hört nur einen zwischen ihnen liegenden Ton, und diesen schwebend.“ Für das Auftreten dieses zwischenliegenden Tones gibt Gleichung (7) für sich allein durchaus keinen Anhalt; man muß, um es zu erklären, die Unschärfe der Resonanz im Ohr zur Hilfe nehmen; vgl. hierzu meine zitierte Abhandlung vom Jahre 1916.

Zweitens: neben dem Ohmschen Prinzip kommt für jeden, der sich auf die Grundlage der Helmholtzschen Theorie stellt, das Prinzip der spezifischen Sinnesenergien in Betracht, und zwar mit gleicher Berechtigung wie jenes. Aus diesem folgt aber: Das Ohmsche Prinzip kann nur bestimmen, welche resonierenden Elemente im Ohr durch einen objektiv gegebenen Ton m in Bewegung geraten. Es liefert aber keine Vorschrift darüber, welcher Art diese Bewegung sein muß, um den Hörnerv zu reizen. Schwingt irgendeine Faser der Basilarmembran mit ihren Anhängen, so reizt sie die zugehörigen Nervenfibrillen und liefert dadurch einen Tonreiz bzw. einen Beitrag zu einem solchen; dieser Reiz erzeugt eine Tonempfindung, deren Höhe vom Sensorium nach der Lage der gereizten Region beurteilt wird. Dabei kommt es auf die Bewegungsform der resonierenden Elemente nicht näher an; irgendeine bewegte Basilarfaser wird die zugehörigen Nervenfibrillen reizen, einerlei ob sie mit konstanter oder veränderlicher Epoche schwingt. Welcher von diesen Zuständen gegebenenfalls eintritt, das bestimmt a priori nicht die Fouriersche Reihe, sondern die eigene Bewegungsgleichung der betreffenden Faser mit ihrem Zubehör.

Ich möchte hieraus den Schluß ziehen, daß die Bedeutung der Fourierschen Reihe für die Tonwahrnehmung noch einer Grenzfestsetzung bedarf, die aber hier nicht versucht werden soll.

II. Über die Bewegungsgleichung der Telephonmembran im Mikrophon-Telephonkreis.

Die schöne Untersuchung, welche Waetzmann unter dem Titel: „Die Entstehungsweise von Kombinationstönen im Mikrophon-Telephonkreis“[1]) veröffentlicht hat, stellt der Theorie die Aufgabe, Bewegungsgleichungen zu ermitteln, welche die beobachteten Erscheinungen umfassen. Dabei soll wieder die Vereinfachung beibehalten werden, welche die Schwingung der Telephonplatte durch diejenige eines Punktes von einem Freiheitsgrad ersetzt. Das wird um so eher erlaubt sein, da das von Waetzmann benutzte Spiegelungsverfahren tatsächlich immer nur die Schwingungen wiedergibt, welche eine bestimmte Stelle der Membran unter verschiedenen Bedingungen ausführt.

Von besonderer Wichtigkeit ist dabei ein Versuchsergebnis, welches Waetzmann l. c. Seite 732 angibt: Die Telephonmembran wurde durch einen konstanten Strom einseitig durchgebogen und dann ohne Einschaltung des Mikrophons durch zwei Primärtöne erregt. Dabei waren keine merklichen Kombinationstöne

1) E. Budde, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 369, 1916.
2) E. Waetzmann, Die Resonanztheorie des Hörens. Braunschweig, 1912, S. 96.

1) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. 42, 729, 1913.



zu beobachten; sie waren, wenn vorhanden, jedenfalls so schwach, daß Waetzmann erklärt, er könne auf Grund seines Beobachtungsmaterials ihre Existenz nicht mit Sicherheit behaupten. Daraus folgt, daß man der Telephonmembran, welche bei seinen Versuchen diente, innerhalb der benutzten Amplituden eine lineare Schwingungsgleichung zuzuschreiben hat. Wir haben also den Fall vor uns, daß ein Objekt mit linearer Schwingungsgleichung unter gewissen Umständen Kombinationstöne liefert, während wir gewöhnt sind, für die Entstehung von Kombinationstönen stets nichtlineare Glieder der Schwingungsgleichung in Anspruch zu nehmen. Das Interesse der Untersuchung liegt gerade in der Aufgabe, die Umstände, welche diese Abweichung vom Gewöhnlichen begründen, mathematisch annähernd zu formulieren. Das ist nur in sehr roher Annäherung möglich, weil die Eigenschaften des bei den Versuchen benutzten Mikrophons nicht mit genügender Konstanz quantitativ reproduzierbar und sehr ungenau bekannt sind; aber man kann wenigstens zu einer ungefähren theoretischen Darstellung des Waetzmannschen Falles gelangen.

Den Weg zur Ermittlung derselben hat Waetzmann deutlich gewiesen. Für die Einzelheiten muß ich auf die Originalabhandlung verweisen; hier ist nur folgendes auszugsweise hervorzuheben:

Bei den von Waetzmann abgebildeten Kurven handelt es sich um Schwingungen, deren Verhältnisse $\frac{m}{n}$ zwischen den Grenzen 6/5 und 30/29 liegen. Die benutzten Tonpaare mußten also deutliche Schwebungen liefern, die ja auch in den Kurven bequem zu erkennen sind. Nun hat Waetzmann konstatiert, daß der mittlere Ruhewiderstand des Mikrophons nicht konstant ist, sondern von der Intensität der durchgehenden Schwingungen abhängt. Das frisch geschüttelte Mikrophon zeigt einen großen Ruhewiderstand von über 100 Ω; wird es durch einen kräftigen Ton erregt, so nimmt derselbe allmählich bis auf etwa 25 Ω ab. Fällt jetzt ein neuer Ton auf, so wird dieser Widerstand vergrößert, und wenn die Schwingungen schwächer werden, nimmt er wieder ab. Die mittlere Lage der Telephonmembran, über welche sich die Schwingungen lagern, ist nicht identisch mit der Ruhelage im stromlosen Zustand, sondern weicht nach der einen oder anderen Seite von ihr ab. Werden dem Mikrophon gleichzeitig zwei Töne m und n zugeleitet, deren Kreisfrequenzen nicht allzuweit voneinander verschieden sind, so werden diese Töne, da sie deutlich miteinander schweben, abwechselnd eine Verstärkungs- und eine Schwächungszeit haben. Während der Verstärkungszeit ist der mittlere Widerstand relativ groß, während der Schwächungszeit ist er relativ klein. Der durchgehende Strom wird während der Verstärkungszeit die Telephonplatte weniger durchbiegen als während der Schwächungszeit.

Überträgt man dieses auf einen Punkt von einem Freiheitsgrad, so heißt es: Würde der Punkt von keinen äußeren Kräften angegriffen, so wäre seine Gleichgewichtslage $x = 0$. Wird aber der Punkt gleichzeitig der Einwirkung zweier schwebender stationärer Töne m und n ausgesetzt, so ist die Mittellage, von der seine Schwingungen ausgehen, nicht mehr $x = 0$, sondern $x = \psi$, wo ψ eine Funktion der resultierenden Intensität ist, die sich aus dem Zusammenwirken von m und n ergibt. Die rücktreibende Kraft, welche seine Schwingung beschleunigt, ist also nicht mehr $q^2 x$, wie es ohne Stromdurchgang der Fall sein würde, sondern $q^2(x - \psi)$. Dabei bleibt aber seine Schwingungsgleichung, wenn man diese Kraft einsetzt, linear, d. h. sie hat die Gestalt

$$x'' + 2bx' + q^2(x - \psi) = A \sin mt + B \sin nt, \tag{1}$$

weil, wie oben schon gesagt wurde, der Versuch ergeben hat, daß die Gleichung der Telephonplatte innerhalb aller benutzten Amplituden linear ist. Es handelt sich nun darum, das ψ in dieser Gleichung zu bestimmen. Wir wissen, daß ψ von der Intensität der jeweiligen Schwingungen abhängt; die Art der Abhängigkeit ist nicht genau bekannt. Wir wissen nur, es existiert eine gewisse mittlere Durchbiegung α, und während der Verstärkungszeit ist der Widerstand größer, also der Strom und damit die Durchbiegung schwächer, während der Schwächungszeit ist das Gegenteil der Fall. Nennt man also die Intensität der Schwingungen J, so wird es erlaubt sein, in erster Annäherung die Abweichung vom Mittel proportional mit J zu setzen, d. h. wenn ζ eine Zahl ist, so wird sein

$$\psi = \alpha - \zeta J. \tag{2}$$

Das J in dieser Gleichung ist diejenige Intensität, welche direkt aus dem Zusammentreffen der beiden Töne m und n hervorgeht. Es berechnet sich also wenigstens annähernd aus der folgenden Gleichung, in welcher die abhängige Variable mit y bezeichnet ist,

$$y'' + 2by' + q^2 y = A \sin mt + B \sin nt.$$

Dabei werden die Konstanten A und B nicht ganz dieselben Werte haben, die sie in der Gleichung (1) besitzen, weil ein Teil der aufgewandten Energie für die Nebeneffekte verloren geht. Das hat aber für das Folgende keine

wesentliche Bedeutung. Aus Gleichung (3) ergibt sich in bekannter Weise, wenn E_1, E_2, h und k vier neue Konstanten sind, für die erzwungene Schwingung in y

$$y = E_1 \sin(mt + h)\,t + E_2 \sin(nt + k)\,t\,.$$

Sollen Verdeckungserscheinungen vermieden werden, so müssen A und B so gewählt sein, daß E_1 und E_2 nicht weit voneinander abweichen. Wird $E_2 = E_1$, so kann man die Gleichung (2), anderenfalls die Gleichung (5) der ersten (vorstehenden) Abhandlung unbedenklich anwenden; man erhält also, wenn die Amplitude in y mit P bezeichnet wird

$$P = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 \cos[(m-n)t + h - k]}$$

und damit

$$J = E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 \cos[(m-n)t + h - k]\,. \tag{3}$$

Setzt man dies in Gleichung (2) und damit ψ in Gleichung (1) ein, so findet sich

$$x'' + 2bx' + q^2(x + \text{const}) = A \sin mt + B \sin nt - 2q^2 \zeta E_1 E_2 \cos[(m-n)t + h - k]\,. \tag{4}$$

Da jetzt auf der linken Seite lauter lineare Glieder stehen, folgt sofort, daß man außer den gedämpften Eigenschwingungen der Telephonplatte und den beiden Tönen m und n den Differenzton $m - n$ hört. Damit ist also obenhin dargetan, daß die Telephonplatte unter den Waetzmannschen Bedingungen auch dann einen Kombinationston liefert, wenn sie an sich innerhalb der benutzten Tonstärken eine lineare Schwingungsgleichung hat Gleichung (2) ist wahrscheinlich zu stark vereinfacht, aber wenn an Stelle von ζJ eine verwickeltere Form mit höheren Potenzen von J tritt, so wird das offenbar nur die Folge haben, daß außer dem Differenzton auch Kombinationstöne anderer Ordnung auftreten können. Der Versuch, die Intensität des Kombinationstones aus Gleichung (4) zu berechnen, würde keinen Sinn haben, solange kein Beobachtungsmaterial vorliegt, aus dem sich der Wert von ζ bzw. die genauere Beziehung zwischen ψ und J ermitteln läßt. Weitere Experimente der hier besprochenen Art unter Bedingungen, welche diese Ermittlung vorzunehmen gestatten, wären offenbar sehr erwünscht.

(Eingegangen 1. Juni 1917.)

Die Abhängigkeit des Luft- und Wasserwiderstandes von der Geschwindigkeit. (Nachtrag.)

Von H. Lorenz.

In meiner gleichnamigen Abhandlung (diese Zeitschr. 1917 Nr. 10) habe ich gezeigt, daß der Quotient des von der Verdrängung und der Wellenbildung herrührenden Widerstandanteils W_1 und des Quadrats v^2 der Geschwindigkeit für

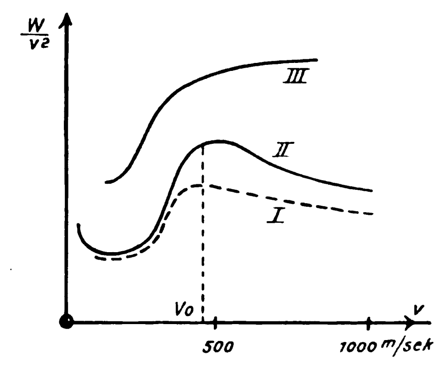
$$v_0^2 = \frac{2a^4}{2a^2 - c^2} > a^2$$

ein Maximum

$$\left(\frac{W_1}{v^2}\right)_0 = kF\left(1 + \frac{A v_0^4}{v_0^4 - a^2}\right) = kF\left(1 + \frac{Ac^2}{4a^4}(4a^2 - c^2)\right) \tag{12b}$$

besitzt, wonach sich die Kurve der Asymptote $kF(1 + A)$ nähert. Hierin ist sowohl der Dämpfungsfaktor c^2 als auch die nach (7b) und (9c) überdies durch die Geschoßform bedingte Konstante A dem Quadrat λ^2 der Wellenlänge der vom bewegten Körper erregten Schwingung proportional. Mit wachsender Wellenlänge rückt daher das Maximum (12b) immer weiter hinaus, bis es für $c^2 = 2a^2$ und $v_0^2 = \infty$ in die wegen der gleichzeitigen Zunahme von A schon sehr hoch liegende Asymptote fällt.

Diesem Bewegungszustand nähert sich offenbar das zylindrische Geschoß, bei dem sich die Vergrößerung der Wellenlänge gegenüber dem Spitzgeschoß durch die schon weit davor beginnende und dahinter endigende Auslenkung des widerstehenden Mittels zwanglos erklärt. Dieses theoretische Ergebnis wird vollauf bestätigt durch die von Becker und Cranz (a. a. O.) versuchsmäßig aufgenommene Widerstandskurve des Zylindergeschosses, die unter III



mit derjenigen eines gewöhnlichen Infanteriespitzgeschosses von gleichem Kaliber (II) sowie einer Granate (I) nach einer Zusammenstellung von v. Eberhard (Artill. Monatshefte 1912) in nebenstehender Figur vereinigt sind.

Daraus geht hervor, daß unser Widerstandsgesetz auch diesen Sonderfall umfaßt, der Cranz in der erwähnten Abhandlung zu der verfrühten Schlußfolgerung eines mit der Geschoßform wechselnden Widerstandsgesetzes unter gleichzeitiger Aufgabe des Formfaktors veranlaßte.

Danzig-Langfuhr, Techn. Hochschule.

(Eingegangen 10. Juni 1917.)

Zur Thermodynamik des Drosselvorgangs.

Bemerkung zur Erwiderung von R. Plank[1]).

Von Léon Schames.

Nach brieflicher Aussprache ergab sich, daß mit dem Buchstaben Q Plank die von außen zu- oder abgeführte Wärmemenge bezeichnete, während ich selbst damit die Joule-Kelvin-Wärme, d. h. die im Innern des Systems durch den Drosselvorgang erzeugte oder gebundene Wärmemenge ausdrückte. Unter diesen Umständen besteht zwischen den Gleichungen in Planks Erwiderung und den meinen kein Widerspruch, und wird die Definition der „integralen Inversionskurve"

$$\int_0^p \left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right] dp = 0$$

mit derjenigen der „endlichen Inversionskurve" $\Delta = 0$ identisch.

1) R. Plank, diese Zeitschr. 18, 33, 1917.

(Eingegangen 7. Juni 1917.)

Biprismen für Röntgenstrahlenhärtemesser.

Erwiderung auf die Bemerkung von J. Koenigsberger in Heft 2 dieses Jahrgangs.

Von H. Seemann.

J. Koenigsberger weist in seiner Bemerkung auf Seite 34 d. Jahrg. darauf hin, daß die Doppelplatten von Helmholtz, Autenrieth und Koenigsberger, ferner die Biprismen von König und Martens nicht von mir stammen. Ich mache Herrn Koenigsberger darauf aufmerksam, daß ich in meiner fraglichen Arbeit (diese Zeitschr. 17, 622, 1916) lediglich die Kombination bekannter Biprismen mit ebenso bekannten Röntgenstrahlenhärtemessern als neu beschrieben habe.

Gegenüber dem von Herrn K. erwähnten Gebrauchsmuster der Firma Hellige wahre ich meine Priorität auf Grund eines $^3/_4$ Jahr älteren Patentes, das inhaltlich mit meiner genannten Veröffentlichung genau übereinstimmt[1]).

1) Es war während der Veröffentlichung der Bemerkung des Herrn K. schon bekannt gegeben und ist mir inzwischen am 22. Mai 1917 erteilt worden unter Zurückweisung von Einsprüchen der genannten Firma und Prof. J. Koenigsbergers.

Würzburg, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 9. Juni 1917.)

Interferenzen an regellos orientierten Teilchen im Röntgenlicht. III.

Von P. Debye und P. Scherrer.

Mit Tafeln VIII und IX.

Über die Konstitution von Graphit und amorpher Kohle.

Vor ungefähr Jahresfrist haben wir an dieser Stelle[1]) über Versuche berichtet, welche, angeregt durch theoretische Überlegungen über das Atom[2]) zu einer Ultramikroskopie des Molekülinnern führten. Die experimentellen Methoden sind jetzt soweit entwickelt, daß ein messendes Eindringen in das Atom selbst durchaus möglich erscheint. Die zurzeit herrschenden äußeren Umstände haben die experimentelle Bearbeitung des letztgenannten Punktes bis jetzt verhindert, dagegen ist eine weitere, die Atomanordnung im Molekül betreffende Frage endgültig erledigt worden. Es wurde nämlich das Raumgefüge der verschiedenen Kohlenstoffmodifikationen[3]) festgestellt. Dabei gingen wir aus von der nun vollends bestätigten Erwartung, daß den erstrebten Aufschlüssen über die Art der Selbstbindung desjenigen Elements, welches in der organischen Chemie die Hauptrolle spielt, ein weitreichendes Anwendungsfeld offen stehen würde.

§ 1. Methode.

Über unsere diesbezüglichen Versuche soll im folgenden berichtet werden, und zwar wollen wir zunächst nochmals kurz auf das Charakteristische an unserer Methode aufmerksam machen.

Zur Untersuchung von Kristallen mit Hilfe von Röntgenstrahlen sind bis jetzt drei verschiedene Verfahren experimentell verwandt worden. Zunächst die von M. v. Laue[4]) vorgeschlagene Untersuchungsform. Bei dieser werden mehrere wohlausgebildete orientierte Kristallplatten benötigt, die einzeln untersucht werden. Der Kristall wird, mittels Goniometers genau justiert, in den Gang eines dünnen Bündels von „weißem" Röntgenlicht (Bremsstrahlung) gebracht und erzeugt auf der dahinter in kurzem Abstand aufgestellten photographischen Platte das gewünschte Interferenzbild. Die gewöhnlich ungeheuer zahlreichen Interferenzpunkte (bis 1000 auf einer Aufnahme) des Laue-Diagramms zeigen meist auf den ersten Blick die Symmetrie-

1) Diese Zeitschr. 17, 277, 1916.

2) P. Debye, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss., Göttingen 27. Febr. 1915.

3) Das Raumgitter des Diamants ist aus den Untersuchungen v. W. H. u. W. L. Bragg bekannt; Proc. Roy. Soc. 89, 278, 1913.

4) W. Friedrich, F. Knipping und M. v. Laue, Sitzungsber. München 1912, S. 303.

verhältnisse und die Zonenverbände des Kristalls[1]), hingegen stößt die zahlenmäßige Auswertung der Diagramme in den meisten Fällen auf große Schwierigkeiten. Wenn das Kristallsystem der untersuchten Substanz nicht bekannt ist, läßt sich das Raumgitter wohl kaum feststellen.

Beim Verfahren von W. H. und W. L. Bragg[2]) wird monochromatisches Röntgenlicht benutzt[3]). Auch hier müssen an dem zu untersuchenden Kristall tadellos orientierte und ausgebildete Flächen vorhanden sein oder angebracht werden. Die Grundlage des Braggschen Verfahrens bildet die folgende Tatsache: Fällt ein Röntgenstrahl von der Wellenlänge λ mit dem Glanzwinkel φ auf eine Kristallfläche, die zugleich eine Netzebene ist, so wird dieser Strahl dann und nur dann von dieser Fläche reflektiert, wenn die Bedingung

$$n\lambda = 2d\sin\varphi \qquad (1)$$

erfüllt ist. Hierin bedeutet d den Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Atomebenen und n ist eine kleine ganze Zahl, die die Ordnung des Spektrums angibt. Wenn nach (1) überhaupt Reflexion eintritt, so genügen einfallender

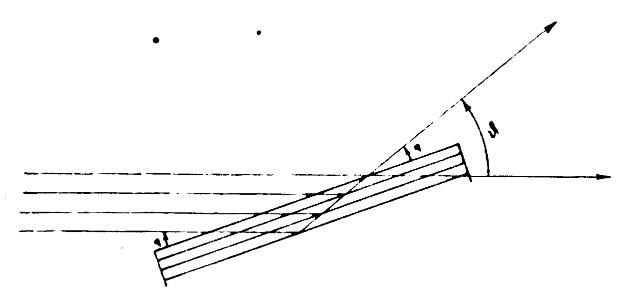


Fig. 1.

und reflektierter Strahl den bei gewöhnlicher optischer Reflexion gültigen Gesetzen. Durch Messung der Glanzwinkel φ oder des Winkels ϑ, den der reflektierte Strahl mit dem primären bildet, erlangt man Kenntnis der Abstände der Netzebenen und damit auf einigem Umwege des Raumgitters. Auch beim Braggschen Verfahren ist es unbedingt nötig, das Kristallsystem, dem der zu untersuchende Kristall angehört, zu kennen. Man wäre ja sonst gar nicht in der Lage, den Kristall so zu orientieren, daß eine gewünschte Netzebene zur Reflexion kommen würde.

1) Siehe die ausführlichen Artikel von F. Rinne im neuen Jahrbuch für Mineralogie u. Geologie 1916 sowie eine Reihe von Arbeiten von H. Haga u. F. M. Jaeger in den Abhandl. d. Amsterdamer Akademie 1913—14, ferner A. Johnsen, Anordnung der Atome in Kristallen, Jahrb. d. Rad. u. Elektronik 14, 52, 1917.

2) Die Arbeiten der Herren Bragg sind zusammengefaßt in dem Buch W. H. u. W. L. Bragg, X-Rays and crystal structure, London 1915.

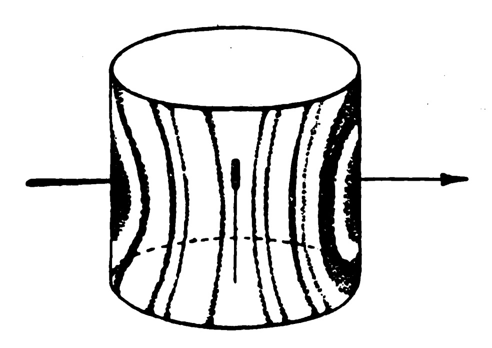
3) Röntgenröhren passender Konstruktion lassen sich so betreiben, daß sie überwiegend monochromatisches Licht liefern.

Sobald von einer Substanz keine größeren Kristalle vorhanden sind, versagen diese beiden angegebenen Verfahren. Die von den Verfassern angegebene Methode hat den Vorzug, keiner ausgebildeten Kristalle zu bedürfen. Es genügt, wenn die Substanz in Form eines sehr feinen völlig amorph aussehenden Pulvers vorliegt, das aus mikroskopischen oder submikroskopischen Kriställchen besteht. Es ist auch ganz unnötig von vornherein etwas über das Kristallsystem der Substanz zu wissen. Dieses wird, wie in § 2 gezeigt wird, aus der Aufnahme selbst erschlossen. Man erhält also von einer völlig unbekannten Substanz einmal das System und dann die innere Atomanordnung, beide auf Grund einer einzigen Aufnahme[1]). In einem solchen mikrokristallinen Pulver kommen die Kriställchen und damit die Netzebenen in allen möglichen Orientierungen vor. Wenn man ein solches Pulver also mit einem dünnen Bündel monochromatischen Röntgenlichts durchstrahlt, so wird es stets Kriställchen geben, die so orientiert sind, daß für eine bestimmte Netzebenenschar derselben die oben angegebene Reflexionsbedingung (1) erfüllt ist. Bei anderen Kriställchen sind es wiederum andere Netzebenenscharen, die gerade reflektieren; oder dieselbe Schar ist so gelagert, daß sie in zweiter Ordnung reflektiert, usf. Jedenfalls erhält man unter bestimmten Winkeln ϑ, den verschiedenen im Kristall vorkommenden Netzebenenabständen d entsprechend, reflektierte Strahlung. Diese zu einem bestimmten Winkel ϑ gehörigen Strahlen bilden, wegen der völligen Symmetrie der Erscheinung in bezug auf den Primärstrahl, den Mantel eines geraden Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel 2ϑ.

Um die auftretenden Interferenzen alle mit einem Schlage zu bekommen, benutzen wir für unsere Aufnahmen eine zylinderförmige Kamera, in deren Achse das Kristallpulver in Form eines gepreßten Stäbchens aufgestellt wird (siehe Fig. 2). Längs der ganzen Innenwand der Kamera befindet sich der zylindrisch gebogene Film, in den die auf Kegeln um den Primärstrahl auftretenden „reflektierten" Strahlen die charakteristischen Kurven (4. Grades) einschneiden. Nach der Aufnahme wird der Film aufgerollt und die Winkel ϑ werden ausgemessen.

Wenn man nun zu immer kleineren und kleineren Kristallen übergeht, so werden die Interferenzen immer unschärfer und breiter, ohne indessen ihre Lage zu ändern. Genau so wie in der Optik die von einem Gitter

1) Natürlich gestaltet sich die Verwertung der Aufnahme viel einfacher, wenn das Kristallsystem schon bekannt ist.



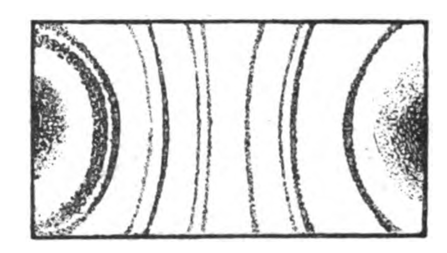


Fig. 2[1]).

gelieferten Spektrallinien immer breiter werden, je weniger Striche das Gitter (bei gleicher Gitterkonstante) umfaßt. Bei Kriställchen, deren Ausdehnung nach jeder Richtung etwa 10^{-4} cm beträgt, kommt die Breite der Interferenzstreifen im Vergleich zum Öffnungswinkel des Primärstrahles nicht in Betracht. Bei Kristallen dieser Größenordnung hat man praktisch völlig scharfe Linien zu erwarten. Kristalle, die größer als 10^{-2} cm sind, beginnen bereits sich durch Punkte auf den Interferenzlinien störend bemerkbar zu machen. Die Substanz muß dann feiner pulverisiert werden.

Geht man zu immer kleineren und kleineren Kriställchen über, so kommt man schließlich zu regelmäßigen Anordnungen von ganz wenigen Atomen. Der Begriff des Raumgitters verflüchtigt sich allmählich und macht dem des Moleküls Platz. Bei solchen Anordnungen versagt die Braggsche Erklärung für das Entstehen von Interferenzen, denn man kann ja nicht mehr von Netzebenen sprechen. Man könnte auf den ersten Blick erwarten, daß die Interferenzen von wenig atomigen Molekülen, die selbst ganz regellos durcheinander gelagert sind, sich völlig verwischen und nur eine allgemeine Schwärzung des Films hervorbringen würden. Dies ist aber nicht so. Die genaue Rechnung und die Erfahrung[2]) zeigen vielmehr folgendes Resultat: Wenn irgendeine gesetzmäßige Anordnung von Atomen im Molekül vorhanden ist, bleibt dieselbe bei der Durchstrahlung mit monochromatischem Röntgenlicht auch dann noch erkennbar, wenn sehr viele solcher Moleküle in regelloser Orientierung miteinander gemischt vorkommen. Man kann natürlich noch einen Schritt weiter gehen und fragen, ob sich nicht eine regelmäßige Anordnung von Elektronen im Atom ebenfalls erkennen ließe. Man kann diese Frage theoretisch, und wie uns jetzt scheint auch praktisch, nur bejahend beantworten[1]). Eine schon lange bekannte Erscheinung, die unseres Erachtens die Richtigkeit der letztgenannten Überlegung deutlich vor Augen führt, ist die folgende[2]):

Ermittelt man die Gesamtzerstreuung verschiedener Elemente als Funktion des Atomgewichts, dann findet man bei verhältnismäßig langen Wellen die Menge zerstreuter Strahlung pro Atom proportional dem Quadrat des Atomgewichts[3]). Bei kürzeren Wellenlängen nimmt die Zerstreuung ab und nähert sich bei kurzen Wellen der Proportionalität mit dem Atomgewicht selbst[4]). Der Massenzerstreuungskoeffizient $\frac{s}{\varrho}$ ist also im ersten Falle proportional dem Atomgewicht, im zweiten Falle eine Konstante, nämlich (nach Barklas Messungen für kleine Atomgewichte) gleich 0,2. Die eben erwähnte Theorie gibt von dieser Tatsache Rechenschaft. Man findet nämlich für die Gesamtzerstreuung pro Atom im Falle von (im Vergleich mit den Atomdimensionen) sehr langen bzw. sehr kurzen Wellen die Werte

$$\frac{8\pi}{3}\frac{\varepsilon^4}{\mu^2 c^4}\cdot Z^2 \text{ bzw. } \frac{8\pi}{3}\frac{\varepsilon^4}{\mu c^4}\cdot Z,$$

wobei Z den Stellenzeiger im periodischen System bedeutet. Da nun Z ungefähr gleich dem halben Atomgewicht ist, sind die obigen qualitativen Angaben erfüllt. Die Werte sind aber auch quantitativ richtig, für kurze Wellen berechnet sich aus dem oben an zweiter Stelle angegebenen Ausdruck $\frac{s}{\varrho}$ in der Tat zu 0,20.

§ 2. Berechnung der Interferenzaufnahmen.

Für reguläre Kristalle ist die Berechnung

1) Wir entnehmen diese Figur dem Artikel von F. Rinne, Beiträge z. Kenntnis des Feinbaus d. Kristalle, N. Jahrbuch f. Mineralogie, Geol. u. Paleontol. 2, 85, 1916.

2) P. Debye u. P. Scherrer, Ber. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Sitzg. 17. Dez. 1915.

1) P. Debye, Ber. d. Kgl. Ges. d. W. Göttingen 27. Febr. 1915.

2) Vergleiche den Artikel von Alex. Müller über Zerstreuung von Röntgen- und γ-Strahlen im Kleiner-Heft der Physikal. Ges. Zürich.

3) C. G. Barkla, Phil. Mag. 7, 543, 1904; 21, 648, 1911.

4) Barkla u. C. A. Sadler, Phil. Mag. 17, 739, 1909.

völlig mühelos und in den zitierten Arbeiten ausführlich angegeben[1]). Für Kristalle, die nicht dem regulären System angehören, hat man der Berechnung folgenden Satz zugrunde zu legen: Sind $h_1\ h_2\ h_3$ ganze Zahlen (die kristallographischen Indizes der „reflektierenden Ebene") und ist ϑ der Winkel, unter dem eine Reflexion auftritt, dann ist bei beliebigem Kristallsystem $4\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ stets eine homogene quadratische Funktion der drei eben genannten ganzen Zahlen:

$$\left.\begin{aligned}4\sin^2\frac{\vartheta}{2} &= k_{11}h_1^2+k_{22}h_2^2+k_{33}h_3^2\\ &+2k_{23}h_2h_3+2k_{31}h_3h_1+2k_{12}h_1h_2.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Die in beliebiger Menge vorhandenen Interferenzstreifen auf unserem Film müssen sich also auf alle Fälle mittels (2) unter Heranziehung von sechs allgemeinen Koeffizienten $k_{11}\ldots k_{12}$ ihrer Lage nach darstellen lassen. Diese sechs Koeffizienten charakterisieren das Kristallsystem vollkommen, und zwar gelten die folgenden Beziehungen: Es seien $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ die drei Vektoren, welche den Kanten des Elementarparallelepipeds der Lage und Größe nach gleich sind, außerdem sei λ die benutzte Wellenlänge. Die Rechenvorschrift, welche die Koeffizienten der quadratischen Form mit den das Elementarparallelepiped bestimmenden Stücken verbindet, lautet dann so:

Man setze abkürzend

$$\left.\begin{aligned}K &= k_{11}k_{22}k_{33}-k_{11}k_{23}^2-k_{22}k_{31}^2\\ &-k_{33}k_{12}^2+2k_{23}k_{31}k_{12},\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

dann ist

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a^2}{\lambda^2}=\frac{k_{22}k_{33}-k_{33}^2}{K},\\ &\qquad\frac{bc}{\lambda^2}\cos(\mathfrak{b},\mathfrak{c})=\frac{k_{21}k_{31}-k_{23}k_{11}}{K},\\ &\frac{b^2}{\lambda^2}=\frac{k_{33}k_{11}-k_{31}^2}{K},\\ &\qquad\frac{ca}{\lambda^2}\cos(\mathfrak{c},\mathfrak{a})=\frac{k_{32}k_{12}-k_{31}k_{22}}{K},\\ &\frac{c^2}{\lambda^2}=\frac{k_{11}k_{22}-k_{12}^2}{K},\\ &\qquad\frac{ab}{\lambda^2}\cos(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\frac{k_{13}k_{23}-k_{12}k_{33}}{K}.\end{aligned}\right|\quad(4)$$

Sobald es also gelungen ist, die auf dem Film gemessenen Linien durch eine quadratische Form genau darzustellen, ist das Elementarparallelepiped bekannt. Die Auffindung der quadratischen Form wird in den weitaus meisten Fällen sehr erschwert durch den Umstand, daß zwischendurch nach der quadratischen Form erwartete Interferenzlinien auf dem Film völlig fehlen. (Diese Tatsache verhindert es z. B., daß (3) auf Grund der Eigenschaft der Konstanz der zweiten Differenzen aufgesucht wird.) Man kann diese Tatsache folgendermaßen erklären: Die quadratische Form (3) liefert zwar die Lagen, nicht aber die Intensitäten der auftretenden Interferenzlinien. Wir haben also noch zu untersuchen, wie die Intensitäten der Linien mit dem vorliegenden Gitter zusammenhängen. Es zeigt sich, daß die Intensität der Linien im wesentlichen reguliert wird durch den sogenannten Strukturfaktor S des Gitters[1]). Haben wir ein einfaches Elementargebiet vor uns, bei dem nur die Ecken, und zwar mit lauter gleichartigen Atomen besetzt sind, dann ist der Strukturfaktor eine Konstante, und es treten alle durch (5) gegebenen Linien auf. Ist das Gitter aber komplizierter, weil außer den Ecken noch andere Punkte des Elementarbereichs besetzt sind oder weil es verschiedene Atomarten enthält, dann bekommt der Strukturfaktor einen von $h_1\ h_2\ h_3$ abhängigen Wert[2]). S kann nun für gewisse Wertetripel $h_1\ h_2\ h_3$ verschwinden. Die diesen Indizes entsprechenden Linien sind dann völlig aufgehoben. Um ein Beispiel anzugeben, möge erwähnt sein, daß im Falle des flächenzentrierten Gitters alle Linien, die durch gemischte (teils grade, teils ungrade) Indizes erzeugt werden, die Intensität Null haben.

§ 3. Graphit.

a) Einige Literaturangaben.

Daß Graphit, ebenso wie Diamant, kristallinisch ist, ist bekannt. Über das Kristallsystem und die demselben zugehörigen Zahlenwerte liegen nur einander widersprechende Zahlenangaben vor.

Nach Kenngott[3]) kristallisiert Graphit trigonal (drei gleiche Achsen unter gleichen Winkeln gegeneinander geneigt) mit einem Winkel $\alpha = 85^0 6'$, Nordenskjöld[4]) dagegen

1) Diese Zeitschr., l. c. Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen 4. Dezbr. 1915.

1) Eigentlich bedeutet die alleinige Berücksichtigung des Strukturfaktors eine Extrapolation auf lange Wellen. Daneben sind spezifische Atomeinflüsse, wenn auch in erster Näherung unberücksichtigt, dennoch unverkennbar.

2) Das Elementarparallelepiped sei durch $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$, die im Innern derselben gelegenen Strahlungszentren seien durch die Vektoren $\mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_2\ldots\ \mathfrak{r}_n\ldots$ charakterisiert. Der Strukturfaktor S hat dann die Form:

$$S=\sum_n A_n e^{i\varrho_n}$$
$$\varrho_n = 2\pi(\alpha_n h_1+\beta_n h_2+\gamma_n h_3).$$

Dabei sind die Zahlen $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ definiert durch den Ansatz

$$\mathfrak{r}_n=\alpha_n\mathfrak{a}+\beta_n\mathfrak{b}+\gamma_n\mathfrak{c};$$

Zum $n$ten Strahlungszentrum kommt man also, indem man vom Nullpunkt aus in der $\mathfrak{a}$-Richtung um $\alpha_n\mathfrak{a}$, dann in der $\mathfrak{b}$-Richtung um $\beta_n\mathfrak{b}$ und schließlich in der $\mathfrak{c}$-Richtung um $\gamma_n\mathfrak{c}$ fortschreitet. A_n ist proportional der vom $n$ten Zentrum ausgehenden Amplitude.

3) Ber. d. Akad. Wien 13, 469, 1854.

4) Pogg. Ann. 96, 110, 1855.

schließt auf das monokline System mit dem Achsenverhältnis $a:b:c = 0{,}7069:1:0{,}5089$ und dem Winkel $\beta = 88^0\,14'$; H. Sjögren[1]) andererseits hält Graphit für hexagonal. Die Angabe von Kenngott hat am meisten Beachtung gefunden und ist z. B. in der chemischen Kristallographie von Groth[2]) übernommen. In neuerer Zeit hat P. P. Ewald[3]) versucht die v. Lauesche Methode der Kristallbestimmung dienstbar zu machen. Er benutzte ein ihm von Prof. H. du Bois zur Verfügung gestelltes ausgesuchtes Graphitkriställchen von 2,2 mm Querschnitt und 0,1 mm Dicke und schließt aus seiner Interferenzaufnahme auf das hexagonale System mit einem Achsenverhältnis $c:a = 1{,}63$. Herr Prof. Jaeger, in dessen Besitz sich ein Abdruck des Ewaldschen Photogramms befindet, schreibt uns dagegen, daß Graphit nach der Ewaldschen Aufnahme nicht hexagonal, sondern trigonal sei.

Alle diese einander widersprechenden Angaben[4]) wurden erreicht mittels Methoden, welche die Verfügung über einen gut ausgebildeten Kristall genügender Größe zur Voraussetzung haben. Hierin liegt die große Schwierigkeit, die diesen Bestimmungen anhaftet, denn Stücke, die ihrem äußeren Aussehen nach als gute bezeichnet werden können, kommen nur äußerst selten vor.

b) Das Kristallsystem von Graphit.

Wir untersuchten vier verschiedene Graphitsorten, nämlich:

1. Käuflichen gewöhnlichen Ceylongraphit.
2. Flinzgraphit (Bayern), der uns von Herrn Geh. Reg. Rat Prof. Tamman gütigst zur Verfügung gestellt wurde[5]).
3. Reinsten Ceylongraphit von den Nürnberger Bleistiftwerken J. Faber[5]).
4. Graphit von L. E. C. Hardtmuth, Wien[5]).

Alle 4 Sorten erwiesen sich kristallographisch identisch.

Die Substanz wurde in ein Stäbchen von 1 mm Durchmesser und 10 mm Länge gepreßt und in der früher[6]) beschriebenen Kamera durchstrahlt. Um größere Genauigkeit zu erreichen, wurde eine Kamera von 130 mm Durchmesser gebaut. Bei dieser neuen Kamera entspricht dem Bereich $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 180^0$ eine Filmlänge von 204 mm, und die Meßgenauigkeit beträgt schon bei kleineren Winkeln ca. 2 Promille. Auf einer solchen Aufnahme wurden die fünf stärksten Linien herausgegriffen und die zugehörigen Winkel ϑ gemessen. Dann zeigte sich, daß sich die $\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ darstellen ließen durch die quadratische Funktion:

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\frac{\vartheta}{2} &= 0{,}03724\,(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)\\ &- 0{,}02001\,(h_2 h_3 + h_3 h_1 + h_1 h_2)\,.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die in dieser Weise erreichte Genauigkeit erhellt aus folgender Tabelle:

Tabelle I.

$\sin\frac{\vartheta}{2}$ beobachtet	$\sin\frac{\vartheta}{2}$ berechnet	Differenz	Indizes der reflekt. Ebene
0,2265	0,2273	— 0,0008	111
0,3617	0,3629	— 0,0012	111
0,4550	0,4547	— 0,0003	222
0,6141	0,6148	+ 0,0007	022
0,6545	0,6555	+ 0,0010	113

In Tabelle II lassen wir die Ausmessung einer mit der kleinen Kamera erhaltenen Aufnahme folgen. (Der Film ist in Tafel VIII, Fig. 1 reproduziert.) Bei dieser Aufnahme entspricht dem Bereich von 180^0 eine Filmlänge von 81,7 mm. Die Meßgenauigkeit beträgt bei kleinen Winkeln etwa 1 Proz., bei größeren Winkeln $^1/_2$ Proz. Auf dem Original waren im ganzen 28 Linien zu erkennen. Davon hatten einige das Aussehen von Doppellinien. Die Ausmessung ergab für den jeweiligen halben Öffnungswinkel $\frac{\vartheta}{2}$ die in Spalte 2 der Tabelle in Grad angegebenen Werte. Die erste Spalte enthält die Bezeichnungen: s. s. = sehr schwach, s. = schwach, m. = mittel, st. = stark, welche eine ungefähre Schätzung der Linienschwärzung bedeuten sollen. Die Primärstrahlung bestand wesentlich aus der K.-Serie des Kupfers. Die Hauptintensität der Serie wird bekanntlich von der α-Linie geführt, deren Wellenlänge nach Moseley $1{,}549 \cdot 10^{-8}$ cm beträgt. Die zweitstärkste Linie dieser Serie ist die β-Linie mit der Wellenlänge $1{,}402 \cdot 10^{-8}$ cm. Auch diese Linie hat Veranlassung zu einigen Interferenzen gegeben. Sie sind in Tabelle II in kleinem Druck angegeben. Die Auffindung der β-Interferenzen geschieht dadurch, daß man unter den Werten von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ nach Verhältnissen von der Größe $\frac{1{,}402}{1{,}549}$ sucht (unter Berücksichtigung der Intensitäten); denn wenn α- und β-Linie an der gleichen Netzebene reflektiert vorkommen, müssen sich nach (1) die zuge-

1) Oefr. Akad. Stockholm **41**, 4, 29, 1884.
2) P. Groth, Chemische Kristallographie. Leipzig **1**, 13, 1906.
3) Sitzungsber. der K. B. Akad. d. Wiss. S. 325. 1914.
4) Die Angaben widersprechen sich tatsächlich und sind nicht nur durch Bezugnahme auf andere Achsensysteme verschieden.
5) Den betreffenden Herren danken wir auch an dieser Stelle für die Überlassung der Materialproben.
6) Diese Zeitschr. l. c. Kgl. Ges. d. Wiss. Gött., l. c.

hörigen Verhältnisse von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ wie die Wellenlängen verhalten. In der vierten Spalte sind die aus (5) berechneten Werte von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ angegeben. Die Übereinstimmung der gemessenen mit den berechneten Werten ist befriedigend. Die sechste Spalte enthält die relativen Intensitäten der Linien, berechnet nach der im Abschnitt c dieses Paragraphen gegebenen Regel.

Tabelle II.

Schwärzung	ϑ i. Grad	$\sin\frac{\vartheta}{2}$ beob.	$h_1 h_2 h_3$	$\sin\frac{\vartheta}{2}$ ber.	Intens. ber.	Diff.
s.	23,6	0,205	111	0,206	—	— 001
st.	26,5	0,229	111	0,227	139,7	+ 002
s. s.	38,6	0,331	— 111	0,329	—	+ 002
s. s.	40,9	0,349	002	0,349	—	000
st.	43,8	0,373	— 111 002	0,363 0,386 } 0,375	35,0 30,2	— 002
s. s.	48,7	0,413	222	0,412	—	+ 001
m.	53,4	0,451	222	0,455	26,0	— 004
m.	55,2	0,464	022	0,467	18,3	— 003
s.-m.	62,8	0,521	113	0,519	13,5	+ 002
s. s.	67,5	0,556	0 — 22	0,557	—	— 001
s. s.	72,3	0,590	— 113	0,592	—	— 002
st.	76,0	0,616	0 — 22	0,615	33,8	+ 001
s.	78,8	0,635	133	0,638	7,7	— 003
st.	81,8	0,655	— 113	0,655	56,8	000
s.	86,2	0,683	333	0,683	8,7	000
s.	88,4	0,697	024 224	0,693 0,702 } 0,698	6,1	— 001
s.	91,8	0,719	11 — 3 — 222	0,714 0,726 } 0,720	5,9 5,7	— 001
st.	99,8	0,766	024 004	0,765 0,772 } 0,768	42,2 5,2	— 002
s. s.	107,4	0,806	— 133	0,805	5,0	+ 001
s. s.	111,9	0,829	135	0,831	—	— 002
s. s.	112,9	0,834	244	0,837	5,0	— 003
s. s.	125,7	0,889	115	0,886	5,1	+ 003
s.	131	0,910	335 444	0,907 0,910 } 0,909	5,2 6,9	+ 001
st.	133,6	0,919	135	0,918	41,7	+ 001
s. s.	138,2	0,934	044	0,935	5,3	— 001
s.	142	0,946	1 — 33	0,942	10,8	+ 004
s.-m.	144	0,951	0 — 24 355	0,951 0,952	10,9 —	000
s.	154	0,974	— 135	0,976	—	— 002

Die in (5) angegebene quadratische Form ist charakteristisch für ein rhomboedrisches Gitter, für dessen Kantenlänge und Winkel man nach (4) die Werte erhält:

$$a = b = c = 4{,}48 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

$$\alpha = \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sphericalangle(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \sphericalangle(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = 68^0\, 26'.$$

Dabei ist für die Wellenlänge der benutzten Strahlung (α Linie der Kupfer-K-Strahlung) der Wert $\lambda = 1{,}55 \cdot 10^{-8}$ cm angenommen.

Wir bestätigen somit die von Groth angenommene und nach Jaeger auf Grund der Ewaldschen Interferenzaufnahme zu erschließende trigonale Struktur des Graphits. Wir finden aber den Winkel der Achsen wesentlich anders als von Kenngott angegeben.

In der Tabelle sind in der vierten Kolonne die Indizes $h_1\, h_2\, h_3$ der jeweiligen reflektierenden Ebene angegeben, bezogen auf die Rhomboederkanten.

Die Ebene 111 ist diejenige, nach welcher der Graphit außerordentlich leicht gespalten werden kann. Die in der Natur stets auftretenden Plättchen haben 111 als obere und untere Begrenzungsebene. Es ist hier eine Bemerkung von Bragg[1]) von Interesse, wonach er für den Abstand zweier solcher 111-Ebenen bei der nach seiner Methode beobachteten Reflexion an dieser Ebene (auf Grund einer einzigen Messung) den Wert $3{,}42 \cdot 10^{-8}$ cm fand. Aus unseren Angaben folgt dieser Abstand zu $3{,}41 \cdot 10^{-8}$ cm.

c) Lagerung der C-Atome im Graphit.

Nachdem nunmehr die Form und damit das Volumen des Elementarparallelepipeds bekannt sind, folgt aus der beobachteten Dichte des Graphits[2]) (ungefähr 2,2), daß in demselben acht C-Atome enthalten sind. Denn die Gleichung

$$\frac{N}{z} \cdot V = \frac{A}{\varrho} = \frac{12}{2{,}2}$$ (V Volum des Elementargebiets),

deren beide Seiten das Volum eines Grammatoms ausdrücken, (die linke unter der Annahme, daß z Atome auf das Elementargebiet entfallen), ist für $z \sim 8$ erfüllt.

Die Tabelle auf der vorigen Seite, welche keine gemischten Indizes enthält, legt es nahe, für das Gitter des Graphits ein flächenbesetztes anzunehmen, weil, wie bemerkt, bei einem solchen die Interferenzen mit gemischten Indizes verschwinden. Diese Annahme bestätigt sich in der Tat, indem nicht eine einzige Linie mit gemischten Indizes auf dem Film vorhanden ist. Da aber zu jedem flächenbesetzten Elementarbereich nur vier Atome gehören, muß Graphit aus zwei solchen ineinandergestellten Gittern aufgebaut sein. Was nun noch übrig bleibt, ist die Ausführung einer Untersuchung, die darüber belehrt, in welcher Form diese gegenseitige Durchdringung der zwei flächenbesetzten Gitter auftritt. Diese Frage ist nur durch Heranziehung der Intensitäten der Interferenzlinien zu entscheiden.

Die relative Verschiebung der beiden Gitter gegeneinander kann nur längs der trigonalen Diagonale des Rhomboeders vorgenommen werden; denn die trigonale Struktur, die durch die quadratische Form (5) verlangt wird, bleibt nur bei Verschiebungen solcher Art erhalten. Es wurde

1) W. H. Bragg u. W. L. Bragg, X-Rays and Crystalstructure. London 1916, S. 174.

2) Die Angaben über das spezifische Gewicht von Graphit sind außerordentlich schwankend. Man findet Werte von 2,06 bis 2,32. Rechnet man mit einem mittleren Werte von 2,2, so ergibt sich $z = 8{,}16$.

nun eine Tabelle entworfen für die Intensität jeder möglichen Linie zwischen 0^0 und 180^0, wobei eine gegenseitige Verschiebung der Gitter um den γ-fachen Wert der Diagonale angenommen wurde. γ erhielt dabei der Reihe nach die Werte 0, 0.03, 0,06. . . usw.

Die Intensität selbst wurde proportional gesetzt einmal dem Quadrate des absoluten Betrages des zu γ gehörigen Struktorfaktors:

$$|S|^2 = 32\,[1 + \cos 2\pi\gamma\,(h_1 + h_2 + h_3)]^1)$$

Andererseits wurde der Lorentzsche Intensitätsfaktor berücksichtigt. Derselbe ist umgekehrt proportional der für $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ gefundenen quadratischen Form (5). Ferner treten noch hinzu die sog. Kombinationszahl, d. i. die Häufigkeit, mit der eine bestimmte Netzebene im Gitter auftritt[2]) und der durch die Transversalität der erregenden Welle bedingte Faktor $1 + \cos^2 \vartheta$.

Es zeigt sich, daß die relativen Intensitäten der Interferenzen ganz außerordentlich stark mit γ variieren.

Die so berechnete Tabelle für die Intensitäten wurde nun verglichen mit der Kurve, die durch Photometrierung[3]) einer sich von $\vartheta = 10^0$ bis $\vartheta = 160^0$ erstreckenden Graphitaufnahme erhalten wurde. Man darf aber bei dieser Diskussion nur die Intensitäten von benachbarten Linien in der Gegend von 90^0 benutzen. Denn der Film hat einen, von der unvermeidlichen Bremsstrahlung herrührenden, kontinuierlichen Grund, über dessen Intensitätsverlauf man nichts aussagen kann, außer daß er in der Nähe von 90^0 ein sehr flaches Minimum hat. In der Mitte des Films sind die Intensitäten der Linien also durch die Bremsstrahlung nicht wesentlich gefälscht.

Schon allein aus der Tatsache, daß von den zwei sich sehr nahe liegenden starken Linien $(0\bar{2}2)$ und $(\bar{1}13)$ die zweite die stärkere ist, folgt aus der Tabelle, daß γ nur zwischen den zwei Werten 0,26 und 0,41 liegen kann. (Damit ist der von Bragg vermutete Wert $\gamma = 0{,}049$ als unmöglich erwiesen.) Auch der beim Raumgitter des Diamants (s. d. nächsten Abschnitt) vorhandene Wert von $\gamma = \frac{1}{4}$ ist hier unmöglich, weil er außer dem genannten Widerspruch noch das Verschwinden der auf unsern Aufnahmen tatsächlich vorhandenen Linien (002), (222), $(\bar{2}22)$, (024) und $(0\bar{2}4)$ zur Folge haben würde.

1) Dabei ist schon berücksichtigt, daß nur ungemischte Indizes auftreten.

2) Die Kombinationszahl hat den Wert 12, wenn alle 3 Indizes ungleich, den Wert 6, wenn 2 Indizes gleich und den Wert 2, wenn alle 3 Indizes gleich sind.

3) Benutzt wurde ein von Herrn Rümelin erbautes Kochsches Elektrophotometer.

Da ferner die Linie (024) an Intensität vergleichbar mit $(\bar{1}13)$ ist, kommen für γ nur Werte zwischen 0,31 und 0,37 in Frage. Nimmt man $\gamma = 0{,}33$, so zeigt sich, daß das Gesamtbild, das man so von den Intensitäten entwerfen kann, vollkommen unsern Aufnahmen entspricht.

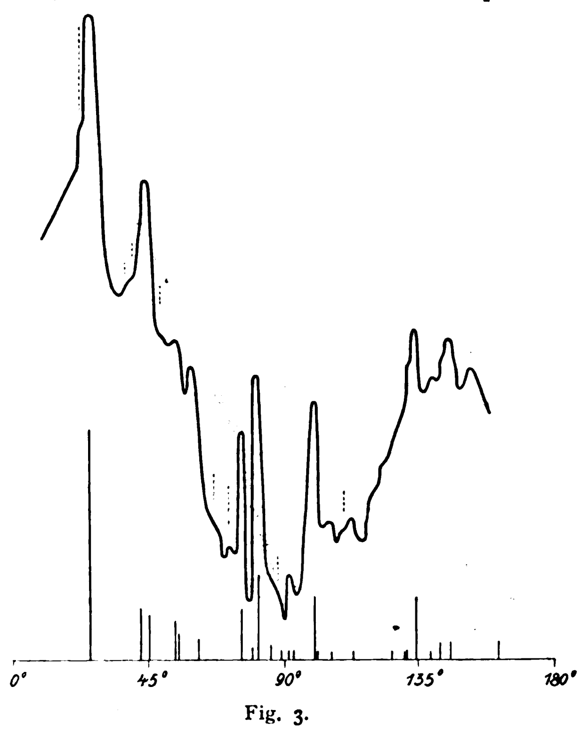


Fig. 3.

Fig. 3 zeigt eine photometrierte Graphitaufnahme[1]). Unter der Kurve sind durch vertikale Striche die berechneten Lagen und Intensitäten der α-Linien, oberhalb der Kurve punktiert die berechneten Lagen der β-Linien angegeben. (Man vergleiche insbesondere die Intensitätswerte der Tabelle II mit Fig. 3 für die Linien in der Nähe von 90^0.)

Mit der Bestimmung von γ ist die Aufgabe gelöst, und es ergibt sich für das Raumgefüge des Graphits das folgende überraschend einfache Bild:

In gleichen Abständen von je $3{,}41 \cdot 10^{-8}$ cm folgen Ebenen aufeinander, welche die C-Atome enthalten. In jeder dieser Ebenen bilden die C-Atome die Eckpunkte von regulären (nicht mitten besetzten) Sechsecken (Seitenlänge $1{,}45 \cdot 10^{-8}$ cm), welche die Ebene lückenlos überdecken. In aufeinander folgenden Ebenen liegen die C-Atome nicht senkrecht übereinander. Von einem Eckpunkt eines Sechsecks ausgehend, findet

1) Wir weisen auf die bekannte Tatsache hin, daß dem Auge vollkommen getrennt erscheinende deutliche Linien (namentlich in Gebieten stark variabler Allgemeinintensiät) bei der Photometrierung nur als kleine Erhebungen zutage treten.

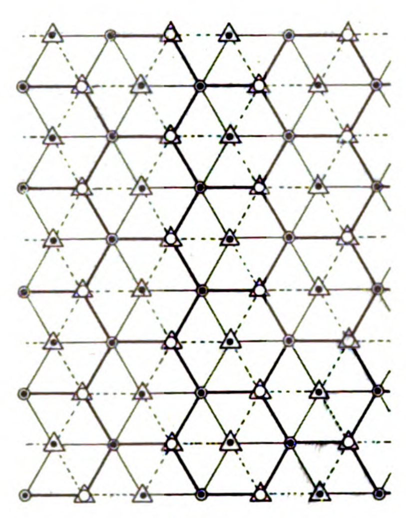


Fig. 4a.

man darüber erst zweimal die unbesetzte Mitte eines Sechsecks, dann folgt wieder eine Ecke usf. Fig. 4a zeigt den Grundriß von drei solcherweise übereinanderliegenden Ebenen, und zwar sind die in verschiedenen Ebenen angeordneten C-Atome durch verschiedene Zeichen (Punkt, Kreis, Dreieck) angedeutet. Fig. 4b zeigt, wie die C-Atome im rhomboedrischen Elementarbereich verteilt sind.

Das von uns auf diese Weise gefundene Graphitgitter muß nun, wenn es das richtige ist, die Ewaldsche[1]) Graphitaufnahme erklären. Das von Ewald hergestellte Laue-Diagramm ist in Tafel IX, Fig. 6 reproduziert; wir verdanken dasselbe Herrn A. Sommerfeld. Die Lauesche Theorie, auf unser Gitter angewandt, ergibt für die 12 starken Flecke auf bzw. zwischen den Nebenachsen die Indizes:

$$\bar{2}\bar{1}\bar{1}4 \quad \text{bzw.} \quad 20\bar{2}5.$$

Der Bezeichnung sind Bravaissche Achsen mit dem Achsenverhältnis $\frac{c}{a} = 2{,}03$ zugrunde gelegt. Das von Ewald angenommene Achsenverhältnis

$$\frac{c}{a} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 1{,}633$$

steht mit dem unsrigen in rationalem Zusammenhang. Die beiden Werte verhalten sich bis auf 1 Proz. wie 5 : 4. Die große Intensität der angegebenen Interferenzpunkte erklären wir aus der Tatsache, daß sie durch Reflexion der Wellenlänge $\lambda = 0{,}49 \cdot 10^{-8}$ erzeugt worden sind. Diese Wellenlänge entspricht der Silberbandkante[2]) und die Platte ist für sie selektiv empfindlich. Übrigens sind die diesen Indizes entsprechenden Linien auch auf unsern Aufnahmen, die ja mit $\lambda = 1{,}55 \cdot 10^{-8}$ gemacht sind, als starke Interferenzen vorhanden.

1) P. P. Ewald, Sitzungsber. d. Münch. Akad, 4. Juli 1914.

2) E. Wagner, Ann. d. Phys. **46**, 885, 1915.

d) Vergleich mit der Struktur des Diamants.

Fig. 5 zeigt uns das Raumgitter des Diamants in richtigem Größenverhältnis zu dem des Graphits. Dieser ist nach den Untersuchungen der Herren Bragg[1]) ebenfalls aus zwei flächenzentrierten, gegeneinander verschobenen Gittern aufgebaut. Das Elementargebiet des Diamants ist aber ein Würfel von $3{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm Kantenlänge (der Würfel ist in der Figur mit einer Diagonale senkrecht gestellt). Das zweite Gitter ist relativ zum ersten um $^1/_4$ der Würfeldiagonale verschoben. Durch diesen Wert von γ ist bedingt, daß die mit C-Atomen bedeckten 111-Ebenen nicht mehr äquidistant sind; sie folgen sich vielmehr in Abständen, die sich wie 1 : 3 verhalten. Auch sind die C-Atome in diesen Ebenen nicht wie beim Graphit in regulären nicht mitten besetzten Sechsecken angeordnet.

Die Horizontalprojektion des mit der Diagonale senkrecht gestellten Würfels ist ein Sechseck; ebenso die Horizontalprojektion des Graphitrhomboeders. Es mag nun als eine merkwürdige und auffallende Tatsache erwähnt werden, daß diese beiden Sechsecke nicht nur der Form nach, sondern der wirklichen Größe nach völlig übereinstimmen. Daraus folgt, daß sich die Diagonale des Diamantwürfels zur Diagonale des Graphitrhomboeders verhalten muß wie die Dichte des Graphits zur Dichte des Diamants. Nach Bragg ist die Länge der Diagonale des Elementargebiets von Diamant $6{,}12 \cdot 10^{-8}$ cm. Nach unseren Messungen beträgt die Länge der Rhomboederdiagonale $10{,}22 \cdot 10^{-8}$ cm. Das Verhältnis der beiden hat den Wert $\frac{6{,}12}{10{,}22} = 0{,}598$, während das Verhältnis der Dichten $\frac{2{,}2}{3{,}52} = 0{,}62$ beträgt[2]).

Man kann sich das Graphitmodell aus dem Diamantmodell hervorgegangen denken durch Dilatation längs der Diagonale (im Verhältnis der Dichten) bei festgehaltenem Grundriß. Man hat aber nachträglich die C-Atome der zweiten, vierten, sechsten usw. Horizontalebene in die erste, dritte, fünfte usw. zu verlegen, so daß

1) W. H. u. W. L. Bragg, The Structure of the Diamond. Proc. Royal Soc. **89**, 277, 1913.

2) Mit dem von Moissan (Annales Ph. Ch. **8**, 466, 1896) angegebenen Wert $\varrho = 2{,}11$ erhält man bessere Übereinstimmung, nämlich $\frac{2{,}11}{3{,}52} = 0{,}599$.

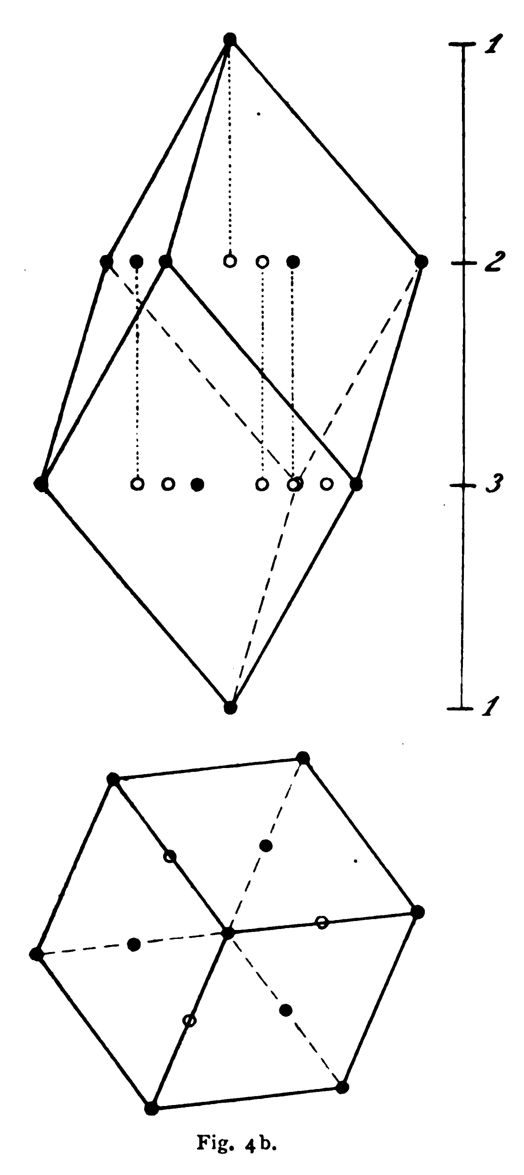


Fig. 4b.

die oben angegebenen ebenen Sechsecke des Graphits entstehen. In der Literatur wurde bemerkt, daß man mit den vier gleichen tetraedrisch angeordneten Valenzen des Kohlenstoffs nicht allein ein reguläres, sondern auch ein trigonales Gitter erzeugen kann[1]). Unsere oben angegebene Struktur des Graphits stimmt nicht überein mit der so erhaltenen trigonalen Anordnung. Auch Ewald bemerkt schon, daß sein Lauediagramm nicht unter Annahme eines solchen Graphitgitters zu erklären ist.

e) Die Anordnung der Valenzen.

In den eben genannten Ebenen gehen von jedem C-Atom drei gleichwertige Valenzen aus, welche dasselbe mit den nächstliegenden C-Atomen koppeln. Die vierte Valenz aber ist den drei eben erwähnten völlig ungleichwertig; sie dient dazu, abwechselnd nach oben oder nach unten zeigend, die C-Ebenen miteinander zu verbinden.

Aus dem verhältnismäßig großen Abstand, aus dem diese vierte Valenz ihre Wirkung ausübt, wird man schließen dürfen, daß die

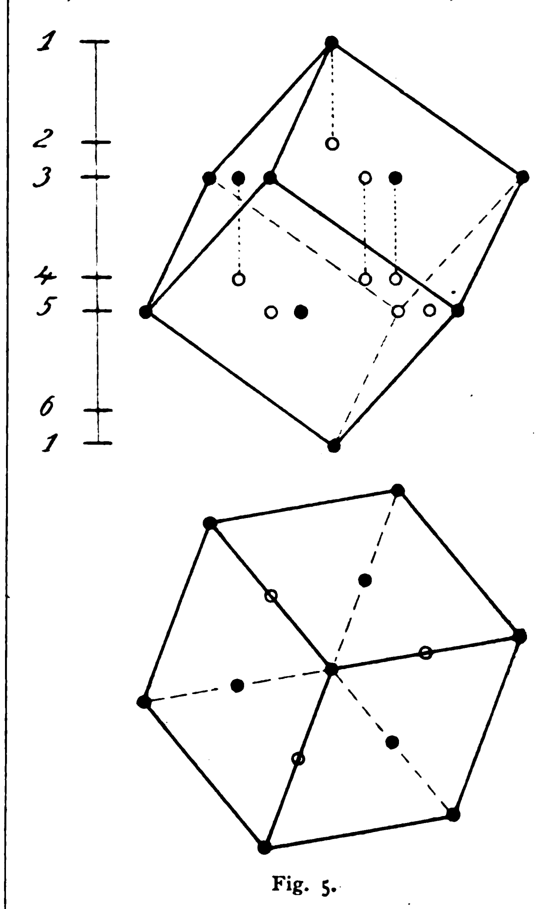


Fig. 5.

Bindung der C-Ebenen untereinander eine lockere sein wird. Das ist auch tatsächlich der Fall. Die hervorgehobene außerordentlich leichte Spaltbarkeit des Graphits in den (1 1 1)-Ebenen bedeutet nichts anderes als die außerordentlich leichte Trennbarkeit der mit Sechserringen besetzten Ebenen voneinander. Aber noch viel drastischer zeigt sich die Schwäche der vierten Valenz.

Einige Zeit lang wollte es nicht gelingen, die bei Graphit beobachteten Interferenzlinien in das notwendige System der quadratischen Form einzufügen. Insbesondere war die nunmehr als Reflexion an 1 1 1 erkannte Linie nicht einfach, sondern doppelt und dabei unsymmetrisch in bezug auf die Längsrichtungdes zerstreuenden Stäbchens ausgebildet. (Siehe Taf. VIII,

1) Mohr, Heidelberger Akad. 1916.

Fig. 2 u. 3.) Sie wurde aber einfach, nachdem wir das Graphitpulver ganz locker in eine feine Papierhülse einschichteten und so durchstrahlten. Besonders schön wurden die Aufnahmen, wenn das Graphitpulver einige Stunden auf heller Gelbglut gehalten und nachher vorsichtig behandelt wurde. Einige weitere Versuche zeigten dann, daß durch geringere oder stärkere Pressung bei der Herstellung der Stäbchen die 1 1 1-Linie nach Belieben weniger oder mehr aufgespalten werden konnte.

Diese Beobachtung heißt aber nur, daß es mit verhältnismäßig kleinen mechanischen Kräften gelingt, den Abstand der C-Ebenen abzuändern, und zwar dauernd fortbestehend, nachdem die mechanische Kraft zu wirken aufgehört hat. Bedenkt man nun noch, daß die beobachteten Abstandsänderungen mit Leichtigkeit bis auf 15 Proz. des ursprünglichen Abstandes zu steigern waren, so sieht man, wie locker die Bindung der C-Ebenen untereinander ist. Auch muß der Umstand, daß hier ein rein mechanischer Eingriff solche erheblichen Erfolge zeitigt, als äußerst merkwürdig angesehen werden.

Im Gegensatz zum Graphit sind beim Diamant alle vier Valenzen vollkommen gleichwertig. Jedes beliebig herausgegriffene Atom hat vier Nachbarn, die in genau gleichen Abständen völlig symmetrisch um dasselbe angeordnet sind.

§ 4. Amorphe Kohle.

a) Gibt es ein Kohlenstoffmolekül?

Um Aufschluß über die Konstitution der amorphen Kohle zu bekommen, wurde diese nach der in § 1 angegebenen Methode durchstrahlt.

Die erste Frage, die man sich hier vorzulegen hat, ist diese: Liegen in amorpher Kohle die C-Atome locker nebeneinander oder existiert ein Kohlenstoffmolekül mit charakteristischen Verkettungen der C-Atome? Die erste Aufnahme schon entschied zugunsten der letzteren Alternative; in amorpher Kohle sind die C-Atome zu Molekülen zusammengefaßt. Eine Aufnahme mit Kupfer-K-Strahlung gab nämlich ein Bild mit ausgeprägten Maxima und Minima. Die Maxima lagen bei $\vartheta = 24^0$, $\vartheta = 43^0$, $\vartheta = 80^0$, während nach 180^0 hin eine so starke Schwärzung auftrat, daß auch in dieser Gegend noch ein viertes Maximum liegen mußte. Kristallinisch durfte man die „amorphe" Kohle nicht nennen, denn die Breite der Maxima war sehr groß, so daß dieselben nicht vergleichbar sind mit den äußerst scharfen Interferenzen, die bei Kristallen auftreten. Nach den in § 2 besprochenen Gesichtspunkten folgern wir aus der Breite der Maxima, daß im Kohlenstoffmolekül nur verhältnismäßig wenig Atome enthalten sein können.

An dieser Stelle, wo wir zunächst die Frage nach der Existenz eines Kohlenstoffmoleküls bejahend beantwortet haben, begegnen wir uns mit gelegentlich ausgesprochenen Ansichten von chemischer Seite. Van't Hoff[1]) spricht sich auf Grund verschiedener chemischer Tatsachen dafür aus, daß das Element Kohlenstoff in Form von Molekülen auftrete und zitiert u. a. Großhanns, der durch Extrapolation der Siedepunkte einer Kohlenwasserstoffreihe von der Formel $C_{n+2} H_{2n-2}$ schließt, daß ein Körper C_3 schon bei 20^0 sieden müßte.

Es war nun die Frage zu erledigen, ob das Molekül C_n etwa von den Bedingungen bei der Darstellung der amorphen Kohle abhängt. Um dies zu entscheiden, wurde Kohle auf verschiedenen Wegen erzeugt. Wir stellten Kohle her:

1. Aus Zucker durch Schmelzen, Verkohlen und Glühen,
2. aus Azetylen (C_2H_2) durch unvollständige Verbrennung,
3. aus Naphtalin ($C_{10}H_8$) durch unvollständige Verbrennung,
4. aus Petroleum durch Verbrennung,
5. aus Zucker durch Behandlung mit konz. Schwefelsäure[2]),
6. es wurde Retortenkohle und
7. ein uns von Herrn Tammann zur Verfügung gestelltes Präparat, das aus Anthrazit gewonnen war, untersucht.

Unsere Absicht bei dieser Auswahl war, in den Ausgangsprodukten möglichst verschiedenartig gebundene C-Ringe und Ketten zugrunde zu legen.

Alle die Kohlenstoffsorten wurden durchstrahlt; sie gaben alle wesentlich dasselbe Bild: die Maxima immer an derselben Stelle.

Damit ist die Existenz eines charakterisierbaren Kohlenstoffmoleküls, wie uns scheint, dargetan.

b) Der Bau des Kohlenstoffmoleküls.

Als letzte Frage kommt nun die nach der Lagerung der Atome im Molekül.

Die Graphitaufnahmen zeigen alle neben vielen Interferenzen mit verhältnismäßig kleiner Intensität vier Linien, die sehr stark hervortreten. Sie entsprechen in der Tabelle den Indizes $(1\,1\,1)$, $(\bar{1}\,1\,1)$, $(0\,\bar{2}\,2)$ und $(\bar{1}\,1\,3)$ und liegen bei

$$\vartheta = 26^0,\ \vartheta = 43^0,\ \vartheta = 76^0 \text{ und } \vartheta = 82^0.$$

1) Van't Hoff, Ansichten über die organ. Chemie. Braunschweig, 1881, S. 23.

2) Die so erhaltene Kohle ist nicht rein.

Ein Vergleich dieser Winkel mit der angegebenen Lage der Maxima für amorphe Kohle:

$$\vartheta = 24^0,\ \vartheta = 43^0,\ \vartheta = 80^0$$

zeigt sofort eine überraschende Übereinstimmung.

Fig. 6 ist die durch Photometrierung erhaltene Intensitätskurve einer Aufnahme von Zuckerkohle. Durch die vertikalen Striche sind die Lagen und verhältnismäßigen Intensitäten der stärksten Graphitlinien angedeutet. Tafel IX, Fig. 4 führt eine Aufnahme von Anthrazitkohle mit verhältnismäßig breiten, Tafel IX, Fig. 5 eine solche von Retortenkohle mit bedeutend schmäleren Interferenzen vor Augen.

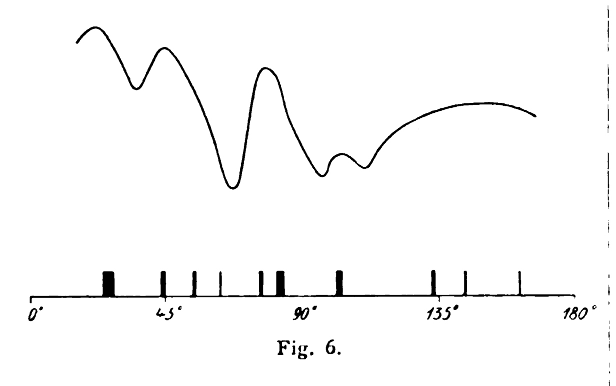


Fig. 6.

Es ist bei der Breite der Maxima nicht zu verwundern, daß die Graphitlinien $\vartheta = 76^0$ und $\vartheta = 82^0$ zu einem einzigen Band in der Mittellage $\vartheta = 79^0$ verschmolzen sind. Auch sind Abweichungen von 2^0, welche oben auftreten, wegen der Breite der Maxima durchaus zulässig.

Auf Grund dieser Tatsache kommen wir zum Schluß, daß Graphit und amorphe Kohle nicht wesentlich verschieden sind. Der einzige Unterschied ist physikalischer Natur und besteht darin, daß nur eine verschieden feine Pulverisierung desselben Kristallgitters vorliegt. Tatsächlich läßt die Breite der Kohlenstoffinterferenzen den Schluß zu, daß im Molekül oftmals nur etwa 30 Atome enthalten sind: **Amorphe Kohle ist also Graphit in einer so feinen Verteilung, wie dieselbe durch mechanische Mittel niemals erreicht werden kann.** Eine Stütze für diese Anschauung ergibt schließlich noch die Tatsache, daß es gelingt bei amorpher Kohle je nach der Herstellung zwar nicht die Lage der Maxima zu ändern, aber wohl die Breite derselben in gewissen Grenzen zu variieren. Man hat also je nach Umständen nur eine gröbere oder feinere Pulverisierung erreicht, aber der Molekülaufbau als Ganzes ist erhalten geblieben.

c) Das Charakteristische der beiden Kohlenstoffmodifikationen.

Wir sind also zu der Überzeugung gekommen, daß es nur zwei Kohlenstoffmodifikationen gibt: Diamant und Graphit[1]).

Ersterer ist nach den Braggschen Untersuchungen ausgezeichnet durch die Reinheit, mit welcher das Tetraeder, d. h. die vier völlig gleichwertigen Valenzen zum Ausdruck kommen. Letzterer dagegen zeigt das Kohlenstoffatom mit drei Hauptvalenzen in einer Ebene, unter 120^0 gegeneinander geneigt, und einer vierten nicht mehr gleichberechtigten, dazu senkrechten Nebenvalenz[2]).

Auch chemisch kommt diese Tatsache klar zum Ausdruck. Während eine Oxydation von Diamant durch oxydierende Mittel, wie z. B. Salpetersäure, nicht gelingt, werden sowohl Graphit als auch amorphe Kohle angegriffen, beide liefern Mellitsäure, die als Benzolhexakarbonsäure noch das reguläre Sechseck der Muttersubstanz im Benzolkern bewahrt hat[3]).

Sieht man unsre Resultate von diesem Standpunkte an, dann erscheint Kohle in Diamantform als das Prototyp der aliphatischen Chemie mit dem an der Spitze der Überlegungen stehenden Kohlenstofftetraeder. Graphit und amorphe Kohle dagegen bilden die in dem Auftreten der Sechseckstruktur augenfällig gekennzeichneten einfachsten Stufen der aromatischen Chemie, welche den Benzolkern als Hauptmerkmal führt.

---

1) Damit stimmt die Bemerkung von P. Groth (Physikal. Kristallogr. **1**, 11, 1906) überein, daß die Existenz anderer Modifikationen schwarzen Kohlenstoffs völlig ungewiß sei. Wie P. Groth uns mitteilt, hat er in seinen Vorlesungen seit vier Jahrzehnten die Ansicht vertreten, daß der sogenannte amorphe Kohlenstoff nur Graphit in sehr feiner Verteilung sei.

2) Wie stark die vierte Valenz zurücktreten kann, zeigt der Fall des Triphenylmethyls $C(C_6H_5)_3$, in welchem von chemischer Seite der Kohlenstoff als dreiwertig bezeichnet wird. Daß die vierte Valenz sich auch hier betätigen kann, zeigt z. B. das Molekül $(C_6H_5)_3 - C - C - (C_6H_5)_3$.

3) Um zu zeigen, daß sich Graphit von amorpher Kohle chemisch wesentlich unterscheidet, wird angegeben, daß Graphit im Gegensatz zu amorpher Kohle bei der Oxydation mit Permanganat Graphitsäure liefere. Es wurde jedoch schon von chemischer Seite (Staudenmeyer, Berl. Ber. **32**, 2825, siehe besonders S. 2832) die Vermutung ausgesprochen, Graphitsäure könnte kein einheitlicher Körper sein. Wir haben, für uns von Prof. Windaus gütigst hergestellte, Graphitsäurepräparate durchstrahlt und gefunden, daß diese Substanz keinen einheitlichen Körper darstellt. Es traten teils scharfe Linien (darunter Graphitlinien), teils sehr breite Interferenzen auf.

Göttingen, Physikalisches Institut, Mai 1917.

(Eingegangen 2. Juni 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Meßmethoden der Röntgenstrahlen[1]).

Von R. Glocker.

I. Prinzipielles über Messungen an homogenen und heterogenen Röntgenstrahlungen.

1. Homogene Strahlungen.

Zur Charakterisierung der Beschaffenheit eines homogenen Röntgenstrahlenbündels sind zwei Bestimmungsstücke erforderlich: Intensität und Durchdringungsvermögen, meist Härte genannt.

Intensität heißt diejenige Strahlungsenergie, welche in der Zeiteinheit (1 sec) auf die zur Strahlrichtung senkrechte Einheitsfläche (1 qcm) auftrifft. Ihre Dimension im C. G. S. System ist somit g/sec^{-3}. Das Produkt aus Intensität und Zeitdauer der Bestrahlung führt in der Röntgentechnik die Bezeichnung „Flächenenergie".

Wird die Intensität J_0 eines homogenen Strahlenbündels durch ein absorbierendes Medium von der Schichtdicke d cm auf den Betrag J_1 geschwächt, so liefert die experimentell bestätigte Gleichung[2])

$$J_1 = J_0 e^{-\mu d}, \tag{1}$$

die Definition einer Größe μ, durch welche das Durchdringungsvermögen dieser Strahlung eindeutig bestimmt ist, sofern das absorbierende Medium keinerlei selektive Absorptionserscheinungen zeigt. Die Größe μ ist eine für die betreffende Strahlung charakteristische Materialkonstante und wird „Absorptionskoeffizient" genannt.

Als Kennzeichen der „Homogenität" einer Strahlung läßt sich die Bedingung aufstellen, daß der prozentuale Absorptionsverlust in einer zweiten gleichdicken Schicht eines absorbierenden Mediums ebenso groß ist wie in der ersten Schicht:

$$\frac{J_1 - J_2}{J_1} = \frac{J_0 - J_1}{J_0}$$

also

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{J_1}{J_0} = e^{-\mu d} \tag{2}$$

Bei homogenen Strahlungen ist somit der experimentell erhaltene Wert des Absorptionskoeffizienten μ unabhängig von der Anzahl und Dicke der passierten Schichten.

Eine anschauliche Vorstellung von dem Durchdringungsvermögen einer Strahlung vermittelt der Begriff der „Halbwertschicht", welcher von Christen[1]) in die medizinische Bestrahlungslehre eingeführt wurde. Unter Halbwertschicht wird diejenige Schichtdicke eines Stoffes verstanden, welche die Intensität einer gegebenen Strahlung durch Absorption auf die Hälfte reduziert. Die Beziehung zwischen Halbwertschicht a und Absorptionskoeffizient μ ergibt sich aus Gl. (1): $\frac{1}{2} = e^{-\mu a}$, somit

$$a = \frac{\lg \text{nat } 2}{\mu} = \frac{0{,}693}{\mu}. \tag{3}$$

Aus der Gleichung (4) und aus der obigen Definition der Homogenität folgt, daß bei homogenen Strahlungen die Einschaltung von Filtern beliebiger Beschaffenheit auf die Messung der Halbwertschicht keinen Einfluß ausübt.

Die elektromagnetische Auffassung der Röntgenstrahlen führt auf eine zweite Definition des Begriffes Härte. Durch die Lauesche Entdeckung der Abbeugung der Röntgenstrahlen beim Durchgang durch Kristallraumgitter wurde die Erzeugung von Röntgenspektren ermöglicht, so daß nunmehr die Röntgenstrahlen als eine Art Licht mit sehr kleiner Wellenlänge betrachtet werden dürfen. In ähnlicher Weise wie im optisch sichtbaren Gebiet die Verschiedenheit der Farbe des Lichtes physikalisch bedingt ist durch die Größe der Wellenlänge, so kann das verschiedene Durchdringungsvermögen der Röntgenstrahlen aufgefaßt werden als eine Folge der verschiedenen Größe der Wellenlängen. Wie Kossel[2]) und Siegbahn[3]) gezeigt haben, wird bei normal absorbierenden Stoffen der Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Absorptionskoeffizient durch die Gleichung

$$\mu = A\lambda^b \tag{4}$$

[A und b sind Materialkonstanten]

dargestellt. Die langwelligen Strahlen werden unter sonst gleichen Umständen stärker absorbiert als die kurzwelligen, so daß die Begriffe langwellig und weich, kurzwellig und hart, identisch sind. Bei Stoffen mit selektivem Absorptionsverhalten dagegen entspricht ein und derselbe Zahlenwert des Absorptionskoeffizienten zwei verschiedenen Wellenlängen. Die Definition der Härte einer Strahlung durch den Absorptionskoeffizienten ist daher immer gebunden an die besonderen Eigentümlichkeiten des zur Absorptionsmessung verwendeten Körpers. Da der Zahlenwert dieses Härtemaßes je nach der Wahl

1) Der Physiker, der sich mit den Meßmethoden der Röntgenstrahlen-Technik zu befassen hat, stößt dort auf eine Fülle von Unklarheit und Unexaktheit über die Grundlagen. Wir haben daher Herrn Dr. Glocker gebeten, über dieses Gebiet zusammenfassend zu berichten und vom Standpunkt der heutigen Physik aus alle vorgeschlagenen Methoden kritisch zusammenzustellen. Wir hoffen damit zu helfen, daß bald die großen Fortschritte der Röntgenphysik auch der Technik der Röntgenstrahlen in vollem Umfange zugute gebracht werden. Die Schriftleitung.

2) Abgesehen von der Intensitätsschwächung infolge Zerstreuung; vgl. hierzu Gl. (14).

1) Christen, Messung und Dosierung der Röntgenstrahlen, Hamburg 1913.

2) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **20**, 903, 1914.

3) Diese Zeitschr. **15**, 754, 1914.

des absorbierenden Mediums wechselt und da kein Stoff a priori für die Verwendung als Normalkörper besonders bevorzugt erscheint, so daß die Wahl einer gewissen Willkür überlassen bleibt, kann ein absolutes Härtemaß auf diesem Wege nicht erhalten werden. Nimmt man dagegen die Wellenlänge als zweites Bestimmungsstück einer homogenen Strahlung, so ist deren Härte damit in dem absoluten Maß der Längeneinheit ausgedrückt. Es erscheint daher zweckmäßig, bei allen Härteangaben künftighin nur noch die Wellenlänge als rationelles Härtemaß zu benützen.

Für den Begriff „homogene Strahlung" ergibt sich nunmehr folgende Definition: Homogene Röntgenstrahlen enthalten nur Wellenlängen eines sehr engen Spektralbezirkes. Unter der Voraussetzung der Beibehaltung endlicher Breite darf dieser Spektralbereich beliebig eng angenommen werden, so daß er, je nach der Genauigkeit des Meßverfahrens, unter Umständen durch die Angabe einer einzigen Wellenlänge hinreichend bestimmt ist. Die Anforderungen, die an die Homogenität einer Strahlung, d. h. an die Ausdehnung dieses Spektralbereiches gestellt werden, sind von Fall zu Fall verschieden. Für die medizinischen Anwendungen wird z. B. eine Strahlung, deren längste und kürzeste Wellenlänge sich um etwa 10 Proz. unterscheiden, noch als homogen bezeichnet werden dürfen.

2. Heterogene Strahlungen.

Die am häufigsten vorkommenden Röntgenstrahlungen sind Mischungen verschieden harter Strahlen, d. h. sie bestehen aus einer Vielheit von Wellenlängen, deren Intensitäten im allgemeinen verschieden groß sein werden. Aus der Kontinuität des Röntgenspektrums folgt, daß zur Charakterisierung solcher heterogener Strahlungen eigentlich unendlich viele Bestimmungsstücke erforderlich sind. Je nach dem erstrebten Genauigkeitsgrad der Messung kann man sich jedoch das ganze Spektrum eingeteilt denken in eine Anzahl N gleich breiter Intervalle. Bestimmt man die Strahlungsintensität in jedem Spektralbereich und kennt man dessen mittlere Wellenlänge, so genügen diese zwei N Bestimmungsstücke zur eindeutigen Beschreibung des untersuchten Strahlengemisches. Eine solche Einteilung in Spektralbezirke ist gleichbedeutend mit einer Zerlegung des Strahlengemisches in eine Anzahl N homogener Strahlungen von verschiedener Durchdringungsfähigkeit und Intensität.

Eine Intensitätsmessung an heterogenen Strahlungen liefert die Gesamtintensität aller Spektralbezirke. Die Voraussetzung der praktischen Durchführbarkeit dieser Messung ist folgende: homogene Strahlen verschiedener Härte müssen bei gleicher Intensität gleiche Wirkung auf das Strahlungsreagens hervorbringen. Bei Besprechung der einzelnen Meßmethoden im Abschnitt II wird sich jedoch ergeben, daß der Realisierung dieser Forderung bedeutende Schwierigkeiten entgegenstehen.

Die Aufgabe, die Intensitäten der einzelnen homogenen Komponenten des Strahlengemisches zu bestimmen, kann durch Intensitätsmessungen allein nicht gelöst werden. Es ist hierzu eine Kombination von Intensitäts- und von Härtebestimmungen erforderlich, wobei unter Härtebestimmungen alle Methoden verstanden werden sollen, welche dazu dienen, die einzelnen Strahlungskomponenten voneinander gesondert in Erscheinung treten zu lassen.

Wird nur eine einzige Härtebestimmung an einem Strahlengemisch vorgenommen, so wird dadurch ein Mittelwert des Durchdringungsvermögens der Strahlung gewonnen, welcher „mittlere Härte" genannt wird. Wird die Intensität J_0 einer heterogenen Strahlung in einer absorbierenden Schicht von der Dicke d cm auf den Betrag J_1 geschwächt, so kann in jedem Falle eine homogene Strahlung ausfindig gemacht werden, welche dieselbe Schwächung $\frac{J_1}{J_0}$ erleiden würde und deren Absorptionskoeffizient μ sich aus Gleichung 1 berechnen läßt; μ heißt dann der „mittlere Absorptionskoeffizient" des Strahlengemisches. Läßt man das Strahlengemisch eine zweite gleich dicke und gleich beschaffene Schicht passieren, so ist die beobachtete Intensitätsschwächung kleiner als diejenige, welche die homogene Strahlung mit demselben Absorptionskoeffizienten μ erleiden würde. Diese Härtung des Strahlengemisches rührt davon her, daß in der ersten Schicht die weichen Strahlungsgruppen relativ viel stärker absorbiert werden wie die harten, so daß in der Strahlung vor dem Eintritt in die zweite Schicht die harten Strahlen in relativ größerer Intensität vertreten sind, als in der ursprünglichen Strahlung. Mit Rücksicht auf diese Abhängigkeit des Zahlenwertes des Absorptionskoeffizienten von der Dicke der absorbierenden Schicht ist es unbedingt erforderlich bei Absorptionsmessungen an heterogenen Strahlungen anzugeben, an welcher Schichtdicke die Messung des Quotienten $\frac{J_1}{J_0}$ stattfand. Am einfachsten erfolgt diese Angabe durch Anhängen eines Index: $\mu_{0,1}$ würde z. B. bedeuten, daß die zur Bestimmung von μ benützte Schicht 0,1 cm dick war. Es ist ferner zweckmäßig, bei Strahlengemischen nicht schlechtweg vom „Absorptionskoeffizienten", sondern vom „mittleren Absorptionskoeffizienten" zu sprechen, da sein Zahlen-

wert das Ergebnis einer Mittelbildung gemäß Gleichung 6 darstellt:

$$e^{-\mu d} = \frac{\sum_1^n J e^{-\mu d}}{\sum_1^n J} = \frac{J_1 e^{-\mu_1 d} + J_2 e^{-\mu_2 d} + \cdots + J_n e^{-\mu_n d}}{J_1 + J_2 + \cdots J_n} \qquad (5)$$

Die Größen unter den Σ-Zeichen bedeuten Intensitäten und Absorptionskoeffizienten der einzelnen homogenen Strahlungskomponenten. Durch die Bezeichnung „mittlerer Absorptionskoeffizient" wird ferner zum Ausdruck gebracht, daß es sich bei der betreffenden Absorptionsmessung um heterogene Röntgenstrahlen handelt und daß infolgedessen der gewonnene Zahlenwert eine Funktion der absorbierenden Schichtdicke ist.

Dasselbe gilt für den Begriff der Halbwertschicht; bei Strahlengemischen ist die zweite Halbwertschicht a_2 stets größer als die erste a_1. Nach dem Vorschlag von Christen[1]) kann der Quotient $h = \frac{a_2}{a_1}$ als Maß für die Heterogenität betrachtet werden. Der Minimalwert ergibt sich im Falle einer homogenen Strahlung zu $h = 1$.

Duane und Hunt[2]) bezeichnen diejenige Wellenlänge, welche dieselbe Absorbierbarkeit in Aluminium besitzt wie das ganze Strahlengemisch, als die „effektive Wellenlänge" des Gemisches. Um eindeutig zu sein, bedarf jedoch diese Definition noch des Zusatzes, wie dick die zur Absorptionsmessung benützte Schicht sein soll.

Die verschiedenen Methoden zur Messung der Intensität und Härte lassen sich in zwei Klassen einteilen: Während die einen Verfahren die unmittelbaren Wirkungen der Strahlen zum Gegenstand der Messung machen, befassen sich die anderen mit den die Erzeugung der Strahlen begleitenden Erscheinungen. Es liegt in der Natur der Sache, daß die letzteren Methoden über die Veränderungen, die die Strahlen nach dem Verlassen der Röntgenröhre erleiden, keine Auskunft zu geben vermögen. Eine Bezeichnung der beiden Klassen als direkte und indirekte Meßmethoden wird dadurch nahegelegt, daß nur die Methoden der ersten Klasse eine direkte Untersuchung der Strahlung an jeder beliebigen Stelle des Außenraumes gestatten.

II. Methoden der Intensitätsmessung.

Bei den direkten Methoden der Intensitätsmessung lassen sich drei Gruppen unterscheiden, je nachdem die thermischen, elektrischen oder chemischen Wirkungen der Röntgenstrahlen die Grundlage bilden. Bei den elektrischen Wirkungen kommt neben dem Ionisationseffekt in Gasen die elektrische Aufladung isolierter Körper im Vakuum in Betracht. Auch die bei Bestrahlung auftretende Widerstandsänderung des Selens hat neuerdings zu Meßzwecken Anwendung gefunden. Die Gruppe der chemischen Wirkungen umfaßt die Schwärzung der photographischen Emulsion, die Fluoreszenzerregung zahlreicher Stoffe, sowie die Ausfällung von Salzen aus ihren Lösungen. Als vierte Gruppe schließen sich sodann diejenigen Methoden an, welche nach der früheren Definition als „indirekte" zu bezeichnen sind (Messungen am Röhrenstromkreis).

1) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. XXIII, 214, 1915.
2) Phys. Rev. 6, 166, 1915.

1. Gruppe: Messung der Wärmewirkung.

Wird ein dünnes Metallblech von möglichst kleiner Wärmekapazität dem Strahlengang ausgesetzt, so kann mit sehr empfindlichen Meßinstrumenten eine geringe Temperaturerhöhung desselben nachgewiesen werden. Die beobachtete Temperaturerhöhung darf unter folgenden Voraussetzungen als ein Maß für die in dem Metallblech absorbierte Strahlungsenergie angesehen werden:

1. Wenn die erzeugte Wärmewirkung der Energie der Strahlung entstammt.
2. Wenn die absorbierte Strahlungsenergie restlos in Wärme verwandelt wird.
3. Wenn Wärmeverluste durch Strahlung und Leitung ausgeschlossen sind.

1. Radiometrische Versuche von Bumstead[1]), welcher bei gleicher absorbierter Strahlungsenergie in einem Bleiblech eine doppelt so große Erwärmung beobachtete wie in einem Zinkblech, schienen darauf hinzudeuten, daß die Größe der Wärmewirkung eine individuelle Eigenschaft jedes Elements sei. Nach Analogie der radioaktiven Zerfallsprozesse wurde angenommen, daß eine Transformation der inneren Energie des Atoms in Wärme stattfindet und daß den Röntgenstrahlen hierbei nur eine Art auslösende Wirkung zukommt. Eine Nachprüfung dieser Versuche durch Angerer[2]), welcher an Stelle des Radiometers eine Differentialthermosäule von Eisenkonstanten-Elementen benützte, führte zu einem negativen Resultat, worauf Bumstead selbst seine früheren Ergebnisse auf Versuchsfehler zurückführte. Es spricht somit kein experimenteller Beweis gegen die Annahme einer Proportionalität zwischen absorbierter Strahlungsenergie und erzeugter Wärme.

2. Bei allen Metallen wird — mit zunehmendem Atomgewicht in steigendem Maße — ein Bruchteil der absorbierten Strahlungs-

1) Phil. Mag. 11, 292, 1906; 15, 432, 1908.
2) Ann. d. Phys. 24, 370, 1907.



energie in Sekundärstrahlungsenergie (zerstreute Strahlung, charakteristische Eigenstrahlung des Metalls, Auslösung sekundärer Kathodenstrahlen) verwandelt. Ein Teil dieser Sekundärstrahlen wird innerhalb des Metallbleches absorbiert und liefert einen seiner Energie äquivalenten Beitrag zur Wärmeerzeugung, während ein anderer Teil durch die Oberfläche des Metalles austritt und sich so der Messung entzieht. Sind in der primären Strahlung solche Spektralbezirke mit großer Intensität vertreten, welche zum Erregungsbereich der Eigenstrahlung des betreffenden Metalls gehören, so kann diese Fehlerquelle einen erheblichen Einfluß auf das Meßresultat erlangen. Für die Metalle *Fe* bis *Zn* kann die Größe dieses Korrektionsgliedes berechnet werden[1]); in allen anderen Fällen müßte sie durch einen besonderen Versuch bestimmt werden.

3. Wärmeverluste durch Ausstrahlung und Leitung können durch Anwendung von Nullmethoden kompensiert werden: Durch Zuführung einer entsprechend bemessenen, bekannten Wärmemenge kann erreicht werden, daß das absorbierende Metallblech dieselbe Temperaturerhöhung erfährt wie durch die Wirkung der Röntgenstrahlen. Die Messung der zugeführten Wärme liefert somit die in absolutem Maß gemessene absorbierte Strahlungsenergie.

Die Bestimmung der äußerst geringen Temperaturänderungen erfordert sehr empfindliche Methoden. In Betracht kommen sämtliche Meßverfahren, welche für die Zwecke der Erforschung der Wärmestrahlung seinerzeit ausgebildet worden waren, nämlich

a) Luftthermometer,
b) Flächenbolometer,
c) Thermosäule,
d) Radiometer,
e) Radiomikrometer.

a) Die Methode des Luftthermometers verdient insofern besonderes historisches Interesse, als Dorn[2]) damit die erste Messung der Energie der Röntgenstrahlen durchgeführt hat. Zwei symmetrische, verschlossene Glasröhren, von denen die eine die der Strahlung ausgesetzten Metallbleche enthielt, waren durch eine Töplersche Drucklibelle miteinander verbunden. Die Luft des die absorbierenden Bleche enthaltenden Zylinders erfuhr während einer Bestrahlung von 30 Sekunden eine Temperaturerhöhung von etwa 10^{-3} Grad, je nach der Art der Metallbleche, (*Pt*, *Pd*, *Al*, *Sn*). Mit Gleichstrom bekannter Stärke wurden hierauf die Bleche bis zu der beobachteten Temperatur elektrisch geheizt; die gesuchte absorbierte Strahlungsenergie ist dann gleich der Jouleschen Wärme. Ohne Berücksichtigung der Absorption in der Glaswand der Röntgenröhre ergab sich die bei einem Entladungsschlag des Induktoriums emittierte Strahlungsenergie zu 0,3 mg/cal.

b) Die Einführung des Flächenbolometers in die Röntgenstrahlenmessung erfolgte durch eine Arbeit von Schöps[1]), dessen Bolometer ziemlich genau der Dimension des von Lummer und Kurlbaum[2]) zur Bestimmung der Wärmestrahlung angegebenen Bolometers nachgebildet war. Im Gegensatz dazu besaßen die von Rutherford[3]), Wien[4]) Angerer[5]), Carter[6]) benützten Flächenbolometer eine 20—45 mal so große wirksame Oberfläche. Als absorbierendes Metallblech diente ein etwa 3 m langer Streifen von 5 mm breitem und 0,03 mm dickem Platinband, welches auf einen Glimmerrahmen aufgewickelt war. Das Prinzip des Bolometers ist folgendes: Haben die vier Zweige einer Wheatstoneschen Brücke genau gleichen Widerstand und erleidet einer dieser Zweige *a* durch Temperaturänderung eine relative Widerstandsänderung δ, so wird das vorher stromlose Galvanometer *G* (Fig. 1) von einem Strom durchflossen,

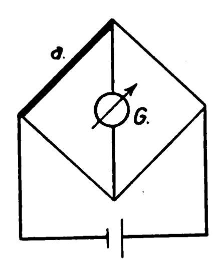


Fig. 1.

dessen Größe proportional δ ist. Der Ausschlag des Galvanometers ist somit ein direktes Maß für die Temperaturänderung des Zweiges *a*. Eine ungleichmäßige Erwärmung der einzelnen Zweige (z. B. durch Luftströmungen) bewirkt daher ein fortgesetztes Wandern des Nullpunktes des Galvanometers. Durch Bestrahlung zweier gegenüberliegender Brückenzweige kann unter sonst gleichen Umständen ein größerer Galvanometerausschlag erzielt werden. Zur Vermeidung

1) Der Energieanteil, welcher in Form von charakteristischer Sekundärstrahlung durch eine ∞ dicke Platte austritt, berechnet sich nach Sadler (Phil. Mag. **18**, 126, 1909) zu $\frac{K}{\mu+\nu}$; *K* Emissionskoeffizient (Zahlenwerte bei Sadler), μ und ν Absorptionskoeffizienten der Primär- und Sekundärstrahlung in der Platte.

2) Wied. Ann. **63**, 160, 1897.

1) Diss. Halle 1899.
2) Wied. Ann. **46**, 204, 1892.
3) Proc. Roy. Soc. **67**, 245, 1900.
4) Ann. d. Phys. **18**, 991, 1905.
5) Ann. d. Phys. **21**, 87, 1906.
6) Ann. d. Phys. **21**, 955, 1906.

der unter 3. besprochenen Fehlerquelle wird in den meisten Arbeiten das Bolometer nicht zur direkten Messung der Temperaturänderung, sondern als Nullinstrument benützt. Durch Heizung des Bolometerzweiges *a* mittelst eines Wechselstroms (in der Schaltung der Rubens-Palzowschen Doppelbrücke) wird der gleiche Galvanometerausschlag hergestellt wie der unter der Strahlenwirkung sich ergebende Ausschlag. Die weitgehendste Kompensation beider Wirkungen wurde in der Arbeit von Angerer durchgeführt: In der Überlegung, daß die Ausstrahlungsverluste bei der intermittierenden Erwärmung durch die Wirkung der Röntgenstrahlen andere sein werden als bei einer kontinuierlichen Erwärmung durch sinusförmigen Wechselstrom, wird die Heizung durch die aperiodischen Ladungs- und Entladungsstromstöße eines Kondensators besorgt, welcher synchron mit den Unterbrechungen im Primärkreis des Induktoriums auf die Spannung einer Gleichstrombatterie aufgeladen bzw. entladen wurde.

c) Die Bedenken von Rutherford gegen eine Verwendung der Thermosäule zur Messung der Wärmewirkung von Röntgenstrahlen, nämlich daß die Wärmeabgabe aus dem Inneren der Thermosäule, wo die Röntgenstrahlen absorbiert werden, in anderer Weise erfolge, als die Ableitung der zur Eichung benützten oberflächlich absorbierten Wärmestrahlung, wurden von Wien[1]) widerlegt, welcher mit Thermosäule und Bolometer übereinstimmende Meßresultate erhielt. Die Empfindlichkeit einer Säule von 30 Wismut-Antimon-Thermoelementen mit zusammen 1,4 qcm Oberfläche erreichte ungefähr die eines Bolometers von 225 qcm Oberfläche. Die Eichung der Thermosäule erfolgte mittelst der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers von 100°. Gegenüber der Bolometermethode besitzt die Thermosäule nach Wien den Vorzug, daß die auffallende Strahlung völlig absorbiert wird, so daß die Korrektion für den Teil der Strahlungsenergie, welcher das Bolometerblech unabsorbiert durchdringt (10—25 Proz. bei Angerer), in Wegfall kommt. Die außerordentlich durchdringenden Strahlen der modernen Röntgenapparate würden allerdings auch in einer Thermosäule nur zum Teil absorbiert werden.

d) Das Bumsteadsche Radiometer bestand aus zwei sehr dünnen Aluminiumflügeln, die durch ein Glasrohr verbunden, an einem Quarzfaden im Vakuum aufgehängt waren (optimaler Druck etwa 0,05 mm *Hg*). Vor dem einen Flügel befindet sich in Form eines Fensters der die Röntgenstrahlen absorbierende Stoff, dessen Temperaturerhöhung eine vermehrte Emission von Wärmestrahlen und infolgedessen eine Drehung des beweglichen Systems veranlaßt. Nach den Resultaten zu schließen, scheint die Zuverlässigkeit der radiometrischen Methode nur gering zu sein.

e) Nach dem Prinzip von Boys[1]) hat Adams[2]) folgendes Radiomikrometer konstruiert: Ein in sich geschlossenes Kupferkonstantan-Thermoelement war leicht drehbar in einem kräftigen Magnetfeld aufgehängt. Auf der einen Lötstelle lag ein dünnes Platinscheibchen, in welchem die Strahlen absorbiert wurden, während die andere Lötstelle vor der Strahlung geschützt war. Der entstehende Thermostrom bewirkt eine Drehung des Systems im Magnetfeld. Die Empfindlichkeit ist ungefähr dieselbe, wie die der Wienschen Thermosäule

$$\left(1 \text{ Skalenteil} = 6 \times 10^{-8} \frac{\text{cal}}{\text{sec/qcm}}\right).$$

Einer weiteren Empfindlichkeitssteigerung dieser Methode wird dadurch Einhalt geboten, daß die zum Aufbau des Thermoelements benützten Metalle nicht magnetisch indifferent gemacht werden können.

2. Gruppe: Messung der elektrischen Wirkungen.

1. Ionisation in Gasen.

Die am häufigsten benützte Methode zur quantitativen Intensitätsbestimmung von Röntgenstrahlen beruht auf deren Fähigkeit, Gase zu ionisieren. Ist die an den Ionisationskondensator angelegte Spannung groß genug, um alle erzeugten Ionen ohne Rekombinationsverluste an die Elektroden zu transportieren, so ist die Stärke des Stromes ein Maß für die in der Zeiteinheit erzeugte Ionenzahl (Sättigungsstromstärke). Das empirische Kriterium des Sättigungszustandes bildet die Unabhängigkeit der Stromstärke von der Spannung unter sonst gleichen Bedingungen.

Alle Ionisationsmessungen von Strahlungsenergien beruhen auf der Voraussetzung, daß die pro Volumeinheit des Gases erzeugte Ionenzahl, unabhängig von der Härte der Strahlen, direkt proportional der in der Volumeinheit absorbierten Strahlungsenergie ist. Hieraus folgt, daß bei einer Intensitätsvergleichung homogener Strahlen verschiedener Härte nicht ohne weiteres die Sättigungsströme den gesuchten Intensitäten direkt proportional sind, da bei der Messung nur ein geringer, von der Härte abhängiger Bruchteil der Strahlungsenergie in dem Gasraum der Ionisierungskammer zur Absorption gelangt.

1) l. c.

1) Proc. Roy. Soc. **42**, 189, 1887.
2) Phys. Rev. **24**, 246, 1907.

Werden die Sättigungsströme i_1 und i_2 in einem Gasvolumen von der Tiefe l cm bestimmt, so gilt die Gleichung

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\mu_1 J_1}{\mu_2 J_2} \qquad (6)$$

(μ_1 und μ_2 Absorptionskoeffizienten in Luft, J_1 und J_2 auffallende Intensitäten), weil bei Luft als ionisiertem Gas und den üblichen Dimensionen der Kammer $\mu_1 l$ und $\mu_2 l << 1$ ist. Da das Absorptionsgesetz der Luft nahezu mit dem des Aluminiums übereinstimmt (Siegbahn[1])), dürfen für $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ die entsprechenden Absorptionskoeffizienten des Aluminiums, deren Ermittlung leichter durchführbar ist, eingesetzt werden.

Die Versuchsresultate Angerers[2]), daß die Ionisation der bolometrisch gemessenen Strahlungsenergie proportional ist, werden häufig als experimenteller Beweis der obigen Voraussetzung (Ionenzahl unabhängig von der Härte stets proportional der absorbierten Energie) angeführt. Da jedoch durch die Versuchsbedingungen (Verwendung der gleichen Röhre bei verschiedenen Primärstromstärken) das emittierte Röntgenspektrum nur eine unwesentliche Änderung erfahren konnte, muß die Gültigkeit dieses experimentellen Resultates auf homogene Strahlen und auf Strahlengemische von nahezu gleicher Zusammensetzung beschränkt werden. Eine irrtümliche Verallgemeinerung dieser Versuchsergebnisse, nämlich daß die Proportionalität zwischen Ionisation und absolut gemessener Strahlungsenergie immer, d. h. bei beliebiger Zusammensetzung der Strahlungen, vorhanden sei, hat dazu geführt, daß in der Röntgentechnik häufig der Quotient der Sättigungsströme zweier Strahlengemische von ganz verschiedener Zusammensetzung direkt als Quotient der auffallenden Intensitäten angesehen wird, ein Verfahren, das zu sehr erheblichen Fehlern führen muß. Denkt man sich nämlich zwei Strahlengemische mit gleicher Gesamtintensität J aus den zwei homogenen Komponenten mit den Absorptionskoeffizienten μ_1 und μ_2 so zusammengesetzt, daß die Intensität der Komponenten μ_1 im ersten Gemisch αJ, im zweiten Gemisch βJ beträgt, so sind die in der gleichen Ionisationskammer erhaltenen Sättigungsströme beider Gemische i_1 und i_2 proportional mit $\alpha J \mu_1 + (1-\alpha) J \mu_2$ bzw. $\beta \mu_1 J + (1-\beta) \mu_2 J$. Die Ionisationswirkung beider Gemische ist also immer eine verschiedene (mit Ausnahme des trivialen Falles $\alpha = \beta$, Identität beider Strahlungen), während bei einer bolometrischen Messung die Strahlungsintensitäten beider Gemische gleich groß gefunden würden.

1) Diese Zeitschr. **15**, 754, 1914.
2) Ann. d. Phys. **21**, 87, 1906.

Christen[1]) hat die für alle Ionisationsmessungen prinzipiell wichtige Frage erhoben, ob nicht etwa das Umsetzungsverhältnis zwischen absorbierter Strahlungsenergie und Ionisationswirkung eine Funktion der Wellenlänge der einfallenden Strahlen sei; zutreffenden Falles würde Gleichung (6) außer Gültigkeit gesetzt werden. Eine direkte Prüfung der Gleichung (6) durch Messung der Sättigungsströme einerseits und durch bolometrische Bestimmung der Intensitäten andererseits wäre in dieser Hinsicht von größtem Interesse. Durch die Versuchsergebnisse von Owen[2]) und Barkla[3]), daß das Verhältnis der Ionisationen homogener Strahlen gleicher Härte in verschiedenen Gasen (ausgenommen solche mit charakteristischer Eigenstrahlung) bei gleicher absorbierter Strahlungsenergie für alle Wellenlängen nahezu gleich groß gefunden wird, wird die Vermutung nahegelegt, daß auch die Ionisationswirkung verschiedener Wellenlängen in ein und demselben Gase bei gleicher absorbierter Strahlungsenergie gleich groß ist. Berücksichtigt man jedoch andererseits, daß nach den Versuchen von Wilson[4]) die Ionenbildung fast ausschließlich von den im Gase ausgelösten sekundären Elektronen besorgt wird und daß deren Geschwindigkeit nicht von der Intensität, sondern nur von der Wellenlänge der einfallenden Röntgenstrahlen abhängt, so gelangt man zu dem Schluß, daß die den kurzen Wellenlängen entsprechenden Elektronen infolge ihrer größeren kinetischen Energie bei gleicher absorbierter Strahlungsenergie, d. h. bei gleicher erzeugter Elektronenzahl eine größere Anzahl Ionen bilden. Da nach den Arbeiten von Rutherford[5]) nur ein geringer Bruchteil der gesamten absorbierten Strahlungsenergie in Ionisierungsarbeit transformiert wird, wäre es wohl denkbar, daß dieser Umsetzungskoeffizient eine Funktion der Wellenlänge ist. Die von Christen aus anderem Anlaß erhobenen Zweifel an der Richtigkeit einer von der Wellenlänge unabhängigen Proportionalität zwischen Ionisation und absorbierter Strahlungsenergie werden somit durch die Anschauungen über den Mechanismus der Ionisation gestützt[6]).

1) Diese Zeitschr. **17**, 23, 1916.
2) Proc. Roy. Soc. **86**, 426, 1912.
3) Phil. Mag. **25**, 832, 1913.
4) Proc. Roy. Soc. **85**, 285, 1911.
5) Proc. Roy. Soc. **67**, 245, 1900.
6) In verschiedenen Arbeiten, z. B. bei Owen (Proc. Roy. Soc. **86**, 426, 1912) findet sich folgender Ansatz zur Berechnung der in einem Gasvolumen vom Querschnitt 1 qcm und von der Länge 1 cm erzeugten Ionenzahl

$$q = \int_0^l A J_0 e^{-\mu x} dx. \qquad (I)$$

μ Absorptionskoeffizient der betreffenden homogenen Strahlung, J_0 deren Intensität vor dem Eintritt in das

Bei der Messung kleiner Strahlungsintensitäten bietet die Verwendung schwerer Gase an Stelle der Luft (z. B. Aethylbromid, Methyljodid) den Vorteil wesentlich größerer Ionisierungsströme. Dem steht der Nachteil gegenüber, daß infolge der selektiven Absorption die Intensität gewisser Wellenlängen bei der Messung ungebührlich bevorzugt wird (bei Brom etwa $\lambda = 0{,}9 \cdot 10^{-8}$ cm bei Jod etwa $\lambda = 0{,}35 \cdot 10^{-8}$ cm), so daß dieses Verfahren im allgemeinen bei Strahlengemischen nicht anwendbar ist. Eine zweite Möglichkeit zur Erhöhung der Sättigungsstromstärke liefert die Vergrößerung des Elektrodenabstandes, da die Gesamtzahl der erzeugten Ionen dem durchstrahlten Gasvolumen direkt proportional ist.

Bei der Konstruktion der Ionisationskondensatoren ist vor allem die Vermeidung einer Sekundärstrahlung der Wände anzustreben. Durch Anordnung entsprechender Blenden wird erreicht, daß Wände und Elektroden der Kammer nicht von der direkten Strahlung getroffen werden können. Um die durch die Sekundärstrahlung des Gases (zerstreute Strahlung, charakteristische Eigenstrahlung bei schweren Gasen) veranlaßte Elektronenemission der Wände und Elektroden möglichst klein zu halten, werden diese aus leichten Stoffen verfertigt (meist Aluminium mit Papierbelegung). Der Einfluß einer solchen sekundären Elektronenemission macht sich dadurch bemerkbar, daß die Sättigungsströme bei Variation des Elektrodenabstandes diesem nicht proportional sind. Einen in dieser Hinsicht fehlerfreien Kondensator hat Seemann[1]) aus trommelfellartig aufgespanntem, glyzeringetränktem Zeichenpapier gebaut. Messungen des Sättigungsstromes einer und derselben Strahlung in Kondensatoren von verschiedener Länge und Querschnitt stimmen bei Reduktion auf gleiche absorbierte Energie nicht völlig überein, da der in dem Gasraum nicht absorbierte Anteil der verschiedenen Sekundärstrahlungen von den Dimensionen des Kondensators abhängt (Barkla-Philpot[2])).

Für die elektrische Messung der Ionisierungsströme in Gasen sind verschiedene Verfahren ausgebildet worden:

a) Galvanometrisch: An der einen Kondensatorplatte liegt der eine Pol einer Hochspannungsbatterie, deren anderer Pol geerdet ist. Den entstehenden Ionisierungsstrom läßt man durch ein hochempfindliches Drehspulen- oder Nadelgalvanometer zur Erde abfließen. Das Verfahren ist anwendbar bis auf Ströme von etwa 10^{-10} Amp. Bei noch kleineren Strömen ist es zweckmäßiger mit dem Ionisierungsstrom während einiger Minuten eine große Kapazität C aufzuladen. Nach Aufhebung der Verbindung von C mit der Ionisationskammer wird die Entladungsstromstärke von C mit einem ballistischen Galvanometer gemessen.

b) Elektrometrisch: Die eine Kondensatorplatte ist geerdet, die andere ist mit den Blättchen eines geladenen Elektroskops verbunden, dessen Entladungsgeschwindigkeit gemessen wird durch Abstoppen der Zeitdauer der Wanderung des Blättchens zwischen zwei festen Skalenpunkten oder durch Abzählen der in einer gewissen Zeit zurückgelegten Skalenteile. Das letztere Verfahren liefert etwas weniger genaue Vergleichswerte, da die Stellung des Blättchens die Kapazität des isolierten Systems beeinflußt. An Stelle des Elektroskops wird häufig auch ein Quadrantelektrometer mit Hilfsladung der Nadel benützt. Die Schaltung ist aus Fig. 2 ersichtlich. Erforderlich ist eine gute Dämpfung der Nadel, damit der Zustand gleichförmiger Bewegung möglichst bald nach dem Einschalten erreicht wird. Die untere Grenze der Empfindlichkeit

---

Gasvolumen, A = Ionenzahl, welche hervorgebracht wird durch die Strahlen mit der Intensität 1 beim Zurücklegen des Weges 1 im Gas. Wird die ganze Strahlungsenergie in dem Gasvolumen absorbiert, so ist also die erzeugte Ionenzahl

$$Q = \frac{A \mathfrak{J}_0}{\mu} . \qquad \text{(II)}$$

Werden nun zwei homogene, verschieden harte, aber gleich intensive Strahlungen (Intensität $\mathfrak{J}_0$, Absorptionskoeffizienten μ_1 bzw. μ_2) in dem Gasvolumen völlig absorbiert, so verhält sich die Zahl der erzeugten Ionen

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} , \qquad \text{(III)}$$

wenn A als eine vom Härtegrad unabhängige Konstante angenommen würde. Aus der Gleichung (III) würde sich dann ergeben, daß bei gleicher absorbierter Energie die härtere Strahlung eine größere Ionisationswirkung hervorruft als die weiche Strahlung. Die Gleichung (III) kann nun mit dem auf Seite 307 aufgestellten Grundgesetz der Ionisationsmessungen in Übereinstimmung gebracht werden durch den Ansatz

$$A_1 = c_1 \mu_1 \text{ und } A_2 = c_2 \mu_2 \qquad \text{(IV)}$$

wobei

$$c_1 = f(\lambda_1) \text{ und } c_2 = f(\lambda_2)$$

ist. Dann ist im Falle völliger Absorption

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{c_1}{c_2} . \qquad \text{(V)}$$

Es wäre von größtem Interesse, experimentell zu entscheiden, ob etwa $\frac{Q_1}{Q_2} = 1$ ist, d. h. ob bei gleicher absorbierter Energie Strahlen verschiedener Wellenlänge eine gleiche Anzahl Ionen bilden. Nach der obigen Betrachtung über den Mechanismus der Ionisation wäre zu erwarten

$$\frac{c_1}{c_2} > 1 ,$$

wenn $\mu_1 < \mu_2$ ist, zutreffenden Falles müßte die Gleichung (6) ersetzt werden durch folgende Gleichung

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\mu_1 \mathfrak{J}_1 c_1}{\mu_2 \mathfrak{J}_2 c_2} . \qquad \text{(VI)}$$

1) Ann. d. Phys. **38**, 781, 1912.
2) Phil. Mag. **25**, 832, 1913.

Fig. 2.

dieses Verfahrens beträgt etwa 10^{-15} Amp. Aus der Potentialänderung V des mit der Ionisationskammer verbundenen Quadranten in der Zeit t (sec) und aus der Kapazität C (in cm) des Elektrometers samt Zuleitungen berechnet sich der Strom i in Amp. aus der Gleichung

$$i = \frac{c \cdot V}{9 \cdot 10^{11} \cdot t}. \qquad (7)$$

c) Methode des konstanten Ausschlags: Ist w (Fig. 3) ein sehr großer Widerstand, welcher beim Stromdurchgang dem Ohmschen Gesetz gehorcht, so ist die elektrometrisch gemessene Spannungsdifferenz an seinen Enden

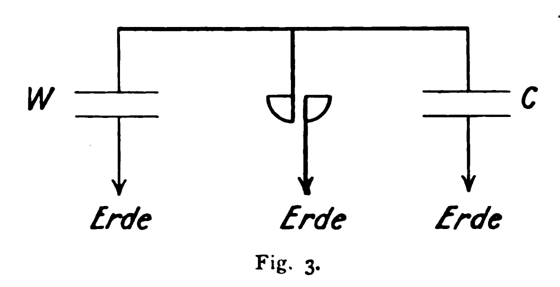


Fig. 3.

dem Ionisierungsstrom direkt proportional. Es ist schwierig einen handlichen Widerstand von der erforderlichen Größe (etwa 10^9 Ohm) herzustellen, welcher einen zeitlich konstanten und von geringen Temperaturänderungen unabhängigen Wert besitzen soll. Von dem Hauptnachteil der üblichen Flüssigkeitswiderstände (Jodkadmium-Amylalkohollösung, Borsäure-Mannitlösung) nämlich Änderung der Leitfähigkeit während des Stromdurchganges infolge Polarisation, scheint die von Campbell[1]) angegebene Xylol-Alkoholmischung (10:1) frei zu sein. Dieser Widerstand gehorcht dem Ohmschen Gesetz in sehr weiten Grenzen (von 0,01 Volt bis 400 Volt Spannung an seinen Enden). Wenig günstig ist jedoch der große Temperaturkoeffizient (1,4 Proz. für 1°). Bronson[2]) empfiehlt als Widerstand eine ionisierte Luftstrecke, die dadurch hergestellt wird, daß eine geringe Menge eines radioaktiven Salzes auf der einen Platte eines Kondensators verdampft wird. Zwecks Herabsetzung der Kontaktpotentialdifferenz werden beide Kondensatorplatten mit Aluminiumfolie bedeckt.

1) Phil. Mag. **22**, 301, 1911; **23**, 688, 1912.
2) Amer. Journ. Sc. **19**, 185, 1905.

d) Kompensationsmethoden: Das Elektrometer dient als Nullinstrument; dem mit der Ionisationskammer verbundenen Quadranten wird eine entsprechend bemessene Elektrizitätsmenge entgegengesetzten Vorzeichens mit Hilfe des Harmschen Kondensators[1]) oder des Curieschen Piezoquarzes[2]) zugeführt. Eine von Seemann[3]) benützte Kompensationsmethode ist aus Fig. 4 ersichtlich. Durch Änderung des Widerstandes

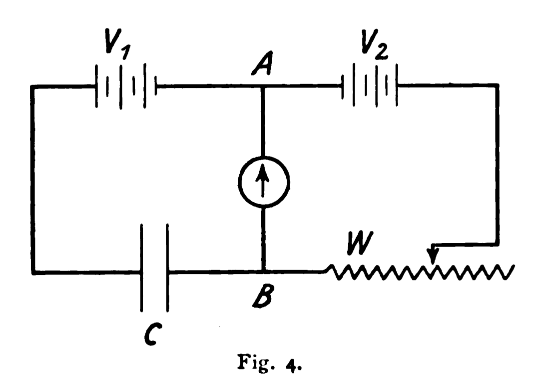


Fig. 4.

w wird erreicht, daß die Potentialdifferenz $AB = 0$ ist; dann ist der gesuchte Ionisierungsstrom $i = \frac{V_2}{w}$. Noch einfacher gestaltet sich die Messung, wenn der Flüssigkeitswiderstand w konstant gehalten und V_2 variiert wird, da die Messung von V_2 mit einem gewöhnlichen Voltmeter erfolgen kann. Empfindlichkeitsgrenze bei etwa 10^{-10} Amp. Der Vorteil der Kompensationsmethoden besteht darin, daß eine Kenntnis der Kapazität des Systems nicht erforderlich ist und daß der Einfluß von etwaigen Isolationsfehlern des Elektrometers auf ein Minimum reduziert wird, weil das Elektrometerpotential von 0 wenig verschieden ist.

Im Gegensatz zu den üblichen Ionisationsmessungen, bei denen die Sättigungsstromstärke von der Intensität und von der Härte der Strahlen abhängt, liefert das von Christen[4]) konstruierte Iontoquantimeter direkt die Angabe der Flächenenergie bzw. Intensität der Strahlung unabhängig von deren Härtegrad. Auf der Ionisationskammer sitzt ein Absorptionskörper (in Form eines Rotationsparaboloides oder eines Keiles), dessen Dimensionen so berechnet sind, daß die Strahlen verschiedener Härte in solchem Maße durch Absorption geschwächt werden, daß ihre relative Ionisationswirkungen bezogen auf gleiche auffallende Intensitäten in dem Gas gleich groß werden. Z. B. können die

1) Diese Zeitschr. **5**, 47, 1904.
2) Journ. d. Phys. **8**, 149, 1889.
3) l. c.
4) Diese Zeitschr. **16**, 362, 1915; **18**, 165, 1917.

weichen Strahlen, welche bei gleicher Energie eine relativ größere Ionisationswirkung besitzen, hauptsächlich nur durch die dünnen Teile des Absorptionskörpers in die Ionisationskammer eindringen, so daß sie nur ein kleineres Gebiet des Gasraums zu ionisieren vermögen als die harten Strahlen. Über die praktische Verwendbarkeit dieser Methode ist bisher noch nichts Näheres bekannt geworden.

2. Sekundäre Elektronenemission.

Die sekundäre Elektronenemission einer von Röntgenstrahlen getroffenen Metallplatte bildet die Grundlage einer zuerst von Holtsmark[1]) angewandten Methode der Intensitätsmesssung von Röntgenstrahlen. Zur Vermeidung von Elektrizitätsverlusten infolge Ionisation des umgebenden Gases wurde die Platte in einem evakuierten Glaszylinder angebracht. Durch Abgabe von Elektronen bei der Bestrahlung beladet sich die Platte mit positiver Elektrizität, welche durch einen sehr hohen Widerstand (von etwa 10^9 Ohm) zur Erde abgeleitet wird. Der elektrometrisch gemessene Strom ist proportional der Zahl der ausgelösten Elektronen. Bei Variierung der Fokusdistanz f wird diese Zahl proportional f^2 gefunden; darin erblickt Holtsmark den Beweis dafür, daß seine Methode wirklich die Intensität der Strahlung mißt. Seine Angabe, daß bei einer bestimmten Röhrenhärte der gemessene Effekt am größten ist, weist darauf hin, daß das Vorherrschen gewisser Wellenlängen in der untersuchten Röntgenstrahlung in besonders starker Weise die Auslösung sekundärer Elektronen hervorruft. Wie zahlreiche Arbeiten anderer Forscher ergeben haben, erreicht die Zahl der ausgelösten Elektronen ein selektives Maximum, wenn gerade solche Wellenlängen auftreffen, die die charakteristische Eigenstrahlung des Materials der Platte erregen. Darin liegt auch die Erklärung für die Beobachtung von Holtsmark, daß die nach seiner Methode vorgenommenen Absorptionsmessungen an verschiedenen Stoffen zu ganz anderen Resultaten führen wie die Benoistschen Ionisationsbestimmungen.

Zur Vergleichung der Intensitäten von Strahlengemischen ist die Methode somit nicht zu gebrauchen. An dieser Feststellung wird durch das Resultat Angerers[2]), daß die Elektrizitätsmenge Q der sekundären Elektronen proportional der bolometrisch gemessenen Strahlungsenergie E ist, nichts geändert, da die von Angerer benützten Strahlengemische infolge gleicher Betriebsweise nahezu dieselbe Zusammensetzung besaßen. Aus seinen Figuren geht übrigens deutlich hervor, daß die Gerade $Q = aE$ bei einer harten Röhre eine etwas andere Neigung a besitzt als bei einer sehr weichen Röhre. Die Anwendbarkeit der Methode beschränkt sich also auf relative Intensitätsmessungen von homogenen Strahlen gleicher Durchdringungsfähigkeit oder von Strahlengemischen gleicher spektraler Zusammensetzung. Für eine Ausdehnung der Methode auf die Ermittlung der Intensitäten J von homogenen Strahlen verschiedener Durchdringungsfähigkeit ist die Kenntnis der Wellenlängenabhängigkeit des Emissionskoeffizienten[1]) K der sekundären Elektronenemission erforderlich. Die Zahl der ausgelösten Elektronen Q ist proportional mit $\frac{K}{\mu + r} \cdot J$ (μ Absorptionskoeffizient oder Röntgenstrahlen, r Absorptionskoeffizient der Kathodenstrahlen in dem Material der Platte). μ darf gegenüber von r vernachlässigt werden. Die relativen Intensitäten J_1 und J_2 von homogenen Röntgenstrahlen verschiedener Härte (μ_1 und μ_2) berechnen sich somit aus den beobachteten Elektronenzahlen Q_1 und Q_2 nach der Gleichung

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{K_1 r_2 J_1}{r_1 K_2 J_2}. \tag{8}$$

Voraussetzung ist dabei, daß die Platte in bezug auf das Durchdringungsvermögen der Kathodenstrahlen als ∞ dick angesehen werden darf.

3. Leitfähigkeitsänderung des Selens.

Die ersten quantitativen Versuche über die Einwirkung der Röntgenstrahlen auf die Leitfähigkeit dünner Selenschichten wurden von Athanasiadis[2]) angestellt. Es ergab sich für die Abhängigkeit der Leitfähigkeitsänderung von der Strahlungsintensität die gleiche Beziehung wie bei Belichtung mit optisch sichtbarem Licht. Durch Fürstenau wurde die Selenzelle in die medizinische Meßtechnik eingeführt. Bei dem Fürstenauschen Intensimeter bildet die Selenzelle den Zweig einer Wheatstoneschen Brücke. In die Diagonalleitung ist ein Milliamperemeter eingeschaltet, dessen Zeigerausschlag der Leitfähigkeitsänderung und damit der Strahlungsintensität (bei gleichbleibender Qualität der Strahlung) proportional ist. Bei einer Beurteilung dieses Meßverfahrens sind folgende Punkte zu berücksichtigen:

a) Zeitliche Inkonstanz des Dunkelleitwertes und der Empfindlichkeit.

1) Ann. d. Phys. **10**, 522, 1903.
2) Ann. d. Phys. **21**, 87, 1906.

1) Einige wenige Zahlenwerte bei Sadler, Phil. Mag. **27**, 447, 1911.
2) Ann. d. Phys. **27**, 890, 1908.

b) Trägheit und Ermüdung der Zellen.

c) Einfluß von Temperatur und Feuchtigkeit.

d) Abhängigkeit der Leitfähigkeitsänderung von der Wellenlänge der auffallenden Strahlen.

a) Eine Änderung des Widerstandes einer unbelichteten Selenzelle (Dunkelleitwert) tritt bei allen Zellen unmittelbar nach der Herstellung auf und nähert sich im Laufe von Tagen bei den normalen Zellen einem gewissen konstanten Wert, während bei den anormalen Zellen fortwährende zufällige Schwankungen auftreten, welche nach den Untersuchungen von Ries[1]) hauptsächlich durch den wechselnden Feuchtigkeitsgehalt der Luft veranlaßt werden. Fürstenau[2]) hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit auf Grund zahlreicher Versuche an Selenzellen verschiedener Herstellungsweise nachgewiesen, daß bei einer bestimmten Herstellungsart stets normale Zellen erhalten werden können. Auch die Empfindlichkeit, d. h. die prozentuale Änderung des Dunkelwiderstandes beim Auffallen einer gewissen gleich großen Strahlungsintensität bleibt bei den normalen Zellen zeitlich konstant, sobald sie etwas gealtert sind.

b) Wie die Fig. 5 zeigt, stellt sich nicht sogleich mit dem Einsetzen der Strahlung ein konstanter Wert des Widerstandes ein. Die Zeit, die zur Erreichung des stationären Zustandes erforderlich ist, ist verschieden groß, je nach

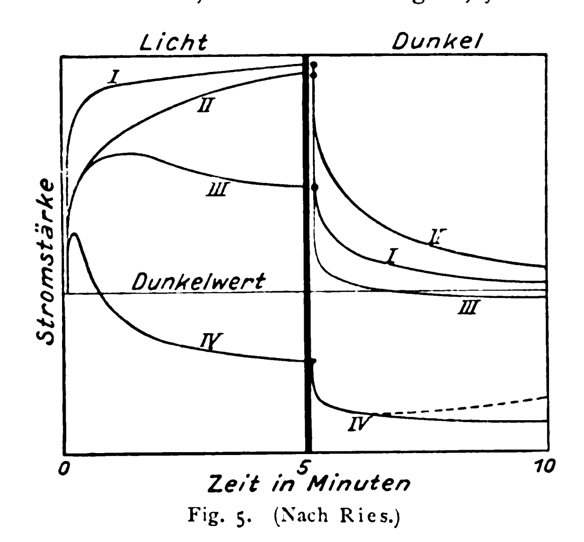


Fig. 5. (Nach Ries.)

der Herstellungsweise der Zellen (Größe der Erhitzungstemperatur, langsame oder rasche Abkühlung). Trägheit und Ermüdung d. h. allmähliche Abnahme der Leitfähigkeit bei gleichbleibender Intensität, sind im allgemeinen komplementäre Eigenschaften, insofern Zellen mit geringer Trägheit (Kurve I, Fig. 5) rasche Ermüdung zeigen und umgekehrt (Kurve II, Fig. 5). Das Ermüdungsstadium tritt um so schneller ein, je größer die Strahlungsintensität ist. Als Beispiel für die Größe der Trägheit mag die Angabe Fürstenaus dienen, daß bei seinen Zellen mit geringer Trägheit der stationäre Zustand 3 bis 10 Sekunden nach Einsetzen der Strahlung auftritt. Aus der Fig. 5 ist ersichtlich, daß nach Aufhören der Strahlung eine für jede Zelle individuelle Zeit verstreicht, bis der Wert des Dunkelwiderstandes erreicht wird. Die Kurve III der Fig. 5 gibt ein Bild von dem Verhalten einer anormalen Zelle bei und nach der Belichtung. Im Gegensatz zu Glatzel[1]), welcher bei intermittierender Belichtung bei gleicher Intensität verschiedene Leitfähigkeitswerte erhielt, je nachdem die Stärke der Strahlung im Zunehmen oder Abnehmen begriffen war, findet Fürstenau an seinen Zellen keine Abhängigkeit der bei Bestrahlung auftretenden Leitfähigkeitsänderung von der Vorgeschichte der Zellen. Bei wiederholten, in kurzen Zeiträumen sich folgenden Bestrahlungen nimmt zwar die Verdunkelungsträgheit zu, aber der bei gleicher Stärke der Strahlung erreichte Widerstandswert bleibt konstant, und zwar ganz unabhängig davon, ob das Wiedereinsetzen der Strahlung schon zu einer Zeit erfolgt, wo der Wert des Dunkelwiderstands noch nicht völlig erreicht war. Damit ist der Haupteinwand gegen die Verwendung der Selenzelle zur Strahlungsmessung hinfällig geworden.

c) Bei den Zellen normalen Verhaltens ist nach Ries der Einfluß des Feuchtigkeitsgehalts der Luft sehr gering, während er bei den anormalen Zellen sehr groß ist. Wie oben erwähnt, scheint außer etwaigen molekularen Umlagerungen der Hauptgrund für die unregelmäßigen Schwankungen der als anormal bezeichneten Zellen in dem Einfluß der Luftfeuchtigkeit zu liegen. Eingehende Untersuchungen über den Temperaturkoeffizienten von Selenzellen liegen nicht vor. Bei Umhüllung der Selenzellen mit Stoffen, welche die Wärme schlecht leiten und andrerseits die Röntgenstrahlen leicht durchlassen, kann aber für alle praktischen Meßzwecke der Temperatureinfluß vernachlässigt werden.

d) Bei einer Betrachtung der Wirkung verschieden harter Strahlen auf die Leitfähigkeitsänderung einer Selenschicht sind zwei Möglichkeiten denkbar: Der beobachtete Seleneffekt ist entweder proportional der auf ein Volumelement des Selens auffallenden oder proportional der in einem Volumelement absorbierten Strahlungsintensität. Wenngleich die letztere Annahme

1) Diese Zeitschr. **12**, 480, 1911.

2) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgstr. XXIV, 390, 1917.

1) Verh. d. Phys. Ges. **14**, 607, 1912.

aus energetischen Gründen als die wahrscheinlichere erscheint, so kann eine Entscheidung der Frage nur auf experimentellem Wege erhalten werden, zumal da die theoretischen Vorstellungen über die bei der Bestrahlung im Selen auftretenden Vorgänge noch nicht genügend geklärt sind (chemische Auffassung von Hesehus[1]), elektronentheoretische Erklärung von Ries[2]). Die experimentelle Ermittlung der Beziehung zwischen Leitfähigkeitsänderung und Intensität muß für homogene Strahlen verschiedener Wellenlänge (z. B. Eigenstrahlung von Metallen) durchgeführt werden, indem die Intensität gleichzeitig mit einer anderen Methode (z. B. Ionisationsmessung, Korrektion gemäß Gleichung 6) gemessen wird. Solange dies nicht geschehen ist, fehlt die exakte Grundlage zu einer quantitativen Intensitätsbestimmung mittelst des Seleneffektes, sofern man sich nicht auf den einfachsten Fall einer Intensitätsvergleichung von homogenen Strahlungen gleicher Durchdringungsfähigkeit oder von Strahlengemischen mit gleicher spektraler Zusammensetzung beschränkt.

3. Gruppe: Messung der chemischen Wirkungen.

1. Die Schwärzung der photographischen Emulsion.

Die ersten quantitativen Versuche über die Schwärzungswirkung der Röntgenstrahlen auf Bromsilberemulsion stammen von Precht[3]). Bei Änderung der Fokusdistanz f und der Expositionszeit t entstehen gleich starke Schwärzungen, wenn $f^2 \cdot t = \text{const}$ ist, d. h. wenn $J \cdot t = \text{const}$ ist (J Strahlungsintensität). Zum gleichen Resultat gelangt Kröncke[4]), welcher die Strahlungsintensität J durch Änderung der Sekundärstromstärke i variiert. Die Proportionalität der Größen J und i ergibt sich aus dem Versuchsresultat, daß bei einer mit konstanter Gleichspannung betriebenen Röntgenröhre die Ionisationswirkung proportional i ist. Wegen der Konstanz der Spannung besitzen die betreffenden Strahlengemische gleiche Zusammensetzung, so daß die Ionisationswirkung ohne Bedenken als direktes Maß der relativen Strahlungsintensitäten betrachtet werden darf. Kröncke schließt aus seinen Versuchen, bei denen der Wert des Produktes $J \cdot t$ allerdings nur in dem kleinen Intervall 1 : 4 variiert wurde, daß die Konstante p in dem Schwarzschildschen Gesetz $J \cdot t^p$ für die Schleußner-Röntgenplatten zwischen 0,96 und 1,0 liegen muß, so daß das Bunsen-Roscoesche Gesetz „gleiche photochemische Wirkungen entsprechen gleicher Strahlungsenergie" für die benützte Plattensorte bei Belichtung mit Röntgenstrahlen gültig ist. Aus den Versuchsbedingungen ergibt sich als weitere Voraussetzung, daß die Qualität der Strahlung bei der Variation von J und t konstant bleibt.

Eine Intensitätsmessung von Röntgenstrahlen durch Photometrieren der Schwärzungen ist nur bei homogenen Strahlungen statthaft: Nach Abzug der Schleierschwärzung wird der Zusammenhang zwischen der Intensität J und der in absolutem Maß ausgedrückten Schwärzung S durch eine gerade Linie angenähert dargestellt, wie die Versuche von Koch und Friedrich[1]) an den Eigenstrahlungen von Fe, Zn, Sn, Pb ergeben haben. Die Intensitäten wurden hierbei in dem Verhältnis 1 : 100 variiert. Das Talbotsche Gesetz wurde auch bei Röntgenstrahlen gültig gefunden.

Die Kenntnisse über die Abhängigkeit der Schwärzungsgesetze von der Wellenlänge der betreffenden homogenen Strahlung sind bisher nur qualitativer Natur. Bei gleicher Intensität ist im allgemeinen die erzeugte Schwärzung umso größer, je weicher die Strahlen sind, weil ein entsprechend größerer Bruchteil der Strahlungsenergie in der photographischen Schicht absorbiert wird. Wie die Spektralaufnahmen von Wagner[2]) zeigen, besitzt die Bromsilberemulsion eine erheblich gesteigerte Sensibilität gegenüber von Wellenlängen, die kleiner sind als $\lambda_A = 0{,}49 \cdot 10^{-8}$ cm. Hier setzt der Anstieg der Sensibilität sprunghaft ein, um nach der kurzwelligen Seite des Spektrums allmählich wieder abzunehmen. Diese plötzliche Steigerung der Empfindlichkeit erfolgt nicht bloß auf Rechnung erhöhter Absorption (λ^A ist die Wellenlänge der Absorptionsbandkante des Silbers), sondern hauptsächlich auf Rechnung der bei dieser Wellenlänge mit maximaler Intensität einsetzenden Eigenstrahlung der Silberatome, so daß die Schwärzungswirkung als eine Summation der direkten Wirkung der Primärintensität und des in Sekundärstrahlung verwandelten Bruchteils der Primärintensität anzusehen ist. Es ist daher fraglich, ob der von Koch und Friedrich gefundene geradlinige Verlauf der Schwärzungskurven auch in diesem kritischen Gebiet bestehen bleibt. Als geeignete Strahlung zur experimentellen Entscheidung dieser Frage käme vor allem die Eigenstrahlung des Antimons in Betracht.

Ein zweites Gebiet selektiver Sensibilität, der Eigenstrahlung des Broms entsprechend

1) Diese Zeitschr. **7**, 163, 1906.
2) l. c.
3) Diese Zeitschr. **1**, 48, 1899.
4) Ann. d. Phys. **43**, 687, 1914.

1) Ann. d. Phys. **45**, 399, 1914.
2) Ann. d. Phys. **46**, 868, 1915.

($\lambda_A = 0,926 \cdot 10^{-8}$ cm) tritt weniger stark in Erscheinung, da es sich hier um sehr weiche Strahlen handelt, welche schon in der Glaswand der Röntgenröhre etwa zur Hälfte absorbiert werden.

Mit dem Zusammenhang zwischen Schwärzungswirkung und Ionisationswirkung bei homogenen Röntgenstrahlen verschiedener Härte befaßt sich eine Untersuchung von Barkla und Martyn[1]). Die Exposition der photographischen Platte dauerte bei jeder Strahlengattung solange, bis die Ladung eines Elektroskopes um einen gewissen konstanten Betrag abgenommen hatte. Die Tabelle I enthält die Wellenlänge λ der Strahlen[2]), die relativen Schwärzungswerte S bei gleicher Ionisationswirkung und die hieraus relativ berechneten relativen Schwärzungswerte S', bezogen auf gleiche auffallende Intensität der Strahlen.

Tabelle I.

Eigenstrahlung von	$\lambda \cdot 10^8$ cm	S	S'
Cu	1,5	1,73	82
Zn	1,4	1,67	65
Br	1,0	1,75	28,6
Mo	0,71	2,25	11,9
Ag	0,56	2,25	5,6
Sn	0,49	2,75	4,3
Sb	0,47	4,22	5,1
J	0,44	4,62	4,25
Ce	0,36	4,67	2,8

In der Spalte S tritt der oben besprochene Sensibilitätsanstieg infolge Erregung der *Br*- bzw. *Ag*-Strahlung deutlich hervor. Infolgedessen müssen die in der medizinischen Dosimetrie so beliebten Intensitätsmessungen von Strahlengemischen auf Grund der Schwärzungswirkung zu sehr erheblichen Fehlresultaten führen, und zwar um so mehr, je größer der Anteil an sehr harten Strahlungskomponenten ist.

2. Erregung von Fluoreszenzlicht.

Die am längsten bekannte Wirkung der Röntgenstrahlen, die Erregung von Fluoreszenzlicht bei zahlreichen chemischen Stoffen, ist durch systematische Untersuchungen noch recht wenig geklärt worden, so daß sie für eine quantitative Messung der Strahlungsintensität nicht benützt werden kann. Für eine schätzungsweise Vergleichung von Intensitäten ist jedoch die Beurteilung der Helligkeit des Aufleuchtens eines Fluoreszenzschirmes sehr gut geeignet. Eine quantitative Ausgestaltung der fluorometrischen Methoden ist nur unter folgenden Bedingungen möglich:

1) Phil. Mag. **25**, 299, 1913.
2) Wellenlänge des α-Dubletts der K-Serie.

a) Der fluoreszierende Stoff darf nicht nachleuchten,

b) die Stärke des Fluoreszenzlichtes muß unter sonst gleichen Umständen zeitlich konstant bleiben (keine Fluoreszenzermüdung),

c) der Umsetzungskoeffizient der Strahlungsenergie in Energie des Fluoreszenzlichtes muß als Funktion der Wellenlängen der auffallenden Röntgenstrahlen bekannt sein,

d) die spektrale Zusammensetzung des Fluoreszenzlichtes eines und desselben Stoffes muß unabhängig sein von der Qualität der erregenden Röntgenstrahlung.

Die Notwendigkeit der Voraussetzung d) wird durch die physiologischen Verhältnisse des menschlichen Auges bedingt. (Abhängigkeit der Sensibilität von der Wellenlänge des Lichtes.)

Ein Vorschlag von Rutherford und Mc. Clung[1]) die absolute Energie einer Röntgenstrahlung durch die Helligkeit eines Fluoreszenzschirms zu messen, verdient historisches Interesse: Durch eine bolometrische Messung der Röntgenstrahlenenergie und eine Vergleichung der Fluoreszenzhelligkeit mit einer Lichtquelle von bekanntem Energiewert ergibt sich der Umsetzungskoeffizient zu 0,037. Zur Berechnung der absoluten Strahlungsenergie E läßt sich sodann folgende Gleichung aufstellen:

$$E = 0,082 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 \cdot A} \text{ cal.} \qquad (9)$$

r_1 und r_2 Abstand des Leuchtschirms und der Normallichtquelle vom Photometerwürfel; A ist der im Leuchtschirm absorbierte Bruchteil der Strahlung.

Eine Ausdehnung dieses Verfahrens auf beliebige Röntgenstrahlengemische ist unstatthaft, da die Konstante 0,082 von der spektralen Zusammensetzung der Röntgenstrahlung abhängt.

3. Verfärbungserscheinungen.

Bei lang dauernden Bestrahlungen erleiden manche Stoffe eine Änderung ihrer Farbe, welche zumeist durch die Wirkung des Tageslichtes wieder rückgängig gemacht werden kann (Holzknecht[2])). Die grüne Farbe des Bariumplatinzyanürs geht z. B. allmählich bei der Bestrahlung in eine braungelbe Farbe über. Verwendung findet diese Methode in der medizinischen Dosimetrie (vgl. Kapitel IV). Für die Beurteilung der Fehlerquellen ist besonders zu beachten, daß nicht die auffallende, sondern die absorbierte Strahlungsenergie für den Grad der Farbänderung maßgebend ist. Wegen der selektiven Absorption des Bariums und des Platins reagiert

1) Proc. Roy. Soc. **67**, 245, 1900.
2) Verh. d. D. Phys. Ges. **4**, 25, 1902.

die Tablette besonders stark auf die Wellenlängen in der Umgebung von $\lambda = 0{,}3 \cdot 10^{-8}$ und $\lambda = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ cm. Aus der Gleichheit der Verfärbung darf daher nur dann auf gleiche Energie der wirkenden Strahlungen geschlossen werden, wenn deren Spektren nahezu identisch sind.

4. Ausfällung von Salzen aus ihren Lösungen.

Werden z. B. Quecksilbersalze in wäßriger Lösung der Wirkung von Röntgenstrahlen ausgesetzt, so ist der beobachtete Niederschlag von Kalomel annähernd proportional der absorbierten Strahlungsenergie (Schwarz[1])). Bei größeren Niederschlagsmengen ist der Einfluß der dadurch hervorgerufenen Konzentrationsänderung zu berücksichtigen, so daß die exakten quantitativen Verhältnisse ziemlich kompliziert sind. Die von Freund[2]) vorgeschlagene Methode, die Ausscheidung von Jod in einer bestrahlten Jodoform-Chloroformlösung zur Energiemessung der Strahlung zu verwenden, hat sich nicht bewährt, da die Jodausscheidung in hohem Grade von einem etwaigen Wassergehalt der Lösung abhängt (Wertheim-Salomonson). An Stelle der Wägung des Niederschlages wird in der Praxis meist die Trübung der Lösung durch Vergleichung mit empirisch hergestellten Trübungsskalen angewandt.

4. Gruppe: Indirekte Intensitätsmessungen.

Die in der Praxis weit verbreitete Gewohnheit, die Stärke des durch die Röntgenröhre fließenden Stromes als ein von der Betriebsweise und dem Vakuum der Röhre unabhängiges Maß der Strahlungsintensität zu benutzen, stützt sich auf die Anschauung, daß 1) die Röntgenstrahlenintensität proportional der auf die Antikathode auftreffenden Elektronenzahl sei und daß 2) diese Anzahl durch die Sekundärstromstärke gemessen werde. Zur Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches dieses Satzes ist eine experimentelle Prüfung dieser beiden genannten Voraussetzungen erforderlich:

1. Aus dem Versuchsergebnis von Carter[3]), daß der Nutzeffekt zwischen Kathodenstrahlenenergie E_K und Röntgenstrahlenenergie E_R eine lineare Funktion der an der Röhre liegenden Spannung V ist, nämlich

$$\frac{E_R}{E_K} = aV \quad (a \text{ eine Konstante}), \qquad (10)$$

folgt, daß bei gleicher auf die Antikathode auftreffenden Elektronenzahl N die emittierte Röntgenstrahlenintensität proportional mit V^2 geht, da $E_K = NeV$ ist (e Elementarquantum).

2. Die Frage, ob der ganze vom Milliamperemeter angezeigte Strom durch den Elektronenschwarm transportiert wird oder nur ein Bruchteil p desselben und ob diese Größe p einen von dem Vakuum und der Betriebsweise unabhängigen Wert besitzt, hat noch keine allgemeine experimentelle Beantwortung gefunden.

Bei kontinuierlichem Gleichstrombetrieb ist nach den Versuchen von Kröncke[1]) p eine Konstante: Die Strahlungsintensität J ist, unabhängig vom Vakuum, direkt proportional der Stromstärke i, sofern die Spannung V gleich groß bleibt; wird V variiert, so ist J proportional iV^2, wie dies nach Gl. (10) zu erwarten ist. Gegen die Tatsache, daß Kröncke bei diesen Versuchen die gesuchte Strahlungsintensität der beobachteten Ionisationswirkung ohne weiteres gleichsetzte, wurde von Christen[2]) der Einwand erhoben, daß die Veränderung der Spannung eine entsprechende Änderung der Strahlungszusammensetzung bewirke und daß daher die Ionisationswirkung von Gemischen verschiedener Zusammensetzung herrühre, so daß sie nicht mehr als direktes Maß der Intensität angesehen werden dürfe (vgl. Seite 307). Dieser Einwand besteht zweifellos zu Recht. Wie die Spektraluntersuchungen von Duane und Hunt[3]) zeigen, dehnt sich mit wachsender Spannung das Spektrum der erzeugten Strahlen ständig weiter nach der kurzwelligen Seite aus. Wahrscheinlich ist aber dieser Einfluß bei Kröncke von der Größenordnung der Meßfehler, da auf einem ganz anderen Wege Whiddington[4]) zu dem gleichen Resultat E proportional V^2 gelangte.

Bei der üblichen Betriebsweise der Röhren mittels Induktors oder Gleichrichters wird eine Änderung der Belastung der Röhre durch eine Änderung der Sekundärspannung des Stromerzeugers bewirkt. Infolgedessen ändert sich auch die Spannung der Röhre, so daß wegen Gleichung (10) das Verhältnis der Stromstärken nicht mehr als exaktes Maß der Strahlungsintensitäten dienen kann, wenn ein- und dieselbe Röhre in gleicher Weise, aber mit verschiedener Sekundärstromstärke betrieben wird. Die Größe der Spannungsänderung mit der Belastung hängt vom Vakuum der Röhren ab und ist bei weichen Röhren größer als bei harten (Klingelfuß[5])).

Wennschon bei gleicher Betriebsweise die Verwendung des Milliamperemeters zur Messung

1) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. 11, 114, 1906.
2) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. 7, 218.
3) Ann. d. Phys. 21, 955, 1906.

1) Ann. d. Phys. 43, 687, 1914.
2) Diese Zeitschr. 17, 23, 1916.
3) Phys. Rev. 6, 166, 1915.
4) Proc. Roy. Soc. 85, 99, 1911.
5) Verh. d. D. Röntgen-Ges. 5, 62; vgl. hierzu Ludewig, diese Zeitschr. 16, 438, 1915.



der Strahlungsintensität nur unter den besprochenen Einschränkungen statthaft ist, so ist es ganz unzulässig, auf Grund der Sekundärstromstärke Intensitätsvergleiche anzustellen, wenn die Art der Strahlungserzeugung eine verschiedene ist (Gleichrichter, Induktor, rotierender Quecksilberunterbrecher, elektrolytischer Unterbrecher usf.).

Selbst in dem Falle einer Gleichheit der mittleren Spannung bei beiden Betriebsarten kann nämlich nicht erwartet werden, daß der Quotient des Mittelwertes der Stromstärken genau gleich dem Quotienten der Strahlungsintensitäten ist, da wegen der Verschiedenheit des zeitlichen Spannungsverlaufes während eines Induktionsstoßes die dynamische Charakteristik ein und derselben Röhre verschiedene Form annimmt. Dabei ist noch eine praktisch wichtige Fehlerquelle zu beachten, nämlich die Fälschung der Angaben des Milliamperemeters durch die verschiedene Größe eines etwaigen Schließungsstromes.

Eine eindeutige Bestimmung der Strahlungsintensität durch Messung der Stromstärke allein ist somit nur möglich bei Verwendung einer konstanten Gleichspannung. In allen übrigen Fällen muß die Spannungsmessung ergänzend hinzutreten. Aus seinen Versuchen mit kontinuierlichem Gleichstrom hat Kröncke folgende Gleichung als Grundlage einer indirekten Intensitätsmessung J abgeleitet:

$$J = i\,(b_1 V^2 - b_2), \qquad (11)$$

V Spannung, i Stromstärke, b_1 und b_2 sind zwei für die Röhre charakteristische Konstanten.

Bei einer Übertragung dieser Beziehung auf die übliche technische Betriebsweise mit intermittierendem Gleichstrom sind für i und V Mittelwerte einzusetzen, deren experimentelle Bestimmung zurzeit noch nicht in einwandfreier Weise vorgenommen werden kann, da i und V in einem vom Vakuum und der Betriebsweise abhängigen funktionellen Zusammenhang[1]) stehen.

Die Strahlungsausbeute hängt außerdem, unter gleichen elektrischen Verhältnissen, von der Beschaffenheit der Röntgenröhre ab (Verschiedenheit des Absorptionsverlustes in der Glaswandung der Röhre, Abhängigkeit des Faktors a in Gleichung (10) vom Antikathodenmaterial[1])).

1) Theoretische Ableitung der dynamischen Charakteristiken bei Ludewig, diese Zeitschr. **16**, 438, 1915.

Bei einer zusammenfassenden Beurteilung der zahlreichen Intensitätsmeßmethoden hat man vier Aufgaben der Intensitätsmessung zu unterscheiden.

1. Relative Intensitätsmessungen an homogenen Strahlen gleicher Wellenlänge oder an Strahlengemischen gleicher spektraler Zusammensetzung.
2. Relative Intensitätsmessungen an homogenen Strahlen verschiedener Wellenlänge.
3. Relative Intensitätsmessungen an Strahlengemischen verschiedener Zusammensetzung.
4. Absolute Intensitätsmessungen an homogenen oder heterogenen Strahlungen.

1. Jede Methode, für welche einmal der Zusammenhang zwischen beobachteter Strahlungswirkung und Intensität empirisch ermittelt ist (z. B. durch Variation der Fokusdistanz) ist hierfür geeignet.

2. In Betracht kommen diejenigen Verfahren, deren Angaben entweder ganz von der Härte der Strahlen unabhängig sind, (siehe 3) oder deren Meßresultate zu derselben in einfacher und bekannter Beziehung stehen, z. B. die Ionisationsmethoden.

3. Der hier notwendigen Bedingung der Härteunabhängigkeit genügen nur die auf der Wärmewirkung beruhenden Methoden sowie das Integraliontometer.

4. Mit Ausnahme des letzteren eignen sich diese Verfahren auch zu einer absoluten Energie-Bestimmung der Strahlungsenergie in $\frac{\text{cal}}{\text{qcm sec}}$.

Obgleich theoretisch den Wärmemethoden das größte Anwendungsgebiet zukommen würde, so ist leider ihre praktische Verwendbarkeit durch ihre geringe Empfindlichkeit sehr beschränkt. Quantitative Bestimmungen sehr geringer Strahlungsintensitäten sind nur mit Hilfe der Ionisationsmethoden durchführbar.

1) Carter l. c.

(Schluß folgt.)

BESPRECHUNGEN.

D. Reichinstein, Die Eigenschaften des Adsorptionsvolumens. gr. 8⁰. VI u. 116 S. Zürich und Leipzig. Gebr. Leemann & Co. 1916. M. 5.—.

Nachdem der Verf. in der Einleitung eine Reihe von Fällen aus dem Gebiet der heterogenen Systeme besprochen, bei denen das chemische Massenwirkungsgesetz versagt, stellt er eine neue Theorie auf. Nach derselben sollen die hierhin gehörigen Vorgänge sich nicht in der mathematischen (?) Fläche zwischen den beiden Phasen, sondern innerhalb der festen Phase, und



zwar in einer relativ kleinen Entfernung von der Phasengrenze abspielen. In diesem Reaktionsraum, dem sogenannten Adsorptionsvolumen, soll sich eine feste Lösung, bestehend aus dem Elektrodenmaterial, Gas und den Bestandteilen der flüssigen Phase ausbilden; abweichend von dem Verhalten der gewöhnlichen Lösungen soll hier die Summe der aktiven Massen stets konstant bleiben und infolgedessen ein neu hinzukommender Stoff die Konzentration der übrigen Stoffe verkleinern. In welcher Weise der Verf. auf Grund dieser Theorie die Eigenschaften der Depolisatoren, die Passivität, Adsorption usw. erklärt, muß im Original nachgelesen werden, zumal da keine exakte Ausarbeitung der in Betracht kommenden Gleichungen gegeben wird. G. C. Schmidt.

A. Gutzmer, Die Tätigkeit des deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission 1908 bis 1916. gr. 8⁰. 27 S. Leipzig u. Berlin. B. G. Teubner. 1917. M. 1.—.

Anläßlich der Fertigstellung der „Abhandlungen" berichtet der Verfasser über die Vorgeschichte und Einsetzung der „Imuk", dann über die Arbeit des deutschen Unterausschusses und schließt mit einem Rückblick und Ausblick auf das weitere Wirken nach dem Kriege. Das, was geleistet ist, berechtigt zu der Hoffnung, daß auch in Zukunft Deutschland auf dem Gebiete des Unterrichtswesens in vorderster Linie stehen wird. Die Arbeit des deutschen Unterausschusses ist außerordentlich vielseitig und umfassend. Sie hat dem mathematischen Elementar- und Hochschulunterricht neue Wege gewiesen und neue Ziele gesteckt, die auch für den physikalischen Unterricht von wesentlicher Bedeutung sind, indem sie überall die Fäden aufzudecken sucht, welche die verschiedenen Unterrichtsweisen miteinander verknüpfen, und den Zusammenhängen mit den Naturwissenschaften, der Technik, der Philosophie usw. nachgeht. Der Physiker wird auch aus den Abhandlungen über angewandte Mathematik und über Lehrerbildung wertvolle Anregung schöpfen. Götting.

F. Kohlrausch und L. Holborn, Das Leitvermögen der Elektrolyte, insbesondere der wässerigen Lösungen. Methoden, Resultate und chemische Anwendungen. Zweite vermehrte Auflage. XV. u. 237 S. mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1916. Geh. M. 7.50, geb. M. 8.50.

Das Erscheinen der neuen Auflage bedarf an dieser Stelle lediglich der Erwähnung. Die in ihrer Art klassische Monographie bildet für jeden, der die Messung von Elektrolyt-Leitfähigkeiten zu einem der zahlreichen Zwecke, für welche sie in Betracht kommt, benutzt, eine notwendige Ergänzung zu Kohlrauschs praktischer Physik. Die Darstellung der Methode erforderte gegenüber der ersten Auflage keine wesentliche Änderung; die Ergänzung und kritische Sichtung der Angaben ist von Holborn bis in die neueste Zeit geführt worden. A. Coehn.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Dr. A. F. Westgren zum Dozenten für physikalische Chemie an der Universität Upsala.

Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Freiburg i. B. Dr. Wolfgang Gaede zum ord. Professor der Physik an der Technischen Hochschule Berlin, der ord. Professor der Geophysik an der Universität Leipzig Dr. Vilhelm Bjerknes in gleicher Eigenschaft an die neue Universität Bergen (Norwegen).

Verliehen: Dem Privatdozenten für reine Mathematik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Leon Lichtenstein der Titel Professor.

Gestorben: Der Kustos der bayrischen Erdmessungskommission Dr. Ernst Zapp (als Leutnant und Kompagnieführer einer Maschinengewehrabteilung gefallen), der Direktor des Preußischen Geodätischen Instituts und des Zentralbureaus der internationalen Erdmessung in Potsdam ord. Professor für Geodäsie an der Universität Berlin Geh. Oberregierungsrat Dr. Robert Helmert, der ord. Professor der Physik an der Universität Christiania Dr. Christian Birkeland, der emer. ord. Professor der Astronomie an der Universität Wien und frühere Direktor der dortigen Universitäts-Sternwarte Hofrat Professor Dr. Edmund Weiss, der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Breslau Geh. Regierungsrat Dr. Ernst Pringsheim, der Privatdozent der Chemie an der Handelshochschule Cöln Dr.-Ing. Ernst Schütz, der Privatdozent für reine Mathematik an der Universität Göttingen Dr. Wilhelm Behrens (im Felde als Leutnant gefallen).

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



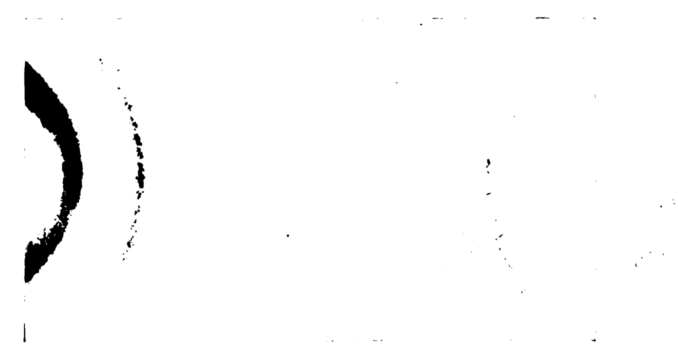


Fig. 1.

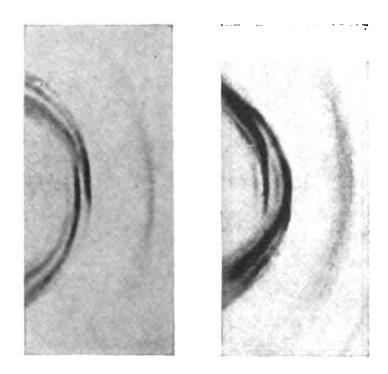


Fig. 2.

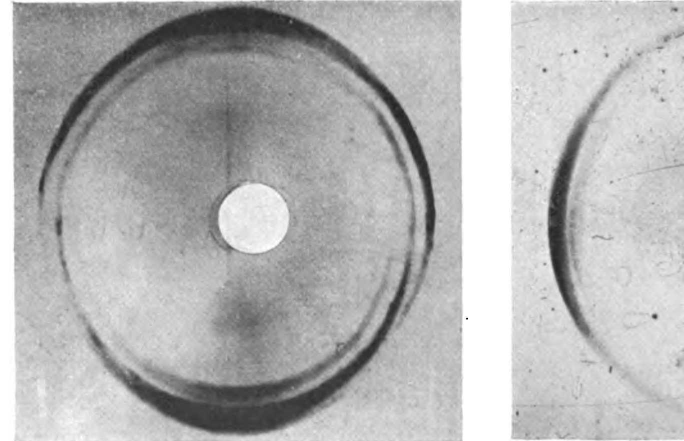
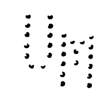


Fig. 3.





P. Debye u. P. Scherrer, Interferenzen an regellos orientierten Teilchen im Röntgenlicht. III.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

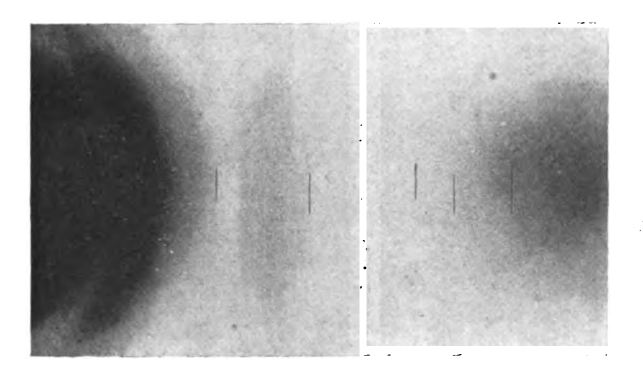


Fig. 4.

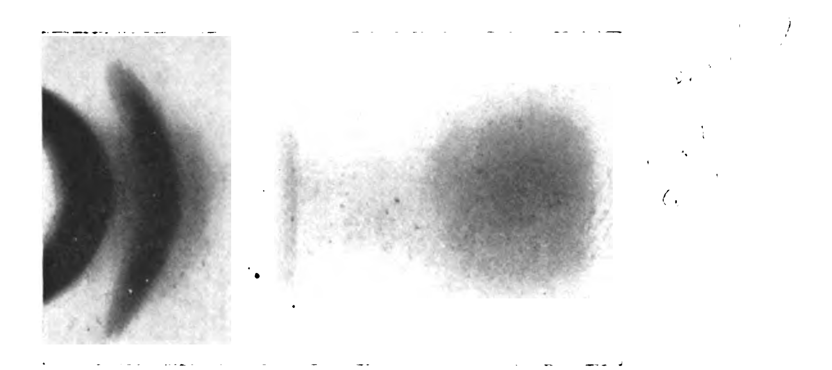


Fig. 5.

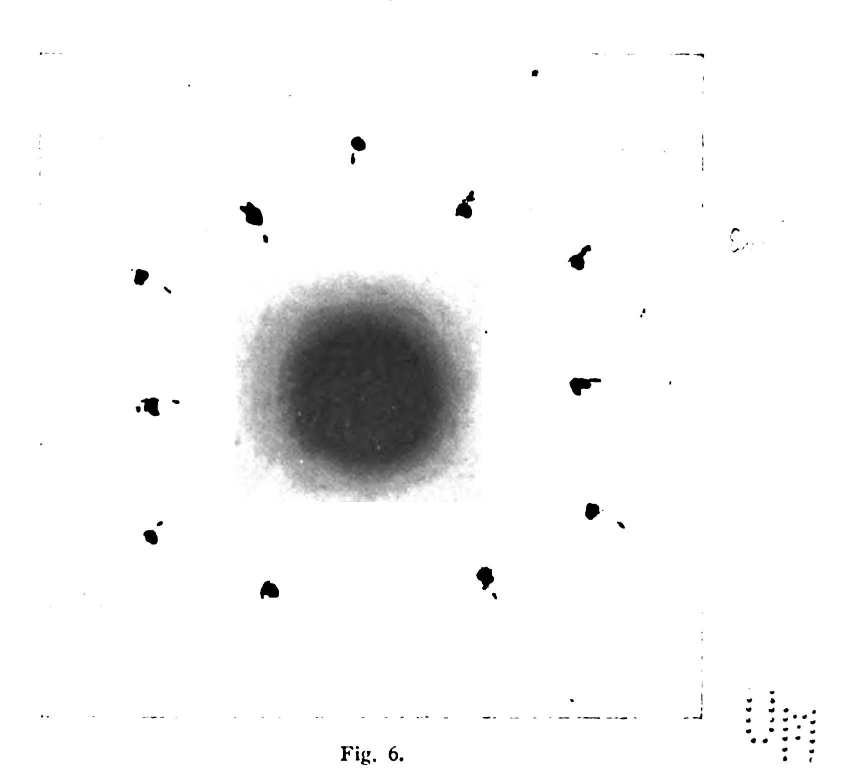


Fig. 6.

P. Debye u. P. Scherrer, Interferenzen an regellos orientierten Teilchen im Röntgenlicht. III.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 14. 15. Juli 1917. Redaktionsschluß für No. 15 am 20. Juli 1917. 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Anmerkungen zur Resonanztheorie des Hörens.

Von A. L. Bernoulli.

Vor einer Reihe von Jahren hat der Verfasser in dieser Zeitschrift[1]) unter dem Titel „Neuere Einwände gegen die Helmholtzsche Theorie des Hörens" physikalische Anschauungen über den Mechanismus des Hörakte entwickelt, welche entsprechend dem Fortschritt der anatomischen und auch der physikalischen Forschung eine moderne Weiterentwicklung der grundlegenden, ewig jungen Ideen von Helmholtz darstellen sollten. Die Zahl der wie Pilze aus dem Boden sprießenden sogenannten „Hörtheorien", die meist mit Physik wenig zu tun haben, um eine weitere zu vermehren habe ich dagegen nicht den Ehrgeiz gehabt.

Trotzdem bot meine Arbeit verschiedenes Neue, vor allem eine physikalisch einwandfreie Möglichkeit den sogenannten „Wienschen Einwand" durch weiteren Ausbau der Helmholtzschen Theorie zu erklären. Max Wien[2]) hat bekanntlich als erster darauf hingewiesen, daß das hohe phonische Auflösungsvermögen des menschlichen Gehörorgans eine so geringe Dämpfung der schwingenden Resonatoren im Labyrinth voraussetzt, wie eine solche mit dem gleichfalls extrem hohen rhythmischen Auflösungsvermögen des musikalisch geschulten Ohres, welches auch die raschesten Läufe auf dem Klavier noch als „perlend" wahrnimmt, ganz unvereinbar ist. Dieser Einwand ist für die Helmholtzsche Theorie ernst genug und eine Modifikation der Theorie, welche dem Wienschen Postulat Genüge leistet, wird zum mindesten so lange für die Physiologie des Hörprozesses von Wert sein, bis etwas unbestritten Besseres da sein sollte, um ihren Platz einzunehmen.

1) Diese Zeitschr. 11, 649—654, 1910.
2) Festschrift für A. Wüllner. Leipzig 1905. S. 28.

Herr E. Budde[1]) ist darüber anderer Ansicht, denn am Schlusse seiner kürzlich in den Berichten der Deutschen Physikalischen Gesellschaft veröffentlichten Arbeit „Zur Resonanztheorie des Hörens" schreibt er über meine Arbeit folgendes: „In meiner ersten Abhandlung habe ich auch einen Vorschlag von A. L. Bernoulli erwähnt, nach welchem dem Wienschen Einwurf durch die Annahme ausgewichen werden soll, es seien im Resonanzapparat des Ohres Paare von gekoppelten Fasern vorhanden und es sei in jedem Paare die eine Faser erheblich stärker gedämpft als die andere. Es liegt hier keine Veranlassung vor auf diesen Gedanken näher einzugehen, erstens, weil der Wiensche Einwurf auch ohnedies erledigt werden kann und zweitens, weil sich im Ohr nichts nachweisen läßt, was als Analogon zu dem von Bernoulli ausgeführten Koppelungsbeispiel gelten könnte."

Man vergleiche mit diesen Angaben, die Herr E. Budde dem Leser über meine Arbeit macht das, was ich tatsächlich geschrieben habe. Die betreffenden Stellen in meiner Arbeit lauten[2]):

1. „Wenn es uns gelingt die Existenz derartiger gekoppelter Systeme, die aus einem ungedämpften und einem stark gedämpften Resonator bestehen, für das Gehörorgan des Menschen durch anatomische Befunde wahrscheinlich zu machen, so läßt sich die Helmholtzsche Theorie trotz der Einwände von M. Wien halten. Es liegt nahe, mit Helmholtz die Fasern der Basilarmembran als ein System von ungedämpften oder schwach gedämpften Reso-

1) Ber. d. Deutsch. Phys. Ges. 19, 22—40, 1917.
2) A. L. Bernoulli, l. c. S. 652.



natoren aufzufassen." Etwas weiter heißt es in meiner Arbeit ferner:

2. „Ich möchte deshalb annehmen, daß wir in dem Cortischen Organ, also in den elastischen Tragbögen der Gitterbrücke, das gesuchte zweite Resonatorensystem vor uns haben. Ferner möchte ich annehmen, daß je zwei homologe Resonatoren, also je eine Saite und ein Tragbogen desselben Querschnittes durch das Cortische Organ den gleichen Eigenton haben. Die Bogen sind als elastische Stäbe an und für sich viel stärker gedämpft als die dünnen flexiblen Saiten der Basilarmembran."

Trotzdem diese Zitate aus meiner Arbeit aus dem Zusammenhang herausgeholt sind, wird auch demjenigen, welcher zufällig weniger genau über die Anatomie des Labyrinthes orientiert sein sollte als Herr Budde[1]), ohne weiteres verständlich sein, daß ich in Anlehnung an die ältere Auffassung von Helmholtz in den Cortischen Bögen ein System von verhältnismäßig stark gedämpften Resonatoren sehe, welches mit jenem homologen, aber schwach gedämpften System der Basilarfasern gekoppelt ist. Ich habe dies in meiner früheren Arbeit wie folgt ausgedrückt:

3. Nach der hier vorgetragenen Hypothese denken wir uns die Dämpfung der Saite hinreichend klein, um das beobachtete phonische Auflösungsvermögen zu erklären. Ist n gleich p, so führt zunächst die Saite mit der Schwingungszahl p freie wenig gedämpfte Schwingungen aus. Infolge der Koppelung geht die Energie schon nach wenigen Schwingungen auf den Cortischen Bogen von gleicher Schwingungszahl über. Dieser letztere Resonator kommt infolge seiner starken Dämpfung sehr rasch zur Ruhe und dadurch auch die mit ihm gekoppelte Saite"[2]).

Ich denke, daß dieses letzte Zitat allein schon deutlich macht, daß das Referat des Herrn Budde, „es seien im Ohre Paare von gekoppelten Fasern vorhanden", den Inhalt meiner Arbeit nicht richtig darstellt. Ob „sich im Ohre nichts nachweisen läßt, was als Analogon zu dem von Bernoulli ausgeführten Koppelungsbeispiel gelten könnte", darf nach meinen oben zitierten Überlegungen am Ende dem Urteil der Leser überlassen bleiben. Dagegen wollen wir näher auf Herrn Buddes Behauptung[3]) eingehen, wonach durch ihn „der Wiensche Einwand auch ohnedies erledigt werden kann".

1) E. Budde, l. c. S. 24 u. ff.
2) A. L. Bernoulli, l. c. S. 652.
3) E. Budde, l. c. S. 39.

Herr Budde nimmt dazu als wesentlich an, daß das „Wasser", welches dem zur Resonanz erregten Resonator unmittelbar anliegt, stärker mitschwingt als das Wasser der benachbarten Elemente; kurz gesagt, die Resonanz ergreift mit größter Wirkung nicht nur die auf sie abgestimmten Schwingungselemente, sondern auch das Wasser in ihrer Nachbarschaft". Er schließt dann weiter, daß mit der maximalen Resonanz des Resonators auch eine maximale Amplitude des Wassers örtlich zusammenfallen müsse. Das kann natürlich sehr wohl, braucht aber nicht der Fall zu sein; dagegen folgt nach Herrn Buddes Angabe daraus weiter, „daß die Grundlage des Einwurfs von Max Wien wenigstens für stationäre Töne hinfällig wird. Wien setzt nämlich in seiner Rechnung voraus, daß auf sämtliche Basilarfasern die gleiche periodische Kraft geübt wird. Das ist aber nach dem Vorstehenden nicht der Fall, vielmehr konzentriert sich der Energiestrom, der von der Scala vestibuli zur Scala tympani geht, auf die Region der maximalen Resonanz, und damit fällt die Grundlage der Wienschen Rechnung"[1]). Rechnen wir einmal die Sache, anstatt nur darüber zu reden, zumal Herr Budde in seiner Arbeit keinerlei Rechnungen mitteilt. Nach M. Wien[2]) ist die Schwingungsamplitude a der erzwungenen Schwingung, welche die Amplitude b der auf die Masseneinheit reduzierten erregenden periodischen Kraft an einem Resonator von der Schwingungszahl p und der Dämpfungskonstanten h hervorbringt, gegeben durch

$$a = \frac{b}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4h^2n^2}}.$$

Dabei bedeute n die Schwingungszahl des einfallenden erregenden Tones, also die Periode der Kraft. Indem wir an Stelle von b vielmehr durch die Beziehung $b = \frac{y}{m}$ die Schwerpunktsmasse m und die wahre Amplitude y der im Schwerpunkt angreifend gedachten periodischen Kraft einführen, können wir auch schreiben

$$a = \frac{y}{m\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4h^2n^2}}.$$

Da nun, wie Herr Budde annimmt, im Fall der Resonanz also für $n = p$, zugleich auch aus irgendeinem Grunde[3]) eine Wasser-

1) E. Budde, l. c. S. 31.
2) Max Wien, Festschrift für A. Wüllner. Leipzig 1905, S. 29.
3) E. Budde schreibt darüber l. c. S. 31: „Die Schwingungen des Labyrinthwassers müssen sich also so anordnen, daß sie sich auf die Resonanzstelle konzentrieren."

masse — wir wollen sie mit M bezeichnen — gerade nur mit diesem Resonator $n=p$ mitschwinge, soll der Wienschen Rechnung die Grundlage entzogen sein. Sehen wir zu, ob dem tatsächlich so ist.

In diesem Falle addiert sich einfach diese Masse M der Flüssigkeit zu derjenigen m des Resonators und die Amplitude a_m der maximalen Resonanz nimmt wegen $n=p$ die Form an

$$a_m = \frac{y}{2hp(m+M)}.$$

Für einen beliebig herausgegriffenen anderen Resonator mit tieferm Eigenton, also $p<n$, wird dagegen merklich nach M. Wien gelten

$$a = a_0 = \frac{y}{p^2 m}.$$

Das relative Amplitudenverhältnis $\frac{a_m}{a_0}$ nimmt somit, wenn wir mit Herrn Budde das Mitschwingen einer Wassermasse M für den Fall $n=p$ willkürlich voraussetzen, den Wert an:

$$\frac{a_m}{a_0} = \frac{p}{2h}\left(\frac{m}{m+M}\right).$$

Sinkt durch die Dämpfung die Intensität nach den Darlegungen von M. Wien[1]) auf $^1/_{10}$ ihres anfänglichen Wertes, so sinkt die Amplitude auf $1/\sqrt{10}$. Da nun

$$e^{-ht} = e^{-\frac{2\pi h}{p}\cdot 10} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

so wird $\frac{p}{2h} = 27,3$. Setzen wir diesen Wert in unsere vorige Gleichung für das Amplitudenverhältnis ein, so wird

$$\frac{a_m}{a_0} = 27,3\cdot\left(\frac{m}{m+M}\right).$$

Für jeden beliebigen Wert den man dieser Wassermasse M etwa beilegt, folgt somit notwendigerweise, daß das Amplitudenverhältnis noch kleiner und damit das Auflösungsvermögen des Gehörorgans noch viel schlechter wird als für den Wienschen Fall, wo $M=0$, denn stets wird der Wert des Klammerausdrucks kleiner als eins sein. Wäre M auch nur gleich groß wie m, so sinkt der Wert der Resonanzschärfe, der ja eben nach Wien sowieso schon viel zu klein ist, auf die Hälfte des von Wien errechneten Wertes. Ist dagegen beispielsweise $\frac{M}{m} = 30$, so sind wir gezwungen aus der Buddeschen Annahme zu schließen, daß für $n=p$ statt des von der Helmholtzschen Theorie geforderten Maximums der Resonanz vielmehr ein relatives Minimum derselben eintritt, indem dann paradoxerweise

$$\frac{a_m}{a_0} = \frac{27,3}{31} = 0,88,$$

also ein Wert der kleiner als die Einheit ist, resultiert.

Wir kommen so zu dem Ergebnis: Der Wiensche Einwand gegen die Helmholtzsche Theorie in ihrer Grundform bleibt somit, wie die hier mitgeteilten Daten zeigen, in vollem Umfang zu Recht bestehen, und es behält daher auch die vom Verfasser vor einigen Jahren gegebene Fortbildung der Helmholtzschen Theorie, welche dem Wienschen Einwand an Hand eines denkbar einfachen physikalichen „Modells" gerecht zu werden suchte, ihre volle Bedeutung bei.

Basel, 16. April 1917. Physikalisch-Chemisches Laboratorium der Universität.

(Eingegangen 10. Mai 1917.)

1) l. c. S. 30.

Zur Resonanztheorie des Hörens.

(Antwort auf die Anmerkungen des Herrn Bernoulli.)

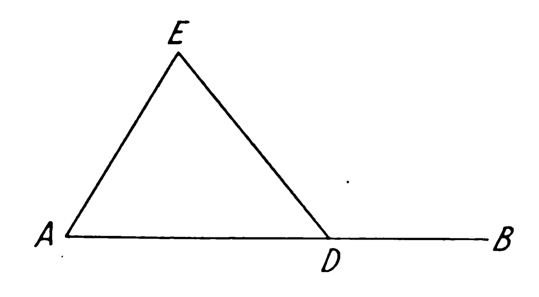
Von E. Budde.

Herr Bernoulli wirft mir vor, ich hätte den Inhalt seiner Arbeit vom Jahre 1910 unrichtig wiedergegeben. Nach seinen eigenen Worten nimmt er im Ohr „die Existenz gekoppelter Systeme an, die aus einem ungedämpften und einem stark gedämpften Resonator bestehen". Der ungedämpfte Resonator ist nach seiner Ansicht eine Saite der Basilarmembran, der gedämpfte das Joch des zugehörigen Cortischen Organs. Er nimmt also tatsächlich Paare von Resonatoren an, die je aus einer Saite und einem Cortischen Tragbogen bestehen. Wenn man nun bedenkt, daß ich in meinen Artikeln in den Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft ausdrücklich angegeben habe, das Wort „Faser" sei im Sinne eines Querelements der Basilarmembran, also eines elastischen, schwingungsfähigen Objektes zu verstehen, so muß ich sagen, ich würde noch heute glauben, den Kern der Bernoullischen Hypothese ganz richtig wiederzugeben, wenn ich sage: „Basilarfaser und Cortischer Pfeiler bilden nach Herrn Bernoulli zusammen ein Paar von gekoppelten Fasern". Mir scheint danach, daß meine erste Angabe nicht unrichtig, sondern nur kurz war.

Ich habe nun weiter behauptet, daß sich im Ohr nichts nachweisen läßt, was als Analogon zu dem von Herrn Bernoulli angeführten Kopplungsbeispiel gelten könnte.

Hierzu ist vorab zu bemerken, daß seine Annahme, elastische Stäbe seien an und für sich viel stärker gedämpft als flexible Saiten, wohl nicht bewiesen ist. Eine stählerne Stimmgabel schwingt ziemlich ebenso lange wie eine stählerne Saite von gleicher Höhe. Die Dämpfung des Stabes ist also von gleicher Ordnung mit derjenigen der Saite. Es kommt danach wesentlich auf das Material an: Selbstverständlich ist eine bleierne Stimmgabel viel stärker gedämpft als eine stählerne Saite, aber eine bleierne Saite ist auch stärker gedämpft als eine stählerne Stimmgabel. Im Ohr aber kennen wir als den Stoff, aus welchem Basilarmembran und Cortisches Organ gebaut sind, nur das „elastische Gewebe" der Anatomen. Über die näheren Eigenschaften der elastischen Fasern, aus welchen Basilarmembran und Cortische Pfeiler aufgebaut sind, wissen wir freilich nichts, aber die Annahme, daß ihre Dämpfungseigenschaften von ganz verschiedener Ordnung seien, ist kaum wahrscheinlich.

Nehmen wir nun aber an, die große Verschiedenheit der Dämpfung sei wirklich vorhanden. Dann ist zu bemerken, daß das mechanische Beispiel, von welchem Herr Bernoulli ausgeht (zwei an einer Schnur befestigte Pendel von gleicher Schwingungszahl), einen Fall von äußerst loser Kopplung darstellt. Demgegenüber — und darin liegt meiner Ansicht nach der Mangel an Analogie — ist die Kopplung, welche nach Annahme des Herrn Bernoulli im Ohr vorausgesetzt werden muß, ungefähr die festeste, die man sich vorstellen kann. Stellt in der nebenstehenden Figur AE den inneren,



ED den äußeren Cortischen Pfeiler, ADB die zugehörige Faser (bzw. System von vier Fasern) der Basilarmembran dar, so ist nach Helmholtz und Hensen ED unelastisch, AE aber jederzeit elastisch gespannt und hat das Bestreben, den Punkt E nach links zu drehen. Die eigentlich elastischen Schwingungsorgane sind also AE und ADB, und dabei sind die Punkte E und D durch eine unelastische, aber offenbar sehr nahe undehnbare Schnur ED verbunden. Das ist so ziemlich die engste Kopplung, die man sich vorstellen kann, und diese liefert ganz andere Schwingungserscheinungen als die beiden gekoppelten Pendel, die an einer Schnur hängen. Stellt man sich einen kleinen analogen Apparat her, in welchem ADB durch ein elastisches Band, AE durch einen elastischen Stab und ED durch einen gewöhnlichen Bindfaden ersetzt ist, so kann man sich leicht überzeugen, daß bei diesem System von einer Parallelerscheinung zu den gekoppelten Pendeln keine Rede ist. Es tritt nicht etwa das ein, daß ADB erst für sich allein schwingt, daß dann die Schwingung auf AE übergeht, hierauf von AE wieder nach ADB zurückgeht usw., vielmehr schwingt das ganze System mit einer gemeinschaftlichen Dämpfungskonstante. Die Annahme ist nicht unwahrscheinlich, die elastische Spannung des inneren Pfeilers AE reiche aus, um während der Bewegung die Schnur ED dauernd gespannt zu erhalten, die Kopplungsbedingungen lassen sich dann ausdrücken durch die einfache Annahme, daß die Verbindungslinie ED konstante Länge hat. Ist dies der Fall, so kann man die Zwangskräfte, welche aus der Kopplung hervorgehen, in gewöhnlicher Weise einführen und kann dann durch eine einfache Rechnung dartun, daß AE und ADB in der Tat isochron und in gleicher Phase schwingen, daß also das ganze System sich verhält wie eine einfache schwingende Saite von mittlerer Dämpfung. Der von mir hervorgehobene Mangel der Analogie liegt also darin, daß das gekoppelte System Basilarfaser plus Cortischer Pfeiler ganz andere Schwingungsverhältnisse ergibt als das Bernoullische Beispiel der beiden lose gekoppelten Pendel. Noch ist darauf hinzuweisen, daß auch die lockerste Kopplung, wenn sie sich in dem Ohrorgan nachweisen ließe, gar keinen Zweck haben würde; denn wenn auch das System $AEDB$ der Figur wirklich so schwänge, wie es Herr Bernoulli voraussetzt, so könnte dadurch doch niemals eine isolierte (oder nahezu isolierte) Schwingung des fraglichen Systems entstehen, weil die Kopfreifen der Hörzellen mit ihren Nachbarn zu beiden Seiten fest verkittet oder verwachsen sind, weil also die einzelne Basilarfaser mit ihren Cortischen Anhängen und sämtlichem Zubehör sich niemals bewegen kann, ohne eine ganze Reihe ihrer Nachbarn rechts und links mitzunehmen.

Außerdem habe ich gegen die Deduktion des Herrn Bernoulli noch weitere Bedenken,

von denen ich nur die beiden wichtigsten hier erwähne:

Erstens: Nimmt man an, daß die beiden Elemente AE und ADB der Figur, wie oben gesagt, eine gemeinschaftliche Schwingung ausführen, so bilden sie zusammen ein Schwingungssystem mit einer mittleren Dämpfungskonstante b_m und einer mittleren Elastizitätskonstante q_m^2. Dann verhält sich das ganze System schwingungstheoretisch wie ein einfacher Punkt, dessen freie Schwingung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 b_m \frac{dx}{dt} + q_m^2 x = 0$$

folgt. Dann ist aber b_m die Dämpfungskonstante, welche durch die bekannten Äußerungen von M. Wien u. A. betroffen wurde; der Wiensche Einwurf bezieht sich eben auf diese Dämpfungskonstante und bleibt demgemäß in voller Kraft bestehen. Nimmt man aber eine andere, losere Art der Koppelung an, so hat man für AE und ADB zwei simultane Differentialgleichungen mit verschiedenen Dämpfungskonstanten, und dann ist es durchaus nicht erlaubt, die Helmholtzsche Gleichung

$$a = \frac{b}{\sqrt{(n^2 - p^2) + 4 n^2 h^2}} \text{ [1]}$$

auf die Amplitude des schwingenden Systems anzuwenden. Vielmehr liegt dann auf der Hand, daß in dieser Schwingungsgleichung zwei verschiedene Dämpfungskonstanten vorkommen müssen. Es sind dann Gleichungen von der Art derjenigen anzuwenden, die M. Wien in Wied. Ann. **61**, 151, 1897 behandelt hat. Diese Abhandlung zeigt, daß die halbfesten Kopplungen zu recht verwickelten Schwingungsverhältnissen Veranlassung geben, und daß die einfache Helmholtzsche Amplitudenformel keine Anwendung finden kann.

Zweitens: Herr Bernoulli sagt in seiner Abhandlung[2]):

„Führt dagegen die Saite Schwingungen von großer Amplitude und fremder Frequenz aus, so kann die Energie nicht auf den Cortischen Bogen übertragen werden, da die Kopplung jene nur dann zum Mitschwingen bringt, wenn die Saite mit der Frequenz ihres gemeinsamen Eigentones erregt wird."

Ob das für das Beispiel der beiden gekoppelten Pendel richtig wäre, mag hier unerörtert bleiben. Für eine Kopplung aber, wie sie zwischen Basilarfaser und Cortischem Pfeiler gegeben ist, trifft es augenscheinlich nicht zu; denn die Basilarfaser kann gar nicht schwingen, ohne den Cortischen Pfeiler mitzunehmen.

1) Diese Zeitschr. **11**, S. 652 der Abhandlung des Herrn Bernoulli.

2) Diese Zeitschr. **11**, erste Spalte auf S. 653.

Herr Bernoulli polemisiert ferner gegen meine Behauptung, daß der Wiensche Einwurf auch ohne Rücksicht auf seine Theorie zu erledigen sei. Diese meine Behauptung stützt sich nicht bloß auf das, was ich in meiner Arbeit von 1917 gesagt habe, sondern wesentlich mit auf die Entwicklungen, die ich in den Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft **18**, 369, 1916 gegeben habe. Indessen, wenn das auch nicht der Fall wäre, wenn es sich bloß um die Erwägungen handelte, die Seite 30 bis 33 meiner Abhandlung von 1917 gegeben sind, so habe ich doch Bedenken gegen die Art des Herrn Bernoulli, mich zu widerlegen. Er betrachtet die bereits oben erwähnte Amplitudenformel immer noch als gültig und nimmt die Masse des mitbewegten Wassers einfach als tote Last in den Nenner der Amplitude. Wenn man aber von meinen Betrachtungen ausgeht, so läßt sich die Schwingung, welche im Ohr durch einen stationären Ton hervorgerufen wird, nicht mehr durch eine gewöhnliche Differentialgleichung darstellen; an deren Stelle tritt vielmehr eine recht verwickelte partielle Differentialgleichung. Ich bin mir ganz wohl bewußt, daß die Theorie keineswegs vollständig ist; auf das Bedürfnis, eine entsprechende neue Theorie zu entwickeln, habe ich ja selbst S. 38 meiner zweiten Abhandlung aufmerksam gemacht. Das aber läßt sich ohne weiteres sagen: Wenn an derjenigen Stelle, wo die Basilarmembran eine maximale Schwingungsamplitude hat, auch das anliegende Wasser (Endo- und Perilymphe) in maximaler Schwingungsbewegung ist, so wirkt nicht auf alle Teile der Basilarmembran die gleiche periodische Kraft, und damit ist dem Wienschen Einwurf eine wesentliche Grundlage entzogen. Alles Nähere kann erst eine künftige genaue Ausarbeitung der Theorie lehren.

(Eingegangen 1. Juni 1917.)

Isothermischer Raum mit Gasheizung.

Von G. Hoffmann.

Der als isothermisch gebaute Raum im Nordflügel des Physikalischen Instituts Königsberg, im Kellergeschoß gelegen, das etwa 1 m in die Erde eingesenkt ist, sollte für die möglichst störungsfreie Aufstellung einer elektrometrischen Anordnung hergerichtet werden. Erfahrungsgemäß war der durch allseitig sehr starkes mit Isolierschichten versehenes Mauer-

werk begrenzte Raum in der warmen Jahreszeit infolge Kondensation meist sehr feucht, im Winter zwar trocken, aber wegen seiner niedrigen Temperatur im ganzen Jahr ein unbehaglicher und ungesunder Aufenthalt. Durch die mit automatischer Regulierung versehene Gasheizung sind die Mißstände beseitigt worden; die Temperatur läßt sich auf einen beliebigen Grad einstellen und die durch die Regulierung bedingte Schwankung der Temperatur wird in den allermeisten Fällen ohne Bedeutung sein wegen ihrer geringen Amplitude (ca. $\pm 0{,}04^{0}$) und kurzen Periode (ca. 12 Minuten); der zeitliche Temperaturverlauf ist aus der mit einem Metallthermometer in der Nähe des Meßinstruments aufgenommenen photographischen Registrierung ersichtlich (Fig. 1).

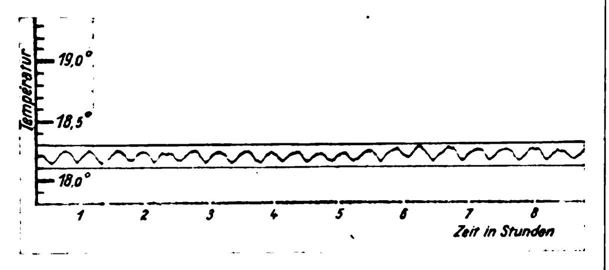


Fig. 1.

Da die verwandten Mittel einfach herzustellen sind und der Erfolg sehr befriedigend ist, sei ein kurzer Bericht gestattet. Der benutzte Ofen ist nach dem Radiatorensystem mit vertikalen Heizrippen und für einen Gasverbrauch von etwa 1 cbm in der Stunde gebaut. Der elektrisch betätigte Gashahn ist in Fig. 2 im

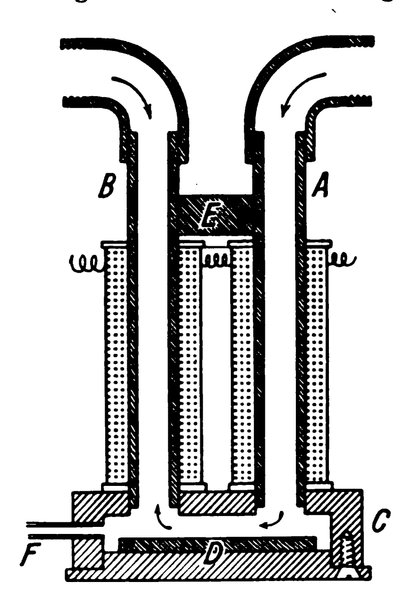


Fig. 2.

Durchschnitt gezeichnet. Die beiden Gasrohre A und B sind in die Messingdose C eingesetzt und dienen als Magnetkerne für die übergesetzten Spulen. Sie sind oben verbunden durch das zwischengeklemmte Eisenstück E und ziehen, wenn vom Strom magnetisiert, die Eisenplatte D an. Diese oben glatt geschliffene rechteckige Platte legt sich dann gegen die gedrehte Fläche der Messingdose und bewirkt einen gasdichten Abschluß. Bei B ist die Zuleitung zum Ofen angeschlossen, außerdem bei F die Zündflamme des Ofens. Damit diese Zündflamme beim Anziehen des Ankers D nicht ganz erlischt, ist in D auf der Seite des Rohres A eine kleine Furche eingefeilt, die eine geringe Gasmenge aus A ständig austreten läßt. Beim Abfallen des Ankers vergrößert sich sofort die Zündflamme und das nun über B strömende Gas wird mit Sicherheit gezündet.

Die elektrische Schaltung ist Ruhestromschaltung nach Fig. 3. Von der 110-Volt-

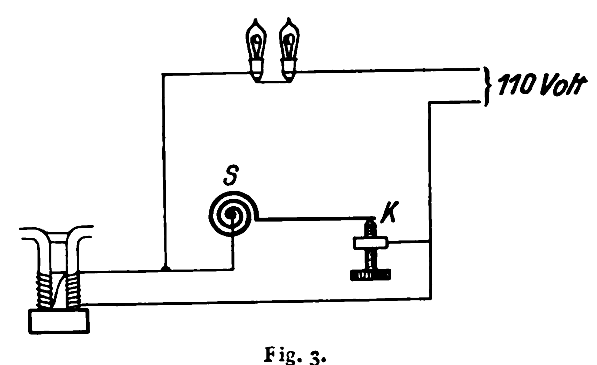


Fig. 3.

Leitung der städtischen Zentrale fließt ein durch zwei hintereinander geschaltete niedrigkerzige 220-Volt-Kohlefadenlampen auf etwa 30 Milliampere reduzierter Strom. Die aus dünnem Eisen und Zinkblech zusammengelötete Metallspirale S besitzt an einem längeren Arm einen Platinkontakt K. Sinkt die Temperatur unter die eingestellte Grenze, so schließt der Kontakt, macht die dünndrähtigen Spulen stromlos und der Ofen wird gezündet. Die angewandte Schaltungsart bewirkt ein völlig funkenfreies Arbeiten des Kontaktes.

Da in der kälteren Jahresperiode eine reine Gasheizung kostspielig ist, ist im Raum außerdem noch ein Heizkörper der Zentral-Warmwasser-Heizung des Instituts angebracht, dessen mittlere Wärmeabgabe so eingestellt ist, daß die Gasheizung nur noch einen Restbetrag nach Bedarf zu liefern hat.

(Eingegangen 22. Juni 1917.)



Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

I.

Das mechanische Grundprinzip.

(Das Prinzip der Individualität als Korrektur des Prinzips von d'Alembert.)

Eine der wesentlichsten Grundlagen meiner mechanischen Vorstellungen über die elektrischen und magnetischen Erscheinungen, auf der sich auch für jeden, der aus irgendwelchen Gründen eine vorgefaßte Meinung gegen mechanische Erklärungen hat, ein sehr anschauliches und nützliches Bild der Erscheinungen aufbauen läßt, ist die Voraussetzung, daß in einem elektromagnetischen Felde mechanische Geschwindigkeiten von der Form:

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,z,t) + \hat{u}(x,y,z,t);\ \hat{u} = u_1(x,y,z,t)\cos\frac{t}{T}2\pi + u_2(x,y,z,t)\sin\frac{t}{T}2\pi,\\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,z,t) + \hat{v}(x,y,z,t);\ \hat{v} = v_1(x,y,z,t)\cos\frac{t}{T}2\pi + v_2(x,y,z,t)\sin\frac{t}{T}2\pi,\\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,z,t) + \hat{w}(x,y,z,t);\ \hat{w} = w_1(x,y,z,t)\cos\frac{t}{T}2\pi + w_2(x,y,z,t)\sin\frac{t}{T}2\pi, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

in einer Materie vorhanden sind, welcher für jedes Raumelement $d\tau$ eine gewisse, gegen die Dichten der gewöhnlichen Materien sehr kleine Dichte $\mu\ (x, y, z, t)$ zuzuordnen ist. T ist dabei eine außerordentlich kleine Zeitdauer, welche auch gegen alle bekannten Schwingungsdauern, z. B. von Lichtschwingungen u. dgl., außerordentlich klein ist. Die Ableitungen der Funktionen

$$\mu;\ u_0, v_0, w_0;\ u_1, v_1, w_1;\ u_2, v_2, w_2$$

nach der Zeit sollen dabei nicht von der Ordnung $\frac{1}{T}$ groß werden[1]).

Eine solche Materie kleiner Dichte soll neben der Materie gewöhnlicher Dichteordnung vorausgesetzt werden.

Das mechanische Grundprinzip, welches sich bisher für alle der klassischen Mechanik angehörigen Bewegungen bewährt hat, ist das Prinzip von d'Alembert:

$$\int \mu \left\{ \frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z \right\} d\tau = 0 \quad (2)$$

für alle dem materiellen System möglichen Verrückungen δx, δy, δz. Das Integral ist dabei über das ganze materielle System zu erstrecken. Es wird hierbei daran gedacht, daß dem System gewisse Beschränkungen auferlegt sind, daß also die Verrückungen δx, δy, δz gewissen Bedingungsgleichungen zu genügen haben, die entweder endliche Gleichungen oder Differentialgleichungen sein mögen.

Einfache Beispiele solcher Beschränkungen sind die Bedingungen der Starrheit, der Inkompressibilität, die Bedingung der Gleichheit der normalen Verrückungen an der Grenze von starren Körpern und Flüssigkeiten, und es gelingt so, mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips allein, die Ableitung der ganzen klassischen Mechanik der starren Körper, der idealen Flüssigkeiten, sowie der aus starren Körpern und idealen Flüssigkeiten gemischten Systeme.

Es ist ein Bestreben der neueren Mechanik, ohne die „Kräfte" X, Y, Z auszukommen, welche in der üblichen Form

$$\int \mu \left\{ \frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z \right\} d\tau = \int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau$$

des d'Alembertschen Prinzips vorkommen; das Postulat einer solchen „kräftelosen" Mechanik ist besonders eindringlich in der Hertzschen Mechanik zum Ausdruck gekommen; ich darf an dieser Stelle daran erinnern, daß diese Idee bereits vor dem Erscheinen der Hertzschen Mechanik in der ersten Auflage meiner „Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik" allgemein ausgesprochen wurde[1]). Die z. B. scheinbar auf einen starren Körper in einer Flüssigkeit wirkenden Kräfte, in dem Falle, in welchem die Flüssigkeit unseren Sinneswahrnehmungen selbst nicht zugänglich ist, sind nur als die Folge der „verborgenen" Flüssigkeitsbewegungen aufzufassen.

Es tut hier nichts zur Sache, in welche mathematische Form man im übrigen das d'Alembertsche Prinzip kleidet; beiläufig sei bemerkt, daß sich bereits in der klassischen Mechanik nur solche Modifikationen des Grundprinzips bewährt haben, welche wirklich mathematisch streng aus dem d'Alembertschen

1) Es ist von Anfang an für eine Übersicht der Theorie nützlich, zu bemerken, daß u_1, v_1, w_1, abgesehen von einer multiplikativen Konstanten, den Maxwell-Hertzschen X, Y, Z in einer gewissen Annäherung entsprechen werden, ebenso u_2, v_2, w_2, den Maxwell-Hertzschen L, M, N; u_0, v_0, w_0 werden wir gelegentlich als sichtbare Geschwindigkeitskomponenten bezeichnen, obwohl die Bezeichnung nicht in jedem Falle wörtlich zutreffend ist.

1) 1. Aufl. 1892/94; 2. Aufl. 1896/98. Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin.

Prinzip abgeleitet werden können; das sogenannte Prinzip von Hamilton muß bereits mit gewissen Vorsichtsmaßregeln angewandt werden; die kühnen Verallgemeinerungen dieses Prinzips, denen man in neuerer Zeit, im besonderen in der statistischen Mechanik, begegnet, sind daher auch stets mit einer gewissen Vorsicht zu gebrauchen.

Wenn man die klassische Mechanik erweitern will, so kann dies in zwei Richtungen geschehen:

1. Man kann sich neue Beschränkungen ausdenken, welche einem materiellen System auferlegt werden können. Eine Ermunterung auf diesem Wege liegt in der Überlegung, daß die in der klassischen Mechanik auftretenden Voraussetzungen eines idealen, starren Körpers und einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeit nur erste Annäherungen an reale Dinge sein können und man danach streben muß, zweite und höhere Annäherungen zu erreichen.

2. Man kann das d'Alembertsche Prinzip selbst nur als ein angenähertes Gesetz ansehen, das ohne eine Korrektur nicht ausreicht, wenn mit sehr großen Geschwindigkeiten oder sehr raschen Schwingungen (Schwingungen mit sehr kleiner Schwingungsdauer) zu rechnen ist.

Als strenge mechanische Theorien werden nur solche anerkannt werden, bei denen zunächst die neuen Beschränkungen und die neuen Korrekturen in strenger, unzweideutiger Weise formuliert werden, welche die klassische Mechanik zur ersten Annäherung haben, und deren Folgerungen keinerlei Widersprüche gegen bekannte Erfahrungstatsachen aufweisen.

Ebenso wie die erste Annäherung, die klassische Mechanik, nur auf dem Wege der Induktion gewonnen werden konnte, so können auch etwaige Erweiterungen nur auf dem Wege der Induktion als nützlich und verwendungsfähig erkannt werden. Gewichtige Gründe müssen für solche Neuerungen vorliegen. Solche Gründe treten besonders zwingend hervor, wenn man versucht, mechanische Theorien für die scheinbaren Kraftzentren aufzustellen, welche aufeinander umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung einwirken, wie dies z. B. für gravitierende Teilchen nach dem Newtonschen Gesetze und für elektrische Teilchen nach dem Coulombschen Gesetze der Fall ist. Eine mechanische Erklärung solcher scheinbarer Kraftwirkungen scheint auf keinem anderen Wege möglich zu sein, als im Anschlusse an die zum ersten Male von C. A. Bjerknes über die Wechselwirkung pulsierender Kugeln in einer Flüssigkeit angestellten Untersuchungen. Zwei pulsierende, d. h. periodisch ihr Volumen wechselnde Kugeln wirken in einer inkompressibeln Flüssigkeit aufeinander mit scheinbaren Kräften ein, welche dem Quadrat ihrer Zentraldistanz in erster Annäherung umgekehrt proportional sind; die Kräfte sind anziehend, wenn die Phasen der Pulsationen gleich sind, d. h. wenn die Maxima des einen Kugelvolumens zu gleicher Zeit eintreten, wie die Maxima des anderen Kugelvolumens, und analog die Volumenminima; die Kräfte sind abstoßend, wenn die Phasen entgegengesetzt sind, d. h. wenn das Maximum des einen Kugelvolumens eintritt, sobald das andere sein Minimum hat, und umgekehrt. Diese Erkenntnis ließ sich zu einer Theorie der Gravitation verwenden (meine hierauf bezügliche Theorie der „Universellen Schwingungen" wird in einer späteren Abhandlung dieser Serie auseinandergesetzt werden), aber für die Annahme, daß auch die elektrischen Teilchen, ebenso wie die gravitierenden Teilchen, als kleine pulsierende Kugeln betrachtet werden können, ergab sich eine erhebliche Vorzeichenschwierigkeit. Das Elektron als pulsierendes Teilchen muß andere Eigenschaften haben, als das gravitierende Teilchen. Wie hat man sich diesen spezifischen Unterschied zu denken?

Die wesentliche Forderung ist zunächst nur die Umkehrung des Vorzeichens der Kräfte der Wechselwirkung; wenn wir nun aber auf dem Wege (1) oder (2) vorwärts kommen wollen, ist die größte Vorsicht geboten; man darf sich nicht lediglich mit Rücksicht auf den besonderen Zweck zu ganz neuen Voraussetzungen über die mechanischen Eigenschaften des Elektrons verleiten lassen, die für andere Verwendungen zu neuen erheblichen Schwierigkeiten führen könnten. Es wird ferner wünschenswert sein, daß die neuen Annahmen noch in anderer Weise gestützt werden, als durch die Erreichung des zunächst angedeuteten Zieles, damit die Induktion eine bessere und der Vorwurf der Willkürlichkeit entkräftet wird.

In meinen hierauf gerichteten Bestrebungen hat sich von weittragendster Bedeutung die Entdeckung herausgestellt, daß die Umkehrung des Vorzeichens der Wechselwirkungskräfte zweier pulsierender Teilchen dadurch erreicht werden kann, daß den Teilchen die Konstanz der Pulsationsamplituden als strenge Bedingung vorgeschrieben wird. Wird diese Bedingung nicht vorgeschrieben, wie es bei den Bjerknesschen Untersuchungen der Fall ist, — und gleichfalls in meiner Theorie der Gravitation und der universellen Schwingungen —, so verändert sich die Pulsationsamplitude bei einer Annäherung oder Entfernung der Kugeln von selbst; die Veränderungen sind zwar von der Ordnung Kugelradien/Zentraldistanz klein, sie genügen aber, um das Wechselwirkungsresultat

in das inverse zu verwandeln. Wird dagegen von vornherein die strenge Bedingung vorgeschrieben, daß die Pulsationsamplituden bei irgendeiner Annäherung oder Entfernung der Kugeln unverändert bleiben sollen, so ergibt sich für die Wechselwirkungskräfte das umgekehrte Vorzeichen, wie in dem Bjerknesschen Falle. Für die mechanische Theorie der elektrischen Erscheinungen bedeutet die neue Annahme der Konstanz der Pulsationsamplituden nichts anderes, als die Annahme, daß für jedes Elektron, welches als pulsierendes Teilchen anzusehen ist, das, was man gewöhnlich als die elektrische Masse des Elektrons bezeichnet, konstant ist. In der gewöhnlichen Elektronentheorie, die sich nicht um mechanische Erklärungen kümmert, macht man von einer solchen stillschweigenden Annahme nicht viel Aufhebens, wenn wir aber zu mechanischen Erklärungen übergehen, stellt sich eine solche Annahme als der Beginn von Überlegungen weittragendster Art heraus.

Daß es materielle Gebilde gibt, welche ihre ihnen einmal inhärente Schwingungsenergie, z. B. in der Form von Pulsationsenergie, nicht abgeben und auch keine solche Schwingungsenergie aufnehmen, in einer ersten Annäherung, ähnlich, wie wir in der Hydrodynamik in erster Annäherung die Inkompressibilität der Flüssigkeiten voraussetzen, das ist zweifellos eine ganz neuartige, der bisherigen Mechanik fremde Voraussetzung, sie wird aber induktiv vorzüglich dadurch gestützt, daß sich die Voraussetzung der Konstanz der früher sogenannten Elektronenmasse bewährt hat. Es wird sich nur darum handeln, die betreffende Voraussetzung exakt zu formulieren, und zwar sogleich möglichst allgemein. Es hat sich herausgestellt, daß auch alle anderen Schwierigkeiten, welche sich bisher der mechanischen Auffassung der elektromagnetischen Erscheinungen entgegengestellt haben, mit einem Schlage in ähnlicher Weise heben lassen, indem man den Elektronen die Fähigkeit, sich gegen die Änderungen ihrer Schwingungsenergien zu verteidigen, zuschreibt, wie man in der klassischen Hydrodynamik der Flüssigkeit die Fähigkeit zuschreibt, sich gegen die Änderung ihrer Dichte zu verteidigen.

Ich will nun dieses Prinzip tatsächlich in einer sehr allgemeinen Weise formulieren; es ist diese Formulierung hier in der Richtung (2) — Korrektur des d'Alembertschen Prinzips, welche für die in der klassischen Mechanik betrachteten Bewegungen unmerklich ist — geschehen, und die weitere Darlegung der Theorien wird zeigen, wie tatsächlich durch diese Korrektur, in überraschender Weise, alle Schwierigkeiten schwinden, welche sich der mechanischen Deutung des elektromagnetischen Feldes bisher entgegengestellt haben.

Sei $\overline{d\tau}$ ein Raumelement der Materie, welches den Elektronen zugehört, bzw. irgendein Elektron, wenn wir das Element $\overline{d\tau}$ zunächst nicht als unendlich klein annehmen und erst dann zu unendlich kleinen Größen übergehen, wenn wir eine erste Annäherung erzielen wollen. (x, y, z) sei irgendein Punkt in dem Raumelement $\overline{d\tau}$, Ω die Oberfläche desselben, $d\omega$ an der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ irgendein Element der Oberfläche Ω mit der inneren Normalen ν, dann wollen wir an Stelle der Gleichung (2) die folgende zugrunde legen:

$$\left.\begin{aligned}\sum\Big[&\delta x\Big\{\mu(x,y,z,t)\frac{du(x,y,z,t)}{dt}\overline{d\tau}+2\int_{\Omega}\mu(\xi,\eta,\zeta,t)\{u(\xi,\eta,\zeta,t)-u_0(x,y,z,t)\}\hat{u}_\nu\, d\omega\Big\}\\ &+\delta y\Big\{\mu(x,y,z,t)\frac{dv(x,y,z,t)}{dt}\overline{d\tau}+2\int_{\Omega}\mu(\xi,\eta,\zeta,t)\{v(\xi,\eta,\zeta,t)-v_0(x,y,z,t)\}\hat{u}_\nu\, d\omega\Big\}\\ &+\delta z\Big\{\mu(x,y,z,t)\frac{dw(x,y,z,t)}{dt}\overline{d\tau}+2\int_{\Omega}\mu(\xi,\eta,\zeta,t)\{w(\xi,\eta\zeta,t)-w_0(x,y,z,t)\}\hat{u}_\nu\, d\omega\Big\}\Big]=0,\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

wobei

$$\hat{u}_\nu=\hat{u}(\xi,\eta,\zeta,t)\cos(\nu x)+\hat{v}(\xi,\eta,\zeta,t)\cos(\nu y)+\hat{w}(\xi,\eta,\zeta,t)\cos(\nu z)\quad(4)$$

gesetzt ist.

Für Elemente $\overline{d\tau}$ der gewöhnlichen Materie ist das Oberflächenintegral fortzulassen.

Damit ist, auch wenn man keinerlei weitere Bemerkungen daran knüpfen will, welche auf eine Veranschaulichung des Prinzips hinzielen, zweifellos ein mathematisches Grundgesetz gegeben, das für die gewöhnliche Mechanik, wenn

$$\hat{u}=\hat{v}=\hat{w}=0,$$

mit dem d'Alembertschen Prinzip zusammenfällt. Die Folgerungen aus der Korrektur werden ihre Berechtigung zeigen.

Wir wollen aber doch, um das Prinzip der Anschauung näher zu bringen, drei zunächst für eine strenge mathematische Begründung nicht erforderliche, aber intuitiv wichtige Bemerkungen an die Aufstellung dieses Grundprinzips knüpfen:

1. Es ist möglich, unter strenger Beibe-

haltung des d'Alembertschen Prinzips, das Grundprinzip durch die Hinzunahme der Bedingungsgleichung

$$\Sigma[\delta x \int_\Omega \mu(\xi,\eta,\zeta,t) \{u(\xi,\eta,\zeta,t) - u_0(x,y,z,t)\} \hat{u}_\nu d\omega$$
$$+ \delta y \int_\Omega \mu(\xi,\eta,\zeta,t) \{v(\xi,\eta,\zeta,t) - v_0(x,y,z,t)\} \hat{u}_\nu d\omega$$
$$+ \delta z \int_\Omega \mu(\xi,\eta,\zeta,t) \{w(\xi,\eta,\zeta,t) - w_0(x,y,z,t)\} \hat{u}_\nu d\omega] = 0 \quad (5)$$

zu modifizieren, wobei die Summe über alle von Elektronen erfüllten Räume zu erstrecken ist. Diese Bedingungsgleichung wäre mit einem Multiplikator in dem d'Alembertschen Prinzip einzuführen, dessen Wort sich von selbst $= 2$ bestimmen wird.

2. Man kann an eine totale Reflexion der Größen

$$\mu(\xi,\eta,\zeta,t) \{u(\xi,\eta,\zeta,t) - u_0(x,y,z,t)\},$$
$$\mu(\xi,\eta,\zeta,t) \{v(\xi,\eta,\zeta,t) - v_0(x,y,z,t)\},$$
$$\mu(\xi,\eta,\zeta,t) \{w(\xi,\eta,\zeta,t) - w_0(x,y,z,t)\}$$

an den Oberflächen Ω denken; die totale Reflexion gilt aber nur für Schwingungen mit außerordentlich kleiner Schwingungsdauer T, indem jedes $\hat{u}_\nu$ in $(-\hat{u}_\nu)$ verwandelt wird. Die Beschränkung auf die Schwingungen von der sehr kleinen Schwingungsdauer T kann in Erstaunen setzen; dies leitet über zu der Bemerkung

3. Die die normalen Schwingungsgeschwindigkeiten $\hat{u}_\nu$ an den Oberflächen Ω enthaltenden Glieder stellen nur eine erste Korrektur in dem Falle von Schwingungen sehr kleiner Schwingungsdauer dar. Einer einheitlichen Auffassung wegen wird man natürlich anzunehmen haben, daß solche Zusatzglieder auch vorhanden sein müssen, wenn es sich um Schwingungen größerer Schwingungsdauer handelt, nur sollen dann die Zusatzglieder weniger merklich, bei Bewegungen, wie sie in der klassischen Mechanik betrachtet werden, ganz unmerklich werden. Dieser Auffassung kann man z. B. dadurch gerecht werden, daß man die Zerlegung in sichtbare und Schwingungs-Geschwindigkeiten in der Form festsetzt:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= u - \hat{u} = \alpha \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau, \\ v_0 &= v - \hat{v} = \alpha \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau, \\ w_0 &= w - \hat{w} = \alpha \int_{-\infty}^{t} w(\tau)\, e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

wo α eine sehr große, αT aber eine sehr kleine Konstante ist. Eine Zerlegung von dieser Form, welche wir nur als Beispiel anführen, da es noch andere Möglichkeiten gibt, läßt auch noch die Freiheit, α von den Dimensionen der Elemente abhängig zu denken, deren Oberflächen Verteidigungsflächen gegen die Veränderungen der den Elementen inhärenten Schwingungsenergien darstellen. So kann man die Elektronen z. B. viel kleiner annehmen, als die gravitierenden Teilchen, und hieraus eine Ursache konstruieren, weshalb die Korrekturglieder bei Schwingungen von einer sehr kleinen Schwingungsdauer T für Elektronen in Betracht kommen und nicht für gravitierende Teilchen.

Diese drei Bemerkungen erheben keinen Anspruch auf mathematische Schärfe, sie können indessen dazu dienen, unsere Korrektur des d'Alembertschen Prinzips der Anschauung näher zu bringen. Ich habe dieselbe das Prinzip der Individualität genannt, weil die Korrektur die Individualität der inhärenten Schwingungen gegenüber dem mechanischen Zwange zum Ausdruck bringt.

(Eingegangen 13. Juni 1917.)

Über das Sättigungspotential von Zylinderkondensatoren.

Von R. Seeliger.

Die Veranlassung zur Durchführung der im folgenden mitgeteilten Rechnungen gaben mir ursprünglich einige Fragen, die gelegentlich der Vorarbeiten zu einer luftelektrischen Untersuchung auftauchten. Es handelte sich dabei um folgendes Problem: Gegeben ist ein Zylinderkondensator von bestimmten geometrischen Abmessungen, in welchem sich ein ionisiertes Gas von bekannten ionenphysikalischen Eigenschaften befindet; es ist quantitativ anzugeben, welche Potentialdifferenz zwischen dem inneren und dem äußeren Zylinder des Kondensators anzulegen ist, damit der im Kondensator fließende Ionenstrom einen bestimmten in Prozenten des Sättigungsstromes vorgegebenen Wert hat.

Die praktische Bedeutung dieser Frage ist ohne weiteres ersichtlich für alle Anwendungen von Zylinderkondensatoren zur Messung von Ionisierungsstärken. Da man nun in vielen Fällen, namentlich zur Bestimmung schwacher Ionisationen, wegen des günstigen Verhältnisses von Kapazität zu Volumen mit Vorteil Zylinderkondensatoren verwendet, dürfte die Mitteilung einer allgemeinen für die numerische Rechnung geeigneten Formel und einer graphischen Darstellung der Resultate für den luftgefüllten Kondensator — wie ich sie nach eigenen Erfahrungen schon mehrfach in der Literatur vermißt habe — zum Gebrauch in der Praxis erwünscht sein; dazu kommt ein gewisses mathematisches Interesse, welches dem behandelten Problem manchen Reiz abgewinnen läßt.

1. Ich schließe mich in folgendem an eine Untersuchung[1]) über die Ionenleitung in dichten Gasen an, die ich vor längerer Zeit für das analoge Problem des Plattenkondensators im einzelnen durchgeführt und damals bereits für den Zylinderkondensator kurz skizziert habe und möchte zunächst die für den vorliegenden Zweck notwendigen Entwicklungen kurz wiederholen; wegen mathematischer Einzelheiten (Konvergenzfragen usw.) sei auf die zitierte Arbeit verwiesen.

Bezeichnet man mit n_+ und n_- die Raumdichte der positiven und negativen Ionen, mit e deren Ladung, mit E die elektrische Feldstärke, mit q die Ionisierung (d. h. die pro Zeit und Volumeinheit gebildete Anzahl von Ionenpaaren), mit i und J den Strom und den Sättigungsstrom und endlich mit α, u_+, u_- in der üblichen Weise die Ionenkonstanten (Rekombinationskoeffizient und Beweglichkeiten), so lauten in rationellen Einheiten geschrieben die Grundgleichungen für die Ionenleitung im Plattenkondensator bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= (n_- - n_+)\,e \\ i &= (n_- u_- + n_+ u_+)\,e \cdot E \\ q - \alpha n_+ n_- &= \frac{d}{dx}(n_- u_- E) = -\frac{d}{dx}(n_+ u_+ E) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Diffusion der Ionen ist dabei vernachlässigt, wie dies im Gebiet der im folgenden allein in Betracht kommenden nahezu gesättigten Ströme sicher ohne Gefährdung der Resultate erlaubt ist. Führt man zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein

$$u = u_+ + u_-\,; \quad k = \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-}\,; \quad \mu = \frac{2e}{\alpha}\,\frac{u_+ \cdot u_-}{u_+ + u_-} \qquad (2)$$

so lassen sich die Gleichungen (1) in besonders einfacher Form schreiben durch die Substitutionen:

$$\xi = \frac{q u^2 e^2}{\alpha i^2} E^2\,; \quad \eta = \frac{u}{i} E \frac{dE}{dx}\,, \qquad (3)$$

nämlich in Form der beiden simultanen Gleichungen erster Ordnung

$$\mu \cdot \eta \cdot \frac{d\eta}{d\xi} - 1 + \frac{1}{\xi}\left(1 + x\eta - \frac{1}{4}(1 - x^2)\,\eta^2\right) = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{dx}{l} = \frac{d\xi}{\eta} \cdot \frac{1 - x^2}{4\mu} \cdot \frac{i}{J} \qquad \text{(b)} \qquad (4)$$

worin l der Abstand der Kondensatorplatten ist. Die Gleichung (4a) läßt sich nun für das Gebiet nahezu gesättigter Ströme integrieren durch eine Reihe der folgenden Form

$$\xi = a_1 + \Sigma a_x\, \eta^x\,, \qquad (5)$$

worin die Koeffizienten a in relativ einfacher Weise durch die Konstanten der Differentialgleichungen und durch das Verhältnis i/J ausgedrückt werden können; die Reihe konvergiert sehr rasch, wenn i/J nahe an 1 liegt. Für unsere Zwecke genügt es, die ersten beiden Glieder der Reihe allein zu berücksichtigen, was darauf hinauskommt nur die ersten Potenzen von $(1 - i/J)$ noch mitzunehmen. Bezeichnen wir für das folgende J/i mit ε und führen den Parameter ξ_m ein durch

$$\frac{\xi_m}{\xi_m - 1} = \varepsilon\,, \qquad (6)$$

so schreibt sich die Lösung (5) unter Einsetzung der Konstantenwerte und bei den eben erwähnten Vernachlässigungen höherer Glieder:

$$\xi = \xi_m + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\xi_m}{\xi_m - 1} \cdot \eta^2\,. \qquad (7)$$

Dieser Wert ist nun in Gleichung (4b) einzusetzen und unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen an den Platten zu integrieren. Die Grenzbedingungen folgen direkt aus den Grundgleichungen und aus den Substitutionsgleichungen (3) und lauten:

$$\left.\begin{aligned} &\text{an der Kathode } (x = 0) \quad \eta = -\frac{u}{u_+} \\ &\text{an der Anode } (x = l) \quad \eta = \frac{u}{u_-} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Führt man die elementaren Zwischenrechnungen aus, so erhält man für die Feldstärke als Funktion von x:

$$E = \frac{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{q}}{u} \cdot \frac{l}{\varepsilon} \left\{ \left(\frac{x}{l} - \frac{u_-}{u}\right)^2 \frac{8\mu\varepsilon}{(1 - x^2)^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right\}^{1/2} \qquad (9)$$

und hieraus direkt durch eine Quadratur die Potentialdifferenz, welche also ε als Parameter enthält.

2. Es handelt sich nun darum, diese Überlegungen auf den Zylinderkondensator zu übertragen; dies wird ermöglicht durch die folgende günstige Eigenschaft der Grundgleichungen (1). Im allgemeinen Fall eines Kondensators mit axialer oder polarer Symmetrie schreiben sich diese nämlich in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} E &= (n_- - n_+)\,e \\ j &= (n_- u_- + n_+ u_+)\,e \cdot E \\ q - \alpha n_+ n_- &= \operatorname{div}(n_- u_- E) = -\operatorname{div}(n_+ u_+ E) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Führen wir für unseren Fall Zylinderkoordinaten ein, so nehmen die Gleichungen (10) formal genau die Form (1) an durch die Substitutionen:

$$\mathsf{E} = rE \quad dx = r\,dr \quad \mathsf{i} = rj\,, \qquad (11)$$

so daß wir also die in Abschnitt 1 dargestellte weitere Behandlung der Grundgleichungen direkt übernehmen können. Wir erhalten dann schließlich eine der Beziehung (9) ganz analoge, welche E als Funktion von

---

[1]) R. Seeliger, Ann. d. Phys. **33**, 319, 1910.

$$x = \frac{1}{2}(r^2 - r_0^2)$$

gibt. Diese Übertragung können wir Schritt für Schritt vornehmen, da auch die Grenzbedingungen (8) in den neuen Variabeln ungeändert gelten; nur hinsichtlich der Gleichung (4b) ist eine kurze Überlegung nötig, um den dem Plattenabstand l nunmehr entsprechenden Ausdruck richtig anzugeben. Es sei der Radius des inneren Zylinders r_0, der des äußeren R; denken wir uns nun einen Keil aus dem Zylinderkondensator ausgeschnitten, welcher sich auf den inneren Zylinder mit der Fläche 1 stützt, so ist der Sättigungsstrom in diesem Keil:

$$I = q \cdot e \cdot \frac{R^2 - r_0^2}{2 r_0}.$$

Andererseits ist der Strömungszustand experimentell offenbar charakterisiert durch das Verhältnis dieses Sättigungsstroms zu dem im Keil tatsächlich fließenden Strom; dieser aber ist nicht gegeben durch das in die Gleichungen (10) eingehende j, sondern durch den Wert j_0 dieses (räumlich variablen) j für $r = r_0$. Da nun $j = j \cdot r$ räumlich konstant ist, so ist

$$\frac{i}{I} = \frac{j \cdot r}{I} = \frac{j_0}{I} \cdot r_0 = \frac{r_0}{\varepsilon}, \tag{12}$$

wenn wir wieder mit ε den experimentell eine Rolle spielenden Stromparameter bezeichnen. Die Gleichung (4b) schreibt sich nun in der Form

$$\frac{dx}{\left(\frac{R^2 - r_0^2}{2 r_0}\right)} = \frac{d\xi}{\eta} \cdot \frac{1 - x^2}{4\mu} \cdot \frac{r_0}{\varepsilon}, \tag{13}$$

welche formal genau mit Gleichung (4b) übereinstimmt, wenn wir dort l ersetzen durch $\frac{R^2 - r_0^2}{2}$. Wir erhalten also die folgende Regel: Setzen wir

$$r \cdot E = \mathsf{E}; \quad \frac{1}{2}(r^2 - r_0^2) = x; \quad \frac{R^2 - r_0^2}{2} = l \tag{14}$$

und bezeichnen mit ε das beobachtete Verhältnis des Stromes zum Sättigungsstrom, so gelten für die Größen E, ε, x und die Konstante l genau dieselben Beziehungen, wie für den Plattenkondensator. Wir erhalten also direkt aus Gleichung (9) den räumlichen Verlauf der Feldstärke in der Form:

$$E = \frac{\sqrt{a}\sqrt{q}}{u} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{R^2 - r_0^2}{2r}$$
$$\left\{\left(\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r_0^2} - \frac{u_-}{u}\right)^2 \frac{8\mu\varepsilon}{(1 - x^2)^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\right\}^{1/2} \tag{15}$$

3. Die zum Stromparameter ε gehörende Potentialdifferenz erhalten wir nun aus (15) durch direkte Quadratur, in dem wir die rechte Seite von R bis r_0 integrieren. Man vereinfacht die Ausführung der Integration durch eine passende Reihenentwicklung deren Berechtigung sich sofort aus einer Abschätzung der einzelnen Glieder in der geschweiften Klammer ergibt. Zunächst ist im Integrationsbereich R bis r_0 der Wert des Ausdrucks in der runden Klammer

$$0 \leq \left(\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r_0^2} - \frac{u_-}{u}\right)^2 \leq \left(\frac{u_-}{u}\right)^2 < 1$$

der Wert des konstanten Faktors $\frac{8\mu}{1 - x^2}$ ist der folgende für einige Gase:

Wasserstoff	Luft	Sauerstoff	Kohlensäure
72	14	13,8	6,7

Demgegenüber ist $\frac{1}{\varepsilon - 1}$ für nahezu gesättigte Ströme groß; so hat es zum Beispiel für $i = 0{,}98\,J$ den Wert 50 für $i = 0{,}99\,J$ den Wert 100. Mit Ausnahme von Wasserstoff werden wir also in der betrachteten Nähe des Sättigungsstroms unbedenklich nach Potenzen von $(\varepsilon - 1)$ entwickeln und entsprechend der oben eingeführten Näherung sogar mit dem ersten Glied abbrechen können; eine weitere Näherung ließe sich natürlich ohne jede prinzipielle Schwierigkeit für die Quadratur gewinnen. Führen wir nun die Reihenentwicklung aus, indem wir $\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}$ vor die Klammer nehmen und integrieren wir den erhaltenen Ausdruck gliedweise zwischen R und r_0, so ergibt sich der gesuchte Wert für die Potentialdifferenz in der folgenden übersichtlichen Form:

$$V = \frac{\sqrt{a}\sqrt{q}}{2u} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon - 1}} r_0^2 \left(\frac{R^2}{r_0^2} - 1\right) \left\{ \left[1 + A\left(\frac{1}{\frac{R^2}{r_0^2} - 1} + \frac{u_-}{u}\right)^2\right] \ln \frac{R}{r_0} - A\left(\frac{1}{\frac{R^2}{r_0^2} - 1} + \frac{u_-}{u}\right) + \frac{A}{4} \frac{\frac{R^2}{r_0^2} + 1}{\frac{R^2}{r_0^2} - 1} \right\} \tag{16}$$

worin zur Abkürzung

$$A = \frac{4\mu}{(1 - x^2)^2}(\varepsilon - 1)$$

gesetzt ist. Es ist nun noch ein Punkt zu beachten, der unter Umständen eine Rolle spielen kann. Wie nämlich aus Gleichung (15) für den Feldverlauf hervorgeht, nimmt E zu mit abnehmendem r. Es ist deshalb möglich, daß für sehr kleine r, d. h. also für Kondensatoren mit sehr dünner Innenelektrode, E groß genug wird, um in deren Umgebung eine selbständige Entladung einzuleiten. Ist dies der Fall, so werden in dem fraglichen Gebiet des Kondensatorraumes neue Ionen nicht nur gebildet durch die äußere bisher als allein wirkend angenommene konstante Ionisierung, sondern auch durch Stoßionisation, und zwar in beträchtlichen und von der Feldstärke abhängenden Mengen. Unsere Formel (16) wird also ungültig werden, da die ihrer zugrunde liegenden Voraussetzungen nicht mehr erfüllt sind. Die weitere Verfolgung dieser Verhältnisse führt nun zu ganz interessanten Ergebnissen; so findet man z. B., daß für einen Kondensator von bestimmten Dimensionen der Grad der Annäherung an den Sättigungsstrom theoretisch begrenzt ist (eben durch das Eintreten der selbständigen Entladung), ferner daß diese umso früher eintritt je tiefer der Druck ist, ein Ergebnis, das übrigens experimentell längst bekannt und z. B. von Langevin verwertet ist. Für uns kommt hier in Betracht, daß für die gewöhnlich gewählten Verhältnisse (Atmosphärendruck, r_0 bis herab zu 0,1 mm) praktisch die genannten Fragen keine Rolle spielen. Man überzeugt sich leicht davon durch direkte Ausrechnung der maximalen Feldstärke nach Gleichung (15).

4. Führen wir in Gleichung (16) die numerischen Werte für die Konstanten ein und drücken die anzulegende Potentialdifferenz aus in Volt, so erhalten wir für trockene Luft vom Atmosphärendruck, die für die Anwendungen in erster Linie in Betracht kommen dürfte:

$$V = 0{,}17 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon - 1}} r_0^2 \left(\frac{R^2}{r_0^2} - 1\right) \left\{ \left[1 + 7{,}426(\varepsilon - 1) \left(\frac{1}{\frac{R^2}{r_0^2} - 1} + 0{,}574 \right)^2 \right] \ln \frac{R}{r_0} \right.$$
$$\left. - 7{,}426(\varepsilon - 1) \cdot \left(\frac{1}{\frac{R^2}{r_0^2} - 1} + 0{,}574 \right) + 1{,}857 \cdot (\varepsilon - 1) \frac{\frac{R^2}{r_0^2} + 1}{\frac{R^2}{r_0^2} - 1} \right\}.$$

Ich habe die numerische Rechnung durchgeführt für einen Strom, der 99 Proz. des Sättigungsstroms beträgt, da dies zur Ermöglichung einer Orientierung für die Praxis in den meisten Fällen ausreichen dürfte. Das Resultat ist graphisch dargestellt in der nebenstehenden Figur, und zwar in der Weise, daß R und r_0 als Koordinaten einer Kurvenschar, V als Parameter dienen, daß ferner $q = 1$ gesetzt ist[1]). Zur Illustration sei etwa der bekannte Zerstreuungsapparat von Elster u. Geitel mit Schutzzylinder gewählt, für welchen $R = 9$ cm, $r_0 = 2{,}5$ cm beträgt; setzen wir q z. B. gleich 1600, so finden wir, daß eine Potentialdifferenz von 7 Volt genügt, um bis auf 1 Proz. gesättigten Strom zu erhalten.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß wegen der Asymmetrie des Feldes es natürlich nicht gleichgültig ist, ob die innere Elektrode negativ oder positiv geladen ist, und daß unsere Rechnungen entsprechend dem Ansatz für die Grenzbedingungen sich auf den Fall beziehen, daß die Kathode innen, die Anode außen liegt. Der

1) V, die angegebenen Parameterwerte, multipliziert mit $\sqrt{q}$ geben also direkt die anzulegende Potentialdifferenz in Volt an.

Unterschied für beide Schaltungen ist für den hier verfolgten praktischen Zweck belanglos; die genauere Rechnung kann ohne Mühe an Hand der allgemeinen Gleichung (16) durchgeführt werden, da man einfach u_- durch u_+ zu ersetzen hat. Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß für den Kugelkondensator den Substitutionen (11) ganz analoge existieren, so daß sich also für diesen die Rechnungen nach derselben einfachen Methode durchführen lassen, wie dies hier für den Zylinderkondensator geschehen ist.

z. Zt. Luftschiffhafen-Hannover, Mai 1917.

(Eingegangen 22. Juni 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Meßmethoden der Röntgenstrahlen.

Von R. Glocker.

(Schluß.)

III. Methoden der Härtemessung.

Wie im Kapitel I besprochen wurde, wird die Härte bei einer homogenen Strahlung durch eine einzige Zahl, bei einem Strahlengemisch durch eine Summe von Zahlen ausgedrückt. Wenn man sich auch im letzteren Falle häufig solcher Methoden bedient, deren Resultat nur einen einzigen Zahlenwert liefert, so geschieht dies, um auf einfache Weise einen ungefähren Anhalt über die Qualität der Strahlung zu gewinnen. Das Ziel der Messung ist dabei beschränkt auf die Bestimmung der „mittleren Härte" der Strahlung. Eine vollständige Lösung des Problems der Härtemessung im Sinne einer Analysierung des Strahlengemisches kann von zwei Seiten in Angriff genommen werden, je nachdem man zur Definition des Härtegrades vom Absorptionskoeffizienten oder von der Wellenlänge ausgeht. Die eine Gruppe dieser Verfahren beruht auf dem Prinzip aus wiederholten Intensitätsmessungen bei Einschaltung absorbierender Schichten veränderlicher Dicke die einzelnen Strahlungskomponenten zu berechnen, während die andere Gruppe durch spektrale Zerlegung (Abbeugung in Kristallraumgittern) oder durch Benutzung eines Resonanzphänomens (Erregung der Eigenstrahlung passend ausgewählter chemischer Stoffe) eine räumliche Trennung der Strahlungsbestandteile verschiedenen Härtegrades bewirkt. Eine weitere Gruppe bilden sodann diejenigen Methoden, deren gemeinsames Kennzeichen darin besteht, daß die Härte der Strahlung auf indirektem Wege durch elektrische Messungen am Röhrenstromkreis ermittelt wird.

1. Gruppe: Bestimmung der mittleren Härte.

1. Einmetallige Skalen.

Verschiedene gleich große Löcher einer Bleischeibe sind mit Platinfolien zunehmender Dicke (Walter) oder mit gleich dicken Scheiben aus verschiedenem Material (Beez) bedeckt. Die Zahl der auf einem dahinter gehaltenen Leuchtschirm sichtbaren Kreise gilt als relatives Härtemaß. Der prinzipielle Fehler dieser Schwellenwertskalen liegt darin, daß das Einstellungskriterium nicht bloß von der Härte, sondern auch von der Intensität der Strahlung abhängt. Dieser Nachteil trat umso stärker hervor, je mehr die obere Grenze der technisch herstellbaren Strahlungsintensitäten im Laufe der Zeit erweitert wurde.

2. Zweimetallige Skalen.

Die Härtemesser von Röntgen, Benoist, Benoist-Walter, Wehnelt beruhen auf einer Vergleichung der Absorptionswirkung einer selektiv absorbierenden Substanz I von konstanter Dicke mit der einer normal absorbierenden Substanz II von veränderlicher Dicke. Das älteste Instrument dieser Art ist das Röntgensche Platinaluminiumfenster: kreisförmige Ausschnitte (Fenster) in einer Platinfolie sind mit dünnen gleich dicken Aluminiumblättchen bedeckt, deren Anzahl von Fenster zu Fenster zunimmt. Auf einem Leuchtschirm wird festgestellt, welches Fenster gleiche Durchlässigkeit besitzt, wie die umgebende Platinfolie. Die Fensternummer (= Anzahl der Aluminiumblättchen) dient als relatives Härtemaß. Nähere Angaben über die Beschaffenheit der übrigen Härteskalen dieser Art sind in Tabelle II enthalten.

Zum Aufsuchen derjenigen Aluminiumschicht, welche die Strahlung ebenso stark schwächt, wie das Blättchen der Vergleichssubstanz I kann statt des Leuchtschirms auch die photographische Platte benutzt werden. Im Hinblick auf die verschiedenartige Zusammensetzung der beiden durch Aluminium bzw. Silber (Platin) filtrierten Strahlungsgemische (Hinzutreten der Eigenstrahlung der Schwermetalle) ist zu erwarten, daß das Resultat der Ablesung von der Art der Strahlungsreagenz abhängt. Nach den Ver-



Tabelle II.

	Substanz I	Dicke in mm	Substanz II	Dicke der einzelnen Schichten in mm.
Röntgen	*Pt*	0,0026	*Al*	1. 00299, 2. 0,0299 . . . . , 15. 0,0299
Benoist	*Ag*	0,11	*Al*	1, 2, 3, ... , 12.
Benoist-Walter	*Ag*	0,11	*Al*	2; 2,4; 3,2; 4,4; 6; 8.
Wehnelt	*Ag*	0,10	*Al*	Kontinuierlicher Keil von 1 bis 16 mm Dicke.

suchen von Voltz[1]) betragen die maximalen Differenzen der Härtemessung bei ein und derselben Strahlung 2 Wehnelt, je nachdem ein Leuchtschirm aus Bariumplatinzyanür oder aus Kalziumwolframat oder die Bromsiberemulsion der photographischen Platte als Strahlungsreagenz diente. In letzterem Falle ergeben sich außerdem verschiedene Werte, je nachdem die Skala unmittelbar oder unter Zwischenschaltung eines Papiers auf der Schicht aufliegt. Infolge der erheblich stärkeren sekundären Kathodenstrahlung des Silbers ist bei direkt aufliegender Skala das dem Silber entsprechende Feld auf der Platte stärker geschwärzt, während durch die Papierzwischenlage die Kathodenstrahlen völlig absorbiert werden.

Zur Erläuterung der Wirkungsweise dieser Härtemesser ist in Fig. 6 das Absorptionsgesetz

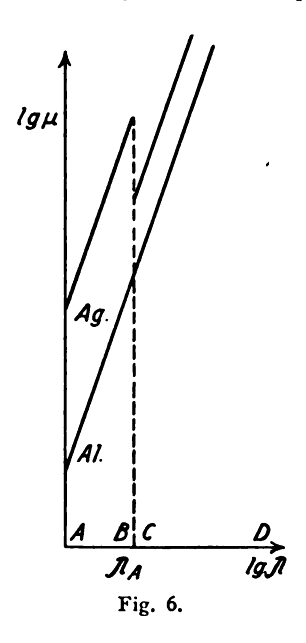


Fig. 6.

für Aluminium und Silber schematisch dargestellt. Wie ersichtlich, ist das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten dieser beiden Metalle im Bereich der langen Wellenlängen DC und der kurzen Wellenlänge AB konstant. Die sprunghafte Änderung des Zahlenwertes dieser Konstanten erfolgt bei der Absorptionsbandkante des Silbers ($\lambda_A = 0{,}49 \cdot 10^{-8}$ cm nach Wagner)[1]). Die Dicke X der Aluminiumschicht, welche ebenso stark absorbiert wie das Silberblättchen von der Dicke d cm, bestimmt sich aus

$$e^{-\mu_{Ag} \cdot d} = e^{-\mu_{Al} \cdot X} \text{ zu } X = \frac{\mu_{Ag}}{\mu_{Al}} \cdot d, \quad (12)$$

wobei die Strahlung zunächst als homogen vorausgesetzt wird. Enthält nun ein Strahlengemisch nur Wellenlängen des Bereiches CD (sehr weiche Röhre), so folgt aus Gleichung 12 und aus Fig. 6, daß sich für alle diese Wellenlängen derselbe Wert für X ergibt. Wird z. B. durch Spannungserhöhung eine Änderung des Spektrums in der Weise bewirkt, daß alle neu hinzutretenden kurzen Wellen noch größer als λ_A sind, so wird diese Härtung der Strahlen von dem Härtemesser nicht angegeben werden können. Ein solcher Vorgang ist tatsächlich experimentell beobachtet worden. Bei einer Gleichstromspannung, welche allmählich bis zu 25000 Volt erhöht wurde, fand Kröncke[2]) mit der Benoist-Skala stets den Wert 2. Erst bei Überschreitung dieses Spannungswertes zeigt die Benoist-Skala wachsende Härte an. Hieraus folgt, daß zur Erzeugung der Wellenlängen kleiner als $\lambda_A = 0{,}49 \cdot 10^{-8}$ cm eine Mindestspannung von 25000 Volt erforderlich ist, ein Resultat, das neuerdings durch direkte Messungen von Duane und Hunt[3]) bestätigt wurde. Der analoge Fall, daß eine Strahlung nur Wellenlängen des Bereiches AB enthält, tritt bei starker Filterung einer Strahlung auf. Das theoretisch zu erwartende Versagen der zweimetalligen Härteskalen in diesem Falle wird durch zahlreiche Erfahrungen der medizinischen Tiefentherapie experimentell bestätigt. Voraussetzung für die eindeutige Verwendbarkeit dieser Härtemesser ist also die Bedingung, daß die untersuchte Strahlung sowohl Wellenlängen enthält, die größer sind als λ_A, als auch solche, die kleiner sind als λ_A. Die Angabe zunehmenden Härtegrades bedeutet somit eine Zunahme des Gehaltes an Strahlen von kurzer Wellenlänge (kleiner als λ_A). Aus der Notwendigkeit

1) Diss. Tübingen 1916.

1) l. c.
2) l. c.
3) l. c.



der eben aufgestellten Bedingung folgt die Unrichtigkeit der allgemeinen Ansicht, daß bei gleicher Betriebsform die Angaben dieser Härtemesser eindeutig seien. Außer der besprochenen Vieldeutigkeit für sehr weiche und sehr harte Strahlungen ist noch eine Vieldeutigkeit in dem Sinne vorhanden, daß Strahlengemische von ganz verschiedener Zusammensetzung gleiche mittlere Härte besitzen können. Wie der Verf.[1]) experimentell gezeigt hat, ergibt sich für zwei Strahlungen, von denen die eine hauptsächlich nur mittelharte, die andere weiche, mittelharte und harte Strahlen enthielt, der gleiche Härtegrad nach Benoist.

3. Halbwertmesser nach Christen.

Im Gegensatz zu den willkürlichen Einheiten dieser ein- und zweimetalligen Skalen hat Christen[2]) als Maß der Härte die Dicke derjenigen Wasserschicht vorgeschlagen, welche die Strahlungsintensität zur Hälfte absorbiert. Das Christensche Instrument besteht aus der sogenannten Halbwertplatte (strahlenundurchlässige Platte mit Löchern, Summe der Lochflächen gleich halber Summe der Gesamtfläche der Platte) und aus einer Bakelittreppe. Bakelit besitzt nach seinen Angaben gleiches Absorptionsvermögen wie Wasser. Die Dicke derjenigen Bakelitstufe, welche auf einem dahinter befindlichen Leuchtschirm gleiche Helligkeit zeigt wie die Halbwertplatte ist gleich der gesuchten Halbwertschicht. Bei gleicher Betriebsweise der Röntgenröhre ist die Angabe dieses Härtemessers eine eindeutige. Nach Versuchen von Klingelfuß und Voltz erfolgt die Änderung der auf diese Weise gemessenen Halbwertschicht annähernd proportional mit der an der Röhre liegenden Spannung, während die entsprechenden Kurven der Benoist- und Wehnelt-Werte ein ganz irreguläres Verhalten zeigen. Vergleichstabellen zwischen den einzelnen Härteskalen besitzen daher nur einen bedingten Wert, da die Reduktionsfaktoren in erheblicher Weise von der spektralen Zusammensetzung des Strahlengemisches und infolgedessen von der Betriebsweise der Röhre abhängen. Die Halbwertschicht als Härtemaß hat sich besonders dadurch in der medizinischen Bestrahlungslehre gut bewährt, daß sie eine anschauliche Vorstellung von der Tiefenwirkung der Röntgenstrahlen auf die einzelnen Körperregionen vermittelt, da die Gewebe des menschlichen Körpers gleiches Absorptionsvermögen wie Wasser besitzen.

1) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **24**, 91, 1916.
2) Messung und Dosierung der Röntgenstrahlen. Hamburg 1913.

4. Bestimmung des mittleren Absorptionskoeffizienten.

Die mittlere Härte eines Strahlengemisches wird am einfachsten dadurch ermittelt, daß der Absorptionsverlust in einer bestimmten Schichtdicke eines und desselben Stoffes bestimmt wird. Aus der Intensitätsmessung vor und hinter der Schicht berechnet sich der mittlere Absorptionskoeffizient aus Gleichung 1. Zur Eindeutigkeit der Messung sind erforderlich: Normales Absorptionsverhalten des betreffenden Stoffes, konstante Schichtdicke, Messung der Intensität in stets gleicher Weise. Da das Strahlengemisch bei der ersten Intensitätsmessung eine andere spektrale Zusammensetzung besitzt wie bei der zweiten, und da die Angaben der meisten Intensitätsmeßmethoden vom Härtegrad der Strahlen abhängen, wird nämlich der Absorptionskoeffizient verschieden groß gefunden, je nachdem Leuchtschirm, Ionisation oder photographische Platte benutzt werden.

Dasselbe gilt für die Bestimmung der Halbwertschicht (Variierung der eingeschalteten Schichtdicke, bis die auffallende Strahlungsintensität durch Absorption zur Hälfte geschwächt wird). In der Röntgentechnik wird häufig die Halbwertschicht in Aluminium bestimmt und die erhaltenen Werte mit 10 multipliziert als Halbwertschicht in Wasser angegeben, unter Hinweis auf die Versuche von Perthes[1]), daß 1 mm Aluminium ebenso stark absorbiert wie 1 cm Wasser. Eigene Versuche des Verf.[2]) haben jedoch ergeben, daß diese Beziehung nur bei einer Strahlung von bestimmter Härte gilt (etwa $\lambda = 0{,}6 \cdot 10^{-8}$ cm) und daß der Quotient der Absorptionskoeffizienten von Aluminium und Wasser mit abnehmender Wellenlänge stetig abnimmt. Eine Umrechnung der beiden Halbwertschichten ist daher ohne genaue Kenntnis der Strahlungszusammensetzung unmöglich.

2. Gruppe: Wiederholte Absorptionsmessungen.

Absorptionsmessungen an einem als Normalkörper dienenden Stoff können entweder so vorgenommen werden, daß die Intensität J als Funktion der Schichtdicke x gemessen und aufgezeichnet wird oder so, daß immer an einer gleich dicken Schicht der Absorptionskoeffizient gemäß der Gleichung 1 bestimmt wird, wobei vor diese Schicht ein Filter veränderlicher Dicke vorgeschaltet wird. Benutzt man im ersteren Falle $\lg J$ und $\lg x$ als Koordinaten, so wird eine homogene Strahlung durch eine gerade Linie dargestellt. Je gekrümmter also die ex-

1) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **8**, 12.
2) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **24**, Heft 6, 1917 (gemeinsam mit W. Reusch).

perimentell erhaltene Kurve ist, desto größer ist die Heterogenität der untersuchten Strahlung. Aus einer endlichen Summe von J_n solcher Intensitätsmessungen kann auf mathematischem Wege die Zerlegung der Strahlung in eine Anzahl n homogener Komponenten mit den Intensitäten $J_1, J_2 \ldots . J_n$ und den Absorptionskoeffizienten $\mu_1, \mu_2 \ldots . \mu_n$ durchgeführt werden. Die nach dem Durchgang durch die Schichtdicke x jeweils vorhandene Strahlungsintensität läßt sich nämlich durch eine Gleichung folgender Form darstellen:

$$J = J_1 e^{-\mu_1 x} + J_2 e^{-\mu_2 x} + J_n e^{-\mu_n x}. \qquad (13)$$

Betreffs der näheren Einzelheiten der Berechnungen wird auf die Arbeiten von Kröncke[1]) und Thomson[2]) verwiesen. Voraussetzung ist dabei, daß die benutzte Meßmethode wirklich die Intensität eines Strahlengemisches mißt. Wird z. B. zwecks Bestimmung des mittleren Absorptionskoeffizienten die Intensität eines Strahlengemisches mit einer Ionisationsmethode vor und hinter der absorbierenden Schicht gemessen, so wird der Quotient $\frac{J_1}{J_0}$ zu klein gefunden, wenn man J_0 und J_1 den Sättigungsstromstärken direkt proportional setzt, da der relative Anteil der weichen Strahlungskomponenten im zweiten Gemisch geringer ist als im ersten. Zur Berechnung des Korrektionsfaktors nach Gleichung (6) ist aber die Kenntnis gerade derjenigen Größen erforderlich, deren Ermittlung das Ziel der Messung bildet. Daraus folgt die prinzipielle Unmöglichkeit, mit den üblichen Ionisationsmessungen genaue Werte der Absorptionskoeffizienten heterogener Strahlungen erhalten zu können. Dasselbe gilt für die photographischen und fluorometrischen Methoden.

Diesem Umstand, daß nicht J, sondern μJ durch den Sättigungsstrom gemessen wird, trägt das graphische Analysierungsverfahren von Weißenberg[3]) Rechnung, welcher von der Darstellung der vom Instrument angezeigten scheinbaren Intensität als Funktion der Schichtdicke ausgeht. In der Eigenart dieses Näherungsverfahrens liegt es, daß ein Strahlengemisch nur in eine sehr geringe Anzahl von Komponenten zerlegt werden kann. Es ist besonders zu bemerken, daß die durch das Verfahren sich ergebende weichste Komponente keineswegs die untere Grenze des physikalisch vorhandenen Spektrums darstellt[4]).

1) l. c.
2) Phil. Mag. **30**, 780, 1915.
3) Fortschr. a. d. Geb. der Röntgenstr. **23**, 229, 1915.
4) Goos, Fortschr. a. d. Geb. der Röntgenstr. **24**, 409, 1917 berechnet z. B. auf diese Weise für eine technische Röntgenröhre als weichste Strahlungskomponente eine Härte von 1,2 mm Aluminium-Halbwertschicht, während die weichsten von der Röhre erzeugten Strahlen, die durch das Glas dringen, eine Härte von etwa 0,1 mm Aluminium Halbwertschicht besitzen.

Bei der experimentellen Messung der Absorptionskoeffizienten ist durch Einschaltung geeigneter Blenden und durch entsprechende Bemessung des Abstandes zwischen Filter und Strahlungsreagenz zu vermeiden, daß die Sekundärstrahlung des Filtermaterials eine viel zu große Intensität hinter dem Filter vortäuscht.

Bei Absorptionsmessungen an sehr harten Strahlen kann sich der „wahre Absorptionskoeffizient" $\bar{\mu}$ von dem experimentell nach Gl. 1 bestimmten „rohen Absorptionskoeffizienten" μ um ein beträchtliches unterscheiden. Die beobachtete Intensitätsabnahme $J_0 - J_1$ rührt nicht bloß davon her, daß ein Teil der auffallenden Strahlungsintensität in dem Medium absorbiert und in andere Energieformen (charakteristische Eigenstrahlung, sekundäre Kathodenstrahlung, Wärme) transformiert wird. Durch diffuse Zerstreuung in dem absorbierenden Medium wird nämlich ein gewisser Bruchteil von J_0 in anderen Richtungen als in der Inzidenzrichtung fortgepflanzt, so daß er bei der Bestimmung von J_1 (hinter der absorbierenden Schicht) nicht von der Messung erfaßt werden kann. Die Beziehung zwischen μ und $\bar{\mu}$ lautet somit

$$\mu = \bar{\mu} + s \qquad (14)$$

s Zerstreuungskoeffizient.

Im allgemeinen ist $\bar{\mu} \gg s$. Bei sehr harten Strahlen darf s nicht mehr vernachlässigt werden, besonders dann nicht, wenn der absorbierende Stoff aus Elementen niederen Atomgewichtes besteht. Für Aluminium ist z. B. bei $\lambda = 0{,}2 \cdot 10^{-8}$ cm s ungefähr ebenso groß wie $\bar{\mu}$.

3. Gruppe: Räumliche Trennung der einzelnen Strahlungskomponenten.

1. Läßt man ein heterogenes Röntgenstrahlenbündel durch einen Kristall hindurchtreten, so werden die Strahlen von den Atomebenen des Kristalls je nach der Größe ihrer Wellenlänge von ihrer geradlinigen Fortpflanzungsrichtung abgebeugt, so daß auf einer hinter dem Kristall angebrachten photographischen Platte die Strahlen verschiedener Wellenlänge räumlich voneinander getrennt in Erscheinung treten. Bildet die betreffende Atomebene mit dem einfallenden Strahlenbündel einen Winkel φ, so kommt ein Beugungseffekt nur dann zustande, wenn eine Wellenlänge λ in der Strahlung enthalten ist, welche der Bedingung

$$n\lambda = 2d \sin \varphi \qquad (15)$$

genügt. $n = 1, 2, 3 \ldots .$ Ordnungszahl des Spektrums, d Abstand gleicher Atomebenen; der

Beugungswinkel ist dann $= 2\varphi$. Man findet daher auf einfache Weise die Richtung des gebeugten Strahles dadurch, daß man sich den einfallenden Strahl an der betreffenden Atomebene reflektiert denkt. Um ein Spektrum der Strahlen zu erhalten, muß man dafür sorgen, daß für jede in der Strahlung vorhandene Wellenlänge ein passender Wert des Winkels φ auftreten kann. Dies geschieht zumeist durch ein langsames Hin- und Herdrehen des Kristalls mittelst eines Uhrwerkes (Drehkristallmethode nach Broglie[1]), so daß ein und dieselbe Atomebene nacheinander kontinuierlich alle Werte des Winkels φ gegenüber dem einfallenden, schwach divergenten Strahlenbündel annimmt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, ein stark divergentes Strahlenbündel auf einen stillstehenden Kristall auffallen zu lassen (Moseley[2]). Die Drehkristallmethode besitzt den Vorzug, daß partielle Störungen des Kristallgefüges eliminiert werden, da infolge der Rotation des Kristalls die Reflexionsstelle immer wieder auf andere Flächenstücke zu liegen kommt. Betreffs näherer Einzelheiten der verschiedenen Spektrometer (fokussierende Wirkung der Drehkristallmethode, spaltlose Methode, Vakuumspektrograph) muß auf das umfassende Referat von Siegbahn[3]) verwiesen werden.

Für quantitative Messungen der Intensitäten der einzelnen Spektralbezirke wird statt der photographischen Platte eine um den Kristall herum drehbare Ionisationskammer angewandt (Bragg[4]), welche zur Erhöhung des Ionisierungseffektes mit schweren Gasen (Methylbromid) gefüllt ist. Um eine von dem Einfluß der Spaltweite unabhängige Verhältniszahl zwischen Intensität J_λ einer bestimmten Wellenlänge und Gesamtintensität J der Strahlung zu erhalten, wird bei feststehender Ionisationskammer der Kristall schrittweise (z. B. um je fünf Bogenminuten) durch den entsprechenden Winkelbereich hindurchgedreht und die Ionisationsströme i gemessen. Die Fläche zwischen Kurve und Abszisse (Fig. 7) ist dann gleich der Ionisation von J_λ. Um aus den Sättigungsströmen das Intensitätsverhältnis $\frac{J}{J_\lambda}$ zu erhalten, bedarf es einer Korrektion gemäß Gleichung (6). Wegen der Heterogenität der Primärstrahlung würde eine Korrektion erster Näherung jedesmal eine Bestimmung des mittleren Absorptionskoeffizienten der Primärstrahlung erfordern, während der Absorptionskoeffizient der betreffenden Wellenlänge

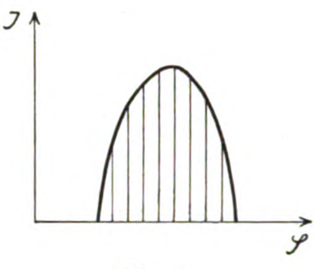


Fig. 7.

mit Hilfe der Gleichung 4 berechnet werden kann. Eine automatische Integration der Kurve der Fig. 7 liefert die Beobachtung des Gesamtrückgangs eines geladenen Elektroskopes während der schrittweisen Drehung des Kristalls innerhalb des fraglichen Winkelintervalles. Wird die Ionisationskammer um eine in der reflektierenden Kristallfläche gedachte Achse allmählich gedreht, so kann das ganze Spektrum der Primärstrahlung aufgenommen werden. Auf dieser Grundlage beruht das von Crompton[1]) angegebene registrierende Spektrometer, bei welchem die Ausschläge des Elektrometers automatisch auf einem bewegten lichtempfindlichen Papier aufgezeichnet werden, so daß direkt die Intensitätskurve des Spektrums als Funktion des Reflexionswinkels erhalten wird. Diese Kurve gibt jedoch kein ganz richtiges Bild der Energieverteilung im Spektrum, weil die Ionisationswirkung der gleichen Intensität an den verschiedenen Stellen des Spektrums verschieden groß ist und weil die einzelnen Wellenlängen im Kristall und in der Luft in verschieden starkem Maße absorbiert werden.

2. Da für die Zwecke einer technischen Strahlungsanalyse die spektrometrischen Methoden zu umständlich sind, hat der Verf.[2]) versucht, auf folgende Weise einen direkten Aufschluß über die Zusammensetzung von Strahlungsgemischen zu erhalten: Werden verschiedene chemische Elemente gleichzeitig und unter denselben Bedingungen einer Röntgenstrahlung ausgesetzt, so ist die Stärke der auftretenden charakteristischen Eigenstrahlung eines jeden Elementes proportional der Intensität eines gewissen Spektralbereiches in der Primärstrahlung. Die Lage dieser erregenden Spektralbereiche ist für jeden Stoff aus den von Wagner[3]) ermittelten Absorptionsbandkanten leicht zu berechnen. Es handelt sich bei diesem Verfahren um einen ähnlichen Resonanzvorgang wie bei dem Frahmschen Frequenzmesser in der Wechselstromtech-

1) Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 1348, 1913.
2) Phil. Mag. **26**, 1024, 1913.
3) Jahrbuch der Radioaktivität **13**, 296, 1916.
4) Proc. Roy. Soc. **88**, 428, 1913.

1) Phys. Rev. **7**, 646, 1916.
2) Fortschr. a. d. Geb. der Röntgenstr. **24**, 91, 1916.
3) Ann. d. Phys. **46**, 868, 1915.

nik, bei welchem aus einer Anzahl von Federn mit verschiedenen Eigenschwingungszahlen diejenige am stärksten zur Schwingung erregt wird, deren Eigenfrequenz der Wechselstromfrequenz am nächsten kommt. Sind nun fünf Stoffe so ausgewählt, daß ihre Anregungsbereiche sich aneinander anschließen und das ganze Spektrum einer technischen Röntgenröhre umfassen, so liefert eine Messung der Intensität S jeder Eigenstrahlung ein Maß für die Intensität P des betreffenden erregenden Spektralbereiches der Primärstrahlung auf Grund der Gleichungen

$$P_1 = \alpha_1 S_1, \; P_2 = \alpha_2 S_2, \; \ldots \; P_5 = \alpha_5 S_5. \tag{16}$$

Der für jeden der fünf Stoffe charakteristische Wert der Konstanten α kann noch nicht für alle Elemente berechnet werden, da experimentelle Werte des Sekundärstrahlungsemissionskoeffizienten bisher nur für wenige Elemente bekannt sind (Sadler[1])). Eine Kenntnis der α-Werte ist jedoch nicht erforderlich, wenn es sich um die praktisch wichtigste Aufgabe, die vergleichende Untersuchung der Zusammensetzung von Strahlengemischen handelt. Untersucht man nämlich eine zweite Strahlung in derselben Weise, so ergibt sich

$$P_1' = \alpha_1 S_1', \; P_2' = \alpha_2 S_2'$$

usf., also

$$\frac{P_1}{P_1'} = \frac{S_1}{S_1'}, \; \frac{P_2}{P_2'} = \frac{S_2}{S_2'}, \tag{17}$$

usf. Das Verfahren gibt somit an, wieviel mal stärker oder schwächer die Intensitäten von fünf zahlenmäßig bekannten Spektralbezirken in dem ersten Strahlengemisch enthalten sind im Vergleich zu deren Intensitäten im zweiten Strahlengemisch. Bei dem vom Verf. angegebenen Apparat zur photographischen Registrierung der Sekundärstrahlungen, genügen Expositionszeiten von etwa 1 Minute, um starke Schwärzungen zu erhalten, so daß der Einfluß einer geänderten Betriebsweise (elektrische Verhältnisse, Röhrenvakuum, Filter) auf die Strahlungszusammensetzung leicht untersucht werden kann. Bei Verwendung einer Ionisationsmethode zur Messung der Eigenstrahlungsintensitäten läßt sich die Reduktion nach Gleichung (6) ohne weiteres anbringen, da die Werte der Absorptionskoeffizienten der Eigenstrahlungen alle bekannt sind (Barkla[2])).

4. Gruppe: Indirekte Härtemessungen.

Auf Grund der theoretischen Vorstellung, daß die Röntgenstrahlen umso kleinere Impulsbreite (Wellenlänge) besitzen, je größer die Geschwindigkeit der erzeugenden Kathodenstrahlen ist, d. h. je größer die an die Röhre angelegte Spannung ist, bieten sich zwei Möglichkeiten zu einer indirekten Härtemessung, nämlich erstens durch Bestimmung der Kathodenstrahlengeschwindigkeit v oder zweitens durch Messung der Spannung V.

1. Die klassische Methode zur Bestimmung der Geschwindigkeit von Kathodenstrahlen ist die Beobachtung ihrer Ablenkung beim Durchgang durch ein Magnetfeld von bekannter Stärke. Ein auf diesem Prinzip beruhendes Verfahren von Lilienfeld, welcher die Geschwindigkeitsverteilung der an der Antikathode einer technischen Röntgenröhre reflektierten Kathodenstrahlen als Maß für die Härteverteilung der erzeugten Röntgenstrahlen benutzt, hat jedoch keine praktische Verwendung gefunden.

2. Bei der Beurteilung der Verwendbarkeit der Spannungsmessung zur Härtebestimmung erhebt sich zunächst die Frage, ob ein gewisser Spannungswert unabhängig von den besonderen Betriebsbedingungen immer ein und demselben Röntgenspektrum entspricht?

Am übersichtlichsten liegen die Verhältnisse bei einem Betrieb mit kontinuierlichem Gleichstrom: Bei konstanter Spannung und konstantem Strom ist die spektrale Zusammensetzung der Strahlung in jedem Zeitintervall genau dieselbe; sie bleibt konstant auch bei Änderungen des Vakuums und der Stromstärke, sofern nur die Spannung immer gleich groß gehalten wird (Kröncke[1])). Jedem Spannungswert ist daher ein ganz bestimmtes Strahlungsspektrum in eindeutiger Weise zugeordnet. Im Falle einer Vergleichung zweier Röhren brauchen jedoch die Spektren unter gleichen elektrischen Bedingungen nicht identisch zu sein, da das Impulsspektrum teilweise überlagert ist von der für das betreffende Antikathodenmaterial charakteristischen Eigenstrahlung; außerdem kann durch den Absorptionsverlust in dem verschieden dicken Glas der Röhrenwandungen eine wesentliche Veränderung der in den Außenraum gelangenden Strahlung bewirkt werden. Wie Kröncke weiter gezeigt hat, wird auch bei Anlegen einer konstanten Spannung immer eine inhomogene Strahlung erzeugt. Nach den Untersuchungen von Duane und Hunt[2]) bestimmt sich die zur Erregung der Wellenlänge λ des Impulsspektrums erforderliche Mindestspannung V aus der Gleichung

$$\frac{hc}{\lambda} = eV, \tag{18}$$

c Lichtgeschwindigkeit, h Plancksche Konstante, e Elementarquantum. Eine Messung der Span-

1) Phil. Mag. **18**, 126, 1909; **22**, 454, 1911. Vgl. hierzu: diese Zeitschr. **17**, 488, 1916.
2) Phil. Mag. **22**, 396, 1911.

1) l. c.
2) l. c.

nung einer mit kontinuierlichem Gleichstrom[1]) gespeisten Röhre liefert somit die kürzeste Wellenlänge der Strahlung.

Eine Spannungsmessung bei intermittierendem Gleichstrombetrieb kann dagegen stets nur Mittelwerte der Spannung liefern. Da der Spannungsverlauf und die dadurch bedingte zeitliche Veränderung[2]) der spektralen Zusammensetzung der Strahlung während eines Entladungsstoßes, selbst bei gleicher Betriebsweise, sehr erheblich vom Vakuum der Röhre abhängt, so können bei ein und demselben Mittelwert der Spannung trotzdem verschiedene Röntgenspektren auftreten. Noch viel mehr ist dies der Fall bei einer Änderung der Betriebsweise. Wenngleich somit bei intermittierender Gleichspannung auch bei konstanter Betriebsweise die Zuordnung zwischen Mittelwert der Spannung und Röntgenspektrum keine eindeutige ist, so liefert doch die Spannungsmessung in diesem Falle ein praktisch brauchbares Maß der „mittleren Härte"[3]), insofern einer Zunahme der Spannung eine Abnahme des mittleren Absorptionskoeffizienten bzw. eine Erhöhung der Halbwertschicht entspricht (Voltz[4])). Geht man zu einer anderen Betriebsweise mit wesentlich verschiedenem Spannungsverlauf über, so wird der Proportionalitätsfaktor zwischen Mittelwert der Spannung und mittlerer Härte, wie sie z. B. direkt als Halbwertschicht im Aluminium bestimmt werden kann, einen anderen Wert annehmen, so daß Gleichheit der Spannung bei zwei Instrumentarien nicht ohne weiteres gleiche mittlere Härte der erzeugten Strahlungen bedeutet.

Enthält der Sekundärstromkreis Ventilröhren zur Unterdrückung des Schließungsstroms, so unterscheidet sich die an der Röhre liegende Spannung von dem mit den üblichen Methoden (Qualimeter, Sklerometer) gemessenen Spannungswert um den Spannungsabfall in der Ventilröhre, dessen Größe durch deren Vakuum bedingt ist und infolgedessen zeitliche Veränderungen aufweist. Die Beziehung zwischen Spannung und mittlerer Härte ist daher eine andere als bei einem von Ventilröhren freien Betrieb.

Für die Ermittlung der Spannung werden in der Praxis hauptsächlich folgende drei Methoden benutzt: a) Messung der Parallelfunkenstrecke, b) Qualimeter nach Bauer, c) Sklerometer nach Klingelfuß. Bei reinem Gleichstrombetrieb erfolgt die Spannungsmessung mit Hochspannungsvoltmeter und vorgeschaltetem Kondensator.

a) Die Größe der Parallelfunkenstrecke hängt unter gleichen elektrischen Verhältnissen von der Form der Elektroden und der Ionisation der Luft ab. Es ist daher nicht bloß gegen die direkte Einwirkung der Röntgenstrahlen, sondern auch gegen eine Diffusion der an anderen Stellen des Raumes erzeugten Ionen Vorkehrung zu treffen. Die Messung der Parallelfunkenstrecke liefert einen Anhalt über die Größe der Zündspannung der Röhre, sofern etwaige Schließungsströme völlig unterdrückt werden. Da auch bei gleicher Betriebsweise der Unterschied zwischen Zündspannung und zeitlichem Mittelwert der Spannung eine Funktion des Vakuums und der Belastung ist, so kann eine allgemein gültige zahlenmäßige Beziehung zwischen mittlerer Härte (Halbwertschicht) und Größe der Parallelfunkenstrecke nicht aufgestellt werden. Eine Verwendung der Parallelfunkenstrecke als Maß der Härte bei verschiedenartiger Betriebsweise führt zu ganz unbrauchbaren Resultaten (Ludewig[1])).

b) Das Bauersche Qualimeter[2]) (einpoliges Elektrometer) mißt die Spannung der Kathode der Röhre gegen Erde. Das Instrument ist sehr empfindlich gegen elektrische Schwingungen des Sekundärkreises (Klingelfuß[3])); auch die Kapazität der nach der Röhre führenden Leitungen ist von Einfluß auf die Ausschläge. Nach den Untersuchungen von Walter[4]) sind die Angaben des Instruments nur bei gleicher Betriebsweise als relatives Maß der mittleren Härte zu verwerten. Das Qualimeter wird daher in der Praxis hauptsächlich nur noch dazu verwandt, um die Härtekonstanz einer und derselben Röhre während des Betriebes zu prüfen. Nach eigenen Versuchen des Verfassers[5]) versagt jedoch das Instrument auch in dieser Hinsicht völlig, sobald sehr harte Röhren benutzt werden.

c) Das von Klingelfuß[3]) konstruierte Skle-

1) Zur Zündung einer kalten Röhre ist eine um etwa 50 Proz. größere Spannung erforderlich (Kröncke).

2) Direkte Aufnahmen der Spannungskurven sind bisher nur bei sinusförmigem, intermittierendem Gleichstrom gemacht worden (Wehnelt, Ann. d. Phys. **47**, 1112, 1915): Zu Beginn des Induktionsstoßes erreicht die Spannung in den Röhren ein Maximum, um dann je nach dem Vakuum dauernd abzufallen (weiche Röhren) oder in einem zweiten und dritten Anstieg das anfängliche Maximum wieder zu erreichen (sehr harte Röhren). Es ist demnach bei weichen Röhren die zu Beginn des Induktionstoßes emittierte Strahlung härter als die während seines weiteren Verlaufs ausgesandte Strahlung. (Experimentellen Beweis hierfür bei Dessauer, diese Zeitschr. **14**, 246, 1913.) Im Gegensatz zum kontinuierlichen Gleichstrombetrieb hat also hier das Röntgenspektrum in jedem Zeitintervall des Entladungsstoßes eine verschiedene Form.

3) Vgl. die Bemerkung auf S. 332, daß Gleichheit der mittleren Härte keineswegs Identität der spektralen Zusammensetzung bedeutet.

4) Diss. Tübingen 1916.

1) Diese Zeitschr. **16**, 438, 1915.
2) Verh. d. D. Röntgenges. **7**, 137.
3) Strahlentherapie **3**, 772.
4) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **17**, 211.
5) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **24**, Heft 6, 1917.

rometer (eine um die Mitte des Induktoriums gelegte Hilfsspule, deren Enden mit einem Hitzdrahtvoltmeter verbunden sind) scheint von diesen Fehlern frei zu sein. Dagegen besitzt es den Nachteil, daß es nur bei Induktorbetrieb benutzt werden kann und daß es für jedes Instrumentarium einer besonderen Eichung bedarf. Außerdem sind seine Angaben von der Unterbrechungszahl abhängig, ein Umstand, der die Verwendung des Sklerometers bei den elektrolytischen Unterbrechern mit ihrer von der Belastung abhängigen Frequenz unmöglich machen dürfte. Aus dem Verhältnis der Windungszahlen von Induktorium und Hilfsspule berechnet sich aus den Angaben des Voltmeters die an den Induktorpolen herrschende Spannung. Mit Rücksicht auf die praktische Verwendung des Instrumentes als Härtemesser ist die Skala auch in Benoistgrade eingeteilt. Die Ausführungen in Kapitel III 2. Gruppe, 3 lassen jedoch eine Eichung in Halbwertschichten zweckmäßiger erscheinen.

Eine für alle Betriebsweisen vorhandene Übereinstimmung der Resultate dieser drei Methoden kann nicht erwartet werden, da die für die einzelnen Betriebsweisen verschieden geartete Zeitfunktion der Spannung die Größe des Proportionalitätsfaktors zwischen Zündspannung, linearem und quadratischem Mittelwert der Spannung bestimmt, und da die Angaben der verschiedenen Methoden nicht der gleichen dieser drei Spannungsgrößen entsprechen.

3. Eine indirekte Methode zur Untersuchung der Zusammensetzung eines Strahlengemisches liefert die Aufnahme der Sekundärstromkurven mit der Glimmlichtröhre z. B. in der Anordnung von Janus und Voltz[1]) (rotierende Glimmlichtröhre). Erfahrungsgemäß ist die erzeugte Strahlung umso ärmer an weichen Komponenten, je höher und steiler die einzelnen Kurvenmaxima sind (Rosenthal[2])). Die übliche Anschauung, die Stromkurve mit der Spannungskurve zu identifizieren und als ein Bild der Geschwindigkeitsverteilung der Kathodenstrahlen zu betrachten, entbehrt jedoch der sicheren experimentellen Grundlage, da die dynamische Charakteristik einer Röntgenröhre bisher noch nicht direkt experimentell ermittelt werden konnte.

IV. Dosimetrie.

Die Dosimetrie ist dasjenige Kapitel der Strahlenmessung, welches einerseits die größte praktische Bedeutung besitzt, andererseits aber am meisten der physikalischen Exaktheit entbehrt. Daher wird im folgenden ein kurzer Überblick über die Grundlagen der einzelnen dosimetrischen Verfahren gegeben werden.

1) Diese Zeitschr. **16**, 133 u. 213, 1915.
2) Verh. d. Röntgen-Ges. **4**, 67, 1908.

Unter der Voraussetzung[1]) einer vom Härtegrad unabhängigen Proportionalität zwischen absorbierter Energie und biologischer Wirkung der Strahlen, kann man mit Hilfe einer physikalisch definierten Größe, „Dosis" genannt, den biologischen Effekt einer Strahlung im voraus beurteilen: Dosis heißt die in einem Volumelement dV des Körpers absorbierte Strahlungsenergie dE, bezogen auf die Volumeinheit, also

$$D = \frac{dE}{dV}. \tag{19}$$

Bei einer sehr dünnen Gewebsschicht und bei homogenen Strahlen (Absorptionskoeffizient μ) ist somit

$$D = \mu \cdot J \cdot t \tag{20}$$

J auffallende Intensität, t Dauer der Bestrahlung. Bei Strahlengemischen lautet die entsprechende Gleichung:

$$D = \{J_1\mu_1 + J_2\mu_2 + \ldots + J_n\mu_n\} \cdot t. \tag{21}$$

1. Direkte dosimetrische Verfahren.

Zur Bestimmung der Dosis D ist nach Gleichung 19 eine genaue Kenntnis der Zusammensetzung der Strahlen erforderlich, wie sie nur durch wiederholte Intensitäts- und Härtebestimmungen (vgl. Kapitel III, 2. und 3. Gruppe) gewonnen werden kann. An Stelle dieses sehr umständlichen Weges kann die Dosis durch eine einzige Messung ermittelt werden, sobald ein Stoff aufgefunden ist, dessen Absorptionskoeffizienten gegenüber den Strahlen verschiedener Wellenlänge in einem konstanten Verhältnis zu den entsprechenden des Gewebes stehen, so daß die Beziehungen

$$\frac{\mu_1'}{\mu_1} = \frac{\mu_2'}{\mu_2} = \ldots = \frac{\mu_n'}{\mu_n} = \text{const} \tag{22}$$

gelten. Die in einer dünnen Schicht dieses Stoffes absorbierte Energie (pro Volumeinheit) ist dann

$$D' = \{J_1\mu_1' + J_2\mu_2' + J_n\mu_n'\} \cdot t. \tag{23}$$

Aus Gleichung 21 und 22 folgt

$$D' = \text{const} \cdot D, \tag{24}$$

wobei const. eine von der Zusammensetzung der Strahlen unabhängige Konstante ist. Eine Bestimmung des Absorptionsverlustes einer Strahlung in einer dünnen (bei allen Messungen gleich dicken) Schicht dieses Stoffes liefert somit ein von Intensität und Härte unabhängiges Maß für die Dosis im Gewebe. Der einfachste Weg zur Realisierung dieser Methode ist die Messung der Ionisation in einem Luftvolumen von geringer Dicke (etwa 1 cm). Da Wasser und Gewebe gleiches Absorptionsvermögen besitzen,

1) Der experimentelle Beweis für die Richtigkeit dieser von manchen Biologen bestrittenen Annahme wurde noch nicht erbracht.



und da Luft und Wasser aus nahezu gleichen Atomen sich aufbauen, so darf für Gewebe und Luft die Gleichung 22 als erfüllt gelten. Eine weitere Voraussetzung ist die Gültigkeit des früher besprochenen Satzes, daß die erzeugte Ionenzahl unabhängig vom Härtegrad stets der absorbierten Strahlungsenergie proportional ist. Der Rückgang eines geladenen Elektroskopes während der Bestrahlungszeit t ist dann ein direktes Maß der Dosis D, sofern das Endpotential des Elektroskops zur Aufrechterhaltung des Sättigungsstadiums ausreicht.

Die zurzeit am meisten benützten dosimetrischen Verfahren, Schwärzung des Bromsilberpapiers (Kienböck[1]), Braunfärbung einer Bariumplatinzyanürtablette (Sabouraud-Noiré), Trübung einer Quecksilbersalzlösung (Schwarz[2])) leiden alle an dem Fehler, daß die betreffenden Substanzen der Gleichung 22 nicht genügen. Die Differenzen zwischen der in der Dosimetersubstanz absorbierten Strahlungsenergie und der gesuchten Hautdosis sind verschieden groß, je nach der spektralen Zusammensetzung der benützten Strahlung; sie erreichen ein Maximum beim Vorherrschen solcher Wellenlängen, welche in der Dosimetersubstanz in selektiver Weise absorbiert werden, wobei noch außerdem die erregte Eigenstrahlung[3]) der Substanz zu einer Erhöhung des beobachteten Effektes Anlaß gibt. Infolgedessen ist es ein vergebliches Bemühen, allgemeingültige Vergleichstabellen zwischen den Angaben der verschiedenen Dosimeter aufstellen zu wollen.

Die Eichung der Dosimeter erfolgt in empirischer Weise, indem ein für allemal einem bestimmten biologischen Effekt einer Strahlung eine bestimmte Veränderung des Dosimeters zugeordnet wird, welche z. B. bei Kienböck in Form einer Normalschwärzung festgelegt wird. Zur Ablesung von Zwischenwerten der Dosis sind empirische Vergleichsskalen (z. B. Schwärzungsskala von Kienböck) aufgestellt worden. Bei Verwendung eines Strahlengemisches, das anders zusammengesetzt ist wie die zur Eichung benutzte Strahlung, entspricht der gleichen Dosimeterangabe nicht mehr der gleiche biologische Effekt. Die Unterschiede betragen z. B. beim Kienböckschen Dosimeter bis zu 300 Proz. (bei filtrierter Strahlung).

In zweiter Linie kommen folgende Fehlerquellen in Betracht: Zeitliche Inkonstanz der Empfindlichkeit der Dosimetersubstanz, subjektive Schwankungen bei der Ablesung; ferner beim Kienböck-Verfahren: Einhaltung einer bestimmten Entwicklungsweise; beim Sabouraud-Noiré-Verfahren: Einfluß der Beschaffenheit der Lichtquelle auf das Resultat der Ablesung an der Skala, da die bestrahlte Pastille im Gegensatz zu der Normalfarbe Fluoreszenzlicht aussendet.

1) Fortschr. a. d. Geb. der Röntgenstr. 9, 246.
2) Fortschr. a. d. Geb. der Röntgenstr. 11, 114.
3) Durch die vorgeschriebene Hinterlegung der Sabouraud-Noiré-Tablette mit Bleiblech „zwecks Vermeidung von Sekundärstrahlung" wird gerade das Gegenteil erreicht.

2. Indirekte dosimetrische Verfahren.

Mit Ausnahme der Köhlerschen Thermometerröhre[1]) (Bestimmung der Wärmewirkung der sekundären und der an der Antikathode reflektierten Kathodenstrahlen) beruhen die indirekten dosimetrischen Methoden auf elektrischen Messungen am Röhrenstromkreis. Bei Gleichstrombetrieb kann nach Kröncke[2]) die Dosis auf Grund der Gleichung 11 ermittelt werden. Für den Induktorbetrieb empfiehlt Klingelfuß[3]) als Maß der Dosis das Produkt $i \cdot V \cdot t$, wobei die Spannung V mit seinem Sklerometer ermittelt wird (i Sekundärstromstärke, t Bestrahlungszeit). Die Tatsache, daß die photographische Schwärzung proportional $i \cdot V \cdot t$ erfolgt, sieht er als Beweis dafür an, daß jenes Produkt der Dosis proportional ist. Die Richtigkeit dieser Schlußfolgerung wird jedoch durch eine Betrachtung über die Verschiedenartigkeit der Absorptionsgesetze für Wasser und Silber sehr in Frage gestellt Es ist überhaupt zu bezweifeln, ob die Angabe der mittleren Spannung ausreicht, um den Einfluß einer veränderten spektralen Zusammensetzung der Strahlen auf die Größe der Dosis hinreichend zum Ausdruck zu bringen. Jedenfalls ist es unmöglich, bei verschiedenartiger Betriebsweise die durch Bestimmung von Strom und mittlerer Spannung erhaltenen Werte der Dosis miteinander zu vergleichen. Eine einfache und einwandfreie Methode der Dosierung besteht darin, daß empirisch die Zeit ermittelt wird, die erforderlich ist, um mit einer Röhre in einem bestimmten Betriebszustand einen bestimmten biologischen Effekt hervorzurufen und daß dann mit Hilfe von Strom- und Spannungsmessungen jedesmal der gleiche Betriebszustand reproduziert wird. Die Dosis ist dann direkt der Bestrahlungszeit proportional.

Ein gemeinsamer Nachteil aller indirekten dosimetrischen Methoden ist der, daß Absorptionsverluste auf dem Wege zwischen Antikathode und bestrahltem Körper (Absorption in der Glaswand und in eingeschalteten Filtern) durch die Messung nicht erfaßt werden können.

1) Fortschr. a. d Geb. der Röntgenstr. 11, 1.
2) l. c. J in Gl. 11 stellt genau genommen nicht die Intensität, sondern die Ionisationswirkung dar (vgl. S. 29, Einwand von Christen); daher ist J nach den Ausführungen auf S. 46 direkt gleich der Dosis.
3) l. c.

(Eingegangen 14. Mai 1917.)

BESPRECHUNGEN.

A. Schau, Statik mit Einschluß der Festigkeitslehre. (Aus Natur und Geisteswelt, Bd. 497.) kl. 8°. 144 S. m. 149 Abbildungen. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1915. M. 1.20, geb. M. 1.50.

Das Buch bringt eine gedrängte Zusammenstellung der Rechnungsmethoden, welche sich in der Ingenieurpraxis ausgebildet und bewährt haben.

Der erste Abschnitt behandelt statische Probleme. Eine Erörterung über die Prinzipien der Statik ist vermieden. Als Kraftbegriff werden allgemein die Ursachen von Änderungen in Form und Bewegung eines Gegenstandes eingeführt, ohne daß diesem Kraftbegriff, welcher gerade dem Anfänger häufig die größten Schwierigkeiten macht, eine schärfere Abgrenzung gegeben wird. Im Gegenteil wird zur Erläuterung der Zusammensetzung von Kräften, welche an einem gemeinsamen Angriffspunkte wirken, die bekannte Erscheinung der Stromversetzung von Schiffen benützt, obwohl es sich hier kaum um die Zusammensetzung von Kräften handelt. — Die folgenden Kapitel zeigen die gebräuchlichsten Rechnungsmethoden, welche trotz ihrer Einfachheit und trotz Vernachlässigung mancher Nebenerscheinungen in den meisten Fällen zur Ermittelung der richtigen Abmessung von Bauwerken führen.

Der zweite Abschnitt, welcher die Festigkeitslehre behandelt, ist ebenfalls hauptsächlich auf die Bedürfnisse des Bauingenieurs zugeschnitten. Es wird gezeigt, wie einfache Rechnungen im Verein mit erfahrungsmäßig bestimmten Werten der Materialbeanspruchung brauchbare Konstruktionen liefern. Es wäre vielleicht darauf hinzuweisen, daß man derartigen Rechnungen nicht allzuviel Vertrauen entgegenbringen sollte. Es finden sich bei den meisten Bauwerken oder Maschinen Stellen, welche anfänglich stärker, als der Rechnung entspricht, beansprucht werden, weil man im allgemeinen auf plötzliche Querschnittsänderungen der beanspruchten Stücke, auf den örtlichen Einfluß der Auflagereaktionen und auf Montagefehler im Verein mit dem Nachgeben des Baugrundes keine Rücksicht nehmen kann. Im allgemeinen und insbesondere bei den meisten Baukonstruktionen ist dies unbedenklich, weil alle hochbeanspruchten Baustoffe eine erhebliche Zähigkeit aufweisen, so daß bei Eintritt der Belastung das Material an den zu hoch beanspruchten Stellen nachgibt und bleibende Formänderungen erfährt, ohne im übrigen Schaden zu nehmen. Es können sich damit gewissermaßen selbsttätig die Materialbeanspruchungen von einzelnen zu hoch beanspruchten Stellen auf andere weniger stark in Mitleidenschaft gezogene verschieben. Daher führen die einfachen in dem Büchlein erklärten Festigkeitsrechnungen bei ruhenden Konstruktionen zu einwandfrei richtigen Abmessungen. Wenn man dagegen mit der Festigkeitsberechnung schnell laufender Maschinenteile, welche fortgesetzt wechselnden Beanspruchungen unterworfen sind, zu tun hat, muß man größere Vorsicht bei der Berechnung walten lassen. Bei dem häufigen Wechsel der Beanspruchung sind auch an scheinbar nebensächlichen Punkten der Konstruktion bleibende Formänderungen möglichst zu vermeiden, weil sie bei ihrer häufigen Wiederkehr eine allmähliche Zerstörung des Materialgefüges zur Folge haben und, wenn auch erst nach längerer Betriebszeit, zu Brüchen führen. Ein einfaches Beispiel möge dies erläutern. Man denke sich eine Kopfschraube, bei welcher der Kopf mit einer sehr kleinen Abrundung in den Schaft übergeht, so daß an der Übergangsstelle eine scharfe Hohlkehle entsteht. Spannt man diese Schraube in eine Festigkeitsmaschine ein und setzt sie einer axialen Zugbeanspruchung aus, so wird sie eine ihrem Schaftquerschnitt entsprechende Zugfestigkeit aufweisen. Eine mit der üblichen, reichlichen Ausrundung der zwischen Schaft und Kopf der Schraube liegenden Hohlkehle versehene Schraube weist in diesem Falle keine größere Zugfestigkeit auf. Dieses Verhalten erscheint auch bei der praktischen Verwendung der Schraube, wenn sie zur Verbindung ruhender Konstruktionen dient. Man braucht in diesen Fällen auf Nebenumstände, wie die geschilderte Konzentration der Materialbeanspruchung bei plötzlichen Querschnittsveränderungen keine Rücksicht zu nehmen. Ganz anders liegen die Verhältnisse, wenn dieselbe Schraube z. B. zur Befestigung der Lagerschalen einer Dampfmaschine dient, wo sie häufig wechselnden Beanspruchungen ausgesetzt ist. Es zeigt sich hier, daß die Schraube mit mangelhaft ausgerundeter Hohlkehle eine mit dem Krümmungsradius der Ausrundung stark abnehmende Festigkeit hat, während sich bei reichlicher Ausrundung und sanften Querschnittsübergängen sehr viel höhere Festigkeit der Schraube ergibt. In besonderen Fällen kann aber auch schon bei der erstmaligen Beanspruchung die mit scharfer Hohlkehle versehene Schraube eine überraschend kleine Festigkeit aufweisen, nämlich dann, wenn die Belastung in sehr kurzer Zeit aufgebracht wird. Verwendet man die betrachtete Schraube für Befestigung eines Dampfhammers oder eines Geschützunterbaues, so zerreißen Schrauben, welche ungenügende Abrundungen aufweisen, häufig bei der ersten Beanspruchung, selbst wenn man die Schraubenquerschnitte sehr reichlich bemißt. Die Elastizitätstheorie lehrt bekanntlich, daß bei schlecht ausgerundeten Querschnittsänderungen eine starke Konzentration der Materialspannungen eintritt. Bei häufig wechselnder Beanspruchung sowohl als auch bei einmaliger, sehr schnell auftretender können diese zusätzlichen Beanspruchungen nicht durch das Fließen des zähen Materials ausgeglichen werden, so daß die nur schwierig zu berechnenden zusätzlichen Beanspruchungen von ausschlaggebender Bedeutung sein können. Damit müssen in außerordentlich zahlreichen Fällen Brucherscheinungen an Maschinenteilen erklärt werden, welche nach den in dem vorliegenden Büchlein erklärten Berechnungsmethoden scheinbar nur geringen Beanspruchungen unterliegen. Ein Hinweis auf die Anwendungsgrenzen der einfachen Festigkeitsrechnungen scheint mir daher recht empfehlenswert.

H. Thoma.

Curt Schmidt, Das periodische System der chemischen Elemente. 8°. III, 143 S. mit 32 Abbildungen und Tabellen. Leipzig, Joh. Ambr. Barth. 1917. Preis geh. M. 6.—, geb. M. 7.50.

Das periodische System der chemischen Elemente ist durch die Forschungen der letzten Jahre wieder in den Vordergrund des Interesses gerückt. Das vorliegende Werk will seine Entstehungsgeschichte einem weitern Kreise zugänglich machen. Das Charakteristische der früheren Bemühungen, Gesetzmäßigkeiten in den Atomgewichtszahlen zu finden, tritt in der Darstellung gut hervor und die Entdeckungsgeschichte wird

mit Objektivität behandelt. Man hatte das periodische System eine Antwort genannt, für die uns die Frage fehlt. Dementsprechend zielten die Bemühungen um das periodische System weniger darauf ab, die innere Begründung für die gewonnenen Gesetzmäßigkeiten zu finden, als darauf, durch immer neue Anordnung und Gruppierung die bereits erkannten Gesetzmäßigkeiten deutlicher hervortreten zu lassen und womöglich neue zu finden. In der Hauptsache diente es pädagogischen und heuristischen Zwecken. Es gab die Systematik für den Vortrag der anorganischen Chemie und bildete den Wegweiser für die Auffindung neuer Elemente. Von Interesse ist es, neben die wohlbekannten eingetroffenen Prophezeiungen die nicht geringe Zahl der verunglückten zu halten: Brauners Austriacum, welches das im Tellur enthaltene schwerere Element sein sollte, dessen Anwesenheit die vermeintlich falsche Stellung gegenüber dem Jod veranlaßte, Ramsays und Rayleighs Anglium, Scotium und Hibernium, in die in Analogie zu den Metall-Triaden der achten Gruppe das dahin gehörige Argon sollte zerlegt werden können u. a. Völlig phantastisch muten die Gedanken an, mit denen Mendelejeff selbst gegen das Ende seines Lebens im Jahre 1903 hervortrat in einer Abhandlung: „Versuch einer chemischen Auffassung des Weltäthers", in der er seine letzten Gedanken über das periodische System niederlegte. Er glaubte da eine „realistische" Erklärung der Radioaktivität zu geben, die er in Gegensatz zu der „metachemischen" und „verschwommenen" Elektronentheorie stellte.

Die Darstellung führt bis in die neueste Zeit und behandelt die Radioelemente und die Isotopie sowie die Ordnungszahlen der Elemente und die Hochfrequenzspektren. Hier allerdings wäre etwas größere Ausfuhrlichkeit wohl am Platze gewesen, ebenso wie bei der Besprechung der Atommodelle. Man kann so das Buch Lesern empfehlen, welchen die neueren Untersuchungen vertraut sind und die über die Entstehungsgeschichte sich unterrichten wollen, weniger aber solchen, welchen der chemische Teil vertraut ist und die eine zusammenfassende Übersicht über die neuesten Arbeiten suchen, welche das periodische System betreffen.

Bemerkt sei noch, daß die am Schlusse gegebene Tabelle nicht bis auf den im Text vertretenen Standpunkt geführt ist: Radium *G*, das auf den Seiten 59 und 63 besprochen wird, fehlt in der Tabelle.

A. Coehn.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Innsbruck Dr. Artur March für theoretische Physik.

Gewählt: Der ord. Professor der Physik und Elektrotechnik an der Universität Göttingen Geh. Regierungsrat Dr. Hermann Th. Simon für das Studienjahr 1917/18 zum Rektor dieser Universität.

Verliehen: Dem Privatdozenten für höhere Mathematik an der böhmischen Universität in Prag Dr. Gottlieb Bydzowski der Titel eines a. o. Universitätsprofessors, dem Privatdozenten für reine und angewandte Physik an der Universität Königsberg Dr. Gerhard Hoffmann und dem Privatdozenten für Mathematik an der Universität Bonn Dr. Oswald Müller der Titel Professor, dem ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität München Dr. Arnold Sommerfeld der Titel Geh. Hofrat.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der praktischen Geometrie und höheren Geodäsie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Matthias Haid (unter gleichzeitiger Verleihung des Titels Geheimer Rat).

Gestorben: Der Professor für Physik und Elektrotechnik an den Technischen Staatslehranstalten in Chemnitz Oberregierungsrat Dr. Adolf F. Weinhold.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 15. — 1. August 1917. — 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 16 am 27. Juli 1917.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Ein Pendelversuch für das physikalische Praktikum.

Von H. Kost.

Der folgende Pendelversuch bezweckt, dem Praktikanten den Übergang vom physikalischen Experiment zu dessen rechnerischer Auswertung mit dem Differentialquotienten zu zeigen.

Die praktische Aufgabe ist die Ermittlung der richtigen Pendellänge für ein gegebenes Uhrwerk durch Rechnung. Die vorausgesetzten Hilfsmittel sind:

1. Ein Uhren-Gangwerk mit Sekundenzeiger und einem Pendel, dessen Schwingungszahl sich in weiten Grenzen verändern läßt.
2. Eine einregulierte Uhr mit Sekundenzeiger.

Der Gang der Beobachtungen läuft an Hand der folgenden Rechnung: Aus der allgemeinen Gleichung für das mathematische Pendel folgt die für die Rechnung nötige Beziehung:

$$l = a \cdot t^2, \tag{1}$$

worin l die Pendellänge in Millimetern, t die Schwingungszeit in Sekunden und a eine Konstante gleich 248,533 mißt. Die erste Beobachtung bestimmt für die Schwingungszeit des willkürlich eingestellten Pendels, beispielsweise gleich 0,8 sec, die Gangdifferenz der beiden Uhren Δt mit 0,057143 sec für eine Pendelschwingung. Durch doppelte Anwendung von Gleichung (1) erhält man die gewünschte Längenkorrektion Δl für das Pendel:

$$\left.\begin{aligned} \Delta l = l - l_1 &= a(t^2 - t_1^2) \qquad t_1 = t \pm \Delta t. \\ &= a(t^2 - (t \pm \Delta t)^2) \\ &= a\Delta t(2t \pm \Delta t) \\ &= 248{,}5 \cdot 0{,}094694 = 23{,}5 \text{ mm} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

für das angegebene Beispiel.

Nun ist die Änderung der Pendellänge Δl für eine bestimmte Zeitdifferenz abhängig von der Pendellänge selbst oder der entsprechenden Schwingungszahl oder deren Veränderung Δt. Diesen Funktionswert können wir durch Differentiation der Gleichung (1) sofort erhalten; er ist aber durch Gleichung (2) bereits abgeleitet. Schreiben wir diese in der Form

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = 2at \pm \Delta t, \tag{3}$$

so erhalten wir für den Differentialquotienten

$$\frac{dl}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = 2at. \tag{4}$$

Eine weitere Ausführung, sowie ein Hinweis auf die graphische Bedeutung der beiden Funktionen (1) und (4) erübrigt sich an dieser Stelle.

(Eingegangen 16. Juni 1917.)

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

II.

Die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes.

Wir wollen, unter Zugrundelegung des in der ersten Abhandlung aufgestellten mechanischen Prinzips

$$\sum \Big[\delta x \Big\{ \mu(x,y,z,t) \frac{du(x,y,z,t)}{dt} d\tau + 2\int_\Omega \mu(\xi,\eta,\zeta,t) \Big(u(\xi,\eta,\zeta,t) - u_0(x,y,z,t) \Big) \dot{n}_\nu \, d\omega \Big\} + \cdots \Big] = 0, \tag{1}$$

die Bewegungsgleichungen in einem inkompressiblen Medium ableiten, für das wir die Bedingung:

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

hinzunehmen müssen; wir gehen in der üblichen

Weise vor, indem wir die Bedingung mit Hilfe eines Multiplikators

$$+p(x,y,z,t)\,\overline{d\tau}$$

einführen, also

$$+p(x,y,z,t)\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)$$

zu dem Faktor von $\overline{d\tau}$ in (1) hinzuaddieren.

Es sei sogleich bemerkt, daß nicht stets an eine absolut strenge Inkompressibilität gedacht wird, sondern wir denken an ein „schwach kompressibles Medium", für welches wir in einer gewissen Annäherung die Inkompressibilitätsbedingung voraussetzen können, und ich möchte hier nebenher meiner an dieser Stelle nicht näher zu begründenden Ansicht Ausdruck geben, daß man in jedem Medium bei der Betrachtung von Schwingungen auf diesem Wege zu einer um so größeren Annäherung gelangen wird, je kleiner die Schwingungsdauer der zu betrachtenden Schwingungen ist. Es wird auch für die Feldgleichungen nichts ausmachen, wenn wir für die sichtbaren Geschwindigkeiten des Mediums (u_0, v_0, w_0) an Stelle der Inkompressibilitätsbedingung andere Voraussetzungen einführen würden, z. B. die Annahme, daß die sichtbare Bewegung wie in einem vollkommenen Gase vor sich geht, oder dergl. Es ist aber für die erste Einführung am einfachsten, allgemein die Inkompressibilität in einer gewissen großen Annäherung vorauszusetzen; wenn diese Bedingung auch für die Schwingungen mit der sehr kleinen Schwingungsdauer T in einer sehr großen Annäherung erfüllt sein soll, so soll doch auch hier der Spielraum für ganz geringe Dichteänderungen gegeben sein, ohne welche ja Pulsationen von der Schwingungsdauer T gar nicht möglich wären, also

$$\left.\begin{aligned}\mu(x,y,z,t)&=\mu_0(x,y,z,t)+\varepsilon,\\ \frac{\overline{d\varepsilon}}{dt}&=-\mu_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

wo ε gegen μ_0 ganz außerordentlich klein sein soll. μ, u, v, w sollen stetige Funktionen der Stelle und der Zeit sein. Wo Sprungflächen (z. B. an der Grenze zweier Medien) für diese Funktionen in Betracht gezogen werden, sind zunächst dünne Schichten anzunehmen, in denen die Sprünge durch rasche stetige Änderungen vermittelt werden, und es ist im allgemeinen besonders zu untersuchen, ob der Einfluß dieser Schichten zu vernachlässigen ist oder nicht.

Aus dem Fundamentalprinzip (1) ergeben sich die drei Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\mu\frac{du}{dt}&=-\frac{\partial p}{\partial x}+2\mu\hat{u}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}+\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}+\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}\right)\\&\quad+2\left\{\frac{\partial\mu u}{\partial x}\hat{u}+\frac{\partial\mu u}{\partial y}\hat{v}+\frac{\partial\mu u}{\partial z}\hat{w}\right\},\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

welche zu (3) hinzuzunehmen sind.

Wir sehen, daß durch das Individualitätsprinzip die Glieder

$$2\mu\hat{u}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}+\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}+\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}\right)+2\left\{\frac{\partial\mu u}{\partial x}\hat{u}+\frac{\partial\mu u}{\partial y}\hat{v}+\frac{\partial\mu u}{\partial z}\hat{w}\right\},\ldots$$

zu den gewöhnlichen Gleichungen der Hydrodynamik auf der rechten Seite hinzutreten; in der klassischen Hydrodynamik sind diese Glieder zu vernachlässigen.

Es handelt sich nun darum, aus diesen Gleichungen zunächst die Bestimmung der schwingenden Bewegungen herauszuschälen, das soll die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung sein, während wir die Bestimmung der sichtbaren Bewegungen erst später ins Auge fassen werden. Hierbei wird uns eine Vereinfachung große Dienste leisten, welche ich als die Voraussetzung des „universellen Dralles" bezeichne. Wir wollen Lösungen der Bewegungsgleichungen finden, welche von der folgenden Form sind:

$$\left.\begin{aligned}\mu u&=\mu_0\left\{u_0+u_1\cos\frac{t}{T}2\pi+u_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right\}=u'+U',\\ \mu v&=\mu_0\left\{v_0+v_1\cos\frac{t}{T}2\pi+v_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right\}=v'+V',\\ \mu w&=\mu_0\left\{w_0+w_1\cos\frac{t}{T}2\pi+w_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right\}=w'+W',\end{aligned}\right|\qquad(5)$$

wo, unter Verwendung des besonderen Differentiationszeichens $\frac{\overline{d}}{dt}$ mit der Definition:

$$\frac{\overline{df(x,y,z,t)}}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}u_0+\frac{\partial f}{\partial y}v_0+\frac{\partial f}{\partial z}w_0,$$

u', v', w' die Bedingungen

$$\frac{\overline{du'}}{dt}=\frac{\overline{dv'}}{dt}=\frac{\overline{dw'}}{dt}=0,\qquad(6)$$

U', V', W' die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}U'&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}^{1)}-a\left(\frac{\partial W'}{\partial y}-\frac{\partial V'}{\partial z}\right)\\ V'&=\frac{\partial\Phi}{\partial y}-a\left(\frac{\partial U'}{\partial z}-\frac{\partial W'}{\partial x}\right),\\ W'&=\frac{\partial\Phi}{\partial z}-a\left(\frac{\partial V'}{\partial x}-\frac{\partial U'}{\partial y}\right)\end{aligned}\right.\qquad(7)$$

erfüllen sollen und a eine sehr kleine Konstante vorstellt, auf deren Größenordnung wir weiter unten zurückkommen.

1) Wo Φ und seine ersten Ableitungen als stetige Funktionen von x, y, z, t zu betrachten sind.

Es handelt sich also um die Voraussetzung eines etwas komplizierteren Zustandes, als der oft in der Hydrodynamik vorausgesetzte Zustand der Wirbellosigkeit ist; zu einer gleichförmigen und zu einer wirbellosen Bewegung kommt noch im allgemeinen eine Wirbelbewegung hinzu, deren Geschwindigkeitskomponenten bzw. den Wirbelkomponenten proportional sind, ein „universeller Drall" mit außerordentlich kleiner Proportionalitätskonstante.

Wenn wir Lösungen finden, welche der Voraussetzung des universellen Dralles entsprechen, so handelt es sich hier offenbar um keine prinzipielle, mechanische Fundamentalhypothese, wie bei der Voraussetzung des mechanischen Grundprinzips, sondern um die Voraussetzung eines gewissen Anfangszustandes, der sich so zufällig zu einer Anfangszeit vorfand.

Bezüglich der Zerlegungen von der Art:

$$\left.\begin{aligned} \mu u &= \mu_0 \left\{ u_0 + u_1 \cos\frac{t}{T} 2\pi + u_2 \sin\frac{t}{T} 2\pi \right\}, \ldots \\ u' &= u'_0 + u'_1 \cos\frac{t}{T} 2\pi + u'_2 \sin\frac{t}{T} 2\pi, \ldots \\ U' &= U'_0 + U'_1 \cos\frac{t}{T} 2\pi + U'_2 \sin\frac{t}{T} 2\pi, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

muß hier noch eine wichtige Bemerkung hinzugefügt werden. Wenn wir, wie in den grundlegenden Betrachtungen der ersten Abhandlung, verlangen, daß

$$T\frac{du_0}{dt},\; T\frac{du_1}{dt},\; T\frac{du_2}{dt}, \ldots$$

zu vernachlässigen sind, so genügt dies wohl, wenn man nur mit den Geschwindigkeiten, nicht mit den Beschleunigungen zu rechnen hat; nunmehr müssen wir die Zerlegung etwas schärfer fassen, indem wir auch verlangen, daß die Größen

$$T\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2},\; T\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\; T\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \ldots$$

zu vernachlässigen sind; andernfalls würde man über Größen von der Art

$$TF(x,y,z,t)\cos\frac{t}{T} 2\pi,\; TF(x,y,z,t)\sin\frac{t}{T} 2\pi,$$

wenn $F(x,y,z,t)$ von ähnlicher Größenordnung ist, wie z. B. $u_1, u_2, \ldots.$, nicht entscheiden können, ob sie zu der einen oder andern Art der Geschwindigkeiten gehören, und ihre Ableitungen nach der Zeit würden doch bereits ihrer Größenordnung nach zu berücksichtigen sein.

Wegen der Gleichungen (6) werden in großer Annäherung

$$u'_1 = u'_2 = v'_1 = v'_2 = w'_1 = w'_2 = 0 \quad (9)$$

sein und

$$u_0 = u'_0 + U_0', \ldots, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1'}{\partial y} - \frac{\partial V_1'}{\partial z} &= \frac{\partial \mu_0 w_1}{\partial y} - \frac{\partial \mu_0 w_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial W_2'}{\partial y} - \frac{\partial V_2'}{\partial z} &= \frac{\partial \mu_0 w_2}{\partial y} - \frac{\partial \mu_0 v_2}{\partial z}, \ldots. \end{aligned} \quad (11)$$

Machen wir von der Form (5) der Größen μu, μv, μw unter Berücksichtigung der Bedingungen (6) und (7) Gebrauch, so ist der Kosinusterm[1]) der Größe

$$\mu\frac{du}{dt} = \frac{d\mu u}{dt} + \mu u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

der folgende:

$$-\frac{2\pi}{T} a\mu_0\left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \mu_0 u_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \mu_0\frac{du_1}{dt} + \mu_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial y} v_1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} w_1\right),$$

wenn μ_0 konstant ist und ψ_1 eine mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktion der Stelle und der Zeit vorstellt, und so ergibt sich aus der ersten Gleichung (4) durch Gleichsetzung der Kosinusterme:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} = \;& \frac{\partial u}{\partial x} u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial y} v_1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} w_1 \\ & - u_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) \\ & + \frac{2\pi}{T} a\left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad (12a)$$

analog zwei andere Gleichungen, welche durch zyklische Vertauschung entstehen, und in derselben Weise durch Gleichsetzung der Sinusterme:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_2}{dt} = \;& \frac{\partial u_0}{\partial x} u_2 + \frac{\partial u_0}{\partial y} v_2 + \frac{\partial u_0}{\partial z} w_2 \\ & - u_0\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right) \\ & - \frac{2\pi}{T} a\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad (12b)$$

und analog zwei andere Gleichungen, welche durch zyklische Vertauschung entstehen. Dabei sind φ_1 und φ_2 zwei mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen der Stelle und der Zeit.

Die Bedingung, daß die Funktionen

$$u_1,\; v_1,\; w_1;\quad u_2,\; v_2\; w_2$$

im Unendlichen verschwinden, würde uns von den Funktionen φ_1 und φ_2 befreien, wenn wir für dieselben die Gleichungen

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = 0 \quad (13)$$

nachweisen könnten. Das ist nun tatsächlich für die drei Hauptfälle möglich, welche für uns in Betracht kommen:

1) Wir werden bei Zerlegungen von der Art

$$f = f_0 + f_1 \cos\frac{t}{T} 2\pi + f_2 \sin\frac{t}{T} 2\pi$$

f_0 kurz den sichtbaren Term, f_1 den Kosinusterm und f_2 den Sinusterm nennen.

1. Der Fall der strengen Inkompressibilität für die schwingenden Bewegungen:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0$$

(Fall des reinen Äthers). In diesem Falle ergeben sich die Gleichungen (13), wenn man die Gleichungen (12a) und (12b) bzw. nach x, y, z differenziert und addiert.

2. Der Fall, daß zwar

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0,$$

daß aber Elemente von sehr kleinen Dimensionen (Elektronen) vorhanden sind, denen ganz bestimmte konstante

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=\vartheta_1, \text{gleich} + |\vartheta_1| \text{ od. gleich} - |\vartheta_1|$$

zukommen, und deren sichtbare Geschwindigkeiten Bewegungen starrer Körper entsprechen. (Fall von Elektronen mit sichtbar starrer Bewegung.)

3. Der Fall, in dem wieder

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0$$

überall erfüllt ist, dagegen in jedem kleinen Raumgebiete eine große Zahl von Elektronen mit positiven und negativen ϑ_1 vorhanden sind, und zwar eine gleich große Zahl beider Elektronenarten, mit Geschwindigkeiten

$$A+\alpha,\ B+\beta,\ C+\gamma$$

für die Elektronen mit positivem ϑ_1,

$$A-\alpha,\ B-\beta,\ C-\gamma$$

für die Elektronen mit negativem ϑ_1, wobei A, B, C Geschwindigkeiten starrer Körper sind, während diese Voraussetzung für die Geschwindigkeiten α, β, γ nicht erfüllt zu sein braucht.

In den Fällen (2) und (3) ergibt sich in derselben Weise, wie im Falle (1), daß die Gleichungen (13) erfüllt sein müssen, im Falle (3) wenigstens für die Mittelwerte der φ_1 und φ_2 in kleinen Raumgebieten. Aus den drei genannten Fällen lassen sich im übrigen die wichtigsten, in der Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen vorkommenden Fälle kombinieren.

Indem wir noch zur Abkürzung

$$\frac{2\pi a}{T}=c\,[1] \tag{14}$$

setzen, ergeben sich für die drei Hauptfälle die folgenden Gleichungssysteme:

1. Fall. (Reiner Äther).

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_2}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}=\frac{1}{c}\left\{\frac{du_1}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}u_1-\frac{\partial u_0}{\partial y}v_1-\frac{\partial u_0}{\partial z}w_1\right\},\ldots,\\
&\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial z}=-\frac{1}{c}\left\{\frac{du_2}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}u_2-\frac{\partial u_0}{\partial y}v_2-\frac{\partial u_0}{\partial z}w_2\right\},\ldots,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

2. Fall. (Freie Elektronen mit sichtbar starrer Bewegung).

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_2}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}=\frac{1}{c}\left\{\frac{du_1}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}u_1-\frac{\partial u_0}{\partial y}v_1-\frac{\partial u_0}{\partial z}w_1\right\}+\frac{1}{c}u_0\vartheta_1,\ldots,\\
&\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial z}=-\frac{1}{c}\left\{\frac{du_2}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}u_2-\frac{\partial u_0}{\partial y}v_2-\frac{\partial u_0}{\partial z}w_2\right\},\ldots,\\
&\qquad\frac{d\vartheta_1}{dt}=0,\\
&\qquad\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

3. Fall. (Elektrisch neutrale, sichtbar starre Körper).

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_2}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}=\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x}A+\frac{\partial u_1}{\partial y}B+\frac{\partial u_1}{\partial z}C-\frac{\partial A}{\partial x}u_1-\frac{\partial A}{\partial y}v_1-\frac{\partial A}{\partial z}w_1\right\}\\
&\qquad+\frac{1}{c}u_x,\ldots,\\
&\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial z}=-\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}A+\frac{\partial u_2}{\partial y}B+\frac{\partial u_2}{\partial z}C-\frac{\partial A}{\partial x}u_2-\frac{\partial A}{\partial y}v_2-\frac{\partial A}{\partial z}w_2\right\},\ldots,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right| \tag{17}$$

1) c wird eine sehr große Geschwindigkeit vorstellen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der elektromagnetischen Optik.

Dabei sind

$$\left.\begin{array}{l} u_x = \alpha \theta_1 , \\ u_y = \beta \theta_1 , \\ u_z = \gamma \theta_1 \end{array}\right\} \quad (17a)$$

zu setzen und als die Strömungsgeschwindigkeiten in Leitern zu bezeichnen; unter

$$u_1,\ v_1,\ w_1,\ u_2,\ v_2,\ w_2$$

sind hier die Mittelwerte dieser Funktionen in kleinen Räumen zu verstehen, für welche die Mittelwerte der θ_1 null sind. Es ist zu beachten, daß trotz des Verschwindens der Mittelwerte der θ_1 die Mittelwerte der

$$\alpha\theta_1,\ \beta\theta_1,\ \gamma\theta_1$$

im allgemeinen nicht verschwinden, da ja zu jedem — (α, β, γ) das entsprechende $(-\theta_1)$ zugehört.

Bei Anwendung gewisser Vorsicht können wir, wie in der Lorentzschen Theorie, den Fall (2) als den grundlegenden Fall betrachten, aus dem alle übrigen konstruiert werden können, wir haben nur zu beachten, daß wir es bei der Anwendung auf Leiter mit den Mittelwerten der Funktionen

$u_0, v_0, w_0;\ u_1, v_1, w_1;\ u_2, v_2, w_2;\ u_0\theta_1,\ v_0\theta_1,\ w_0\theta_1$

zu tun haben und die Gleichungen nur auf diese Mittelwerte anwenden dürfen, sonst würden die Funktionen

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, \ldots$$

im allgemeinen nicht zu vernachlässigen sein.

Bei Anwendung dieser Vorsicht können wir also die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{1}{c}\left\{\frac{d u_1}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x} u_1 \right. \\ \qquad \left. - \frac{\partial u_0}{\partial y} v_1 - \frac{\partial u_0}{\partial z} w_1 \right\} + \frac{1}{c} u_0 \theta_1, \ldots, \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = - \frac{1}{c}\left\{\frac{d u_2}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x} u_2 \right. \\ \qquad \left. - \frac{\partial u_0}{\partial y} v_2 - \frac{\partial u_0}{\partial z} w_2 \right\}, \ldots, \\ \frac{d\theta_1}{dt} = 0,\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \quad (18)$$

als die grundlegenden Gleichungen des elektromagnetischen Feldes bezeichnen.

(Eingegangen 27. Juni 1917.)

Über eine in metallisch leitenden Kristallen zu erwartende elektrische Nachwirkung.

Von T. Heurlinger.

Nach den Gleichungen, welche die bekannten galvano- und thermomagnetischen Erscheinungen beschreiben, sollen homogene und isotrope metallische Leiter in einem Magnetfeld einen Wechselstrom-Gleichstromeffekt und eine elektrische Nachwirkung zeigen[1]). Die Übereinstimmung zwischen den berechneten Effekten und den in Wismut, Antimon und Tellur[2]) beobachteten Effekten legt die Vermutung nahe, daß die scheinbare Ausnahmestellung, welche diese Elemente hinsichtlich der Elektrizitätsleitung einnehmen, nur in den exzeptionell hohen Werten ihrer galvano- und thermomagnetischen Effekte begründet ist. Drähte aus den erwähnten Elementen zeigen allerdings auch ohne Magnetfeld Nachwirkungserscheinungen, aber wie es scheint, nur wenn das Material nicht quasiisotrop und homogen ist. Zur Entscheidung der Frage, ob diese Erscheinungen sich auf bekannte Eigenschaften der Kristalle zurückführen lassen, empfiehlt sich die Untersuchung von möglichst homogenen Kristallen. Bei der Deutung solcher Versuche können vielleicht die folgenden Bemerkungen nützlich sein.

Es scheint, plausibel anzunehmen, daß eine Elektrizitäts- und Wärmeströmung, welche in elektrodynamischer Hinsicht als stationär betrachtet werden kann, den folgenden Gleichungen genügt:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = A_{11} j_{x1} + A_{12} \frac{\partial u}{\partial x_1}, \\ Y_1 = A_{11} j_{y1} + A_{12} \frac{\partial u}{\partial y_1}, \\ Z_1 = A'_{11} j_{z1} + A'_{12} \frac{\partial u}{\partial z_1}, \end{array}\right\} \quad (1_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} W_{x_1} = A_{21} j_{x1} + A_{22} \frac{\partial u}{\partial x_1}, \\ W_{y_1} = A_{21} j_{y1} + A_{22} \frac{\partial u}{\partial y_1}, \\ W z_1 = A'_{21} j_{z1} + A'_{22} \frac{\partial u}{\partial z_1}, \end{array}\right\} \quad (2_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$Dc\frac{\partial u}{\partial t} = X j_x + Y j_y + Z j_z - \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial Wz}{\partial z}\right). \quad (5)$$

1) T. Heurlinger, diese Zeitschr. 17, 221, 1916. (Druckfehlerberichtigung: S. 222, Zeile 8 und 9 sind a_{11}'' und a_{12}'' vertauscht.)

2) Bei den zwei letzten Elementen war ein Vergleich

Hier bedeuten: u die Temperatur (relativ zur Umgebung), D die Dichte, c die spezifische Wärme, $A_{11} \ldots A_{22}$, $A_{11}' \ldots A_{22}'$ Funktionen der absoluten Temperatur, X, Y, Z, j_x, j_y, j_z, W_x, W_y, W_z bzw. X_1, ... W_{z1} die Komponenten der elektrischen Feldstärke, der elektrischen Stromdichte und der Wärmestromdichte längs den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems von beliebiger Orientierung bzw. des Hauptkoordinatensystems. (1_1) und (2_1) entsprechen den Symmetrieverhältnissen bei Kristallen welche eine 2-zählige und senkrecht dazu eine 3-, 4-, oder 6-zählige Symmetrieachse haben[1]). Wird das Koordinatensystem x, y, z definiert durch die Richtungskosinus

	x	y	z
x_1	$-\sin\varphi$,	$\cos\varphi$,	0
y_1	0 ,	0 ,	1
z_1	$\cos\varphi$,	$\sin\varphi$,	0

so wird ersichtlich:

$$\left.\begin{aligned} X &= a_{11} j_x + a_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{11} j_y + b_{12} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ Y &= a'_{11} j_y + a'_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{11} j_x + b_{12} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ Z &= A_{11} j_z + A_{12} \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} W_x &= a_{21} j_x + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{21} j_y + b_{22} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ W_y &= a'_{21} j_y + a'_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{21} j_x + b_{22} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ W_z &= A_{21} j_z + A_{22} \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &= A'_{ij} \cos^2\varphi + A_{ij} \sin^2\varphi, \\ a'_{ij} &= A_{ij} \cos^2\varphi + A'_{ij} \sin^2\varphi, \\ b_{ij} &= (A'_{ij} - A_{ij}) \cos\varphi \sin\varphi. \end{aligned}\right\} i, j = 1, 2.$$

Es kann angenommen werden, daß an der Oberfläche

$$j_n = 0, \quad (6)$$
$$W_n = hu, \quad (7)$$

wo n die nach außen gezogene Normale und h eine von der Orientierung des Oberflächenelements unabhängige Temperaturfunktion bedeutet.

Die Gleichungen (1)—(7) sind den Gleichungen sehr ähnlich, welche für isotrope Körper im Magnetfelde gelten, und wenn man die Temperaturabhängigkeit von h und den andern Koeffizienten vernachlässigt, können sie in derselben Weise behandelt werden. Eine Komplikation liegt aber darin, daß gewisse vereinfachende Voraussetzungen über die Koeffizienten hier nur in roher Annäherung zutreffen.

Wir stellen uns jetzt vor, daß die Endflächen eines zylindrischen Kristallstabes mit einer Stromquelle verbunden werden, die nach dem Erreichen des stationären Zustandes ausgeschaltet wird. Auch wenn dafür gesorgt wird, daß der Temperaturgradient in der Längsrichtung zu vernachlässigen ist, herrscht im stationären Zustand im allgemeinen ein transversaler Temperaturgradient[1]). Dieser, welcher nach dem Ausschalten der Stromquelle allmählich ausgeglichen wird, bedingt eine abklingende elektrische Feldstärke in der Längsrichtung. Diese Nachwirkung kann mittels der Gleichungen (1)—(7) berechnet werden. Unter der Voraussetzung, daß die Abweichung von der Isotropie klein ist, und daß die äußere Wärmeleitung im Vergleich mit der inneren vernachlässigt werden kann, ergibt sich für einen Stab mit kreisförmigem Querschnitt bei kleiner primärer Feldstärke annähernd:

$$X^{(0)} = -\frac{b_{12} b_{21}}{A_{22} a_{11}} X \equiv -\frac{1}{4} \frac{(A_{12} - A'_{12})(A_{21} - A'_{21})}{A_{22}(A'_{11} \cos^2\varphi + A_{11} \sin^2\varphi)} \sin^2 2\varphi \cdot X, \quad (8)$$

$$X^{(t)} = X^{(0)} \sum_{1}^{\infty}(n) \frac{2}{\lambda_n^2 - 1} e^{\frac{A_{22} \lambda^2_n}{D c R^2} t}. \quad (9)$$

Hier bedeuten: X die primäre Feldstärke, $X^{(t)}$ die x-Komponente der elektrischen Feldstärke zur Zeit t nach dem Ausschalten der Stromquelle, φ den Winkel zwischen Hauptachse und Längsrichtung, R den Radius des Querschnittes und λ_n die positiven Wurzeln der Gleichung

$$\frac{d J_1(x)}{dx} = 0$$

wo $J_1(x)$ die Besselsche Funktion erster Ordnung bedeutet.

$-A_{22}$ und $-A'_{22}$ (deren Unterschied vernachlässigt wurde) sind die Werte der Wärmeleitfähigkeit von Kristallstäben senkrecht und parallel zur Hauptachse, A_{11} und A'_{11} sind die entsprechenden Werte des spezifischen Widerstandes. Die Koeffizienten der thermoelektrischen Kraft und der Peltierwärme, $e_{\perp\parallel}$ bzw. $\Pi_{\perp\parallel}$, für die Kombination zweier Stäbe senkrecht und parallel zur Hauptachse kann man in ähnlicher Weise berechnen, wie es Lorentz für isotrope Körper getan hat. Da das von der Übergangsschicht stammende Glied aus energetischen Gründen hier fortfallen muß, ergibt sich:

$$e_{\perp\parallel} = A_{12} - A'_{12}, \quad \Pi_{\perp\parallel} = A_{21} - A'_{21}.$$

Die Vorzeichen sind so gewählt, daß e_{AB}

zwischen Theorie und Messung nur in sehr beschränktem Maße möglich.

1) Vgl. W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, S. 313.

1) Hierauf hat zuerst W. Thomson hingewiesen.

positiv ist, wenn der thermoelektrische Strom in der kälteren Lötstelle von A nach B fließt, und daß Π_{AB} positiv ist, wenn ein Strom von A nach B die Lötstelle erwärmt.

Zur Schätzung der Größenordnung der in Wismutkristallen zu erwartenden Nachwirkung berechnen wir X^0/X aus (8) für $\varphi = 45^0$. Mit den von G. Borelius und A. E. Lindh[1]) gefundenen Werten für $e_{\perp 11}$, A_{11} und A'_{11}, dem Werte $e_{\perp \|} \cdot T$ für $\Pi_{\perp \|}$ und dem Tabellenwerte für A_{22} ergibt sich bei Zimmertemperatur $X^0/X = + 1 \cdot 10^{-2}$, was dem Vorzeichen und der Größenordnung nach mit dem im Wismut beobachteten Effekt übereinstimmt[2]). Eine eingehende Vergleichung zwischen Theorie und Messung wird wahrscheinlich von anderer Seite in Zusammenhang mit einer experimentellen Untersuchung vorgenommen.

1) G. Borelius und A. E. Lindh, Ann. d. Phys. **51**, 607, 1916.

2) Dies Resultat wurde in einem Vortrag vor der Versammlung skandinavischer Naturforscher in Kristiania im Juli 1916 mitgeteilt.

Lund, Juni 1917.

(Eingegangen 26. Juni 1917.)

Bisherige Elektrodynamik und das Interferenz-Prinzip.

Von K. Uller.

Wenn man glaubt einen zeitlich veränderlichen Naturvorgang in einem Mittel durch Gleichungen richtig dargestellt zu haben, so muß man prüfen, wie nach ihnen die aus einem Quellgebiet auslaufenden Störungen beschaffen sind, also wie eine Welle gebaut ist; denn die Grundgleichungen der Theorie geben stets den allgemeinen Fall der gegenseitigen Durchkreuzung beliebig vieler Wellen. Es genügt also nicht, die Grundgleichungen, denen oft hypothetische Elemente beigemischt sind, aufzustellen, man muß auch in ihnen allemal das Interferenzprinzip zur Geltung bringen und nachschauen, ob dasselbe nicht falsche Bestandteile der Theorie an die Oberfläche bringt.

Wir wollen das nun einmal an bisherigen Theorien des elektromagnetischen Feldes durchführen.

Es bezeichne: $\mathfrak{u}$ die Geschwindigkeit eines Körperelementes gegenüber dem Bezugssystem, λ seine elektrische Leitfähigkeit, $\mathfrak{F}_e$ bzw. $\mathfrak{F}_m$ die Kraft auf einen mit dem Körperpunkt bewegten elektrischen bzw. magnetischen Einheitspol, $\mathfrak{D}_e$ bzw. $\mathfrak{D}_m$ die elektrische und magnetische Erregung sowie V eine universelle Konstante von der Dimension einer Geschwindigkeit. Dann lauten die üblichen Grundformeln

$$\frac{\partial' \mathfrak{D}_e}{\partial t} + \lambda \mathfrak{F}_e = V \operatorname{rot} \mathfrak{F}_m \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial' \mathfrak{D}_m}{\partial t} = - V \operatorname{rot} \mathfrak{F}_e \qquad \text{(II)}$$

mit $\partial' \mathfrak{D}/\partial t = \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{D} - \operatorname{rot} [\mathfrak{u} \mathfrak{D}]$.

Wir setzen im folgenden homogene und isotrope Körper voraus, in denen elektrische und magnetische Dichten nicht existieren, in welchen also ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{D}_e = 0; \quad \operatorname{div} \mathfrak{D}_m = 0. \qquad \text{(III) (IV)}$$

Die verschiedenen bisher aufgestellten theoretischen Versuche unterscheiden sich nur hinsichtlich der Verknüpfungsgleichungen zwischen den Erregungen und den Kräften.

A. Die Cohnsche Theorie setzt

$$\mathfrak{D}_e = \varepsilon \mathfrak{F}_e - \varepsilon_0 \mu_0 / V \cdot [\mathfrak{u} \mathfrak{F}_m] \qquad \text{(V)}$$

$$\mathfrak{D}_m = \mu \mathfrak{F}_m + \varepsilon_0 \mu_0 / V \cdot [\mathfrak{u} \mathfrak{F}_e]; \qquad \text{(VI)}$$

ε und μ sind der elektrische und der magnetische Erregungskoeffizient für den Körper, ε_0 und μ_0 die für das Vakuum. Diese Theorie mitumfaßt ihre Vorläuferin, die Hertzsche, wenn wir für jene die zweiten Glieder in V und VI streichen, also formal $\varepsilon_0 \mu_0$ durch 0 ersetzen.

Aus den Gl. I bis VI gewinnen wir nun folgendes System:

$$\varepsilon \dot{\mathfrak{F}}_e - \varepsilon_0 \mu_0 / V \cdot [\mathfrak{u} \mathfrak{F}_m] + \lambda \mathfrak{F}_e = V \operatorname{rot} \{\mathfrak{F}_m + \varepsilon / V \cdot [\mathfrak{u} \mathfrak{F}_e]\} \qquad (1)$$

$$\mu \dot{\mathfrak{F}}_m + \varepsilon_0 \mu_0 / V \cdot [\mathfrak{u} \mathfrak{F}_e] = - V \operatorname{rot} \{\mathfrak{F}_e - \mu / V \cdot [\mathfrak{u} \mathfrak{F}_m]\} \cdot \qquad (2)$$

Wir beschränken uns jetzt auf: $\mathfrak{u} = \text{const}$, setzen also ein System aneinanderstoßender Körper mit gemeinsamer und konstanter Geschwindigkeit voraus, und weiter: $\mathfrak{u}^2/V^2$ gegen 1 vernachlässigbar, wodurch $\mathfrak{u}$ nur mehr linear auftreten kann. Dann verlangen III und IV an V und VI mit Hilfe von (1) und (2)

$$\operatorname{div} \mathfrak{F}_e + \varepsilon_0 \mu_0 / V^2 \cdot (\mathfrak{u}, \dot{\mathfrak{F}}_e + \lambda / \varepsilon \cdot \mathfrak{F}_e) = 0 \qquad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{F}_m + \varepsilon_0 \mu_0 / V^2 \cdot (\mathfrak{u} \dot{\mathfrak{F}}_m) = 0 . \qquad (4$$

Da $\varepsilon / V \cdot [\mathfrak{u}, \dot{\mathfrak{F}}_e + \lambda / \varepsilon \cdot \mathfrak{F}_e] = [\mathfrak{u}, \operatorname{rot} \mathfrak{F}_m]$ gesetzt werden darf, liefert die nach der Zeit t differentierte Gl. (2) in Verbindung mit (1)

$$\ddot{\mathfrak{F}}_m + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} [\mathfrak{u} \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{F}}_m] + \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} - 1 \right) \operatorname{rot} [\mathfrak{u} \dot{\mathfrak{F}}_m] + \frac{V^2}{\varepsilon \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{F}_m$$

$$- \frac{\lambda}{\varepsilon} \operatorname{rot} [\mathfrak{u} \mathfrak{F}_m] + \frac{\lambda}{\varepsilon} \dot{\mathfrak{F}}_m + \frac{V}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathfrak{u} \mathfrak{F}_e] = \quad .$$

Um in dieser Gleichung noch das letzte Glied umzuformen, multipliziere man sie einerseits mit λ / ε, andererseits differentiiere man sie nochmals nach der Zeit. Beide abgeleiteten addiert er-



geben die Wellengleichung für die magnetische Kraft:

$$\dddot{\mathfrak{F}}_m + 2\frac{\lambda}{\varepsilon}\ddot{\mathfrak{F}}_m + \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}\dot{\mathfrak{F}}_m + \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}[\mathfrak{u}\operatorname{rot}\ddot{\mathfrak{F}}_m]$$
$$+\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}[\mathfrak{u}\operatorname{rot}\dot{\mathfrak{F}}_m] + \left(\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} - 1\right)\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\ddot{\mathfrak{F}}_m]$$
$$+\frac{\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} - 2\right)\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\dot{\mathfrak{F}}_m] - \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\mathfrak{F}_m] \quad (5)$$
$$+\frac{V^2}{\varepsilon\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathfrak{F}}_m + \frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{V^2}{\varepsilon\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{F}_m$$
$$+\frac{V^2}{\varepsilon\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\operatorname{rot}\mathfrak{F}_m] = 0.$$

Auf entsprechendem Wege gelangen wir zu der Wellengleichung für die elektrische Kraft

$$\dddot{\mathfrak{F}}_e + \frac{\lambda}{\varepsilon}\ddot{\mathfrak{F}}_e + \frac{V^2}{\varepsilon\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathfrak{F}}_e + \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}[\mathfrak{u}\operatorname{rot}\ddot{\mathfrak{F}}_e] \quad (6)$$
$$+\left(\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} - 1\right)\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\ddot{\mathfrak{F}}_e] + \frac{V^2}{\varepsilon\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\operatorname{rot}\dot{\mathfrak{F}}_e] = 0.$$

Sind die Störungen insbesondere von elementarer Schwingungsform, also

$$\mathfrak{F}_e = {}^1/_2\{F_e\cdot e^{i\nu t} + F_e^*\cdot e^{-i\nu^* t}\}$$

und

$$\mathfrak{F}_m = {}^1/_2\{F_m\cdot e^{i\nu t} + F_m^*\cdot e^{-i\nu^* t}\},$$

so gehen die Wellengleichungen über in

$$\nu a F_m - \nu\operatorname{rot}\operatorname{rot}F_m + i c_m\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\operatorname{rot}F_m]$$
$$- i b[\mathfrak{u}\operatorname{rot}F_m] + i(a-b)\operatorname{rot}[\mathfrak{u}F_m] = 0. \quad (7)$$
$$\nu a F_e - \nu\operatorname{rot}\operatorname{rot}F_e + i\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\operatorname{rot}F_e] \quad (8)$$
$$- i b[\mathfrak{u}\operatorname{rot}F_e] + i(a-b+c_e)\operatorname{rot}[\mathfrak{u}F_e] = 0,$$

mit Benutzung der Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} a &= \nu^2\frac{\varepsilon\mu}{V^2}(1 - i\lambda/\varepsilon\nu); & b &= \nu^2\frac{\varepsilon_0\mu_0}{V^2} \\ c_e &= \nu^2\frac{\varepsilon\mu}{V^2}\cdot\frac{i\lambda}{\varepsilon\nu}; & c_m &= \frac{1}{1 - i\lambda/\varepsilon\nu}\end{aligned}\right\}, \quad (9)$$

und die Nebenbedingungen (3) und (4) werden

$$\operatorname{div}F_m + i\nu\varepsilon_0\mu_0 V^2\cdot(\mathfrak{u}F_m) = 0 \quad (10)$$
$$\operatorname{div}F_e + i\nu\varepsilon_0\mu_0 V^2\cdot(1 - i\lambda/\varepsilon\nu)(\mathfrak{u}F_e) = 0. \quad (11)$$

In den komplexen Vektoren F_e und F_m ist je ein Faktor willkürlich, der die Wahl des N.-P. der Zeitzählung offen läßt. Die Bedingungen für die F beziehen sich auf einen Wellenzustand, d. h. auf die Gesamtheit beliebig vieler sich kreuzender Wellen. Daher setzt sich F im allgemeinen aus einer Summe von Gliedern $\mathfrak{f}\cdot e^{i\Phi}$ additiv zusammen. Falls der Wellenzustand nur aus einer Welle besteht, lassen die Bedingungen außer dem vorhin genannten Faktor in F noch einen Faktor willkürlich: die Intensität der Welle. Sie spielt aber bei Betrachtungen über den Wellenbau keine Rolle. In einer gegebenen Welle ist also bei gewählter Zeitepoche F gegeben. Somit ist in dem Ansatz

$$F = \mathfrak{f}\cdot e^{i\Phi} \quad (12)$$

für eine Welle eine skalare Ortsfunktion willkürlich. Diese Willkürlichkeit geht natürlich auch in alle Bedingungen ein, die F zu erfüllen hat. Sie kann aber nicht bestehen bleiben, wenn der Ansatz, wie vorausgesetzt, eine Welle wiedergeben soll. Denn da nichts im Wege stünde, die Willkürlichkeit in Φ hinein zu verlegen, könnte man nicht von Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge als von bestimmten kinematischen Größen, die von ν und Φ abhängig sind, reden. Es muß also ein entscheidendes Prinzip walten, und das ist der von mir gefundene Satz[1]), daß Φ vom Betrage von $\mathfrak{f}$ unabhängig sei. Man kann auch von der Erfahrung ausgehen, daß Wellen sich nicht zu einer Welle vereinigen lassen, und aus dieser Tatsache der Interferenz den oben genannten Satz herleiten[2]).

Mit dem Ansatz (12) verwandeln sich die Bedingungen (7) bis (11) in

$$c_m\nu(\mathfrak{f}_e\mathfrak{w}_e) - b(\mathfrak{f}_e\mathfrak{u}) + \Pi_e = 0 \quad (13)$$
$$\xi_e\mathfrak{f}_e + \eta_e\mathfrak{w}_e + \zeta_e\mathfrak{u} + \Sigma_e = 0 \quad (14)$$

mit

$$\xi_e = \{\nu + (\mathfrak{u}\mathfrak{w}_e)\}(a - \mathfrak{w}_e^2)$$
$$\qquad - (2a - 2b + c_e)(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_e) + \Xi_e$$
$$\eta_e = \{\nu + (\mathfrak{u}\mathfrak{w}_e)\}(\mathfrak{f}_e\mathfrak{w}_e) - b(\mathfrak{f}_e\mathfrak{u}) + H_e$$
$$\zeta_e = (a - b + c_e)(\mathfrak{f}_e\mathfrak{w}_e) + Z_e$$

sowie

$$\nu(\mathfrak{f}_m\mathfrak{w}_m) - b(\mathfrak{f}_m\mathfrak{u}) + \Pi_m = 0 \quad (15)$$
$$\xi_m\mathfrak{f}_m + \eta_m\mathfrak{w}_m + \zeta_m\mathfrak{u} + \Sigma_m = 0 \quad (16)$$

mit

$$\xi_m = \{\nu + c_m(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_m)\}(a - \mathfrak{w}_m^2)$$
$$\qquad - (2a - 2b + c_e)(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_m) + \Xi_m$$
$$\eta_m = \{\nu + c_m(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_m)\}(\mathfrak{f}_m\mathfrak{w}_m) - b(\mathfrak{f}_m\mathfrak{u}) + H_m$$
$$\zeta_m = (a - b)(\mathfrak{f}_m\mathfrak{w}_m) + Z_m.$$

Dabei sind die Ortsfunktionen $\Pi\,\Sigma\,\Xi\,H\,Z$ derart von den Ableitungen der $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{w}$ abhängig, daß sie zugleich mit diesen verschwinden.

Das Interferenzprinzip, daß wir nun zur Geltung bringen müssen, verlangt, daß $\mathfrak{w}_e$ unabhängig sei vom Betrage von $\mathfrak{f}_e$, und entsprechend $\mathfrak{w}_m$ unabhängig von $\mathfrak{f}_m$. Demnach muß sein

$$\Pi_e = 0;\ \xi_e = 0;\ \eta_e = 0;\ \zeta_e\mathfrak{u} + \Sigma_e = 0 \quad (17)$$
$$\Pi_m = 0;\ \xi_m = 0;\ \eta_m = 0;\ \zeta_m\mathfrak{u} + \Sigma_m = 0. \quad (18)$$

Es genügt für unsere Zwecke, wenn wir uns fernerhin nur mit der Planwelle ($\mathfrak{f} = \text{const}$; $\mathfrak{w} = \text{const}$) befassen; das ist die hinsichtlich $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ umkehrbare Welle. Dann verschwinden die Ortsfunktionen $\Pi\,\Sigma\,\Xi\,H\,Z$, dann geht (17b) über in

$$\{\nu + (\mathfrak{u}\mathfrak{w}_e)\}(a - \mathfrak{w}_e^2) - (2a - 2b + c_e)(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_e) = 0, \quad (19)$$

Gl. (17d) verlangt

1) K. Uller, Grundlegung II § 5, diese Zeitschr. **17**, 610, 1916.

2) K. Uller, Das Interferenzprinzip, ebenda **18**, 101, 1917.

$$(\mathfrak{k}_e \mathfrak{w}_e) = 0 \tag{20}$$

und somit schließlich Gl. (17c)

$$b(\mathfrak{k}_e \mathfrak{u}) = 0, \tag{21}$$

womit auch die Nebenbedingung (13) befriedigt ist.

Entsprechend finden wir in der magnetischen Welle

$$\{\nu + c_m(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_m)\}(a - \mathfrak{w}_m^2) - (2a - 2b + c_e)(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_m) = 0 \tag{22}$$

$$(\mathfrak{k}_m \mathfrak{w}_m) = 0 \tag{23}$$

und

$$b(\mathfrak{k}_m \mathfrak{u}) = 0. \tag{24}$$

Diese sechs Bedingungen, insbesondere (21) und (24), bleiben auch für $c_e = 0$; $c_m = 1$, also für konservative Körper bestehen. Ja, selbst im Vakuum, für das außerdem noch $a = b$ ist, gelten sie, wobei (19) und (22) übergehen in $\mathfrak{w}_e^2 = \mathfrak{w}_m^2 = a$. Dort sollen wir freilich auch $\mathfrak{u} = 0$ setzen.

B. Die Lorentzsche Theorie sowie die von Minkowski führen, wenn man sich auf Glieder erster Ordnung in $\mathfrak{u}/V$ beschränkt, ebenfalls auf Verknüpfungen von den Formen V und VI, also letzten Endes wiederum auf die Bedingungen (19) bis (24).

In den Lösungen der Bedingungen (21) und (24) unterscheiden sich aber die Theorien, wenn wir nicht bloß die Vorgänge im Vakuum darstellen wollen. In der Theorie von Hertz ist b durch 0 zu ersetzen; sie läßt also, wie zu erwarten war, die Orientierung der elektrischen Kraft $\mathfrak{F}_e$ und der magnetischen Kraft $\mathfrak{F}_m$ gegen die Richtung der Körpergeschwindigkeit frei. Anders die anderen Theorien. In diesen verlangt das Interferenzprinzip

$$(\mathfrak{k}_e \mathfrak{u}) = 0 \tag{21'}$$

und

$$(\mathfrak{k}_m \mathfrak{u}) = 0. \tag{24'}$$

Es verlangt also in diesen, daß stets $\mathfrak{F}_e$ und $\mathfrak{F}_m$ senkrecht zur Körpergeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ stehen, womit eine Energieströmung nur parallel zu $\mathfrak{u}$ verbunden wäre, während für einen mitbewegten Beobachter das elektrische und magnetische Feld sowie die Strahlung an eine Orientierung nachweislich nicht gebunden sind. Wir sind daher genötigt, die Grundgleichungen dieser Theorien abzulehnen, wenn $\mathfrak{u}$ auch nur um das geringste von Null verschieden ist!

Die Schwere dieses Urteils treibt uns an, noch einen anderen Gedankenweg zu beschreiten. Wenn wir von vornherein die Wellengleichungen und Nebenbedingungen für F_e und F_m für eine Planwelle zurecht machen, kommen wir hinsichtlich F_e zu

$$c_m \nu(\mathfrak{k}_e \mathfrak{w}_e) - b(\mathfrak{k}_e \mathfrak{u}) = 0 \tag{13'}$$

$$\xi_e \mathfrak{k}_e + \eta_e \mathfrak{w}_e + \zeta_e \mathfrak{u} = 0 \tag{14'}$$

mit Ausdrücken für $\xi_e \eta_e \zeta_e$, die aus denen unter (14) hervorgehen, wenn man $\Xi_e\, H_e\, Z_e$ verschwinden läßt. Jetzt ist von vornherein $\mathfrak{w}$ unabhängig vom Betrage von $\mathfrak{k}$. Man sieht, daß bei der Planwelle das Interferenzprinzip von vornherein erfüllt ist, daß mit ihm aus dieser idealisierten und vereinfachten Welle heraus keine Folgerungen für die Wellenkinematik sich ziehen lassen. Wir müssen also durch neue, eigens angepaßte Überlegungen zu ermitteln suchen, unter welchen Bedingungen die Wellengleichung (14') bestehen kann. Zunächst ist klar, daß wenn $\xi\ \eta\ \zeta$ alle drei von Null verschieden sind, $(\mathfrak{k}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}]) = 0$ sein muß; anderenfalls müßte wenigstens einer dieser drei Koeffizienten verschwinden. Dann aber müßten die zu den beiden anderen gehörigen Vektoren einander parallel sein. Man findet, daß das in den drei möglichen Kombinationen zu Folgerungen führt, die absurd sind. Es bleibt also sowohl für die elektrische als auch für die magnetische Welle nur die Alternative: entweder $(\mathfrak{k}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}]) = 0$ und die $\xi\,\eta\,\zeta \neq 0$ oder $\xi = 0 = \eta = \zeta$ und $(\mathfrak{k}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}]) \neq 0$. Die erste Möglichkeit würde verlangen, daß $\mathfrak{F}_e$, und entsprechend $\mathfrak{F}_m$, nur in einer Ebene rotieren könne, welche die Körpergeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ und das Wellennormalenpaar $\mathfrak{w}$ enthielte, Beschränkungen in der Orientierung der elektrischen und magnetischen Kraft, die der mitbewegte Beobachter nicht kennt. Ferner würde sie uns die einzige Möglichkeit entwinden, das Quadrat des Wellennormalenpaares zu bestimmen. Das ist aber eine unbedingt zu erfüllende Forderung. Es genügt daran zu erinnern, daß Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge ohne das unbestimmt blieben. Wir kommen so für die Planwelle auch auf diesem gänzlich verschiedenen Wege zu dem notwendigen Schluß, daß nur die zweite Möglichkeit der Alternative in Frage kommen kann. Diese aber ist identisch mit derjenigen, die mit Hilfe des Interferenzprinzips aus der allgemeinen Form der Wellen oben erschlossen worden ist.

Das nun zweimal gewonnene, auffallende Ergebnis veranlaßt uns einmal nachzuforschen, was sich vielleicht direkt aus den Grundgleichungen in dieser Hinsicht folgern läßt.

Da finden wir, daß bei Divergenzbildung aus I mit der Voraussetzung III hervorgeht: $\lambda \operatorname{div} \mathfrak{F}_e = 0$. Sowie der Körper auch nur eine Spur von Leitfähigkeit hat, muß nach allen Theorien $\operatorname{div} \mathfrak{F}_e$ verschwinden, also mit Ausnahme der Hertzschen gemäß (3)

$$(\mathfrak{u}\,\mathfrak{F}_e) = 0 = (\mathfrak{u} \operatorname{rot} \mathfrak{F}_m)$$

sein. Ohne Interferenzprinzip werden wir somit für $\lambda \neq 0$ bei Planwellen auf die Forderungen: $(\mathfrak{k}_e \mathfrak{w}_e) = 0$; $(\mathfrak{k}_e \mathfrak{u}) = 0 = (\mathfrak{k}_m [\mathfrak{w}_m \mathfrak{u}])$ geführt, Forderungen, die schon sonderbar sind, da nach

ihnen in einer einfachen Welle, die durch einen wellenlöschenden Körper läuft, stets die elektrische Kraft nur geradlinig schwingen könne, und zwar senkrecht zur Wellennormale und gleichzeitig senkrecht zur Körpergeschwindigkeit.

Das Interferenzprinzip nun aber verlangt nicht nur diese Bedingungen auch für konservative Körper, sondern fügt ihnen noch weitere hinzu, nämlich $(\mathfrak{f}_m\,\mathfrak{w}_m) = 0$; $(\mathfrak{f}_m\,\mathfrak{u}) = 0 = (\mathfrak{f}_e[\mathfrak{w}_e\,\mathfrak{u}])$. Alle diese zusammen, je drei für $\mathfrak{f}_e$ und $\mathfrak{f}_m$, sind aber nur in dem Unterfall erfüllbar, daß eine einfache Welle parallel der Körpergeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ sich fortpflanzt.

B'. Angesichts dieser Sachlage wollen wir, um nichts ungeprüft zu lassen, die Bedingungen aufsuchen, die das Interferenzprinzip den elektrischen und magnetischen Feldstärken, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$, auferlegt. Diese Unterscheidungen kennen die Theorien von Hertz und Cohn nicht, wohl aber die übrigen, die sich aber auch wieder untereinander unterscheiden. Die Theorie von Lorentz hat, wenn wir der Einfachheit halber ε_0 und μ_0 gleich eins setzen,

$$\mathfrak{F}_e = \mathfrak{E} + \frac{1}{V}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}] \qquad \text{(VII)}$$

$$\mathfrak{F}_m = \mathfrak{M} - \frac{1}{V}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{E}] \qquad \text{(VIII)}$$

und

$$\mathfrak{D}_e = \varepsilon\,\mathfrak{E} + (\varepsilon - 1)/V \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}] \qquad \text{(IX)}$$

$$\mathfrak{D}_m = \mu\,\mathfrak{M} - (\mu - 1)/V \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{E}]. \qquad \text{(X)}$$

Man kommt damit, wenn man sich wieder auf Glieder erster Ordnung in $\mathfrak{u}/V$ beschränkt, auf Wellengleichungen und Nebenbedingungen für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$, die formal den Cohnschen für $\mathfrak{F}_e$ und $\mathfrak{F}_m$ gleichen, also schließlich auch wieder zu Beziehungen, die denen unter (19) bis (24) gleichen.

Die Minkowskische Theorie setzt:

$$\mathfrak{F}_e = \mathfrak{E} + \frac{1}{V}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{D}_m] \qquad \text{(XI)}$$

$$\mathfrak{F}_m = \mathfrak{M} - \frac{1}{V}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{D}_e] \qquad \text{(XII)}$$

und

$$\mathfrak{D}_e = \varepsilon\,\mathfrak{F}_e - \frac{1}{V}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}] \qquad \text{(XIII)}$$

$$\mathfrak{D}_m = \mu\,\mathfrak{M} + \frac{1}{V}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{E}], \qquad \text{(XIV)}$$

so daß bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in $\mathfrak{u}/V$

$$\mathfrak{D}_e = \varepsilon\,\mathfrak{E} + (\varepsilon\mu - 1)/V \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}] \qquad \text{(XV)}$$

$$\mathfrak{D}_m = \mu\,\mathfrak{M} - (\varepsilon\mu - 1)/V \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{E}] \qquad \text{(XVI)}$$

wird. Wir kommen damit unter den Voraussetzungen III und IV zu

$$\dot{\mathfrak{D}}_e + \lambda\,\{\mathfrak{E} + \mu/V \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}]\} = V \operatorname{rot} \mathfrak{M} \quad (25)$$

$$\dot{\mathfrak{D}}_m = -V \operatorname{rot} \mathfrak{E} \quad (26)$$

und weiter zu den Wellengleichungen und Nebenbedingungen für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$

$$\ddot{\mathfrak{E}} + \frac{\lambda}{\varepsilon}\dot{\mathfrak{E}} + \frac{V^2}{\varepsilon\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{E} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu}\{[\mathfrak{u}\operatorname{rot}\dot{\mathfrak{E}}] + \operatorname{rot}[\mathfrak{u}\,\dot{\mathfrak{E}}]\} - \frac{\lambda}{\varepsilon}[\mathfrak{u}\operatorname{rot}\mathfrak{E}] = 0 \qquad (27)$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{V^2}(\mathfrak{u}, \dot{\mathfrak{E}} + \frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{E}) = 0 \qquad (28)$$

$$\ddot{\mathfrak{M}} + \frac{\lambda}{\varepsilon}\dot{\mathfrak{M}} + \frac{V^2}{\varepsilon\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{M} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu} \times \{[\mathfrak{u}\operatorname{rot}\dot{\mathfrak{M}}] + \operatorname{rot}[\mathfrak{u}\,\dot{\mathfrak{M}}]\} - \frac{\lambda}{\varepsilon}\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}] = 0 \qquad (29)$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{M} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{V^2}(\mathfrak{u}\,\dot{\mathfrak{M}}) = 0. \qquad (30)$$

Für Störungen von elementarer Schwingungsform gehen sie über in

$$\operatorname{div} E - (1 - i\lambda/\varepsilon\nu)\, i\nu b\, (\mathfrak{u}\,E) = 0 \qquad (31)$$

$$aE - \operatorname{rot}\operatorname{rot} E + i\nu b\,\{\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\,E] + [\mathfrak{u}\operatorname{rot} E]\} + c\,[\mathfrak{u}\operatorname{rot} E] = 0, \qquad (32)$$

$$\operatorname{div} M - i\nu b(\mathfrak{u}\,M) = 0, \qquad (33)$$

$$aM - \operatorname{rot}\operatorname{rot} M + i\nu b\,\{\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\,M] + [\mathfrak{u}\operatorname{rot} M]\} + c\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\,M] = 0, \qquad (34)$$

mit den Abkürzungen

$$a = \nu^2\frac{\varepsilon\mu}{V^2}(1 - i\lambda/\varepsilon\nu);\ b = \frac{\varepsilon\mu - 1}{V^2};\ c = \frac{\lambda\mu}{V^2}. \qquad (35)$$

Für Planwellen insbesondere wird hieraus:

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{w}) + (1 - i\lambda/\varepsilon\nu)\,\nu b\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{u}) = 0, \qquad (36)$$

$$\{a - \mathfrak{w}^2 - (2\nu b - ic)\,(\mathfrak{u}\,\mathfrak{w})\}\,\mathfrak{e} + \{(\mathfrak{e}\,\mathfrak{w}) + (\nu b - ic)\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{u})\}\,\mathfrak{w} + \nu b\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{w})\,\mathfrak{u} = 0, \qquad (37)$$

$$(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}) + \nu b\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{u}) = 0, \qquad (38)$$

$$\{a - \mathfrak{w}^2 - (2\nu b - ic)\,(\mathfrak{u}\,\mathfrak{w})\}\,\mathfrak{m} + \{(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}) + \nu b(\mathfrak{m}\,\mathfrak{u})\}\,\mathfrak{w} + (\nu b - ic)\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w})\,\mathfrak{u} = 0. \qquad (39)$$

Das Interferenzprinzip verlangt nun

$$a - \mathfrak{w}^2 - (2\nu b - ic)\,(\mathfrak{u}\,\mathfrak{w}) = 0; \qquad (40)$$

folglich auch, wenn nicht gerade das Vakuum ($b = 0$; $c = 0$) durchlaufen wird,

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{w}) = 0; \quad (\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}) = 0 \qquad (41)\ (42)$$

und weiter

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{u}) = 0; \quad (\mathfrak{m}\,\mathfrak{u}) = 0, \qquad (43)\ (44)$$

was alles auch in konservativen Körpern ($c = 0$) gilt. Die beiden letzten Beziehungen ziehen noch gemäß (25) und (26)

$$(\mathfrak{m}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}]) = 0 \qquad (45)$$

und

$$(\mathfrak{e}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}]) = 0 \qquad (46)$$

nach sich. Schon ohne das Interferenzprinzip verlangt Gl. (25) wegen III, wenn wir von ihr die Divergenz nehmen, allemal wenn $\lambda \neq 0$ ist,

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \mu/V \cdot (\mathfrak{u}\operatorname{rot}\mathfrak{M}) = \varepsilon\mu/V^2(\mathfrak{u}, \dot{\mathfrak{E}} + \lambda/\varepsilon\,\mathfrak{E}),$$

was in Hinblick auf (28) verlangt

$(\mathfrak{u}\,\mathfrak{E}) = 0 = (\mathfrak{u}\operatorname{rot}\mathfrak{M})$ und also auch $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$.

Wir gelangen somit hinsichtlich $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ zu ganz demselben Tatsachenbestand wie oben für $\mathfrak{F}_e$ und $\mathfrak{F}_m$, was ja auch zu erwarten war und nur den Wert einer Nachprüfung auf anderem Wege hat. Die Grundgleichungen verlangen, sobald Leitfähigkeit vorhanden ist:

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{w}) = 0\,;\ (\mathfrak{e}\,\mathfrak{u}) = 0 = (\mathfrak{m}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}]).$$

Das Interferenzprinzip verlangt nicht nur diese Bedingungen auch für konservative Körper, sondern gesellt ihnen noch die drei weiteren hinzu: $(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}) = 0$; $(\mathfrak{m}\,\mathfrak{u}) = 0 = (\mathfrak{e}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}])$, sechs Forderungen, die nur für $[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}] = 0$ erfüllbar sind.

Wir können jetzt unsere kritische Untersuchung schließen. Das Ergebnis lautet: Die auf die Hertzsche folgenden bisherigen Theorien vermögen leider nicht elektromagnetische Wellen in bewegten Körpern darzustellen, nicht einmal in erster Ordnung der Körpergeschwindigkeit. — Die Hertzsche Theorie tritt nicht in Widerspruch zum Interferenzprinzip.

Von Fizeau[1]) stammt ein experimenteller Versuch über den Einfluß der Erdbewegung auf die Drehung der Polarisationsebene eines polarisierten Lichtbündels, das einen Glasplattensatz schräg durchsetzt. Er fand eine Drehung, wenn das Licht zuerst parallel und dann antiparallel zur Erdbewegung lief. Dieser Versuch verdient, wie schon Herr Lorentz erkannt hat, in hohem Maße unsere Beachtung. Der gefundene Effekt ist nämlich, wie eine eingehende Erörterung lehrt[2]), unerklärlich für die bisherigen Theorien; nach ihrem Beweisgange dürfte keiner auftreten. Im Lichte unserer Untersuchung gewinnt er neue Bedeutung: Er kann, falls er reell ist, eine experimentelle Bestätigung unseres vorstehenden Ergebnisses in sich bergen.

Erwähnenswert ist auch noch folgendes. In ruhenden Körpern lauten gemäß den Maxwellschen Feldgleichungen die Wellengleichungen für $\mathfrak{F}_e$ und $\mathfrak{F}_m$ bekanntlich

$$\ddot{\mathfrak{F}}_e + \lambda/\varepsilon \cdot \dot{\mathfrak{F}}_e + V^2/\varepsilon\mu \cdot \text{rot rot}\,\mathfrak{F}_e = 0$$
$$\ddot{\mathfrak{F}}_m + \lambda/\varepsilon \cdot \dot{\mathfrak{F}}_m + V^2/\varepsilon\mu \cdot \text{rot rot}\,\mathfrak{F}_m = 0\,.$$

Statt dessen bekommen wir aus den Wellengleichungen (5) und (6) für $\mathfrak{u} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\ddot{\mathfrak{F}}_e + \lambda/\varepsilon \cdot \dot{\mathfrak{F}}_e + V^2/\varepsilon\mu \cdot \text{rot rot}\,\mathfrak{F}_e\} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\dot{\mathfrak{F}}_m + \lambda/\varepsilon \cdot \mathfrak{F}_m\} + \lambda/\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}\{\dot{\mathfrak{F}}_m + \lambda/\varepsilon \cdot \mathfrak{F}_m\}$$
$$+ V^2/\varepsilon\mu \cdot \text{rot rot}\{\dot{\mathfrak{F}}_m + \lambda/\varepsilon \cdot \mathfrak{F}_m\} = 0\,.$$

Wenn diese auch aus jenen ableitbar sind, so ist es doch auffällig, daß bei Leitfähigkeit des Körpers die zweite so zusammengesetzt auftritt.

C. Statt wie bisher die Welle vom ruhenden Bezugssystem Σ aus zu betrachten, können wir diese auch von einem in den Körpern festen Bezugssystem Σ' aus ins Auge fassen. Dann verläuft sie in für uns ruhenden Körpern. Sind beide Bezugssysteme hinsichtlich der Beschreibung und Messung des Vorgangs völlig gleichberechtigt und soll das Relativitätsprinzip von Einstein gelten, dann müssen wir, wenn die Maxwellschen Gleichungen den Vorgang in Σ' richtig beschreiben, auf Grund derselben und durch Übergang zu Σ mittels der Lorentz-Transformationen zu den für den Vorgang in gemeinschaftlich bewegten Körpern gültigen Feldgleichungen gelangen. Und diese fallen bekanntlich mit den Grundformeln (I—VI) zusammen, sofern die gemeinsame Körpergeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ konstant und klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Gesamtheit dieser Grundformeln haben wir aber oben als unhaltbar erwiesen. Es müssen sonach entweder die Maxwellschen Feldgleichungen oder das Einsteinsche Relativitätsprinzip — wenn nicht gar beide — unrichtig sein. Diese Unrichtigkeit wäre im ersteren Falle wohl nur eine Unvollständigkeit, beim Relativitätsprinzip allerdings eine grundsätzliche.

Soll das klassische Relativitätsprinzip gelten, dann hätten wir den Übergang von Σ' zu Σ mit den Galilei-Transformationen zu vollziehen und würden auf die Hertzsche Theorie stoßen, die wie oben erwähnt, nicht dem Interferenzprinzip widerstreitet.

Da man auch diese Theorie aus bekannten Gründen ablehnt, so stehen wir nun leider vor lauter Trümmern und müssen versuchen von neuem aufzubauen.

Bei diesen Feststellungen wollen wir vorläufig stehen bleiben.

Gießen, 17. April 1917.

(Eingegangen 19. April 1917.)

1) Fizeau (Pogg. Ann. **114**, S. 554, 1861).

2) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie usw. (Leiden 1895, S. 125—131.) Siehe die Bemerkung desselben Forschers in der Math. Enzyklopädie V, **14**, 267, 1904.

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Zur Physik des millionstel Zentimeters[1]).

Von F. Ehrenhaft.

Mit Tafel X.

I. Teil: Die Konstitution der Elektrizität.

Die Ehre, in Ihrem Kreise zu sprechen, will ich in Anspruch nehmen, um Einiges aus dem Gebiete der physikalischen Erscheinungen, welche an Materieteilchen der Größenordnung 10^{-4}—10^{-6} cm zur Beobachtung gelangen, zusammenzufassen und um Ihnen auch Neues aus diesem Gebiete zu berichten. Ich will heute im speziellen zwei kleine getrennte Teilgebiete behandeln und mit einzelnen Probekörpern vorerwähnter Größenordnung zwei Dinge untersuchen.

1. Die Frage über die Natur der Elektrizität, die Frage, ob wir überhaupt die Möglichkeit haben, eine jeder Kritik standhaltende Entscheidung zu fällen, ob die Elektrizität atomistisch konstituiert ist oder nicht, und wenn diese Frage nicht beantwortet werden kann, will ich Folgerungen nach der einen Seite hin erwähnen, welche jeder Kritik standhalten; damit will ich diese Fragen zu einem gewissen Abschlusse bringen.

2. Will ich die Kräfte, welche die Strahlung auf die Materie überträgt, mit einzelnen Probekörpern verschiedenen Materials (verschiedener chemischer Elemente) oder mit sich physikalisch verschieden verhaltenden Probekörpern untersuchen und so die Erforschung neuer Eigenschaften der Strahlung (des Lichtes) und der Materie sowie insbesondere auch beider in ihrer Wechselwirkung beginnen.

Als Operationsfeld wähle ich den gaserfüllten Raum, weil unsere Kenntnis über die Konstitution der Gase weit vorgeschrittener ist, als die der Flüssigkeiten und festen Körper.

Als Versuchsobjekte (Probekörper), aus welchen wir später quantitative Schlüsse ziehen wollen, wählen wir exakt kugelförmige Objekte des Silbers, Quecksilbers, Goldes usw., verdampft im galvanischen Lichtbogen in reinem trockenem Stickstoff oder Argongase, ferner Kugeln des Schwefels, Selens usw., hergestellt durch Verdampfung in der Eprouvette in reinstem trockenstem Argongas. Diese Probekörper habe ich auf eine Glasplatte niedergeschlagen und will hier ihre Mikrophotographie in winkel- und flächengetreuer Abbildung zeigen. Solche Abbildungen sind für vorerwähnte Materiearten in meinen Abhandlungen zu finden; für Schwefel füge ich diesem Vortrage die Photographien 1 u. 2 (Taf. X) bei. Man erhält scharf kugelförmige Abbildungen der im Immersionsöl direkt eingebetteten Probekörper; die vollkommene Kugelform ist nach Helmholtz und Abbe durch Verwendung von Objektiven mit numerischen Aperturen 1·3 mit homogener Immersion bis zu Partikeln mit dem Radius $6—7 \cdot 10^{-6}$ cm garantiert. Mit noch kleineren Probekörpern wollen wir zunächst nicht operieren. An solchen Kügelchen Metalles erkennen wir den metallischen Glanz der Oberfläche, wir sehen im Mikroskope direkt, daß diese Körperchen sich der Beschaffenheit des Materials nach durch nichts von der kompakten Masse unterscheiden.

An einem solchen Probekörper wollen wir die Kräfte messen, welche seine Bewegung im Gase einleiten.

Jede solche Bewegung erfolgt im Gasraume von Atmosphärendruck oder im evakuierten Raume unter Einfluß einer konstanten Kraft mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Die zur Messung gelangende und allen Schlüssen zugrunde liegende Geschwindigkeit eines Probekörpers ist also die stationär gewordene gleichförmige Endgeschwindigkeit, welche dieser bei der Bewegung im widerstehenden Mittel unter dem Einfluß der konstanten auf ihn einwirkenden Kraft angenommen hat. Diese Geschwindigkeit des Probekörpers ergibt sich der auf ihn wirkenden äußeren Kraft proportional. Die Zeit bis zur Erreichung dieser Endgeschwindigkeit fällt unter jede meßbare Größe.

Man erhält so den ersten Ansatz über die Messung der Kräfte und deren Vergleich; denn da die treibende Kraft der Geschwindigkeit proportional ist, kann die Bestimmung dieser Kraft auf die einfachste physikalische Messung, die Messung einer gleichförmigen Geschwindigkeit zurückgeführt werden. Die Kraft ist also durch die Gleichung

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{V}}{B}$$

gegeben, worin B die Beweglichkeit, die Geschwindigkeit, welche das Kügelchen bei der treibenden Kraft $\mathfrak{P} = 1$ erreicht, bedeutet.

Die obige einfache Beziehung ist die Basis aller unserer Erörterungen, denn sie gibt die Möglichkeit, verschiedenartige Kräfte, die auf die Materie angreifen, zu messen.

Die Definition der Beweglichkeit B ergibt sich der Theorie nach aus dem bekannten Stokes-Cunninghamschen Gesetze zu

[1]) Vortrag, veranstaltet vom phys.-math. Seminar der Universität zu Göttingen.

$$B = \frac{1}{6\pi\mu a}\left(1 + A\,\frac{l}{a}\right)$$

hierin bedeutet μ den Koeffizienten der inneren Reibung des Gases, a den Kugelradius des Teilchens, l die mittlere Weglänge der Molekeln des reibenden Gases und A eine Konstante (0,815).

Mechanische Versuche von Mc. Keehan, Knudsen, S. Weber u. a. ergeben die Richtigkeit obiger Beziehung, zu welcher nur dann noch eine geringfügige Korrektur zu treten hat, wenn die mittlere Weglänge l sehr groß ist gegen den Radius des Kügelchens.

Nunmehr erfordert die Bestimmung der Größe des Probekörpers nichts mehr als die Messung seiner gleichförmigen Fallgeschwindigkeit $\mathfrak{V}_f$. In diesem Falle ist nämlich die treibende Kraft $\mathfrak{P}$ das Gewicht des Kügelchens $m \cdot g$; dann ergibt sich aus

$$\mathfrak{V}_f = mg\,B = \frac{4a^3\pi}{3}\,sg\,B$$

die Größe des Kügelchens, worin s das spezifische Gewicht des Probekörpers und g die Schwerebeschleunigung bedeutet.

Bevor wir auf diese Größenbestimmung weitgehende Schlüsse aufbauen, will ich untersuchen, ob dieser Zusammenhang von Fallgeschwindigkeit und Größe bei kugelförmigen Probekörpern bestimmten Materials verläßlich ist und dazu einfache Beziehungen aus anderen Bereichen der Physik heranziehen. Im ganzen werde ich drei verschiedene Methoden zur Größenbestimmung der Probekörper erörtern, die alle ausgezeichnet übereinstimmen; deren zweite will ich jetzt sofort anschließen, die dritte kann ich erst am Schlusse des Vortrags klarlegen.

Der erste Blick ins Dunkelfeld im Gase — solche Probekörper werden bekanntlich mit dem Mikroskop senkrecht zur Richtung der sie beleuchtenden Strahlen beobachtet (Siedentopf-Zsigmondy) — lehrt uns, daß die Partikelchen in verschiedenen Farben erscheinen und daß bei allen bisher untersuchten Substanzen (Gold, Silber, Quecksilber, Schwefel, Selen) die Kügelchen um so langsamer fallen, in je kurzwelligerem Lichte sie im Dunkelfelde erglänzen. Der Zusammenhang zwischen der Farbe des von den Kügelchen abgebeugten Lichtes und ihrer Fallgeschwindigkeit ist in die Augen springend. Ordnen wir hier beispielsweise die Silber- und Schwefelkügelchen in den Tabellen I und II nach zunehmender Fallgeschwindigkeit, $\mathfrak{V}_f$ (Kolonnen 2) dann ordnen sich diesen Fallgeschwindigkeiten die Farben der Probekörper eindeutig in der Stufenleiter der Spektralfarben von kürzeren zu längeren Wellen zu (Kolonnen 3). Ein Probekörper definierten Materials und von einer gewissen Farbe hat also eine ganz bestimmte Größe und umgekehrt entspricht jeder Kugelgröße dieses Materials eine ganz bestimmte Wellenlänge des von dem Probekörper in das Mikroskop abgebeugten Lichtes.

Wir nehmen nun die am Einzelteilchen in Gasen beobachteten Farben als neue Grundlage zur Größenbestimmung dieser einzelnen Probekörper. Auf Grund der allgemeinen Erörterungen von Mie und Debye kann man aus der Beugung des Lichtes an einer Kugel die Intensitätsverteilung des der von einer Kugel bestimmter Größe und bestimmten Materials (charakterisiert durch den Brechungsexponenten, bzw. beim Metalle durch den komplexen Brechungsexponenten als Funktion der Wellenlänge) senkrecht zur Richtung der die Kugel beleuchtenden Strahlen zerstreuten Lichtes als Funktion der Wellenlänge berechnen. Die Intensitätsverteilung ergibt für eine Kugel vom Radius a und definierter optischer Beschaffenheit die Farbe des Lichtes, das selektiv von dieser Kugel abgebeugt wird. Diese mühsamen Berechnungen haben wir für Gold, Silber, Quecksilber, Schwefel usw. im Gase durchgeführt.

So kann man dann aber auch umgekehrt aus der beobachteten Farbe die Größe der Kügelchen erschließen.

Tabelle I.
Silber in Stickstoff.

No.	Fallgeschw. $\mathfrak{V}_f \cdot 10^3\ \frac{cm}{sec}$	Farbe	Radien 10^6 cm berechnet aus Fallgeschw.	aus Farbe	Ladung $e \cdot 10^{10}$ elektst. E.	$\mathfrak{V}_L \cdot 10^3\ \frac{cm}{sec}$	$B \cdot 10^{-7}$	$\mathfrak{P}_L = \frac{\mathfrak{V}_L}{B} \cdot 10^{12}$ Dyne
1	1,23	gelbgrün	6,45	6	− 1,58	2,11	10,65	19,82
22	1,47	gelb	7,28		+ 1,12	4,67	8,83	52,90
15	1,57	"	7,60		+ 3,29	4,82	8,28	61,80
14	1,69	"	8,00	8—9	− 4,70	11,24	7,66	146,60
16	1,99	"	8,91		+ 6,83	11,73	6,51	180,00
17	2,32	"	9,86		− 1,12	18,15	5,62	323,00
19	2,33	gelb-orange	10,04	9—10	+ 1,16	11,68	5,47	213,80
18	2,39	"	10,09		− 14,46	12,55	5,46	229,80
21	3,32	orange	12,38	11—13	+ 13,30	7,33	4,06	180,60
4	3,86	"	13,59		− 2,79	7,08	3,57	198,30

Tabelle II.
Schwefel in Argon.

No.	Fallgeschw. $\mathfrak{V}_f \cdot 10^3 \frac{cm}{sec}$	beobachtete Farbe	Radien · 10^6 cm berechnet aus		$e \cdot 10^{10}$ elektst. E.	$\mathfrak{V}_L \cdot 10^3 \frac{cm}{sec}$	$B \cdot 10^{-7}$	$\mathfrak{P}_L = \frac{\mathfrak{V}_L}{B} \cdot 10^{12}$ Dyne
			Fallgeschw.	Farbe				
42	0.33	blau	9,42	8,0—10	+ 0,42	0,66	4,79	13.75
32	0,42	grün	11,02	10—12	— 0,76	0,88	3,82	23,05
27	0.49	"	12,16			0,94	3.32	28,30
21	0,59	grüngelb	13,65	12—13	+ 0,84	1,50	2,82	53,20
34	0,67	gelb	14.77	13—15	— 0,85	1,52	2,54	59,80
14	1,06	orange	19,43		+ 1,14	1,70	1,76	96,50
10	1,08	"	19,64		— 4,65	1,86	1,74	107,00
30	1,16	"	20,50	15—19		1,87	1,64	114,10
11	1,19	"	20,80		+ 0,67	2,01	1,62	125,00
4	1,24	weiß	21,30		+ 0,98	2,21	1,55	142,60
16	1,32	"	22,12		+ 8,30	2,27	1,49	152 40
22	1,46	"	23,42		17,30	2,23	1,38	161,00
20	1,46	"	23.42			2,31	1,38	167,40
7	1.97	"	27,77		— 2,04	2,20	1,12	195.50
39	2,13	"	29,02		— 2,51	1,85	1,06	174.50
26	2,31	"	30,14		+ 6,44	1,36	1,00	136,00
40	3,44	"	37,92		— 6,05	0,72	0,77	93.50

Wenn man die Kolonnen 4 und 5 der Tabellen I und II vergleicht, ersieht man, daß die aus den Widerstandsgesetzen erschlossenen Kugelgrößen mit jenen übereinstimmen, welche die Beugungstheorie des Lichtes nach den Farben, in welchen die Probekörper im Dunkelfelde erscheinen, erwarten läßt. Die Farben eines Probekörpers bestimmten Materials ergeben also die Möglichkeit einer einfachen Größenbestimmung auf submikroskopischem Gebiete, sie setzen die mikroskopische Messung im submikroskopischen Gebiete gleichsam fort.

Es sei noch bemerkt, daß der einheitliche Zusammenhang zwischen Fallgeschwindigkeit und Farbe die Einheitlichkeit der Dichte aller Probekörper eines Materials erweist. In den Berechnungen der Kugelgrößen aus der Fallgeschwindigkeit ist die Dichte der kompakten Masse vorausgesetzt; die Berechnungen aus der Farbe enthalten eine solche Voraussetzung nicht, sondern fußen nur auf den optischen Materialkonstanten, welche man den optischen Messungen an großen Stücken solchen Materials entnimmt. Die Übereinstimmung der beiden auf völlig anderen Grundlagen ruhenden Meßmethoden rechtfertigt diese Annahmen.

Die Fallgeschwindigkeit hat den Radius des Probekörpers mit Hilfe der Stokes-Cunninghamschen Formel für die Beweglichkeit richtig ergeben; bei gegebenem Radius ist somit durch die Stokes-Cunninghamsche Formel die Beweglichkeit des Probekörpers und damit die Messung der Kräfte, die auf das Partikel angreifen, gesichert.

Geht man von der Farbe aus, dann kennt man den Radius. Man kann also beispielsweise das Gewicht $m \cdot g$ des Probekörpers rechnen und mit dem Gewicht alle übrigen Kräfte, welche auf den Probekörper angreifen, vergleichen. Die Übereinstimmung der nach beiden Methoden erschlossenen Radien des Probekörpers verbürgt, daß die Kräftemessung nach beiden Methoden gesicherte Resultate ergibt.

Eine aus der Übereinstimmung der Resultate beider Meßmethoden sich bestätigende weitere Tatsache ist, daß Probekörper bestimmten Materials der Größen um 10^{-5} bis 10^{-6} cm im Gase bei gleicher Farbe gleiche Beweglichkeit besitzen.

Die Frage nach der Konstitution der Elektrizität.

Damit ist das Rüstzeug geschaffen, um auf die beiden Programmpunkte einzugehen. Wir bringen also einen Probekörper in ein homogenes vertikales elektrostatisches Feld. Die auf einen einzelnen derartigen Probekörper in diesem Felde ausgeübte Kraft $\mathfrak{P}_e$ ist wie im makroskopischen Felde einem Produkte $e\,\mathfrak{E}$ zweier von einander unabhängiger Größen gleichzusetzen, deren einer Faktor die Feldstärke, deren anderer der skalare Ladungszustand des Probekörpers ist.

Um die Bestimmung von e handelt es sich; sie erfolgt durch Vergleich mit dem uns bekannten Gewichte des Probekörpers mit den elektrischen Kräften, welche der Schwere entgegen wirken mögen. Überwiegt das Gewicht, dann fällt das Kügelchen

$$mg > e_1\,\mathfrak{E}_1.$$

Das Gewicht ist größer als das Produkt der Ladung des Kügelchens in die Feldstärke. Ändern wir nun die Feldstärke bis zu dem Be-

trage $\mathfrak{E}^{s}_{1}$, bei der das Kügelchen im Felde steigt, dann folgt

$$mg < e_1 \mathfrak{E}^{s}_{1} .$$

Durch die Bestimmung derartiger Felder ist die Ladung zwischen zwei Grenzen eingeengt.

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}^{s}_{1}} < e_1 < \frac{mg}{\mathfrak{E}^{f}_{1}} .$$

Dies Verfahren der Einengung kann beliebig oft wiederholt werden.

Aus den stets gleichbleibenden Grenzspannungen ergibt sich die Stabilität der Ladung.

Ich möchte, bevor ich auf die Diskussion der Ladungen näher eingehe, hier einiger mir interessant erscheinender Punkte Erwähnung tun, welche über den Ladungszustand solcher Probekörper in Gasen zunächst qualitativ aufklären.

In reinstem trockenem Argongase durch Verdampfung hergestellte Quecksilber-, Schwefel- oder Selenkügelchen sind vollkommen ungeladen und bleiben es auch bei Belichtung mit Strahlen unserer Wellenlänge; es ist dies daran erkenntlich, daß sie durch das elektrische Feld in ihrer gleichförmigen Fallgeschwindigkeit nicht beeinflußt werden. Im galvanischen Lichtbogen verdampfte Edelmetalle, auch Quecksilber, zeigen positive oder negative Ladung. Phosphornebel in atmosphärischer Luft und andere Nebel, welche unter Begleitung von chemischen Reaktionen entstehen, zeigen ebenfalls Ladungen beiderlei Sinnes.

Ungeladene Probekörper können aufgeladen, geladene umgeladen werden, wenn das Gas durch ein Mittel leitfähig gemacht (ionisiert) wird und der Probekörper ein leitfähig gemachtes Bereich des Gases zu einer Zeit passiert, zu der kein elektrisches Feld wirksam ist. Die jeweilige Ladung behält der Probekörper wieder stabil bis zur Durchführung einer nächsten Umladung bei; spontane Umladungen sind außerordentlich selten und sofort bemerkbar.

Der Statistik sehr vieler Messungen entspringt die Erkenntnis, daß alle Werte der Ladungen, sowohl positive wie negative, vorkommen, sowohl an metallischen Probekörpern wie an Öl und an Dielektrizis. **Es gibt also keine bevorzugten Ladungen, die der Natur der Elektrizität entspringen.** Dies trifft sowohl bei direkt durch Verdampfung im Lichtbogen hergestellten Kügelchen als auch bei zunächst ungeladenen und sodann durch Ionisierung aufgeladenen Kügelchen zu.

Es erübrigt jetzt, einige Angaben über solche elektrische Ladungen zu machen, die an einzelnen Probekörpern beobachtbar sind. Tabelle III enthält z. B. Zahlenwerte kleiner Ladungen, welche die Probekörper von jeweils angegebenem Radius nach ihrer Erzeugung oder ihrer Aufladung trugen.

Tabelle III.

Einige direkt gemessene Ladungen.

Autor	Substanz	Radius. 10^6 cm	Ladung . 10^{10} e. st. E.
Ehrenhaft	*Hg*	8,41	0,28
	Ag	7,28	1,15
	Au	10,33	2,51
Konstantinowsky	*Hg*	3,60	0,20
	Au	3,70	0,07
Parankiewicz	Öl	36,36	2,41
	Schwefel	8,70	0,24
	Selen	6,93	0,16

Es kann also ein unteilbares Elektrizitätsatom (elementares Quantum) in der von der Theorie statuierten Größenordnung um $4-5 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. nicht konstatiert werden, denn an den einzelnen Probekörpern läßt sich noch der 100. Teil der sogenannten elementaren Ladung ohne Schwierigkeit nachweisen.

Dieses Resultat führt zur weitern Fragestellung, ob ein Atom der Elektrizität überhaupt existiere und ob wir diese Frage überhaupt entscheiden können. Dazu wollen wir ein und denselben Probekörper vom Gewichte $m \cdot g$ mehrmals so umladen, daß er hintereinander die Ladungen $e_1\ e_2\ e_3 \ldots e_i\ e_k$ annimmt. Ich erörtere hier ein Verfahren, das Konstantinowsky in seinen Abhandlungen und insbesondere auch in der Diskussion mit anderen Physikern zur vollen Entwicklung und Klarheit gebracht hat.

Jede dieser Ladungen wird nach dem besprochenen Verfahren eingeengt. Man erhält zur Bestimmung dieser Ladungen ein System von Ungleichungen.

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}^{s}_{1}} < e_1 < \frac{mg}{\mathfrak{E}^{f}_{1}}$$

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}^{s}_{2}} < e_2 < \frac{mg}{\mathfrak{E}^{f}_{2}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}^{s}_{i}} < e_i < \frac{mg}{\mathfrak{E}^{f}_{i}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}^{s}_{k}} < e_k < \frac{mg}{\mathfrak{E}^{f}_{k}} .$$

Entweder ist die Elektrizität nicht atomistisch, dann sind alle meine Erörterungen überflüssig oder die Elektrizität ist atomistisch, das heißt es wären die Ladungen e_1, e_2, e_i, e_k aus lauter gleichen Elementarladungen ε aufgebaut. Dann müßten die Ladungen als Vielfache dieser

Elementarladung ε aufgefunden werden. Es muß also sein

$$e_1 = n_1 \varepsilon, \quad e_2 = n_2 \varepsilon, \quad e_i = n_i \varepsilon, \quad e_k = n_k \varepsilon$$

worin $n_1\ n_2\ \ldots$ ganze Zahlen bedeuten. Es ist also das größte gemeinschaftliche Maß der Ladungen zu suchen. Wir bilden die Quotienten der Ladungen

$$\frac{e_i}{e_k} = \frac{n_i}{n_k}.$$

Es folgt dann für die Verhältnisse der Vielfachheiten eine Serie von Ungleichungen von der Form

$$\frac{\mathfrak{E}_k^f}{\mathfrak{E}_i^s} < \frac{n_i}{n_k} < \frac{\mathfrak{E}_k^s}{\mathfrak{E}_i^f}.$$

Die Grenzen

$$\alpha_1 < \frac{n_1}{n_2} < \beta_1 \qquad \alpha_i < \frac{n_i}{n_{i+1}} < \beta_i,$$
$$\alpha_2 < \frac{n_2}{n_3} < \beta_2 \qquad \vdots$$
$$\vdots$$

durch welche diese Verhältnisse eingeengt werden, enthalten das Gewicht mg nicht mehr; sie sind also von einer speziellen Kräftemessung (z. B. der Gewichtsbestimmung) unabhängig. Diesem Gabelverfahren der Bestimmung der Vielfachheit der Ladungen haften keine unbekannten Versuchsfehler an. Denn die beiden Grenzspannungen, welche die Fall- bzw. Steigbewegung des Probekörpers einleiten sind exakt meßbar und müssen die Schwebespannung umschließen. Würde man z. B. die Ladung aus der Schwebespannung, bei der $mg = e\mathfrak{E}$ ist, bestimmen wollen, oder durch bloße Messung von Steiggeschwindigkeit (Millikan) des Probekörpers, dann ist der so erhaltene Wert der Ladung mit den unvermeidlichen Versuchsfehlern behaftet, die schwer exakt einzuschätzen sind. Wenn man aber das vorerörterte Gabelverfahren einschlägt, dann müssen die richtigen Werte der Ladungen bzw. die richtigen Verhältnisse der Vielfachheit dazwischenliegen.

Damit ist das Problem der Atomistik der Elektrizität auf eine elementare Aufgabe der Zahlentheorie zurückgeführt; denn es handelt sich nur mehr um die Bestimmung der fortlaufenden Proportion der n, welche obigen Ungleichungen genügt. Für die Verhältnisse gibt es nun unendlich viele Verhältnisse ganzer Zahlen, welche obigen Ungleichungen genügen; doch gibt es nur eine Gruppe von kleinsten ganzen Zahlen unter diesen; das heißt, man kann sich die gemessenen Ladungen auf verschiedene Weise aus elementaren Quanten zusammengesetzt denken. Doch ist bei der Anzahl und Genauigkeit der Versuche nur eine größte Ladung, dem kleinsten n entsprechend, das größte gemeinschaftliche Maß der Ladungen als Elementarquant denkbar. Jede größere Ladung als dieses ε würde, als Elementarladung angenommen, den Versuchen widersprechen. Aus einer Reihe von solchen Versuchen bleibt also die Existenzmöglichkeit von kleineren Ladungen als dieses ε noch offen; es kann jedoch mit apodiktischer Gewißheit ein positiver Schluß dahin gezogen werden, daß ein eventuelles elementares Quant nicht oberhalb dieser Ladungen liegen kann.

Es ist also klar, daß das Einengungsverfahren nicht zur Erforschung der prinzipiellen Frage dienen kann, ob die Elektrizität überhaupt atomistisch ist oder nicht; es kann aber auf diesem Wege erschlossen werden, ob die Vielfachheiten, die man in den Verhältniszahlen der experimentell aufgefundenen elektrostatischen Ladungen 10^{-9} bis 10^{-11} e. st. E. erblickte, Verhältnisse ganzer Zahlen sind, die in einer Atomistik begründet sind, oder ob diese Zahlenverhältnisse rein arithmetischer Natur sind, aus dem Rechnungsverfahren hervorgehen und gar nichts mit den grundlegenden Fragen über die Natur der Elektrizität, über das Elektrizitätsatom, zu tun haben. Der Gang solcher Versuche kann klarer Weise zweierlei zutage fördern:

1. Entweder werden bei genauer Einengung immer präziser dieselben einfachen ganzen Zahlen umschlossen; und allen so erschlossenen Vielfachen n entsprechen stets auch die gleichen ε, dann ist eine Atomistik der Elektrizität in dieser Größenordnung wahrscheinlich.

2. Wenn genauere Einengung immer größere ganze Zahlen n und daher auch kleinere ε erfordern, so ist eine Atomistik in der Größenordnung ε ausgeschlossen; sie existiert dann entweder gar nicht, oder sie liegt in einer viel tieferen Größenordnung.

Welcher dieser beiden Fälle vorliegt, will ich an zwei typischen Beispielen auseinandersetzen, die ich den Versuchen einer Arbeit entnehme, welche in dieser Hinsicht klare Entscheidung brachte[1]). Sie wurde ausgeführt an Ölkügelchen jener Größenordnung, an welcher Millikan und Regener eine Atomistik der Elektrizität zu konstruieren versucht hatten.

An einem solchen Kügelchen von der Größe $a = 79{,}3 \cdot 10^{-6}$ cm wurde zunächst durch Messung einer Serie von Steiggeschwindigkeiten eine Ladung $e_1 = 48{,}3 \cdot 10^{-10}$, sodann nach der Umladung eine zweite Ladung $e_2 = 17{,}3 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. bestimmt. Dies könnte man zunächst in Übereinstimmung mit jener Gruppe von Autoren, welche ein Elektrizitätsatom bei $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. zu finden suchten, im Sinne einer solchen Atomistik der Elektrizität deuten, wenn wir in

1) I. Parankiewicz, Wiener Akademieberichte 1917.

der ersten Ladung ein zehnfaches, in der zweiten ein vierfaches Quant erblicken. Als Atom ergäbe sich bei dieser aproximativen Quantierung

$$\varepsilon = \frac{48,3}{10} \cdot 10^{-10} = 4,83 \cdot 10^{-10} \text{ e. st. E.}$$

bzw.

$$\varepsilon = \frac{17,3}{4} \cdot 10^{-10} = 4,33 \cdot 10^{-10} \text{ e. st. E.}$$

Über den wichtigsten Punkt dieser aproximativen Quantierung, über die Berechtigung, gerade eine Ladung um $4,7 \cdot 10^{-10}$ als größtes gemeinschaftliches Maß von e_1 und e_2 anzusetzen, erhalten wir aber nicht die geringste Aufklärung.

Zur objektiven Ermittlung der kleinstmöglichen mit den Versuchen verträglichen Zusammensetzungszahlen n für die Ladungen e_1 und e_2 sowie für eine dritte Ladung e_3 wurde gleichzeitig das Gabelverfahren angewandt; aus diesem resultierten für die n nachfolgende Ungleichungen.

$$2,743 < \frac{n_1}{n_2} < 2,834$$

$$0,456 < \frac{n_1}{n_3} < 0,475.$$

Aus diesen Einengungen folgt als einfachstes Verhältnis der drei Zahlen

$$n_1 : n_2 : n_3 = 22 : 8 : 17.$$

Es gibt keine einfacheren ganzen Zahlen, welche den Ungleichungen (Versuchsresultaten) genügen. Jedes einfachere Verhältnis würde insbesondere auch den Ungleichungen von der Form

$$\left| \begin{matrix} \dfrac{1}{\mathfrak{E}^s{}_1 n_1} \\ \dfrac{1}{\mathfrak{E}^s{}_2 n_2} \\ \dfrac{1}{\mathfrak{E}^s{}_3 n_3} \end{matrix} \right| < \begin{matrix} \dfrac{\varepsilon}{mg} \\ \dfrac{\varepsilon}{mg} \\ \dfrac{\varepsilon}{mg} \end{matrix} < \left| \begin{matrix} \dfrac{1}{\mathfrak{E}^f{}_1 n_1} \\ \dfrac{1}{\mathfrak{E}^f{}_2 n_2} \\ \dfrac{1}{\mathfrak{E}^f{}_3 n_3} \end{matrix} \right|$$

widersprechen, indem nicht sämtliche Glieder der rechten Seite größer als jene der linken wären.

Damit haben wir gefunden, daß die Ladung $e_1 = 48,3$ zumindest ein zweiundzwanzigfaches Quant, die Ladung 17,3 zumindest ein achtfaches Quant gewesen ist. Damit ist aber noch keineswegs ausgesagt, daß $\varepsilon = \frac{48,3}{22} \cdot 10^{-10} = 2,2 \cdot 10^{-10}$ das Elektrizitätsatom ist; dagegen läßt sich mit apodiktischer Gewißheit behaupten, daß kein größeres ε als Elektron mit den Versuchen in Einklang gebracht werden kann.

Ein zweites Beispiel illustriere die Sachlage noch krasser. An einem Ölkügelchen der Millikanschen Größenordnung (Radius $= 57,8 \cdot 10^{-6}$ cm) ergaben sich hintereinander aus drei Gruppen der Steiggeschwindigkeiten die Ladungen

$$e_1 = 5,6 \cdot 10^{-10}, \quad e_2 = 28,68 \cdot 10^{-10},$$
$$e_4 = 10,82 \cdot 10^{-10}.$$

Man wäre zunächst geneigt, für die Verhältnisse der Ladungen $e_1 : e_2 : e_4 = 1 : 6 : 2$ zu setzen und demgemäß z. B. in $\frac{e_2}{6} = \frac{28,68}{6} \cdot 10^{-10} = 4,78 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. auf Promille genau das von der Theorie postulierte Quant zu erblicken. Die Eingrenzungen für die Ladungen e_1, e_2 und e_4 und überdies für eine dritte Ladung e_3, welche bloß eingeengt wurde, gab aber für die Verhältnisse der Vielfachen

$$0,1845 < \frac{n_1}{n_2} < 0,1975$$

$$2,758 < \frac{n_2}{n_3} < 2,950$$

$$0,935 < \frac{n_1}{n_4} < 0,962.$$

Die einfachsten ganzen Zahlen, welche obigen Ungleichungen genügen, sind nun

$$n_1 : n_2 : n_3 : n_4 = 12 : 63 : 22 : 23.$$

Damit ist aber noch keineswegs behauptet, daß

$$\varepsilon = \frac{5,6}{12} \cdot 10^{-10} = \frac{28,68}{63} \cdot 10^{-10}$$
$$= \frac{10,82}{23} \cdot 10^{-10} = 0,45 \cdot 10^{-10} \text{ e. st. E.}$$

ein Elementarquantum darstellt. Denn aus den Versuchen läßt sich wieder nur behaupten, daß jedes größere Quant als $0,45 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. als Elementarquantum den Versuchen widersprechen würde.

Diese Beispiele genügen vollkommen, um das Wesen der sogenannten „Loi des multiples entiers", welche in der Tatsache, daß sich ganze Zahlen finden lassen, die sich wie die Verhältnisse der Maßzahlen der aufgefundenen elektrischen Ladungen verhalten, einen Beweis der Atomistik der Elektrizität geben sollte, in den Gasen klarzustellen. Die gefundenen größten gemeinschaftlichen Maße der Ladungen sind keine Elementarladungen, sondern sie stellen bloß die größte Ladung dar, aus welchem man sich die Ladungen des Probekörpers den Versuchen entsprechend aufgebaut denken kann.

Die aufgefundenen Ganzzahligkeiten der Größenordnung 10^{-9} bis 10^{-11} e. st. E. sind also nicht in einer Atomistik der Elektrizität begründet, sondern sie tragen rein arithmetischen Charakter und sagen nichts in Hinsicht auf die naturwissenschaftliche Vorstellung über die Elektrizität aus.

Den zuverlässigsten Ausgangspunkt bildet immer möglichst enger Anschluß an die Erfah-

rung; im vorliegenden Falle nahmen wir eine sehr einfache Beobachtung zu Hilfe. Diese zeigte, daß bei enger gezogenen Grenzen der Messung den Versuchsbedingungen nur immer durch größere Zahlen n (Vielfachheiten der Ladung d. h. komplizierterer Zusammensetzung aus eventuell elementaren Quanten) genügt werden kann, so daß die Ladungen ε, aus welchen die Elektrizitätsmengen auf den Probekörpern nach den Versuchen aufgebaut sein könnten, immer kleiner werden.

Dies wichtige Resultat, hier an Ölkügelchen erläutert, stimmt völlig überein mit den Resultaten an Metallkügelchen; die Verhältnisse der Ladungen sind Aproximationen durch kleinste ganze Zahlen, über die Natur der Elektrizität sagen diese aber nichts aus.

Ich will jetzt kurz zusammenfassen. Wir haben die Größe der Probekörper durch drei untereinander übereinstimmende Verfahren (eines bin ich Ihnen noch schuldig) festgestellt und deren Ladungen gemessen. Dabei ist es aber nicht gelungen, an einzelnen Probekörpern das von der Theorie statuierte Quant bei $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. aufzufinden. Dies fanden wir weder an Metallen, noch an Dielektrizis (Öl, Schwefel).

Auch konnten an keinem Probekörper bevorzugte ausgezeichnete Ladungen gefunden werden, welche Aussagen über die Konstitution der Elektrizität gestatten. Das von einigen Autoren zu diesem Zwecke versuchte Verfahren, eine Atomistik der Elektrizität in der von der Theorie statuierten Größenordnung experimentell zu bestätigen, hält einer kritischen Prüfung nicht stand. Denn die Repartition nach erwarteten Quanten ist vollkommen willkürlich; dabei kann aber, wie speziell erneuert an Ölkügelchen gezeigt wurde, durch rechnerische Zerlegung verhältnismäßig großer Ladungen — und solcher bedienten sich die Autoren fast ausschließlich — hohe Präzision eines Nachweises der Atomistik vorgetäuscht werden, ohne daß deshalb auch nur die Spur einer Atomistik zugrunde liegt. Die oft auf Promille des gesuchten und erhofften Resultates erhaltene scheinbare Übereinstimmung ist vielmehr, wie durch kritische Versuche gezeigt wird, eine aus dem Rechenverfahren entspringende, rein arithmetische und hat mit den fundamentalen Fragen über die Elektrizität gar nichts zu tun.

Beinhaltet nun die Konstatierung der Existenz von Ladungen von der Ordnung 10^{-12} e. st. E. eine neue Tatsache? Gewiß nicht; bevor man daran gegangen ist, die als heuristische Arbeitshypothese vielleicht leichtverständliche Elektronentheorie in den Rang einer quantitativen Aussage über die Natur der Dinge zu erheben und dem Elektron Realität in der Natur zuzuschreiben, wäre die Existenz solcher Ladungen wohl von niemandem in Zweifel gezogen worden.

Die vorliegenden Versuche und Beweisführungen gestatten aber bloß folgende Aussagen: Im Falle des Bestehens einer Atomistik der Elektrizität kann das Elektrizitätsatom (Elementarquantum) nach den bisherigen Erfahrungen bloß durch eine Ladung gebildet werden, welche kleiner ist als $1 \cdot 10^{-12}$ e. st. E. Es ist jedoch als wahrscheinlich anzunehmen, daß weitere Versuche die Existenzmöglichkeit eines derartigen Atoms in einen Bereich noch geringeren Ladungszustandes verweisen. Die aus den Versuchen hervorgehende Aussage mag vielleicht in ihrer Einseitigkeit eigenartig anmuten, und doch ist ihr Inhalt, soweit es die Beobachtung und Versuchsmöglichkeiten gegenwärtig zulassen, für die Beantwortung der Elektronenfrage erschöpfend.

Über das Thema sind bereits ca. 150 Abhandlungen erschienen, von welchen 65 Einwendungen gegen meine Methode, gegen die Versuche und deren Deutung vorzubringen versucht hatten. Doch glaube ich heute mit Sicherheit behaupten zu dürfen, daß bisher ein stichhaltiges Argument weder gegen die Versuche noch auch gegen deren Deutung vorgebracht werden konnte, so daß meine am Königsberger Naturforschertage 1910 und schon früher in der Wiener Akademie der Wissenschaften aufgestellten Behauptungen und Schlußfolgerungen ungeschmälert fortbestehen.

Alle diese vorerwähnten Einwendungen lassen sich in wenige Punkte zusammenfassen; ich will dies im Nachfolgenden tun und gleichzeitig auch an dieser Stelle nochmals den Grund angeben, warum die Einwendungen nicht stichhaltig sein können.

1. Der erste Einwand bezog sich auf die geäußerte Vermutung, daß die metallischen Probekörper unregelmäßige Gestalt und Dichte hätten. Mit diesem Einwande haben sich die Teilnehmer des Kongresses für Radiologie und Elektrizität zu Brüssel im Jahre 1910 beruhigt. Es gibt heute sechs Beweise für die Kugelgestalt der verwendeten Partikel. Ich glaube auf eine weitere Besprechung dieser Frage angesichts der direkten mikroskopischen Abbildung, welche ich Ihnen gezeigt habe und welche die ideale Kugelgestalt sogar noch kleinerer Probekörper, als jene, auf welche meine Schlüsse aufgebaut sind, sicherstellt, verzichten zu dürfen. Dies Resultat ist nicht erstaunlich; denn zur Behauptung, man hätte es bei diesen Probekörpern nicht mit Kugeln zu tun, hielt man sich lediglich aus dem Grunde berechtigt, weil sich die von den Metallkügelchen getragenen Ladungen nicht mit den erwarteten Elementarquanten



identifizieren ließen. Gegen die Einwände mit Bezug auf die Dichte des Kügelchens habe ich bereits Gelegenheit gehabt, auf den Metallglanz der im Mikroskop beobachteten Partikel und auf die Übereinstimmung der mechanistischen und optischen Größenbestimmung hinzuweisen; diese beiden Tatsachen allein entziehen derartigen Einwänden den Boden. Einen weiteren diesbezüglichen Nachweis hat G. Jäger geführt.

2. Als zweiter Einwand wurde vorgebracht, daß die Beobachtung am Einzelteilchen des Silbers die erwarteten Werte für die Ladung des Elektrons ergäbe, wenn man die Beweglichkeit des Probekörpers auf Grund des gemessenen mittleren Verschiebungsquadrates seiner Brownschen Bewegung $\overline{\lambda^2}$ definiere. Denn bekanntlich ergibt sich nach der Einstein-Smoluchowskischen Theorie der Brownschen Bewegung die Beweglichkeit zu

$$B = \frac{N}{2RT}\overline{\lambda^2}.$$

Unter Zugrundelegung dieser Beweglichkeits-Definition folgt nämlich aus den Versuchen ohne Voraussetzungen über die Form und Dichte der Probekörper das Produkt Ne (Loschmidtsche Zahl in die Ladung des Probekörpers).

Auf dem von Solvay einberufenen Quantenkongresse 1911 war die Ansicht vertreten, daß solche Messungen an Silberpartikeln zu Werten des $N \cdot e$ führten, die mit dem elektrochemischen Äquivalente übereinstimmen.

Heute ist es bereits von vielen Autoren klargelegt worden, daß auch nach der Berechnungsart der Brownschen Bewegung sich die Produkte $N \cdot e$ viel kleiner ergeben, als das elektrochemische Äquivalent der Elektrolyse. Die beobachteten Ladungszustände lassen sich nicht auf das Produkt Ne und dessen Multipla $2\,Ne$, $3\,Ne$, ... zurückführen, wie dies im Falle des Bestehens des von der Theorie erwarteten Elektronenladungswertes der Fall sein müßte. Auch bei Ölkügelchen ergeben sich die $N \cdot e$ kleiner als das Faraday der Elektrolyse; dies hat F. Zerner auch an Millikans Zahlenmaterial nachgewiesen.

Mit der Tatsache, daß sich an einzelnen Probekörpern in Gasen die $N \cdot e$ kleiner und abweichend vom elektrochemischen Äquivalente ergeben, fällt auch die Brücke, welche die Theorie zwischen den Ionen in Flüssigkeiten und in Gasen zu schlagen versucht hatte.

3. Daß die Schlußweise, es müsse die Konstitution der Elektrizität atomistisch sein, weil sich ganze Zahlen bilden lassen, die sich wie die Ladungen verhalten, die ein Partikel hintereinander annimmt, hinfällig ist, wurde heute bereits in aller Deutlichkeit wieder bewiesen. Daß die Ladungssprünge ε bei allen Partikeln auch gleich würden, haben die Autoren selbst oft nicht einmal behauptet.

4. Schließlich wurde von einem Autor erwähnt, daß Quecksilberkugeln verdampfen oder sich bei der Bewegung am Gase abreiben; daß dies bei den von mir und anderen Autoren ausgeführten Versuchen nicht der Fall ist, erhellt unter anderem aus der erwiesenen Tatsache, daß selbst nach stundenlangen Versuchen an einem Quecksilberkügelchen die Fallgeschwindigkeit desselben Kügelchens ungeändert bleibt (Konstanz der Fallzeit). Wäre das Kügelchen verdampft, so müßten die Fallzeiten länger werden, wie man dies an Wassertröpfchen leicht beobachten kann.

Schließlich wurde die Konstanz der Massen von Quecksilberkügelchen unter den bei den Versuchen obwaltenden Verhältnissen durch direkte Photographie nachgewiesen. Verdampfung des Goldes und anderer fester Substanzen haben die Autoren nicht behauptet.

Andere Argumente sind nicht vorgebracht worden.

Selbstverständlich würde ich gerne nach wie vor jede Deutung der Versuche, welche die Universalität und Realität der von der Theorie postulierten Ladung $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. erhalten ließe, akzeptieren, wofern diese Deutung mit den bei unseren Versuchen aufscheinenden Tatsachen in Einklang gebracht werden kann.

Ich glaube mich jedoch auch in Übereinstimmung mit Ihnen zu befinden, wenn ich weitere Diskussionen auf Grund der nämlichen bereits erörterten und experimentell verfolgten Gegenargumente nicht durch weitere Versuche behandle und weiter auch meiner persönlichen Meinung bescheiden Ausdruck verleihe, daß die von mir angegebene Methode, die ausgeführten Versuche und deren Deutung so hypothesenfrei sind wie keine aller jener indirekten Schlußweisen und Mittelwertsbestimmungen, durch welche man die Universalität eines Elektrizitätsatoms zu statuieren versucht hatte.

Es scheint mir daher, als ob das Dogma der Unteilbarkeit einer elektrischen Ladung und in der Folge die Materialisierung der Elektrizität vorzeitig in die Grundlagen der Naturwissenschaft Eingang gefunden hätte.

2. Teil[1]): Die Kräfte, welche die Strahlung auf die wägbare Materie ausübt.

Ich gehe jetzt zum zweiten Teile meiner

1) Die ausführlichen Abhandlungen, welche in diesem Vortrage zusammengefaßt werden, gelangen, soweit sie noch nicht veröffentlicht sind, in den Wiener Akademieberichten, in den Annalen der Physik und in dieser Zeitschrift zum Abdruck.



Auseinandersetzung über und will die Kräfte näher untersuchen, welche stationäre Strahlung auf die Materie überträgt. Auch hier sind diese kleinen Probekörper von der Größenordnung um 10^{-5} cm Radius verschiedenen Materials zur Untersuchung besonders geeignet, denn bei diesen würde die Strahlung direkte progressive Bewegung im Gasraume einleiten können, weil die Kräfte der Strahlung, im allgemeinen sehr klein zu erwarten sind und nicht durch andere in unseren Beobachtungsräumen stets vorhandene große Kräfte (Gravitation) überdeckt erscheinen. Wir wählen also Probekörper in dieser Größenordnung, weil bei ihnen das Verhältnis der Oberfläche zu ihrem Volumen bereits so groß ist, daß sie durch die vermuteten Kräfte der Strahlung in Bewegung versetzt werden könnten. Bis zu einem gewissen Grade war eine solche experimentelle Möglichkeit schon lange vermutet.

Maxwell deduzierte, konzentriertes elektrisches Licht werde wahrscheinlich einen noch größeren Druck ausüben als die Sonnenstrahlung und es wäre nicht unmöglich, daß die Strahlen eines solchen Lichtes, wenn sie auf ein dünnes metallisches Blättchen, das im Vakuum fein aufgehängt ist, fallen, an diesem einen beobachtbaren mechanischen Effekt ausüben könnten. Theoretische Erwägungen der klassischen Thermodynamik führten Bartoli und Boltzmann dazu, die Existenz des Strahlungsdruckes vorauszusetzen.

Lebedew hat den Maxwellschen Strahlungsdruck bestätigt.

Svante Arrhenius hat die universelle Bedeutung der durch die Strahlung auf kleine Materieteilchen übertragenen Bewegungsgröße für die kosmische Physik erkannt und diese grundlegenden Gedanken zuerst in seinen Studien „Über die Ursachen der Nordlichter“ und im „Werden der Welten“ niedergelegt.

Schwarzschild schrieb schließlich eine mathematische Studie „Über den Druck des Lichtes auf kleine (die Strahlung absolut reflektierende) Kugeln“ welche Debye später auf Kugeln beliebigen Materials erweiterte, und bemerkte einleitend: „Irgendwo in der Welt muß es ja vorkommen, daß ein kleines Teilchen im leeren Raume dem Drucke des Lichtes ausgesetzt ist, und daher ist dem Resultate der Rechnung in jedem Falle die physikalische Anwendbarkeit gewiß.“

Gehen wir jetzt zur näheren Erörterung über. Wenn solche Bewegungen einwandfrei nachgewiesen werden, so muß durch die anzustellenden Versuche zunächst aufgeklärt werden, welcher Teil der beobachteten Bewegung des Probekörpers einerseits auf direkte Wirkung der Strahlung zu zählen ist, welche beim Durchstrahlen des absolut leeren Raumes auf den Probekörper auftrifft, und diesen in Bewegung setzt. Solche von der Strahlung auf die ponderable sichtbare Materie ausgeübte und die Bewegung hervorrufende Kräfte, die ohne Mitwirkung des ponderablen Zwischenmediums (Gases), in dem der Probekörper eingebettet ist, auftreten, wollen wir Kräfte erster Art nennen. Ein spezieller Fall wäre z. B. der Maxwellsche Strahlungsdruck.

Anderseits wird es Sache der Versuche sein, aufzuklären, ob und wenn, wieviel von jeder Bewegung auf Rechnung indirekter Wirkung der Strahlen, z. B. in gaserfüllten Räumen, zu setzen ist. Unter diese indirekten Kräfte — Kräfte zweiter Art — wollen wir alles subsummieren, was nicht direkte Einwirkung der Strahlung auf die Materie ist, also in absolut leerem Raume, in dem nur der Probekörper und die Strahlung vorhanden wäre, gar nicht eintreten würde, beispielsweise Radiometerkräfte (Crookes Kräfte) und was Sie sonst noch an Hypothesen diesbezüglich machen wollen. Im absolut leeren Raume müssen also alle Kräfte zweiter Art verschwinden.

Da sich ein absolut leerer Raum weder herstellen läßt, noch mit einem Probekörper vorangedeuteter Größe in einem solchen operiert werden kann, wird es Aufgabe sein, die Untersuchung so zu führen, daß die etwa zur Beobachtung gelangenden Teile der Bewegungen der Probekörper durch bindende Schlußweisen entweder auf Kräfte erster oder Kräfte zweiter Art zurückgeführt werden können.

Der Weg, den ich im folgenden betrete, weicht von all dem Herkömmlichen in dieser Frage ab; denn die Untersuchungsmethode wird von solcher Empfindlichkeit sein, daß Kräfte von der Größenordnung 10^{-11} Dyn und darunter, das sind viele millionenmal kleinere Kräfte als jene, die jemals gemessen wurden, mit Exaktheit zur Messung gelangen werden.

Daher war ich bestrebt, nachfolgende Untersuchungen von vornherein auf eine Basis zu stellen, die zunächst weder vom Lichte einer Theorie erhellt noch getrübt ist, oder durch Versuchsmethoden herkömmlicher Art möglicherweise gelenkt wird.

Die Auseinandersetzungen will ich denn auch mit experimentell Gefundenem beginnen und erst nach Ausführung von Versuchen Gelegenheit suchen, die Resultate mit der Theorie und mit dem Herkömmlichen zu vergleichen.

Wir konzentrieren das Licht einer Bogenlampe durch drei Apochromat-Objektivlinsen in einen Strahl in horizontaler Richtung und senden diesen Strahl durch ein Mikroskopobjektiv mit Apertur 0,3. Der austretende Strahlenkegel ist

mittels dreier Mikrometerschrauben in der Richtung der 3 kartesischen Koordinaten verstellbar. Der Strahl kann gehoben und gesenkt werden, beiderseits seitlich und in die Fortpflanzungsrichtung nach vor- und rückwärts verschoben werden. Ein genau gleich intensiver, ebenso verstellbarer horizontaler Strahl einer zweiten Bogenlampe wird durch eine spiegelbildliche Anordnung in horizontaler Richtung dem ersten Strahle exakt entgegen gerichtet. Durch die erwähnten sechs Mikrometerschrauben ist es bei einiger Übung möglich, daß diese beiden Strahlenbündel exakt koaxial gerichtet werden und einander entgegenlaufend zur Deckung gebracht werden können. Eine automatische Vorrichtung gestattet, zwei photographische Verschlüsse, deren jeder in einem Strahle angebracht ist, so zu schließen, daß zu jedem Zeitpunkte entweder nur Strahl 1 oder nur Strahl 2 wirkt, oder daß die beiden einander entgegenlaufenden Strahlen gleichzeitig wirken. Die horizontal justierten Strahlen passieren ein homogenes vertikales jederzeit kommutierbares und in seiner Stärke regulierbares elektrisches Feld in einem durch nachfolgendes Bild skizzierten horizontal montierten Kondensator.

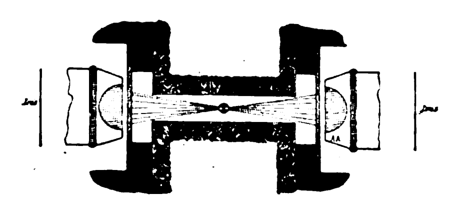


Fig. 1. Kondensator (ca. 2 mal vergrößert) und Beleuchtungsobjektive.

Der Kondensatorraum kann luftdicht abgeschlossen und bis zu beliebig hoher Verdünnung evakuiert werden. Er hat drei Glasfenster für die zwei koaxialen Beleuchtungsobjektive sowie für das senkrecht dazu justierte Objektiv des Beobachtungsmikroskops. Die beleuchtenden Strahlen hatten jeder eine 10 cm dicke Wasserschicht passiert, so daß ultrarote Strahlen fehlen, die Glasbestandteile des Lichtweges absorbieren das ultraviolette Licht; wir haben es also in den Strahlen bloß mit Lichtwellenlängen des Intervalles

$$3{,}5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{cm} < \lambda < 12 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{cm}$$

zu tun. Das Energiemaximum der Bogenlampenstrahlung liegt nach dem Wienschen Verschiebungsgesetze bei

$$\lambda = 7 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{cm},$$

also etwa in der Mitte des Intervalles. Der in Fig. 1 im Kondensatorraume eingezeichnete Kreis stellt das im senkrecht zu den beleuchtenden Strahlen justierten Beobachtungsmikroskope zur Abbildung gelangende Gesichtsfeld dar. Photographie 3 der Tafel X stellt das Gesichtsfeld selbst und den Strahl in 100 facher Vergrößerung dar. Das Bild des Strahles ist ein Dunkelfeldbild, das ich nach einstündiger Expositionszeit, während welcher ich dichten Rauch durch den Kondensator fließen ließ, erhielt. Ein Teil des netzartigen Okularrasters beträgt $11{,}8 \cdot 10^{-3}$ cm. Ich nehme vorweg, daß die mittlere Energiedichte des Strahles in der Zone seiner engsten Einschnürung (Brennfläche) ca. 330 mal größer ist, als die Energiedichte der unkonzentrierten Sonnenstrahlung über der Erdatmosphäre. Die Energiedichte nimmt natürlich von der Achse des Strahles gegen den Rand zu ab, im Zentrum ist sie ca. 12 mal größer als die mittlere Energiedichte. Die Methode, mit deren Hilfe ich zu diesen Zahlen gelangte und wodurch es mir möglich wurde, die Energiedichtenverteilung in einem Strahle, dessen Durchmesser nur mehr ein hundertstel Zentimeter beträgt, zu messen, werde ich später noch kurz erörtern.

Dieses vorbeschriebene Instrument bildet gleichsam eine Lichtzange. Mit ihm will ich nun die Materie behandeln und beschreibe im folgenden eine Zahl von Versuchen, die ich mit diesem Instrumente an Probekörpern von der Größenordnung $3 \cdot 10^{-5}$ bis $5 \cdot 10^{-6}$ cm Radius ausgeführt habe.

Grundversuch I.

Es sei nur Strahl 1 wirksam, der Strahl 2 durch die Irisblende geschlossen.

Ein Probekörper von bestimmtem Materiale fällt im gaserfüllten Raume mit konstanter mittlerer Geschwindigkeit herab. Er gerät in den Kegel des intensiven Strahles und wird aus der lotrechten Fallrichtung im Sinne der Fortpflanzung der auffallenden Strahlung bewegt. Nachdem er den intensiven Teil der Strahlung verlassen hat, fällt er wieder lotrecht herab. Manche Probekörper bewegen sich im intensivsten Teile des Strahles in nahezu horizontaler Richtung.

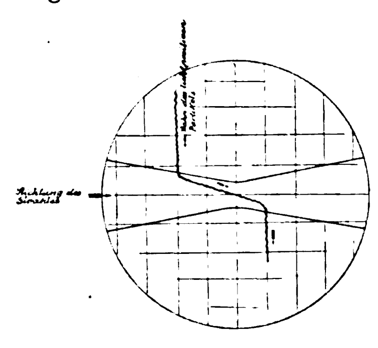


Fig. 2.

Die Bahn eines solchen Probekörpers ist in nachfolgender Fig. 2 gezeichnet. Die Pfeile weisen die Einfallsrichtung des Strahles bzw. die Richtung der Bewegung des Partikels.

Dieses Verhalten zeigen z. B. Goldkugeln, Silberkugeln, Quecksilberkugeln, welche durch galvanische Verdampfung im reinsten trockenen Stickstoff erzeugt wurden, ferner sehr schwach auch Öltröpfchen, sehr stark (als nicht kugelförmig kenntlich) Körperchen von Terpentinruß, Kampferqualm in Luft usw.

Grundversuch II.

Ein Partikel derselben Größenordnung fällt im Gravitationsfelde vertikal nach abwärts, es kommt in den Strahlenkegel und wird von diesem der Richtung der auffallenden Strahlung entgegen geführt. Nach Verlassen des Strahles fällt der Probekörper wieder lotrecht herab.

Eine solche Bahn wird in Fig. 3 abgebildet.

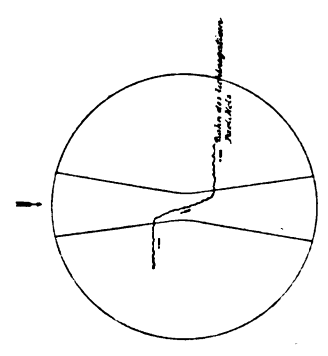


Fig. 3.

Vertreter solcher Probekörper sind: Schwefelkugeln, Selenkügelchen, erzeugt durch Verdampfung im reinsten Argongase (über letztere wird noch einiges zu berichten sein), Salpetersäuretröpfchen, bzw. Zersetzungsprodukte derselben in atmosphärischer Luft, Nebeltröpfchen, erzeugt, indem man Stickoxyde durch Wasser leitet; ausgezeichnete Demonstrationsobjekte sind die Rauchpartikeln einer Zigarre, Verbrennungsprodukte des Holzes usw.

Zu Grundversuch I und II.

Ohne über die Natur der Erscheinung damit zunächst etwas aussagen zu wollen, bezeichnen wir die Partikeln, welche Bewegungsimpulse im Sinne der Fortpflanzungsrichtung der Strahlung erhalten, als lichtpositive, solche, welche der Strahlung entgegenlaufen, als lichtnegative.

Versuche III und IV.

Die beiden Strahlen werden übereinander justiert und gleichzeitig geöffnet. Die Fig. 4 u. 5 zeigen die Bahnen eines lichtpositiven (z. B. Silber) bzw. eines lichtnegativen (z. B. Selen) Probekörpers.

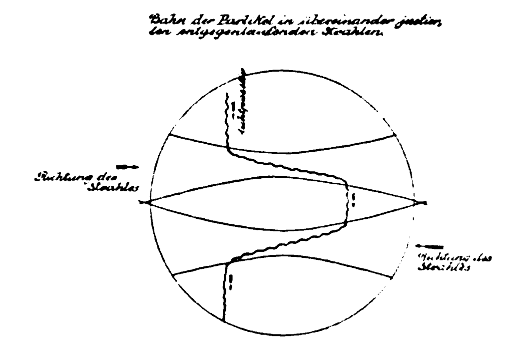


Fig. 4.

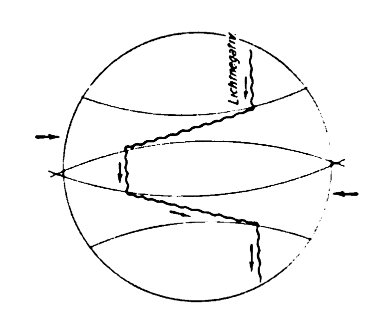


Fig. 5.

Grundversuch V.

Es gibt Probekörper, welche sich mit der uns bisher zur Verfügung gestandenen Strahlungsenergie und in der von uns beobachteten Größenordnung weder im Sinne der einfallenden Strahlung, noch dieser entgegen bewegen. Wir bezeichnen diese als lichtneutral. Vertreter dieser sind Wassernebeltröpfchen in Sauerstoff, hergestellt durch Elektrolyse und ebensolche Tröpfchen in Wasserstoff usw.

Grundversuch VI.

In einem Gemische lichtpositiver und lichtnegativer Materie werden durch den intensiven Strahl Probekörper dieser beiden Materiearten einander gleichzeitig entgegengeführt. Solche Versuche habe ich mit Mischungen von Gold und Rauch, Silber und Schwefel ausgeführt. Ebenso kommt es leicht zur Beobachtung, daß ein Probekörper einen anderen von derselben Materieart in bedeutend größerer Geschwindigkeit in benachbarter Bahn überholt.

Ein eigentümlicher Spezialfall dieser Erscheinung scheint bei Selen vorzuliegen. Durch Verdampfung in reinstem Argongas hergestellte Selenkügelchen verhalten sich außerordentlich stark lichtnegativ. Jedoch entsteht unter Um-

ständen durch Verdampfung bei höherer Temperatur eine Selensuspension, bei der sich einzelne Selenkügelchen orangeroter Farbe besonders intensiv lichtpositiv bewegen, während gleichzeitig die lichtnegative Bewegung der anderen Selenkügelchen anhält. Es scheint sich hier um eine allotrope Modifikation des Selens, die sich lichtpositiv verhält, zu handeln. Die Erscheinung ist z. Z. in näherer Untersuchung.

Es kann also das beobachtete Phänomen der lichtpositiven und lichtnegativen Bewegung ersichtlicherweise nicht durch Strömungen erklärt werden.

Nachfolgende Fig. 6 stellt die gleichzeitig erfolgende Bewegung eines lichtpositiven und eines lichtnegativen Teilchens dar.

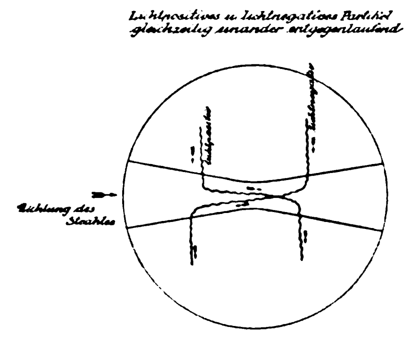


Fig. 6.

Es werden also Substanzen durch das Licht geschieden. Es tritt, wenn man so sagen darf, **Photolyse** ein. Die ganze beobachtete Erscheinung der Bewegung der Materie im Lichte wollen wir der Kürze halber als **Photophorese** bezeichnen.

Wir legen uns nun die Frage vor, wovon die Photophorese abhängt, bzw. welcher Natur die Kräfte sind, welche die Photophorese hervorrufen. Sind insbesondere die photophoretischen Kräfte solcher erster oder zweiter Art?

Hängt die Erscheinung von der elektrischen Ladung der Partikeln ab oder nicht?

Grundversuch VII.

Durch Verdampfung hergestellte Probekörper (Schwefel, Quecksilber, Selen) sind, wie erwähnt, beim Fehlen anderer ionisierender Wirkungen vollkommen ungeladen und bleiben es auch in unserem Lichtstrahle vorbeschriebener Art. Es ließe sich jede Auf- oder Abladung bei jedem einzelnen Probekörper sofort konstatieren.

Die lichtpositive wie lichtnegative Photophorese ist auch bei vollkommen ungeladenen und auch so bleibenden Probekörpern vorhanden.

Wir laden die Probekörper mit einem ionisierenden Präparate auf, so daß sie positive oder negative Ladung tragen. Die Erscheinung der Photophorese wird durch den Umstand, daß dieselben Probekörper nunmehr Ladungen tragen, weder qualitativ noch quantitativ geändert. Denn die Geschwindigkeit der Bewegung eines geladenen oder ungeladenen Probekörpers im Lichtstrahle wird bestimmt, sodann wird die elektrische Ladung desselben Probekörpers geändert und seine Geschwindigkeit im Lichtstrahle erneuert bestimmt. Es zeigt sich, daß die Geschwindigkeit, mit der das Teilchen im Lichtfelde bewegt wird, von der elektrischen Ladung des Probekörpers unabhängig ist.

Die Photophorese hat also nichts zu tun mit der elektrischen Ladung der Probekörper, bzw. mit deren Auf- und Abladung.

Versuch VIII.

Ein geladener Probekörper kann durch das elektrische Feld beliebig oft gehoben werden, und fällt bei abgeschaltetem Felde wieder im Schwerefelde herab. Konzentrieren wir das Licht auf einen so bewegten Probekörper so, daß die photophoretischen Kräfte wirksam werden, dann stellen die in nachfolgenden Fig. 7 u. 8 abgebildeten Bahnen die Bewegung eines lichtpositiven, bzw. eines lichtnegativen Probekörpers dar.

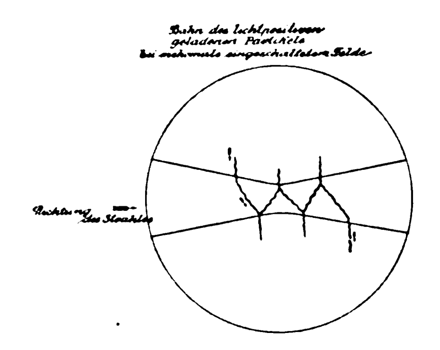


Fig. 7.

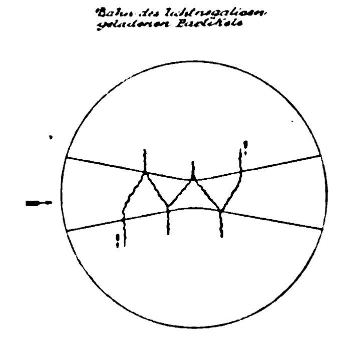


Fig. 8.



Versuch IX.

Man justiert beide einander entgegengerichtete Strahlen exakt in dieselbe Horizontale. Die Fallbewegung eines geladenen Partikels wird durch ein entsprechendes elektrisches Feld aufgehoben. Das Kügelchen wird im Raume gewissermaßen frei aufgehängt. Die Momentverschlüsse gestatten das gleichzeitige Abblenden des einen und das Öffnen des entgegengerichteten Strahles. Auf diese Weise kann ein lichtpositiver Probekörper in der Richtung der einfallenden Strahlen, ein lichtnegativer dagegen gegen die Richtung der einfallenden Strahlen oftmals hin- und hergeführt werden. Bei Probekörpern, bei welchen die photophoretischen Kräfte wesentlich größer sind als die vertikal wirkende Erdschwere, kann der Versuch auch bei ungeladenem Probekörper oder ohne daß die Erdschwere durch ein elektrisches Feld kompensiert wird, wiederholt durchgeführt werden.

Versuch X.

Die Bewegung des Probekörpers wird durch den Strahl sofort eingeleitet. Sie wächst bzw. nimmt ab mit der Intensität des wirkenden Strahles. So wurden z. B. gleiche Wege von $11,8 \cdot 10^{-3}$ cm von einem lichtpositiven, bzw. von einem lichtnegativen Körper in nachfolgender Fig. 9 angeführten Sekunden zurückgelegt.

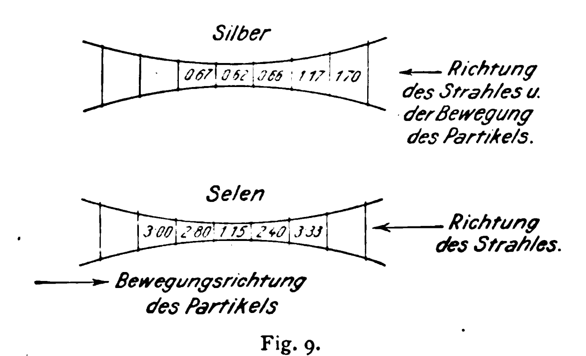


Fig. 9.

Die kürzesten Zeiten beziehen sich auf die Zonen engster Einschnürung des Strahlenkegels, die Geschwindigkeiten nehmen ab gegen den breiten Teil des Strahles. Die auf einer Präzisionsuhr wiederholt gestoppten Zeiten desselben Probekörpers sind die besten Zeugen der Verläßlichkeit der Messung. Die Schwankungen sind nie größer als die durch die Brownsche Bewegung bedingten.

Versuch XI.

Die gleichen Erscheinungen sind auch in spektral zerlegtem Licht oder in durch konzentrierte $CuSO_4$ Lösung filtriertem oder in monochromatischem Lichte zu konstatieren. Allerdings wird bei geringerer Intensität der wirksamen Strahlen die Erscheinung entsprechend schwächer. Doch lassen sich auch hier die Erscheinungen noch messend verfolgen.

Die Erscheinung hängt auch nicht von der schwachen Konvergenz des Doppelkegels des in Photographie 3, Tafel X reproduzierten Strahles ab, denn sie tritt auch in dem in Photographie 4 reproduzierten Parallelstrahle auf.

Grundversuch XII.

Wir erniedrigen den Gasdruck stufenweise; es wurde dies vom Atomsphärendruck bis 14 mm Quecksilber ausgeführt. Die lichtpositiven Materieteilchen bleiben lichtpositiv, ebenso behalten die lichtnegativen Probekörper diese Eigenschaft bei. Die Geschwindigkeit der Photophorese im Felde des Lichtstrahls nimmt aber mit zunehmendem Grade der Verdünnung des umliegenden Gases wesentlich zu.

Bestimmung der photophoretischen Kräfte.

Wir können jetzt die photophoretische Kraft bestimmen, die auf einen Probekörper angreift. Ist $\mathfrak{V}_L$ die Geschwindigkeit im Lichtstrahl, B die uns bekannte Beweglichkeit des Probekörpers, dann ist die photophoretische Kraft $\mathfrak{P}_L$ gegeben durch

$$\mathfrak{P}_L = \frac{\mathfrak{V}_L}{B},$$

sie fällt an Probekörpern von der Größenordnung $2 \cdot 10^{-5}$ cm bis $5 \cdot 10^{-6}$ cm Radius in die Größenordnung 10^{-10} bis 10^{-11} Dyne.

Wir gehen nun zur Entscheidung der Frage, ob die lichtpositive und lichtnegative Photophorese im Sinne unserer Definition als Kraft erster oder Kraft zweiter Art zu qualifizieren ist. Diese Frage läßt sich durch die quantitative Untersuchung der Abhängigkeit dieser Erscheinungen vom Gasdruck entscheiden. In jedem Falle wird die Bewegung des Kügelchens unter dem Einfluß der Lichtkraft durch obige Gleichung beschrieben, in der die Beweglichkeit eine von der Reibung im Gase abhängige Größe darstellt, die vom Radius des Kügelchens und infolge der bei so kleinen Probekörpern auftretenden Gleitung auch vom Gasdrucke abhängig ist. Es werden nun für ein und denselben Probekörper zunächst beim Gasdrucke p_1 die photophoretische Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_L^{(1)}$ sowie die Beweglichkeit desselben B_1, sodann für denselben Probekörper beim Gasdruck p_2 $\mathfrak{V}_L^{(2)}$ und B_2 und so in der Evakuierung fortschreitend schließlich $\mathfrak{V}_L^{(i)}$ und B_i bestimmt.

Sodann bildet man die Quotienten

$$\frac{\mathfrak{B}_L^{(1)}}{B_1}, \frac{\mathfrak{B}_L^{(2)}}{B_2}, \ldots \frac{\mathfrak{B}_L^{(i)}}{B_i}.$$

Diese Quotienten bedeuten aber nichts anderes als die bei den Drucken $p_1, p_2, \ldots p_i$ auf den Probekörper ausgeübten photophoretischen Kräfte. Rührt daher die vom Kügelchen unter dem Einfluß der photophoretischen Kraft erreichte Geschwindigkeit $\mathfrak{B}_L$ nur von Kräften erster Art und nicht von Einwirkung des umgebenden Gases (Kräften zweiter Art) her, so muß das Experiment die Unabhängigkeit der Größe dieser Kräfte $\frac{\mathfrak{B}}{B}$ vom Gasdruck ergeben. Tritt aber eine Abhängigkeit der photophoretischen Kräfte vom Gasdruck ein, dann sind die von der Strahlung übertragenen Kraftwirkungen wenigstens zum Teile vom umliegenden Gase herrührend und Kräfte zweiter Art.

So eröffnet sich die Möglichkeit, diese Kräfte quantitativ und für verschiedene Materialien zu verfolgen. Wir wollen nun den Versuch tatsächlich ausführen. Es wäre nun ideal, die Geschwindigkeit ein- und desselben Probekörpers im Lichtfelde bei verschiedenen Drucken messend zu verfolgen. Bisher ist dieser Versuch noch nicht gelungen, weil man ein Kügelchen, das man bei einem Druck der Messung unterzogen hat, bei Veränderung des Druckes aus dem Auge verliert. Doch ist das kein Hindernis, die Frage trotzdem zur Entscheidung zu bringen, denn wir haben in den einleitenden Erörterungen gesehen, daß alle Silberkügelchen oder Schwefelkügelchen usw. gleichen optischen Bildes (gleicher Farbe) bei demselben Gasdruck gleiche Beweglichkeit aufweisen. Man kommt daher ebenfalls und viel rascher zum Ziele, wenn man die Geschwindigkeiten vieler Probekörper gleichen optischen Verhaltens bei gleicher Intensität der wirksamen Strahlung bestimmt und die Mittelwerte dieser photophoretischen Geschwindigkeiten bei gleichem Gasdruck bildet. So erhält man z. B. für Silberkügelchen gelber Farbe, welche bei Atmosphärendruck die mittlere photophoretische Geschwindigkeit $7{,}9 \cdot 10^{-3}$ cm pro Sekunde hatten, beim Druck von 100 mm Quecksilber lichtpositive Geschwindigkeiten von der Größe $35{,}7 \cdot 10^{-3}$ cm pro Sekunde, ferner beispielsweise bei lichtnegativen blauen Schwefelkügelchen, bei normalem Druck die lichtnegativen Geschwindigkeiten $0{,}6 \cdot 10^{-3}$ cm pro Sekunde, bei 55 mm Quecksilber Geschwindigkeiten $4{,}09 \cdot 10^{-3}$ cm/sec.

In nachfolgenden Tabellen V und VI sind den Gasdrucken die photophoretischen Geschwindigkeiten $\mathfrak{B}_L$ zugeordnet.

Tabelle V.

Lichtpositive photophoretische Kraft an *Ag*-Partikeln bei verschiedenen Drucken.

Druck in mm *Hg*	$\mathfrak{B}_L \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$B \cdot 10^{-7}$	$\mathfrak{P}_L = \frac{\mathfrak{B}_L}{B} \cdot 10^{10}$
760	7,92	7,60	1,035
550	8,57	8,90	0,962
400	10,44	10,80	0,964
320	12,05	12,60	0,956
220	17,60	16,60	1,060
100	35,75	32,10	1,144

Die photophoretischen Kräfte $\mathfrak{P}_L$ für so kleine Silberkugeln bei niederen Drucken, bei welchen die einleitend erwähnte Knudsen-Webersche Korrektur bereits einzutreten hat, weil der Radius des Probekörpers sehr klein gegen die mittlere Weglänge ist, ergeben sich für die Drucke 550, 400, 320, 222 und 100 mm *Hg* zu 0,95, 0,94, 0,90, 0,96, 0,91 . 10^{-10} Dyne.

Trägt man die Geschwindigkeiten in Kurven als Funktion des Gasdruckes auf, dann wachsen bei allen lichtpositiven wie lichtnegativen Probekörpern die photophoretischen Geschwindigkeiten bei stets kleiner werdenden Drucken immer mehr. (Fig. 10.)

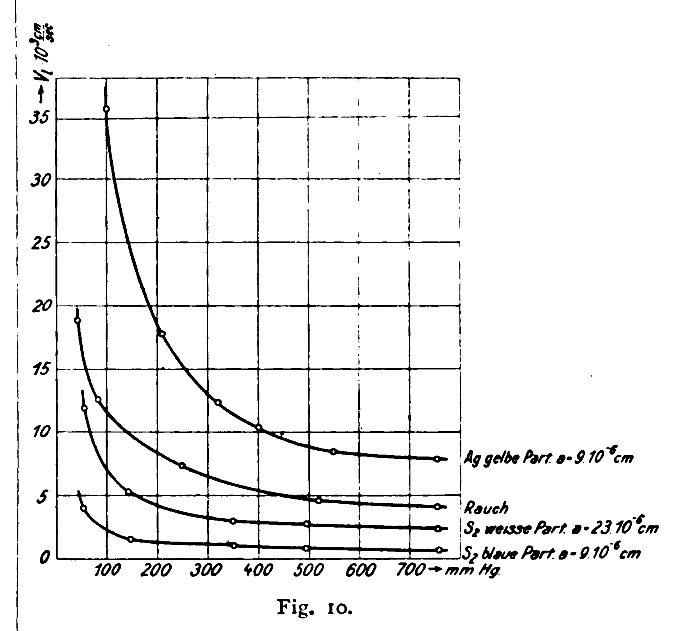


Fig. 10.

Es hat also den Anschein, als würde die Materie in einem absolut leeren Raume mit sehr großer Geschwindigkeit von der Strahlung fortgeführt.

Die Gedanken von Svante Arrhenius über die Fortführung der Materie durch die Strahlung sind also in erweitertem

Tabelle VI.
Lichtnegative photophoretische Kraft an Schwefelkugeln bei verschiedenen Drucken.

Druck in mm Hg	Orange Partikel (Radius = $19 \cdot 10^{-6}$ cm)			Blaue Partikel (Radius = $9 \cdot 10^{-6}$ cm)		
	$\mathfrak{V}_L \cdot 10^3 \frac{cm}{sec}$	$B \cdot 10^{-7}$	$\mathfrak{P}_L = \frac{\mathfrak{V}_L}{B} \cdot 10^{10}$ Dyne	$\mathfrak{V}_L \cdot 10^3$	$B \cdot 10^{-7}$	$\mathfrak{P}_L = \frac{\mathfrak{V}_L}{B} \cdot 10^{10}$ Dyne
760	1,70	1,77	0,96	0,60	4,79	0,13
496	1,97	2,10	0,94	0,80	6,48	0,12
354	2,23	2,40	0,93	0,98	7,98	0,12
143	3,93	4,20	0,94	1,57	13,27	0,12
55	8,08	8,90	0,91	4,09	34,25	0,12

Umfange erwiesen worden, denn es gibt nicht nur eine Fortführung der Materie im Sinne der Fortpflanzung der Strahlung, sondern auch in engegengesetzter Richtung.

Nun kann man für jeden Gasdruck die Beweglichkeit der Probekörper bestimmen. Damit ist unmittelbar nach Messung der Geschwindigkeit im Lichtstrahle die Größe der photophoretischen Kraft gegeben, indem wir für jeden Druck die Beziehung

$$\mathfrak{P}_L = \frac{\mathfrak{V}_L}{B}$$

bilden.

Die Konstanz der photophoretischen Kräfte bei verschiedenen Drucken ist geradezu erstaunlich. Es ergeben sich für Silber lichtpositive photophoretische Kräfte, für orange und blaue Schwefelkügelchen lichtnegative photophoretische Kräfte, die ich als Beispiele in Tabelle V und VI, Kolonne 4 bzw. 4 und 7 anführe.

Diese vollkommenere Konstanz (die Abweichungen betragen höchstens einige Prozente), trifft in allen Fällen zu.

So ergibt sich das wichtige und für unsere Schlüsse bedeutsame Resultat, daß die photophoretischen Kräfte vom Drucke des den materiellen Probekörper umgebenden Gases nicht abhängen, sondern bloß von der Intensität der Strahlung und von der physikalischen Beschaffenheit des Probekörpers selbst. Dies gilt sowohl für die lichtpositive wie für die lichtnegative Materie. Wir haben es also bei den photophoretischen Kräften mit Kräften erster Art im Sinne unserer Auseinandersetzungen zu tun.

Nun wollen wir noch einen letzten Punkt besprechen.

Wir wissen bereits, daß mit zunehmender Fallgeschwindigkeit der Probekörper, mit deren zunehmender Größe die Farbe des vom Partikel senkrecht zu den beleuchtenden Strahlen gebeugten Lichtes, in dem sie zur Beobachtung gelangen, sich zu längeren Wellen verschiebt.

Vergleichen wir die gemessenen Geschwindigkeiten der Fallbewegung mit den photophoretischen Geschwindigkeiten der Probekörper, d. h. stellen wir uns die Frage nach einem Zusammenhange der photophoretischen Geschwindigkeit und der Größe des Partikels, dann sehen wir z. B. in Tabelle I, Kolonne 7 bei Silberkügelchen, daß die photophoretischen Geschwindigkeiten von dem den kleinsten Partikeln zugeordneten Werten von $2 \cdot 10^{-3}$ cm/sec bei den Silberkügelchen mittlerer Größe zu einem Maximum $18 \cdot 10^{-3}$ cm/sec anwachsen, um bei den größten Partikeln wieder zu einem Werte von $7 \cdot 10^{-3}$ cm/sec abzusinken. Wir kommen also zu dem wichtigen Ergebnisse, daß sich ein deutlich ausgeprägtes Maximum der Fortführungsgeschwindigkeit im Lichtstrahle für bestimmte mittlere Fallgeschwindigkeiten oder was nach den vorhergehenden Ausführungen gleichbedeutend ist, für bestimmte mittlere Partikelgrößen ergibt.

Wir können uns jetzt die Frage vorlegen, ob die lichtpositive Bewegung durch Lichtdruck im Sinne der Wellentheorie hervorgerufen wird. Greifen wir diesbezüglich auf die Erörterungen Schwarzschilds über den Druck des Lichtes auf kleine Kugeln zurück.

Man kann die Gedanken dieses Autors etwa folgendermaßen kurz zusammenfassen: Bei großen Kugeln ist das Verhältnis V des Lichtdruckes zur auf die Kugel vom Radius a auffallenden Energie der Einstrahlung im Sinne der Wellentheorie des Lichtes gleich eins. Wenn aber die Kugeln in ihren Dimensionen an die Lichtwellenlängen heranragen, dann spielt auch bei diesem Problem die Beugung der Strahlung die entscheidende Rolle. Für vollkommen reflektierende Kugeln hat Schwarzschild in der von uns erwähnten Studie das Verhalten folgendermaßen gekennzeichnet: Das Verhältnis des Lichtdruckes $\mathfrak{P}$ zur einfallenden Energiemenge $\pi a^2 w$, worin w die Energiedichte der

Strahlung bedeutet, steigt von dem für große Kugeln gültigen und auch von Svante Arrhenius benutzten Werte 1 zunächst langsam an, wenn man den Kugelradius verkleinert. Ist der Kugelhalbmesser auf ein Drittel der Wellenlänge herabgesunken, dann erfolgt ein merkwürdiges rapides Anwachsen, welches bei Kugeln von etwa ein sechstel Wellenlänge der einfallenden Strahlung Halbmesser zu einem Maximum in der Größe 2,5 führt. Bei weiterer Verkleinerung des Kugelhalbmessers sinkt das Verhältnis

$$V = \frac{\mathfrak{P}}{\pi a^2 w}$$

noch plötzlicher ab, als es vorher angestiegen war. Für Kugelradien vom Zehntel der Wellenlänge des Lichtes ist es wieder unter die Einheit zurückgegangen und nimmt alsbald verschwindend kleine Werte an.

Für die Wellenlängen des von mir benutzten Strahles wäre die maximale Photophorese an vollkommen reflektierenden Kugeln vom Radius $10 \cdot 10^{-6}$ cm zu gewärtigen. Im Speziellen hat aber Gerda Laski in Wien nach den Debyeschen Formeln das Maximum von

$$\frac{\mathfrak{P}}{\pi a^2 w}$$

für Silberkugeln vom komplexen Brechungsexponenten N berechnet. Aus diesen Rechnungen folgt, daß für die Strahlung der von uns verwendeten Wellenlänge die maximale Wirkung des Lichtdruckes durch die Beugung des Lichtes an diesen Silberkugeln beim Kugelradius $a = 9{,}8 \cdot 10^{-6}$ cm erfolgen muß, wie Fig. 11 beweist.

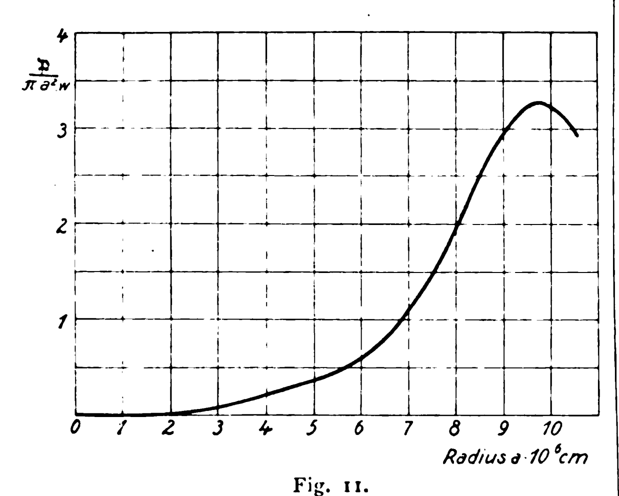


Fig. 11.

Vergleichen wir damit die in der Tabelle I. Kolonne 7 bzw. 3 angeführten experimentell gewonnenen Zahlen, dann finden wir, daß die lichtpositive photophoretische Kraft — lediglich gemessen durch die Fortführungsgeschwindigkeit im Lichtstrahl, geteilt durch die Beweglichkeit der Kügelchen — bei den Silberkugeln tatsächlich ein deutlich ausgeprägtes Maximum aufweist. Dies Maximum kommt dem Probekörper 17, Tabelle I, mit einer photophoretischen Geschwindigkeit $18 \cdot 10^{-3}$ cm/sec zu. Der Radius dieser Silberkugel muß also zufolge dieses Beugungsmaximums der Strahlung $9{,}8 \cdot 10^{-6}$ cm betragen.

Dieses hiermit gewonnene neue Verfahren der Größenbestimmung submikroskopischer Probekörper kann jetzt mit den beiden einleitend erörterten verglichen werden. Blickt man in der Zeile des Probekörpers Nr. 17 Tabelle I auf die Kolonne 4 und 5, dann findet man für den Radius aus der Fallgeschwindigkeit $9{,}86 \cdot 10^{-6}$ cm, aus der Farbe des Radius $9 \cdot 10^{-6}$ cm.

Diese drei Größenbestimmungen sind aber voneinander vollkommen unabhängig; die erste ergibt sich aus der beobachteten Fallgeschwindigkeit auf Grund mechanischer Gesetze, die zweite folgt aus der beobachteten abgebeugten Farbe des Probekörpers auf Grund der Wellentheorie des Lichtes, die dritte aus dem beobachtetem Maximum der photophoretischen Geschwindigkeit.

Daraus können wir dreierlei erschließen:

1. auch bei den photophoretischen Kräften spielt die Beugung eine hervorragende Rolle.

2. unsere Größenbestimmung der Probekörper sowohl aus der Farbe (Beugung des Lichtes) sowie aus der Fallgeschwindigkeit (Stokes-Cunninghamsches Gesetz) war richtig. Denn das photophoretische Maximum ist aus ganz anderen Meßbereichen und Grundlagen der Physik gerade bei jener Kugelgröße gefunden worden, die auch die Fallgeschwindigkeit und die beobachtete Farbe denselben Probekörpern zuschrieb.

3. Diese dritte Größenbestimmung der Probekörper erhärtet erneuert die Schlüsse des ersten Teiles meiner Auseinandersetzungen. Denn durch diese neue Kapazitätsbestimmung (Größenbestimmung) ist eine erneute Ladungsbestimmung erfolgt.

Ich muß bemerken, daß auch die lichtnegative photophoretische Kraft ein ausgesprochenes Maximum aufweist, so daß man auch hier auf Einfluß der Beugung schließen muß. Dies tritt bei Schwefelkügelchen beim Radius $26 \cdot 10^{-6}$ cm, bei Selenkügelchen beim Radius $15 \cdot 10^{-6}$ cm ein, wie aus den Messungen von I. Parankiewicz in Wien hervorgeht.

Über den quantitativen Vergleich der einstrahlenden Energie und der positiven photophoretischen Kraft werde ich bald an anderer Stelle berichten.

Ich erwähne jetzt noch einen einfachen Versuch. Man kann z. B. ein lichtpositives oder lichtnegatives Körperchen vom Gewichte *mg* von einem vertikal nach aufwärts gerichteten Strahle treffen lassen. Dieser Versuch scheint mir darum von besonderem Interesse, weil er eine experimentelle Nachahmung der kosmischen Dynamik der Kometenschweife darstellt. Es werden so nicht nur jene Kometenschweife erklärlich, die sich von der Sonne ab, sondern auch solche, welche sich dieser zuwenden. (Svante Arrhenius, Bredechin.)

Zum Schlusse möchte ich erwähnen, daß die Geschwindigkeit der Kügelchen in den verschiedenen Zonen des Strahlquerschnittes das beste Maß der Energieverteilung im Strahle selbst ist. Gelingt es doch auf diese Weise mit solchen Probekörpern die Energieverteilung in einem solchen im Durchmesser nur $^1/_{100}$ cm betragenden Strahle vielleicht noch sicherer zu messen, als dies in größeren Bereichen auf anderen Gebieten der Physik bisher möglich war. Diese Probekörper sind also nicht nur das empfindlichste Elektrometer, sondern auch ein Bolometer im wahrsten Sinne des Wortes. Weitere theoretische Schlüsse, so naheliegend und interessant sie auch wären, will ich der Zukunft vorbehalten, da in diesen Auseinandersetzungen die Erfahrungstatsachen im Vordergrunde stehen sollen. —

Wien, Universität Mai 1917.

(Eingegangen 24. Mai 1917.)

Berichtigung

zur Arbeit Schallfelder und Schallantennen II, diese Zeitschrift **18**, 261 ff., 1917.

Die Tabelle VII auf Seite 269 weist Fehler auf und ist durch folgende zu ersetzen:

R	d	n_l	n_w	d_e	d_n
2,1	0,06	1315	1007	0,006	0,034
2,1	0,065	1542	1162	0,011	0,046
3,3	0,13	1750	1137	0,032	0,113

Einzelne von den Membranen wurden nämlich auch in geschlossenen Wasserräumen untersucht, und diese Messungen sind z. T. versehentlich in die für das freie Wasser gültige Tabelle eingetragen worden.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Dr. P. Zistler vom Meteorologischen Institut in München zum zweiten Abteilungsvorsteher an der Kaiserlich Osmanischen Zentralanstalt für Witterungskunde in Konstantinopel, das Mitglied der École supérieure d'électricité in Paris und Direktor des französischen Hochschulwesens Lucien Poincaré zum Rektor der Universität Paris, der ord. Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Martin Näbauer in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule Karlsruhe, Dr. Bela Szilard zum Professor für Radiologie an der Universität Madrid, der Privatdozent für Physik an der Universität Gießen Dr. Paul Cermak zum a. o. Professor, der Privatdozent für physikalische Chemie und Elektrochemie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Kasimir Fajans zum Vorstand der physikalisch-chemischen Abteilung des chemischen Laboratoriums der Universität München.

Berufen: Der a. o. Professor für Chemie an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Freiherr Reinhold v. Walther in eine neu zu errichtende Professur für Gewinnung und Verwertung der Nebenprodukte der Braunkohle an der Bergakademie Freiberg.

Verliehen: Dem ord. Honorarprofessor der theoretischen Physik an der Universität Marburg Dr. Wilhelm Feußner der Titel Geh. Regierungsrat, den Privatdozenten der Chemie an der Universität Berlin Dr. Joseph Houben, Dr. Hans Pringsheim und Dr. Artur Stähler der Titel Professor.

Vom Lehramt zurück: Der Honorarprofessor für Mathematik an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Richard Heger.

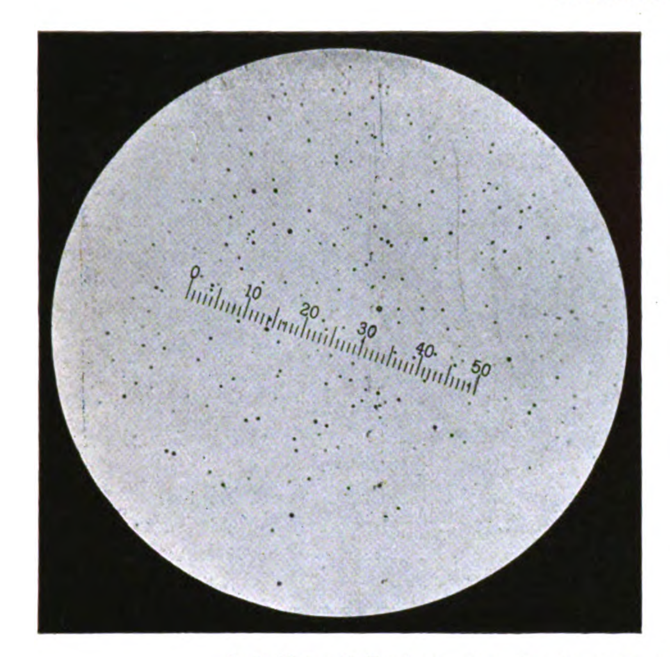
In den Ruhestand: Der ord. Professor der Geometrie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Geh. Hofrat Dr. Martin Disteli.

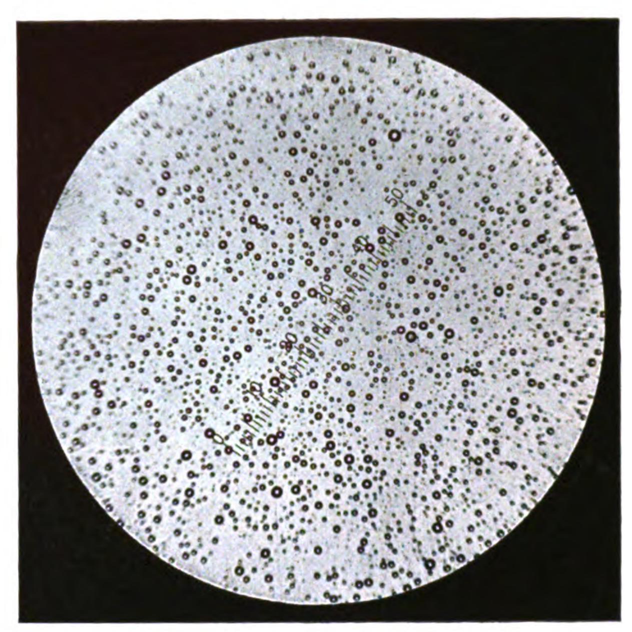
Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig. Druck von August Pries in Leipzig.



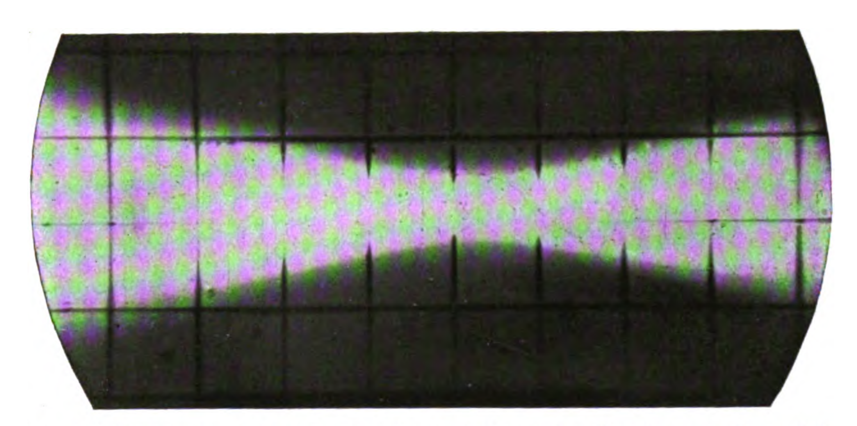
Schwefelkugeln





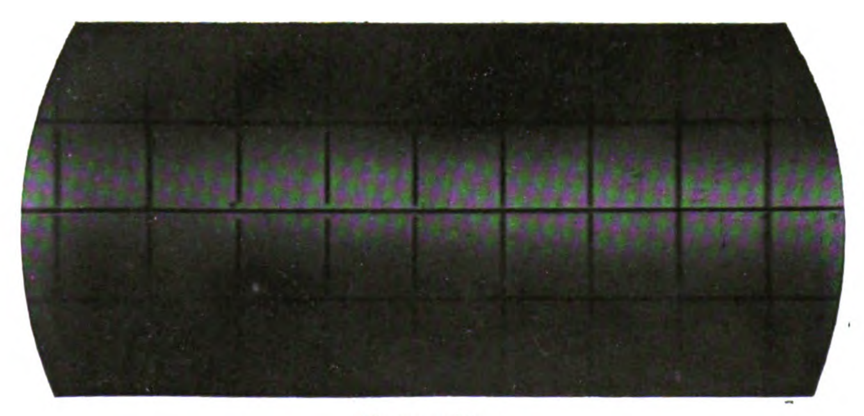
Aufgelöst mit Trockensystem Apertur 0,95, 1 pars des Okularmaßstabes $= 35{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm.

Photographie 1. Photographie 2.



Dunkelfeldbild des Strahles, in dem die Fortführung der Materie beobachtet wird.
1 pars des Okularmaßstabes vertikal $11{,}8 \cdot 10^{-3}$ cm, horizontal $11{,}4 \cdot 10^{-3}$ cm.

Photographie 3.



Photographie 4.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 16. | 15. August 1917. Redaktionsschluß für No. 17 am 10. August 1917. | 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Notizen über eine Größentäuschung und über einige scheinbare Bewegungen.

Von O. Grotrian.

I. Größentäuschung.

Man zeichne wie in Fig. 1 zwei Kreise mit genau gleichem Durchmesser. Vom Umfange des linken Kreises aus mögen radiale Gerade nach dem Innern der Kreisfläche gezogen werden. Zweckmäßig führt man dieselben nicht bis zum Mittelpunkte und versieht ihre inneren Enden mit nach innen gerichteten Pfeilspitzen. Der

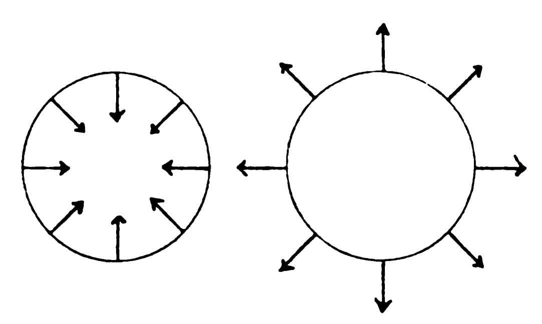


Fig. 1.

betreffende Kreis mag als „Radkreis“ bezeichnet werden.

Der Kreis rechts werde als „Sternkreis“ vom Umfange aus mit radial nach außen verlaufenden Geraden versehen, die in Pfeilspitzen enden.

Betrachtet man aufmerksam, jedoch unbefangen, mit einem Auge oder mit beiden die Kreise, dann erscheint dem Beschauer der Sternkreis größer als der Radkreis.

Die sich so zeigende Größentäuschung tritt noch deutlicher hervor, wenn man den Radkreis mit mehreren Sternkreisen (oder auch umgekehrt) umgibt. Fig. 2 zeigt dementsprechend einen von 4 Sternkreisen umgebenen Radkreis.

Bezeichnet d_0 den Durchmesser des Sternkreises, d_1 denjenigen des Radkreises, dann ist

$$d_0 = d_1,$$

dagegen scheinbar

$$d_0 > d_1.$$

Läßt man bei unverändertem Sternkreis den Durchmesser d_1 in kleinen Intervallen auf d_2, $d_3, \ldots d_n, \ldots$ anwachsen, dann ist es möglich, einen Wert d_n zu finden, für welchen scheinbar

$$d_0 = d_n,$$

dabei in Wirklichkeit $d_0 < d_n$ ist.

Die Differenz der wahren Werte $d_n - d_0$ stellt dann die scheinbare Verkleinerung dar, welche der Radkreis gegenüber dem gleich großen Sternkreise erfährt, oder v. v. die Vergrößerung des Sternkreises gegenüber dem Radkreise.

Mittels zahlreicher Zeichnungen hat der Verfasser versucht, die Verkleinerung $d_n - d_0$ zahlenmäßig zu bestimmen für verschieden große Werte von d_0. Die erhaltenen Ergebnisse sind zu unsicher, um hier mitgeteilt zu werden. Es scheint jedoch, daß die Verkleinerung $d_n - d_0$ bei nicht zu großem Gesichtsfelde der Zeichnung im ganzen mit wachsendem d_0 zunimmt.

Die Erscheinung, welche Fig. 1 und 2 erkennen läßt, kann im wesentlichen nicht als eine solche der Irradiation aufgefaßt werden. Denn letztere tritt dort auf, wo in der Zeichnung weiße und schwarze Flächen aneinander grenzen. Für eine scheinbare Vergrößerung oder Verkleinerung der Kreise gegeneinander könnten daher nur diejenigen Punkte in Betracht kommen, in denen die äußeren radialen Linien die Peripherie des Sternkreises, die inneren diejenige des Radkreises treffen.

Gegen eine derartige Annahme spricht aber folgender Umstand. Läßt man die Treffpunkte zwischen den radialen Geraden und der Peripherie einfach fort, so zeigt sich trotzdem ein scheinbarer Größenunterschied. Fig. 3 läßt das erkennen. Die radialen Geraden sind hier bei beiden Kreisen nicht bis zur Peripherie geführt, sondern enden in einem gewissen Ab-

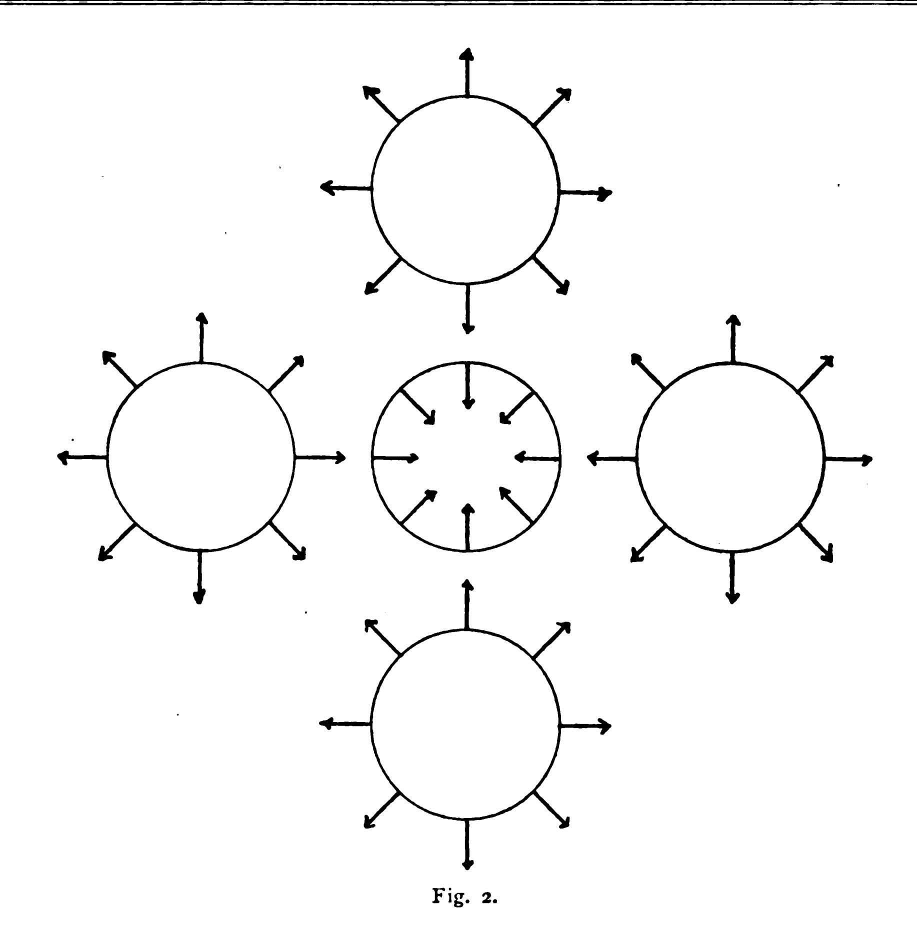


Fig. 2.

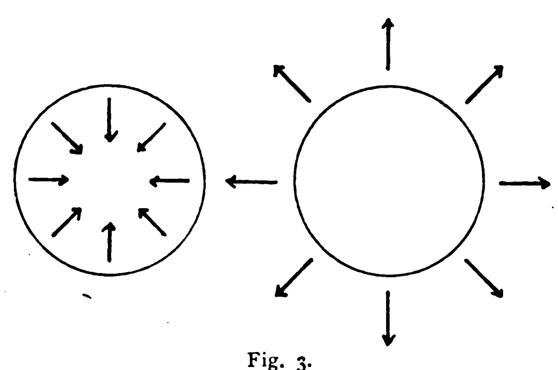


Fig. 3.

stande von derselben. Der scheinbare Größenunterschied bleibt aber wie in Fig. 1 und 2 bestehen.

Verf. betrachtet den scheinbaren Größenunterschied der Kreise in Fig. 1, 2 und 3 als hervorgerufen dadurch, daß die äußeren und inneren radialen Geraden die Augenbewegungen verschieden beeinflussen, die dann wieder auf die Größenschätzung einwirken.

II. Scheinbare Bewegungen, namentlich Drehungen.

Bekannt ist die scheinbare Drehung, welche bei einem Kreise auftritt, der mit nach außen gerichteten radialen Geraden versehen ist, (siehe Fig. 4). Das so schematisch dargestellte Zahnrad zeigt eine scheinbare Drehung, wenn man die Zeichenfläche in ihrer eigenen Ebene so bewegt, daß jedes Linienelement mit sich selbst parallel bleibt, also alle Punkte der Zeichnung gleich große Kreise beschreiben. Erfolgt die wirkliche Bewegung des Papiers rechts herum, d. h. im Sinne des Uhrzeigers, dann scheint das Zahnrad links herum zu rotieren. Bei mecha-

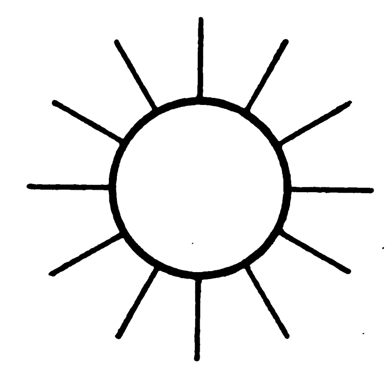


Fig. 4.

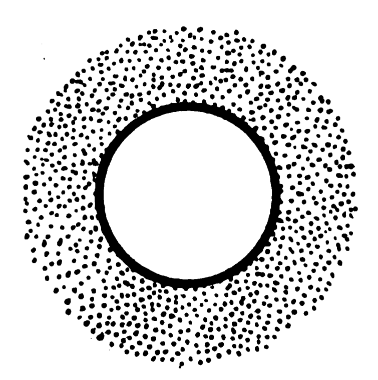


Fig. 5.

nischer Linksdrehung hat die scheinbare Drehung den Sinn rechts herum.

Eine gleichartige scheinbare Rotation läßt

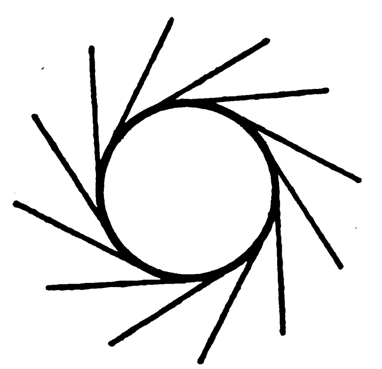


Fig. 6.

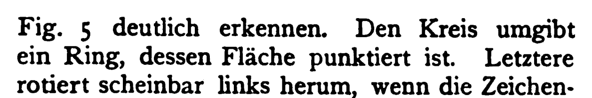


Fig. 5 deutlich erkennen. Den Kreis umgibt ein Ring, dessen Fläche punktiert ist. Letztere rotiert scheinbar links herum, wenn die Zeichenebene rechts herum gedreht wird, und umgekehrt.

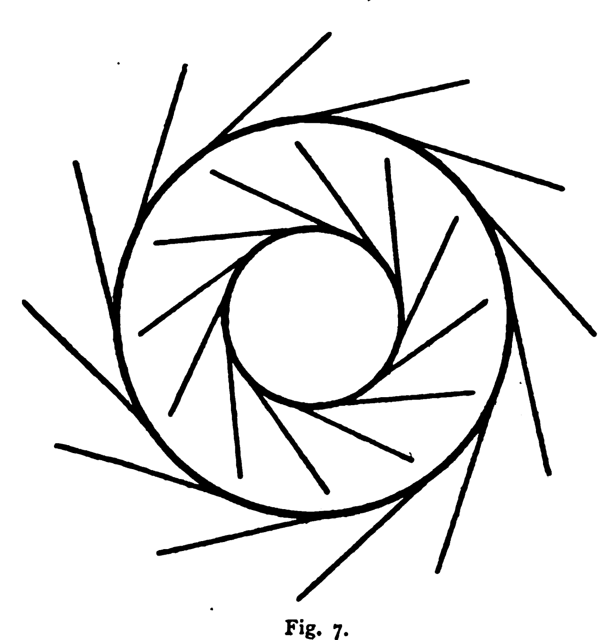


Fig. 7.

S. P. Thompson[1]) hat die Erscheinung der Fig. 4 in sehr wirkungsvoller Weise verstärkt dadurch, daß er das Zahnrad noch mit sechs Scheiben umgeben hat, die aus schmalen weißen und schwarzen Kreisringen zusammengesetzt sind. Die Scheiben zeigen bei dem Versuch eine Drehung entgegengesetzt der des inneren Zahnrades.

Versieht man den Kreis statt mit radialen Ausläufern mit solchen, die genähert oder genau tangential verlaufen, siehe Fig. 6, dann entsteht eine Zeichnung, die einem Sperrzahnrade entspricht. In Fig. 6 sind zwei solche Räder mit entgegengesetzt gestellten Zähnen verzeichnet. Das Rad links möge als Linkssperrad bezeichnet werden, da eine eingreifende Sperrklinke eine Drehung nur links herum zuläßt. Aus gleichem Grunde werde das Rad rechts als Rechtssperrrad bezeichnet.

Erteilt man der Zeichnung eine linear schwingende Bewegung senkrecht zur Blickrichtung, dann zeigen beide Räder eine entgegengesetzte scheinbare Rotation. Letztere erfolgt in dem Sinne, in welchem man die Zähne vom Kreisumfange aus nach außen verfolgt, also gegen die Sperrklinke, d. h. beim Linkssperrrade rechts, beim Rechtssperrade links herum.

Die Erscheinungen treten noch deutlicher zutage in den Fig. 7 und 8. In Fig. 7 ist das Rechtssperrad konzentrisch vom Linkssperrade umgeben, während in Fig. 8 um das in der Mitte der Figur gezeichnete Linkssperrad vier Rechtssperräder gruppiert sind.

Zur Erzielung möglichster Deutlichkeit der Rotation scheint es zweckmäßig zu sein, die schwingende Bewegung senkrecht zur Verbindungslinie der Augen vorzunehmen.

1) S. P. Thompson, Monthly Journ. of Science 1879, 7 ff.

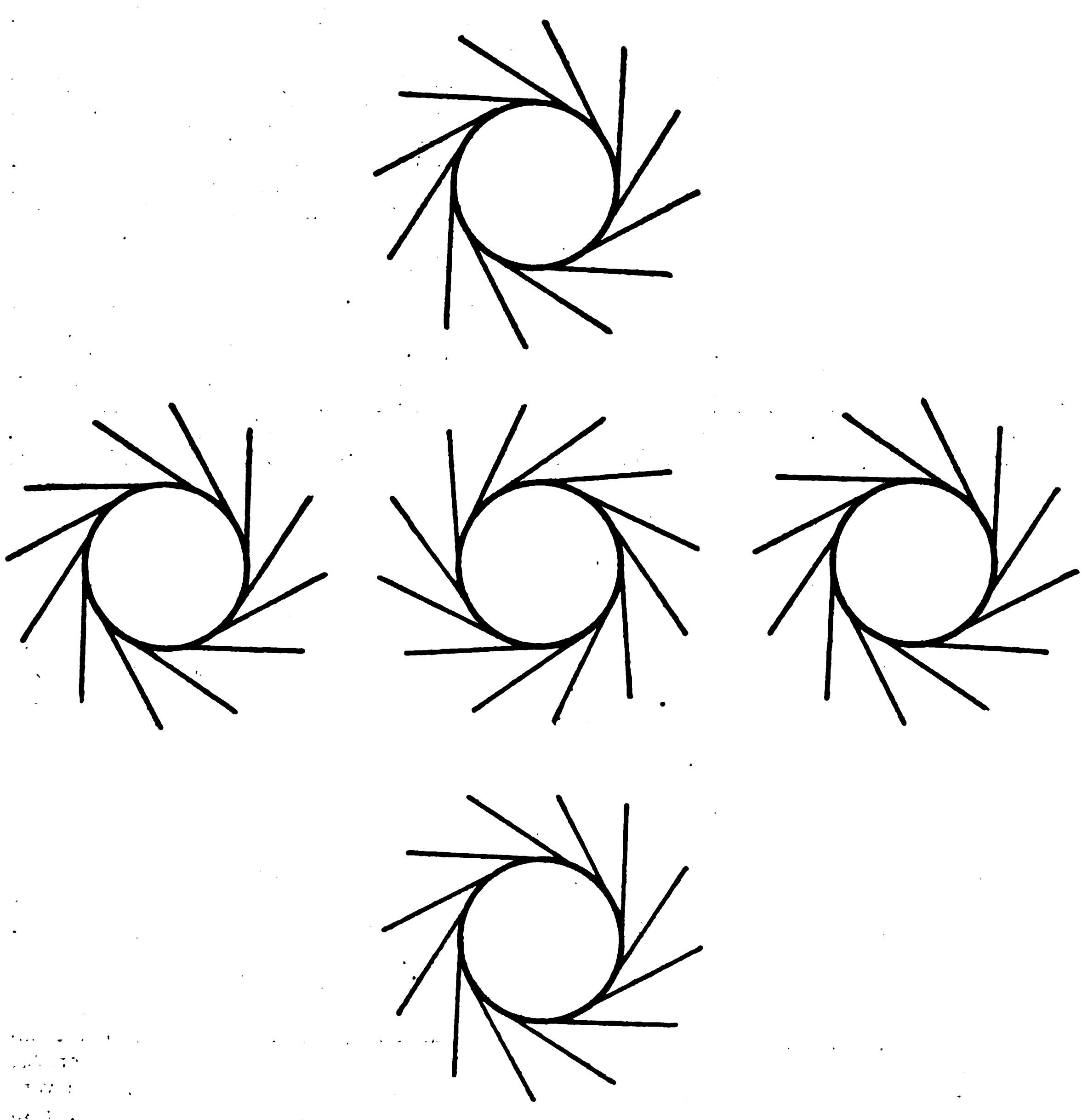


Fig. 8.

Eine der Zeichnung erteilte drehende Bewegung zeigt die Erscheinung in ähnlicher, jedoch modifizierter Weise. Bei Rechtsdrehung des Papiers ist die Linksdrehung des Rechtssperrades ausgesprochen stärker als bei oszillierender Bewegung der Zeichnung. Beim Linkssperrade ist die erscheinende Rechtsdrehung schwächer als bei schwingender Bewegung. Es ist aber bemerkenswert, daß hier der Drehsinn nicht unabänderlich fest ist. Denn aus nicht sicher erkennbaren Gründen kann derselbe dem Auge statt rechts herum, gelegentlich auch links herum gerichtet erscheinen.

Setzt man an Stelle der tangentialen geradlinigen Ausläufer solche, welche spiralartig gekrümmt tangential in die Kreislinie einmünden, dann entsteht eine Art Schaufelrad, welches mit dem Laufrade von Turbinen einige Ähnlichkeit besitzt. In Fig. 9 sind zwei solche Räder mit entgegengesetzt gestellten Schaufeln verzeichnet. Das links befindliche werde Linksschaufelrad genannt, da ein entsprechendes Turbinenrad durch von innen nach außen gegen die Schaufeln gepreßte Wassermassen in Rotation links herum geraten würde. Aus entsprechendem Grunde werde das rechts schematisch gezeichnete Rad als Rechtsschaufelrad bezeichnet.

Erteilt man nun der Zeichnung Fig. 9 eine

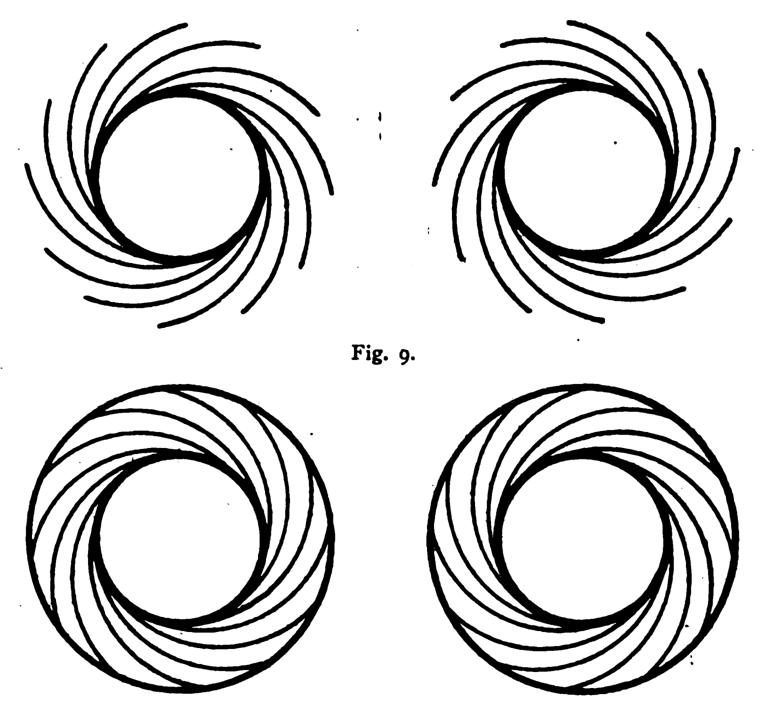


Fig. 9.

Fig. 10.

linear schwingende Bewegung, etwa senkrecht zur Verbindungslinie der Augen, dann zeigt meistens das Linksschaufelrad eine scheinbare Drehung rechts herum, während das Linksrad entgegengesetzt zu rotieren scheint. Der Sinn der scheinbaren Drehung ist also gleich demjenigen eines entsprechenden Sperrzahnrades.

Außer den genannten Drehungen können aber auch die entgegengesetzten auftreten, namentlich wenn diese durch einen besonderen Willensakt eingeleitet werden. Es können daher, wenn schon weniger leicht, bei Fig. 9 auch die folgenden Fälle 2, 3 und 4 bei schwingender Zeichenfläche eintreten:

Linkes Rad 2 ↷, 3 ↶, 4 ↶ ; Rechtes Rad 2 ↷, 3 ↶, 4 ↷

Die Herbeiführung auch dieser Rotation wird erleichtert, wenn man wie in Fig. 10 die äußeren Enden der Schaufeln durch einen Kreis schließt.

Fig. 11 stellt zwei gestreckte Rechtecke I

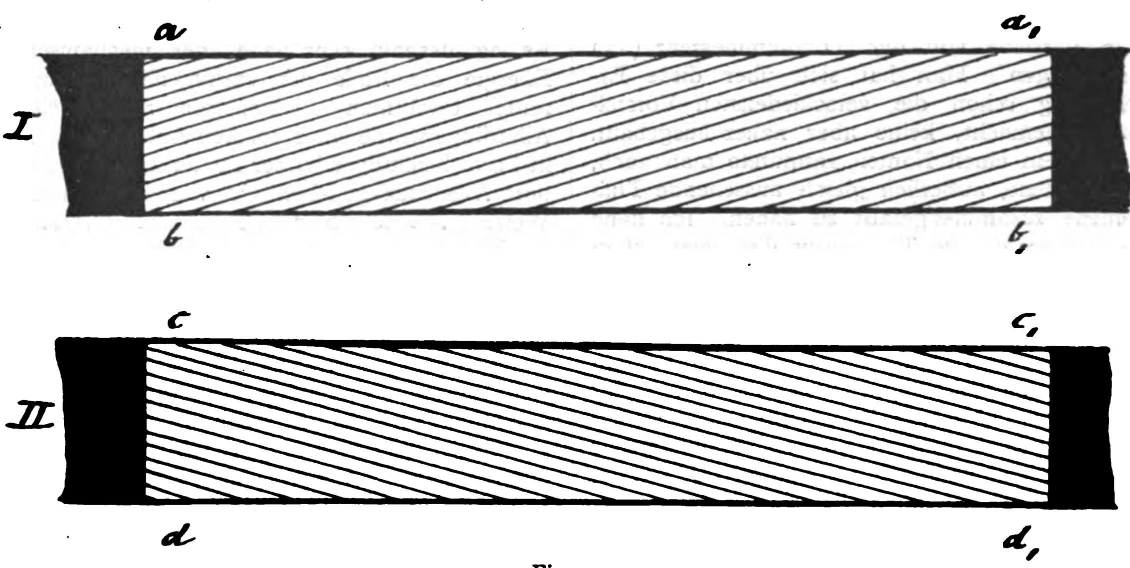


Fig. 11.

und II dar, deren Flächen entgegengesetzt schraffiert sind. Im oberen Rechteck I verlaufen die Schraffierungslinien von unten links (bb_1) nach oben rechts (aa_1), im unteren von oben links (cc_1) nach unten rechts (dd_1).

Erteilt man der Figur eine schwingende Bewegung, dann zeigen die Enden der Schraffierungslinien, eine scheinbare Bewegung parallel den horizontalen Grenzlinien derart, daß die in aa_1 eintretenden Enden nach rechts bewegt erscheinen. Für bb_1 und cc_1 scheint die Bewegung nach links, für dd_1 nach rechts gerichtet zu sein. Die scheinbare Bewegung entspricht demnach dem Sinne, in welchem die Schraffierungslinien vom Innern der Rechtecke nach den horizontalen Grenzlinien gerichtet sind.

Daß die parallelen Grenzlinien bb_1 und cc_1 ausgesprochen geneigt gegeneinander zu verlaufen scheinen, ist bereits früher in der wohlbekannten Zöllnerschen Figur zum Ausdruck gebracht.

Verf. hofft, daß die vielen in der Literatur beschriebenen optischen Täuschungen, wichtig u. a. für das Studium der komplizierten Augenbewegungen, durch die vorstehenden Mitteilungen eine nicht unbrauchbare Ergänzung erfahren.

Aachen, Juli 1917.

(Eingegangen 10. Juli 1917.)

Über das Wesen der Triboluminescenz.

Von A. Imhof.

Einleitung.

Während die Photolumineszenz (Fluoreszenz, Phosphoreszenz mit ihren Varianten) unter einheitlichen Gesichtspunkten erklärt wurde, kann man dasselbe von der Triboluminescenz (Tl.) nicht sagen. Man hat sich über diese Erscheinung schon die verschiedensten Vorstellungen gemacht, keine aber näher ausgebaut. Unter dem einen Namen vermutete man auch, verschiedene, äußerlich gleich aussehende Phänomene zusammengefaßt zu haben. Ich habe nun versucht, die Tl., soweit dies jetzt schon möglich ist, als einheitliche Erscheinung zu erklären. Mit Ausnahme des Erregungsvorganges habe ich dabei eine möglichst starke Anlehnung an die in der Hauptsache von P. Lenard entwickelten Anschauungen über das Wesen der Phosphoreszenz angestrebt, denn es bestehen zwischen beiden Lumineszenz-Erscheinungen sehr viele Ähnlichkeiten. Das ist auch der Grund, daß ich im folgenden viel darauf verwende, diese Analogien hervorzuheben. Sieht man von der bisher am meisten verbreiteten Ansicht, daß die Tl. ein elektrischer Entladungsvorgang sei (darüber weiter hinten) mit guten Gründen vollständig ab, so muß man ja an Elektronenvorgänge, ähnlich wie sie für die Photolumineszenz oder auch die Lumineszenz der Alkalidämpfe (das farbige Leuchten, das nicht der vom Kirchhoffschen Gesetz verlangten Temperatur entspricht) denken, wenn dies auch nirgends ausgesprochen wurde. Völlig neu ist aber die hier angenommene Trennung der Erregung von der mechanischen Einwirkung und die genauere Betrachtung des mechanischen Vorganges selbst, ferner die Deutung der temporären Tl.

Ich erachte es für zweckmäßig, zuerst an die grundlegenden Vorstellungen über den Elektronenvorgang bei der Photolumineszenz zu erinnern.

Lenard[1]) erklärt die Photolumineszenz-Erscheinungen, wie ich nur in ganz groben Zügen zusammenfasse, durch den Wiedereintritt entwichener Elektronen in die Metallatome. Der vorhergehende Austritt ist ein lichtelektrischer Vorgang; die Lichterregung ist eine Resonanzerscheinung, indem die zurückkommenden Elektronen isochrone Emissionselektronen in Schwingung versetzen. Erfolgt der Rücktritt sofort, so bezeichnen wir den Vorgang mit Fluoreszenz (Momentanbanden), sind die Elektronen von Metalloidatomen aufgenommen worden und erfolgt der Rücktritt erst nach und nach (Dauerbanden), so braucht man den Namen Phosphoreszenz. Die charakteristischen, für beide Erscheinungen nicht gleichen Abklingungsgesetze können als Hauptmerkmale angesehen werden. Eine durch Temperatursteigerung beschleunigte Phosphoreszenz nennt man Thermolumineszenz. Die Triboluminescenz wurde bis dahin definiert als eine Lumineszenz fester Körper, die durch mechanische Einwirkungen hervorgerufen wird. Es lag deshalb sehr nahe, der mechanischen Energie die Rolle der vorhin als Erregungsmittel erwähnten Lichtenergie zuzuschreiben. Allerdings wurde einer solchen Anschauung nur in Form beiläufiger kurzer Bemerkungen da und dort Ausdruck gegeben. In wesentlich anderer Weise habe ich hier eine Erklärung versucht.

Ich werde zuerst meine Auffassungen darstellen und nachher die zu Hilfe gezogenen experimentellen Grundlagen zur kritischen Erörterung heranziehen. Um die Übersicht nicht zu stören, erwähne ich unter A—D meine wichtigsten Anschauungen gesperrt gedruckt in knapper, zusammenfassender Form und lasse dann in ausführlicher Weise die zugehörigen Begründungen folgen. Unter E und F werden einige

---

1) P. Lenard, Über Lichtemission und deren Erregung. Heidelberg 1909.



Analogien mit der Phosphoreszenz berührt und einige Erscheinungen der Tl. so erörtert, wie es die dargelegten Vorstellungen gebieten.

A) Mechanische Einwirkungen.

1. Die mechanische Einwirkung hat mit der Erregung in den Zustand erhöhter Energie nichts zu tun, sondern sie wirkt nur als Auslösung.

2. Die Art der mechanischen Einwirkung, die ein Impuls durch Schlag, ein Druck (Zug oder andere Belastung) oder Reibung sein kann, ferner die Folge der mechanischen Einwirkung, die man bezeichnet mit Erwärmung, Erzeugung elektrischer Polarität, Formänderung, ist nicht wesentlich. Notwendig aber ist das Auftreten eines Bruches, und dieses dann hinreichend, wenn der Bruch disruptiv erfolgt, nicht hinreichend, wenn er langsam, kontinuierlich erfolgt.

3. Damit ein Bruch entstehen kann, mußten vorher starke elastische Spannungen auftreten. Lassen die elastischen Spannungen plötzlich vollständig nach, wie im Moment des disruptiven Bruches, so treten Erschütterungen, offenbar Schwingungen, auf. Diese werden in den meisten Fällen Amplituden besitzen, welche Wärmeschwingungen einer hohen Temperatur entsprechen. Die starke innere Reibung bewirkt eine schnelle Dämpfung.

4. Die Erschütterungen sind zum größten Teil an die Bruchflächen konzentriert; zu einem kleinen Teil scheinen sie manchmal als gedämpfte Stoßwellen etwas weiter zu verlaufen.

5. Die tribolumineszente Substanz kann nicht plastisch sein aus zwei Gründen: Plötzliches Brechen ist in einem plastischen Medium nicht denkbar. Schwingungen können nur in einem elastischen, nie in einem plastischen Medium auftreten. Vorzugsweise in Betracht kommen also die Kristalle.

Die gewöhnliche Auslösungsoperation, die Zertrümmerung der Substanz durch Schlag oder momentanes Zerdrücken, verunmöglicht eine Beobachtung des dabei stattfindenden, mechanischen Vorganges. Auch ist der Name „Reibungsleuchten" falsch, denn das Reiben an und für sich bewirkt, wie ich mich experimentell überzeugte, nie eine Tl. im wahren Sinne, sondern höchstens eine Lumineszenz durch Erwärmung oder eine elektrische Funkenentladung. Die eigentliche Tl. folgt unbedingt nur einem Bruche (ganz zweckmäßig ist daher der alte, von P. Heinrich gebrauchte Name „Trennungslicht"). Ich habe zum Studium dieser Vorgänge eine Zertrümmerung durch äußerst langsamen Bruch gewählt, und dabei gesehen, daß auf diese Weise vieles interessanter zutage tritt. Bei einer größern Zahl von Substanzen habe ich beobachtet, daß sie auch tl.[1]), wenn die Dauer der Zerquetschung eine beliebig lange ist. In sehr deutlicher und schöner Weise kann das Experiment mit großkristallisiertem Zucker („Kandiszucker") durchgeführt werden. Ich habe ordentlich große Kristalle in einen Schraubstock eingespannt und so langsam zugedreht, daß ein Spindelumgang mehrere Minuten erforderte. Im allgemeinen ist nichts sichtbar; von Zeit zu Zeit aber hört man ein leises Knacken (allemal, wenn ein Bruch entsteht) und unverzüglich darauf, scheinbar gleichzeitig, ist der Kristall von starkem, grünlichem Licht erfüllt, doch stets nur während eines Augenblicks. Ähnlich verhält es sich mit Natriumtetraborat, Steinsalz, Bergkristall, manchen Gläsern usw. Ich habe mich überzeugt, daß nie Licht ohne Bruch auftrat. Bei großen Spaltungen ist es nicht möglich, zu sagen, ob das Licht aus dem ganzen Kristallinnern komme oder nur von den nächsten Umgebungen der Bruchflächen. Bei weniger großen Sprüngen aber kann man manchmal an der Lichtlinie sehen, wo das Reißen beginnt und wo es endet. Eine gewisse kleine Ausbreitung besitzt aber die leuchtende Partie sicher, denn auch die Lichtlinien sind sehr verschwommen, und wenn man an die Lichterscheinungen der Tl. gewöhnt ist, so kann man diese sehr leicht, z. B. vom bloßen Glühen durch einen Schlag (Feuerstein), unterscheiden durch die viel größere Unbestimmtheit in den Lichtumrissen. Manchmal scheint auch die leuchtende Stelle vom Spalt aus mit großer Schnelligkeit zu wandern unter starker Abnahme der Intensität. M. Trautz erwähnt eine Beobachtung an frischen As_2O_3, wo „Funken" radial bis in die Mitte des Kristalles huschten, und die Risse entsprechend verliefen. Er ritzte die Kristalle mit einem Glasfaden. Ich erinnere an seine oftmalige Bemerkung, daß die Kristallolumineszenz immer von Knacken begleitet sei. Ein Zerschneiden mit sehr schmalem Messer ruft nach meinen Beobachtungen nur sehr wenig Licht hervor.

Bei Zucker, der aus zusammenhaftenden, feinen Kriställchen besteht, sah ich, obwohl er beim Zerschlagen stark tl., auf diese Weise nie Licht, einesteils, weil die einzelnen ihn aufbauenden Kriställchen nicht zerdrückt, sondern abgeschoben werden, andernteils, weil hier infolge

1) Abkürzung für „tribolumineszierend oder tribolumineszieren".



der kleinen Einzelkristalle pro Zeiteinheit sehr wenig Licht produziert wird und dieses dann die trübe umhüllende Schicht kaum durchdringt. Ganz allgemein ist bei diesem langsamen Zerdrücken nur eine gute Tl. sichtbar, wenn die Körper durchsichtig sind. Erfolgt ein Bruch von Zeit zu Zeit durch den ganzen Körper (bei den einen Substanzen meist der Fall, bei einer größern Zahl weniger), dann ist die Tl. eine sehr helle. Entstehen zu gleicher Zeit aber nur kleinere Sprünge, so ist das Leuchten ein schwaches und umso schwächer, je langsamer die Zertrümmerung erfolgt. Beispiele hierfür sind: Willemit, Flußspat, Urannitrat (krist.) usw. Hierher gehörende Substanzen, welche schon bei Momentan-Zertrümmerung nur schwach tl., tun dies bei langsamer Zertrümmerung scheinbar gar nicht (zu beachten bei Prüfung einer Substanz auf Tl., man wählt dazu zweckmäßig den Schlag möglicher Brisanz).

Zusammenfassend dargestellt ist also der mechanische Auslösevorgang folgender: Die Substanz wird durch den Schlag oder langsamen Druck elastisch deformiert. Dabei wachsen die Spannungen so lange, bis, stets ganz momentan, ein Bruch erfolgt. Durch diese außerordentlich plötzliche Entlastung geraten gewisse Partien der Substanz in heftige Erschütterungen, die freilich wegen der starken innern Reibung sehr schnell gedämpft werden. Bei nicht regulären Kristallen werden sich diese molekularen Bewegungen in verschiedenen Achsenrichtungen etwas verschieden ausbilden. Zwischen Schlag und langsamem Druck besteht in der endgültigen Wirkung nur der Unterschied, daß bei ersterem die Deformationen etwas konzentrierter auftreten.

B) Erregung.

1. Um den Anschluß an die für die Photolumineszenz herrschenden Anschauungen zu finden, muß die Erregung in einem Entweichen von Elektronen aus den Metallatomen bestehen. Dieses Entweichen ist kein Photoeffekt, aber auch nicht das Resultat der mechanischen Einwirkung.

2. Der Elektronenaustritt erfolgt schon im flüssigen Zustand der Substanz oder wahrscheinlicher während der Kristallbildung.

Dieser Punkt wurde bisher am wenigsten experimentell untersucht. Indem ich einige Substanzen unter völligem Lichtabschluß kristallisieren ließ und hernach eine ungeschwächte Tl. feststellte, ist bewiesen, daß ein lichtelektrischer Effekt nicht vorliegt.

Die Tatsache der Kristallolumineszenz, die bekanntlich als identisch mit einer Tl. erkannt wurde, zeigt, daß die Substanz schon unverzüglich nach der Bildung des Kristalles, allgemeiner nach dem Übergang in die feste Formart, den erregten Zustand angenommen hat.

Daß wir wirklich einen der „photoelektrischen Induktion" ähnlichen Effekt durch das Mittel der Auflösung und Auskristallisation annehmen können, zeigt ein altes Experiment von Pearseal, das von Ed. Becquerel wiederholt worden ist. Flußspat, dessen Thermolumineszenz durch genügend hohe und lange Erwärmung völlig abgeklungen war, wurde in Salzsäure aufgelöst. Aus der Lösung schieden Flußspatkristalle aus, welche wieder schwach phosphoreszierten. Es ist zwar nicht erwähnt, daß für Lichtabschluß gesorgt wurde, aber da Becquerel den Einfluß auch des schwachen Lichtes kannte, ist anzunehmen, daß er entsprechende Maßregeln getroffen hat. Untersuchungen über diesen Vorgang sollen noch ausgeführt werden.

C) Aufspeicherung.

Die entwichenen Elektronen haften stark in Metalloidatomen, welche die Ausgangsatome umgeben. Erforderlich ist eine äußerst heftige Erschütterungswirkung, um deren Entziehung durch das Metallatom zu veranlassen.

Wir haben in dieser Hinsicht bekanntlich zwei Gruppen von Substanzen zu unterscheiden:
temporär tribolumineszierende,
permanent tribolumineszierende,
wobei freilich eine ganz scharfe Grenze zwischen beiden kaum zu ziehen ist.

Die temporär tl. Substanzen verlieren die Fähigkeit zur Tl. nach einiger Zeit ganz oder teilweise (je nach der Substanz beträgt die halbe Abklingungszeit wenige Stunden bis zu Jahren). Unverzüglich nach der Kristallbildung ist die Emission am stärksten und nimmt dann ab nach einer noch unbekannten Funktion der Zeit. (Augenscheinlich mit etwa exponentialem Charakter.) Diese vielfach nachgewiesene Tatsache war mir der zwingendste Grund für die zeitliche Trennung von Tribolumineszenzerregung und -auslösung durch mechanische Einwirkung. Er ist aber nur dann stichhaltig, wenn die abgeklungene Substanz physikalisch und chemisch in jeder Hinsicht identisch ist mit der frisch erregten Substanz, mit Ausnahme natürlich derjenigen physikalischen Veränderung, welche erregten und unerregten Zustand unterscheidet. Eingehende Untersuchungen, namentlich von M. Trautz[1]), zeigen, daß dem so ist. Inaktivierte, temporär tl. gewesene Kristalle in

1) Zeitschr. f. phys. Chem. **53**, 36, 1905.



völlig unverletztem (wie die optische Prüfung im polarisierten Licht ergibt), nicht oder nur von wenigen Ritzen durchzogenem Zustand leuchten durchaus nicht, wenn noch so heftig zerdrückt. (As_2O_3; $NaBrO_3$; Saccharin.) Auch ist sicher erwiesen, daß nicht kristalline Umwandlungen, z. B. in polymorphe Zustände, stattfinden.

Ein weiteres, sehr wichtiges Argument für die Wahrscheinlichkeit der dargelegten Anschauungen besteht in folgendem: Der erregte Zustand bleibt bei höherer Temperatur (z. B. 100°) weniger lang erhalten, als bei tieferer Temperatur. Das ist auch eine experimentell mehrfach bewiesene Tatsache.

Eine größere Zahl von Substanzen bewahrt den erregten Zustand sehr lange. Bei vielen hat man Grund, anzunehmen, daß dieser Zustand bei gewöhnlicher Temperatur nahezu stabil sei, gibt es doch tl. Mineralien hohen Alters. Bei genügend starker Erhitzung muß nach unseren Anschauungen eine Inaktivierung stattfinden. P. Heinrich erwähnt tatsächlich, daß gewissen Kristallen durch heftiges Glühen jede Fähigkeit zur Tl. genommen werde. Solche Versuche müssen freilich mit genügenden Vorsichtsmaßregeln wiederholt werden, da man sich bestimmt zu überzeugen hat, daß weder physikalische Strukturänderungen, noch chemische Wandlungen oder Verluste an eventuellen organischen Verunreinigungen ein Resultat vortäuschen. Wir wissen noch wenig über diese wirksame untere Temperaturgrenze, können aber sagen, daß sie für verschiedene Substanzen sehr verschieden hoch ist; ferner, daß sie bei vielen über 1200°, bei andern sogar über 1800° liegt. Denn es gibt heftig tl. Massen, die zum Zweck ihrer Darstellung bei 1100° geglüht werden mußten und andere, welche aus einem Schmelzfluß von 1600° (Quarz) erstarrten.

Wenn wir diese Temperatureinflüsse betrachten, so bemerken wir die weitgehende Analogie mit der Thermolumineszenz, und auch hier gibt es Substanzen mit temporär und solche mit permanent aktivem Zustande. Die größere Permanenz der Tl. gegenüber der Thermolumineszenz kann in deutlicher Weise gezeigt werden durch folgendes Experiment: Erhitzt man Flußspat solange, bis eine Thermolumineszenz abgeklungen ist, so besteht die Tl. noch praktisch ungeschwächt.[1])

D) Auslösung und Lichtemission.

1. Von einer Auslösung kann man sprechen, weil der erregte Zustand ein solcher höherer innerer Energie ist.

2. Wärmeschwingungen wirken unter Umständen auslösend, d. h. sie bewirken einen Rücktritt der entwichenen und aufgespeicherten Elektronen zu den Metallatomen.

3. Die wirksamste und plötzliche Auslösung geschieht durch die elastischen Bruchererschütterungen; sie verursacht die Tribolumineszenz. Die Erregung der elektromagnetischen Wellen ist dieselbe wie bei der Photolumineszenz.

Bei temporär tl. Substanzen muß eine Emission fortdauernd, natürlich genau betrachtet, in diskontinuierlicher Weise stattfinden bis zur Rückwandlung in den unerregten Zustand. Allerdings ist die Intensität sehr weit unter dem Schwellenwert für die Reizempfindung.

Daß tatsächlich eine langsame Auslösung durch Wärmebewegung stattfindet, ist vorhin erwähnt worden. Die plötzliche Auslösung erfolgt durch die Bruchschwingungen in einer Weise, wie sie unter A näher erörtert wurde. Gewöhnlich erfolgt die Herbeiführung von Brüchen durch Schlag. (Dazu gehört auch das Schütteln in Glasgefäßen.) Dieser unterscheidet sich von der langsam wirkenden Pressung in der endgültigen Wirkung nur einerseits durch die zeitliche, anderseits auch durch eine etwas größere örtliche Konzentration. Manchmal bewirkt auch ein Zerspringen durch Erwärmung die Auslösung. Die Wirkung der Reibung muß aufgefaßt werden als ein Abreißen kleiner Teilchen.

E) Analogien mit der Phosphoreszenz und Erklärung einiger Tribolumineszenz-Erscheinungen.

Die tribolumineszierenden Substanzen: Wir können wie bei der Phosphoreszenz auch hier sagen, daß es insbesondere nicht reine Substanzen sind, welche tl., sondern feste Lösungen, oder vielleicht in manchen Fällen feste „Kolloidlösungen" (nach L. Vanino). Wo einheitliche Substanzen tl., sind es auch die Metallatome (bzw. organische Atomgruppen), welche für die Lumineszenz wirksam sind. Diese Anschauungen sind denen der Phosphoreszenz völlig gleich und berechtigen daher die Rückführung auf die Vorstellungen, die man sich über die Phosphoreszenz macht. Ich will, um das noch mehr hervorzuheben, auf einige weitere Analogien zwischen Tl. und Phosphoreszenz hinweisen.

A. Karl hat nachgewiesen, daß es in den von ihm betrachteten Beispielen nicht die reinen Substanzen, sondern feste Lösungen waren, welche tl. Einzelne Fälle, wo ganz reine Substanzen nicht tl., wurden auch von anderen Forschern erwähnt. Dann aber kennen wir ab-

[1]) A. Imhof, diese Zeitschr. 18, 78—91, 1917.

sichtlich als feste Lösungen dargestellte Substanzen, welche oft mit einer Intensität ganz anderer Größenordnung tl., als man es bei den käuflichen einfachen Salzen gewohnt ist. Sie haben eine ähnliche, oft gleiche Zusammensetzung, wie die sogen. Phosphoren: ein Erdalkali- oder Zinksulfid, enthaltend sehr geringe Mengen gewisser Metalle (als Sulfid) und einen schmelzbaren Zusatz. Notwendig ist deren Glühen bei vorgeschriebener Temperatur und während bestimmter Dauer. In Analogie zu den Phosphoren möchte ich hier den Namen Tribophosphoren gebrauchen. In der Literatur findet man darüber freilich erst ganz wenige Angaben. Bekannt als auffallend guter Tribophosphor ist das $ZnS + x$ Proz. $Mn + y$ Proz. Ca ($x > y =$ sehr klein) oder noch andern Metallzusätzen[1]). Hierher gehören ferner viele Kalkphosphore, besser die härtern Strontium- und Barium-Phosphore[2]). Eine speziell hierauf zielende Arbeit könnte zweifellos, z. B. durch die Härte steigernde Zusätze noch viel intensivere Wirkungen erzielen, als diese zufälligen, für andere Zwecke bereiteten Tribophosphoren es tun. Soweit ich aus den bisherigen Zusammensetzungen schließen kann, sind als wirksame Metalle hauptsächlich zu nennen: *Mn, Bi, Zn, Cu, Ag, Pb, Cd, Sr, Si, Ti, Ur, Ba, Zr*, also dieselben, die auch für die Phosphoreszenz wirksam sind. Stets handelt es sich um schwere Atome. Ganz geringe Veränderungen in der Art der Darstellung oder der Beimengung können manchmal die Phosphoreszenzfähigkeit sehr vermindern, ohne die Triboluminneszenz zu schwächen.

Sehr viele Mineralien tl. Wir haben es eben auch unter diesen fast immer mit festen Lösungen zu tun. Ich konnte mit großer Deutlichkeit beobachten, daß gefärbter Flußspat viel intensiver tl., als farbloser oder sehr stark gefärbter, wie er auch viel heller thermolumineszierte. Nach Wiedemann und Schmidt zeigen die durch Kathodenstrahlen gefärbten Alkalisalze auch sowohl gute Tl., wie Thermolumineszenz. Unter gewissen Gruppen von Doppelsalzen wird die Tl. fast ausnahmslos angetroffen. Das erklärt sich wohl, wenn man die Doppelsalze zum Teil als feste Lösungen des einen Salzes im andern auffaßt.

Ich habe früher gezeigt, daß die chemische Verwandtschaft unter den tl. Substanzen eine zu deutliche Rolle spielt, als daß sie hier übergangen werden kann. Nach unseren Auffassungen muß sich die Verwandtschaft in der Tl. widerspiegeln. In den Fällen, wo minimale (manchmal mit den gewöhnlichen analytischen Methoden nicht nachweisbare) Verunreinigungen vorliegen, ist zu sagen, daß eben wohl fast in allen Substanzen solche Verunreinigungen enthalten sind, daß aber das verwandte Verhalten durch das umhüllende Medium bedingt wird, indem dieses, wie aus der Phosphoreszenz bekannt ist, auf das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein der Lumineszenz eine ausschlaggebende Rolle spielt. Endlich aber hat es den Anschein, daß sehr oft das Metall des Salzes selbst die Rolle der Emissionsatome spielt, wie dies auch bei der Phosphoreszenz bekannt ist (z. B. bei ZnS). Dafür sprechen folgende Umstände: Als gute Beimengungen zu den Tribophosphoren eignen sich, wie schon erwähnt, insbesondere die Metalle *Mn, Bi, Zn, Cu, Ag, Pb, Ca* usw., nach H. Grüne aber nicht die Metalle *Fe, Ni, Co* und *Cr*. Dies ist auffallend, weil ich bemerkte, daß es besonders die chromsauren Salze sind, von welchen fast keine tl., und auch einige einfache Salzgruppen von *Fe, Co, Ni* nur in sehr geringer Zahl tl., währenddem diese Eigenschaft unter den als wirksam erwähnten Metallen häufig ist. Ferner ist ein Fall bekannt, wo wiederholtes Umkristallisieren die Tl. verstärkte (Stammkohlenwasserstoff des Rosanilins), was zwar unter Umständen auch nur besagt, daß die betreffend Tl. optimale Zusammensetzung erst durch weitergehende Reinigung erhalten würde (gilt vielleicht auch für Chrom, da dieses z. B. in Aluminiumoxyd in außerordentlich geringer Menge wirksam ist). Auch zeigen sehr viele Salzkristalle eine große Unabhängigkeit von dem Grad ihrer Verunreinigung.

Die Übereinstimmung in den Substanzen, welche sowohl Tl., als auch Phosphoreszenz aufweisen, ist auffallend. Einiges darüber habe ich schon oben genannt, auf weitere Fälle möchte ich aufmerksam machen: Sehr viele Doppelsulfate weisen sowohl Tl., wie auch Thermolumineszenz auf. Dasselbe gilt von den meisten Gläsern. Eine Reihe von Phosphoren, z. B. aus Muschelschalen, welche in der alten Forschung eine große Rolle spielten, triboluminneszieren, und auf die heftige Tl. der typischen neueren Phosphore ist oben hingewiesen worden. Diejenigen organischen Substanzgruppen, welche wegen ihrer schönen Photolumineszenzerscheinungen bekannt sind, fallen meist auch auf durch ihre starke Tl. Von 29 untersuchten Chininsalzen (meist von Tschugaeff) tl. z. B. deren 26.

Substanzen, wie Kreide und ähnliche Kalksteine, dann Paraffine und physikalisch ähnliche Produkte, weisen zum großen Teil irgendwelche Photolumineszenzerscheinungen auf. Daß sie nicht tl., ist nun sehr begreiflich, denn ihre weiche,

1) A. Karl, Über die Tl. von zinkhaltigen Substanzen. C. r. de l'Acad. des sciences **144**. 841—43.

2) Emilie Zumbusch, Über Luminophore, Diss. 1911.

zum Teil auch pulverig feinkörnige Struktur läßt keine so brisanten Bruchbildungen zu, um Erschütterungen auch nur angenähert der notwendigen Größe zu verursachen, und auch ihre Elastizität ist zu minimal. Das gilt überhaupt von den meisten amorphen Substanzen.

Die Komplikationen bei den Tribolumineszenzfarben werden nun zum großen Teil verständlich. Die wenigen bekannten Spektren sind als kontinuierlich über ein gewisses Intervall verteilt angegeben worden[1]). Wir haben es also offenbar auch hier mit breiten, wenig scharf bestimmten Banden zu tun. Wir wissen, daß sich bei der Photolumineszenz die Gesamtfarben ändern bei der Veränderung der Substanztemperatur, und zwar kommen Verschiebungen gegen die violette, als auch gegen die rote Seite hin vor. In einer frühern Arbeit habe ich erwähnt, daß dies auch bei der Tl. der Fall ist[2]). Die spektrale Untersuchung ist hier außerordentlich mühsam und zeitraubend, oft auch gar nicht möglich; die Analogie mit der Photolumineszenz macht es aber auch hier äußerst wahrscheinlich, daß sich die einzelnen Bandenmaxima nur wenig verschieben, daß sie vielmehr ihre gegenseitige Intensität ändern[3]). Ich habe früher erwähnt, daß der Tribophosphor ZnS mit wenig Mn und Mg bei gewöhnlicher Temperatur orange tl., bei 400° mehr blau. In der Kälte ist offenbar die von der Phosphoreszenz bekannte gelbe Mn-Bande stark hervortretend gegenüber einer blauen Bande, die wahrscheinlich dem Mg oder Zn zuzuschreiben ist. Bei höherer Temperatur tritt die erstere immer mehr zurück gegenüber der blauen Bande, welche nie eine große Helligkeit erreicht.

Was den Verlauf der Lichtintensität in Funktion der Temperatur anbetrifft, müßte man auch jede Bande für sich betrachten (wahrscheinlich sind weniger verschiedene Banden, als bei der Phosphoreszenz) und der gerade vorhin erwähnte Fall läßt vermuten, daß wir auch hier ganz analog wie bei der Phosphoreszenz von Hitze- und Kältebanden sprechen können. Am meisten machen sich wohl die mechanischen Eigenschaften in ihrer Temperaturabhängigkeit geltend. Offenbar werden die Brucherschütterungen bei tiefer Temperatur heftiger, wenn auch weniger andauernd, weil die ganze lumineszierende Masse starrer wird. Auch wird die „Nähewirkung“ eine größere. Bei einer gewissen sehr tiefen Temperatur kann dann freilich das Atomsystem so stabil werden, daß wieder eine Abnahme der Helligkeit eintritt. Meine früheren Experimente bestätigen eine solche Temperaturabhängigkeit durchaus, insbesondere die Intensitätsabnahme mit steigender Temperatur.

Nachgewiesenermaßen werden die Phosphoreszenzbanden bei tieferer Temperatur schmäler und schärfer begrenzt. Ich bemerkte nun an einigen Substanzen, daß die Tl.-Farben bei tiefer Temperatur besser definiert, einheitlicher wurden. Das dürfte wohl auch in einer Kontraktion der Banden seine Erklärung finden.

F) Das Abklingen durch mehrfache Spaltung.

Die Phosphoreszenz klingt bekanntlich ab infolge von Temperaturbewegungen und wir haben weiter vorn dieselben Bewegungen als Ursache des Abklingens bei der temporären Tl. angesehen. Bei der Tl. muß aber zudem ein Abklingen nach jeder Bruchbildung stattfinden, wenn die dargestellten Anschauungen richtig sind. Da aber, wie experimentell feststeht, fast nur in der nächsten Umgebung der Bruchflächen eine deutliche Lichtemission stattfindet und zudem die Dauer der Bruchschwingungen eine sehr kleine ist, so wird die Entaktivierung durch eine Spaltung nur ganz gering sein. Man kann sich einen Überschlag bilden durch Vergleich mit der Phosphoreszenz. Eine Substanz phosphoreszierte z. B. während 10 Min. mit einer mittleren Intensität, die gleich ist der Tl.-Intensität einer andern Substanz. Nimmt man bei gleicher Helligkeit beider Substanzen gleich viele Elektronenverschiebungen an, so würden bei 0,1 sec Dauer der Bruchschwingungen in der nächsten Bruchflächenumgebung nur $^1/_{6000}$ der Elektronen zurückkehren, wie bei der 10 minutigen Phosphoreszenz. Streng genommen soll demnach bei Erzeugung einer Spaltfläche von der Größe F die Lichtintensität geringer sein, wenn das zerbrochene Substanzkorn durch mehrfaches Brechen eines größeren Korns erhalten wurde, als direkt durch Kristallisation in der endgültigen Größe. Die Schätzung weist aber schon darauf hin, daß in den meisten Fällen ein experimenteller Nachweis dieser Behauptung kaum in deutlicher Weise erbracht werden kann, da die Bruchbildungszahl eine so große sein müßte, daß die Substanz zu Staub würde. Ich habe noch nicht versucht, hierüber feinere Beobachtungen anzustellen, erwähne aber doch einiges, das bestätigend wirkt: Es ist bekannt, daß die wenigsten Substanzen in Pulverform noch tl. Ich habe früher unter der Bezeichnung „Minimalkorn“ darüber Näheres

1) C. W. Waggoner, The Tribo-Lum. of Manganese-Zinc Compounds. The Physical Review 7, 402, 1916. Bei den von W. erwähnten Beispielen stimmt das tl. Spektrum überein mit dem Röntgen-Fluoreszenzspektrum.

2) A. Imhof, loc. cit.

3) Kleine tatsächliche Verschiebungen können vorkommen durch Verstimmung der Eigenschwingungsdauern. Siehe darüber P. Lenard, loc. cit. 1909.

gesagt und erinnere hier nur daran, daß jene Körner durch Spaltung größerer Kristalle erhalten wurden. Das damals auch verwendete ZnS aber entstand schon als Pulver durch den Herstellungsprozeß und kam deshalb durch geringe Spaltungszahl auf die sehr minimale Korngröße. Ich habe aber beobachtet, daß von einer gewissen Feinheit an die Helligkeit bei weiterem Zerkleinern sehr schnell abnahm. Dieselbe schnelle Abnahme konstatierte ich auch, als ich auf einer Glasplatte eine Zuckerlösung so auskristallisieren ließ, daß die Dicke der Kristallschicht von einem Wert ~ 0 allmählich immer zunahm, und wenn ich nur mit einer Metallspitze über die Schicht kratzte.

Ich sah das früher als eine Bestätigung für das Vorhandensein eines Minimalkorns[1]) an, während ich jetzt eher glaube, daß eine so schnelle Helligkeitsabnahme stattfindet, wenn die Substanztiefe auf beiden Seiten der Bruchfläche nur noch so groß ist, daß sich die Brucherschütterung durch die ganze Masse in genügender Stärke fortpflanzt. Dann ist aber die Entaktivierung in kurzer Zeit weit vorgeschritten. Ein anderes Experiment, das, wie mir scheint, hier bestätigend wirkt, ist das folgende, von M. Trautz 1905[2]) beschriebene: Beim Erwärmen blättern sich die temporär tl. Cinchonin-Kristalle auf und schieben sich durcheinander infolge der Formänderung. Sind sie ganz aufgeblättert, so ist die Tl. bis auf einen verschwindenden Rest verloren. Da es sich um temporäre Tl. handelt, ist die Wirkung einer Spaltbildung natürlich relativ groß, entsprechend der gewöhnlich starken Tl. solcher Stoffe. Daher wohl dieses Resultat. Die weitere Behandlung der früher aufgeworfenen Frage, betr. das „Min.-Korn" soll hier nicht erfolgen, es sind dazu Versuche im Gange.

Damit sind nun wohl alle wichtigeren Erscheinungen der Tl. berührt worden; man könnte höchstens noch versuchen, auch die Reihe der Regeln, welche ich in der Einführung einer früheren Publikation aufgezählt habe, zu begründen. Da dies aber meist noch keine sichern Tatsachen sind, ja zum Teil sogar ziemlich fragwürdig erscheinen, unterlasse ich noch deren Erklärung. Für gewisse, mit den optischen Kristalleigenschaften zusammenhängende Regeln würde die Begründung wahrscheinlich in der damit verbundenen mechanischen Beschaffenheit zu suchen sein.

G) Ältere Anschauungen.

Einige alte, ganz kurze Erklärungsversuche können nicht mehr in Betracht fallen, weil die damaligen experimentellen Resultate zu gering waren und die ganze Auffassung der Lichterregung bekanntlich eine ganz andere war als heute. In neuerer Zeit schien man mit Vorliebe an piezoelektrische Entladungen zu glauben. Man versuchte den hierfür unangenehmen Umstand, daß nicht nur piezoelektrische Kristalle tl., zu überbrücken, indem man nach Ursachen suchte, welche trotzdem das Entstehen von Ladungen begründen würden. Abgesehen davon, daß diese Versuchschlüsse sehr fragwürdig sind (müßten sich doch oft ziemlich hohe Potentialdifferenzen bilden), ist die Angelegenheit schon dadurch abgetan, daß Funkenentladungen (bes. auch gut sichtbare) in Spaltbreiten von der Größenordnung 1 bis $^1/_{10}\,\mu$ (z. B. bei ZnS) nicht denkbar sind. Auch gibt es weitere Gründe.

Zusammenfassung.

Der gesamte Vorgang der Triboluminescenz wird kurz in folgender Weise gedacht: Spätestens während des Überganges in die feste Formart (in der Regel Kristallisation) findet die Erregung der nachher triboluminescierenden Substanz in einen Zustand A höherer Energie statt. Diese nicht lichtelektrische Erregung besteht darin, daß Metallatome oder organische Atomgruppen Elektronen entweichen lassen, welche von benachbarten Metalloid-Atomen in stabiler Weise, als dies bei der Phosphorescenz angenommen wird, gebunden werden. In einer noch nicht genauer bekannten Funktion der Zeit kehren die Elektronen sukzessive zufolge der Wärmeschwingungen der Atome nach den Ausgangsatomen zurück, bei den einen Substanzen in ziemlich kurzer Zeit (temporäre Triboluminescenz), bei andern nur in außerordentlich langsamer Folge. Durch mechanische Eingriffe (Brechen) werden in der Umgebung der Bruchflächen heftige Brucherschütterungen veranlaßt, welche einen plötzlichen Rücktritt vieler Elektronen zu den Ausgangsatomen bewirken. Indem diese nun Schwingungen isochroner Emissionselektronen erzwingen, wird das mit Triboluminescenz bezeichnete Leuchten erzeugt. Die Substanz im Zustand A geht dadurch über in den energieärmeren Zustand B.

Es wurde gezeigt, daß ein Bruch für die Triboluminescenzauslösung durchaus erforderlich ist und daß alle andern Auslösungsoperationen (die bisher nicht als auslösende betrachtet wurden), wie Reiben, Schlagen, Ritzen, plötzliche Temperaturänderung, nur deshalb eine Triboluminescenz hervorrufen können, weil sie das Reißen der Substanz bewirken.

Zürich, den 30. Mai 1917.

(Eingegangen 19. Juni 1917.)

1) A. Imhof loc. cit.
2) Zeitschr. f. phys. Chem. 53, 31, 1905.



Erfahrungen mit photoelektrischen Zellen.

Von C. Dorno.

Unter derselben Überschrift berichtet in dieser Zeitschrift **18**, 214 ff., 1917 E. Barkow über das Verhalten von Kaliumzellen, welche im Potsdamer Observatorium bzw. in der Kolberger Station zur Messung der Strahlungsintensität der Sonne verwandt sind, und über ausgedehnte Versuche, welche er mit diesen, wie zwar nicht ausdrücklich gesagt, aber nach dem Zusammenhang zu entnehmen ist, argongefüllten und je einer argongefüllten und wasserstoffgefüllten, von den Bergmann-Elektrizitätswerken hergestellten Kaliumzelle angestellt hat. Seinen sehr ungünstigen Erfahrungen die von mir am Davoser Observatorium bei ausgedehnter Anwendung der Zellenmethode auf die Bestimmung der Sonnen- und Himmelsstrahlung in verschiedenen Spektralteilen gemachten gegenüberzustellen, ist der Zweck dieses Aufsatzes. Das Resultat nehme ich voraus: Die Zellen haben sich so gut bewährt, daß ich gar nicht daran zweifle, die Zellenmethode habe im Dienste der atmosphärischen Optik eine große Zukunft[1]).

Meine Einrichtungen weichen von denen Barkows freilich nicht unbedeutend ab: Zwar messe auch ich galvanometrisch zu dem von Barkow mit Recht als sehr wesentlich bezeichneten Zukunftszweck, eine photographische Registrierung zu ermöglichen; ich wende aber (außer zwei der Messung der ultravioletten Strahlung dienenden Kadmiumzellen) zur Bestimmung der Sonnenintensität zwei empfindliche Kaliumzellen I und II mit höchstem Vakuum an, während zwei argongefüllte, empfindliche Kaliumzellen 4423 und 4424 ausschließlich der Messung der Strahlungsintensität des blauen Himmels, und zwar nur eines etwa $^3/_4{}^0$ großen Ausschnittes desselben, dienen. Den letzteren, zu welchen später noch für Spezialzwecke eine ganz besonders empfindliche, dritte argongefüllte Zelle E gekommen ist, wird eine höhere Strombelastung als etwa $3{,}5 \cdot 10^{-9}$, entsprechend einer Bestrahlung mit etwa 10 MHK, nicht zugemutet (für Sekunden ist bei der wenigst empfindlichen der drei Zellen bei Messungen in nächster Sonnennähe die zehnfache dieser Belastung hier und da ausnahmsweise gewagt). Den Vakuumzellen sind bis Mitte des Jahres 1916 Ströme bis zu $5 \cdot 10^{-5}$ Amp. geboten, freilich stets nur für Sekunden; im Sommer 1916 ist nach einjährigem Turnus eine andere Einrichtung getroffen, welche das Höchstmaß auf etwa den hundertsten Teil herabdrückt. Auf diese Einrichtung wird erst bei der Veröffentlichung der Resultate eingegangen werden. In der Erkenntnis, daß die besten Resultate von spektral zerlegtem Licht zu erwarten sind, in der Voraussicht, daß die Empfindlichkeit nicht nur von argongefüllten und evakuierten Zellen, sondern von jedem einzelnen Zellenindividuum in den verschiedenen Spektralteilen eine verschiedene sein dürfte, und unter Beachtung dessen, daß die Sonnenstrahlung bei hohem und niedrigem Sonnenstande und die Himmelsstrahlung in Sonnennähe und Sonnenferne spektral verschieden sind, basierte ich meine sämtlichen untereinander zu vergleichenden Sonnen- und Himmelsmessungen auf einen möglichst gut definierten und so eng begrenzten Spektralteil, daß die kleinste der zu bestimmenden Größen gerade noch galvanometrisch gemessen werden konnte, und wählte zu diesem Zweck ein 5 mm starkes Jenenser Blauuviolglas F 3873 (bei mir Filter K_2 oder Blaufilter genannt) von der Durchlässigkeit 430 bis 390 $\mu\mu$. In diesem Spektralteil sind sämtliche Zellen geeicht, in ihm werden sie dauernd überwacht. Außer diesem Blaufilter sind noch folgende Filter dauernd bei den Messungen der Sonnenstrahlung angewandt:

ein 3 mm starkes Blauuviolglas *F* 3653 der Durchlässigkeit 430 bis 240 (K_1),

ein Gelbfilter *F* 5899 nach Voege zur Bestimmung der physiologisch wirksamen Strahlen (*P*),

ein Grünfilter, wie es von L. Weber in der Photometrie angewandt wird (*G*),

ein Netzfilter zur gleichmäßigen Abschwächung der Gesamtstrahlung bei hohen Sonnenhöhen (*N*),

kein Filter bei niedrigem Sonnenstande (*O*).

Im Sommer 1916 kam bei der erwähnten Neueinrichtung noch ein schwaches, 5 mm dickes Gelbfilter (*E*), F 8713 Schott hinzu, welches das äußerste Blau und das gesamte Ultraviolett vollständig fortnimmt.

Für Messungen im ultravioletten Spektralteil wurden, wie erwähnt, zwei Kadmiumzellen angewandt.

Als Meßinstrumente dienten für die Sonnenstrahlung bei Anwendung der Kaliumzellen bis zum Sommer 1916 ein „Nadir-Zeigergalvanometer" von Kadelbach und Randhagen, Empf. etwa 1 Skalenteil = $1{,}1 \cdot 16^{-6}$ Amp., für die Sonnenstrahlung im ultravioletten Spektralteil ein Drehspul-Spiegelgalvanometer von Hartmann & Braun, Empf. $3{,}5 \cdot 10^{-11}$ Amp. bei 2 m Skalenabstand, für die Himmelsstrahlung dasselbe Instrument neben einem weniger empfindlichen Drehspul-Spiegelgalvanometer von

1) Die hier in den Jahren 1915—1917 gesammelten Resultate werden, so Gott will, noch im Laufe dieses Jahres veröffentlicht werden.

Hartmann & Braun[1]), Empf. $1{,}47 \cdot 10^{-9}$ Amp. bei 1 m Skalenabstand. Letzteres dient seit der im Sommer 1916 getroffenen Neueinrichtung auch der Messung der Sonnenstrahlung mit der Kaliumzelle.

Jede Zelle ist solide in eine Zellenkapsel gebettet, diese sind auswechselbar, wie Elster und Geitel es (diese Zeitschr. **16**, 407, 1915) beschrieben haben; die Einrichtung hat sich sehr gut bewährt. Die Montur entspricht im übrigen ganz der von Elster und Geitel (diese Zeitschr. **13**, 739ff., 1912) beschriebenen; ich fügte nur einen dem Dreifuß fest aufliegenden Teilkreis hinzu, um azimutal einstellen zu können, und polsterte zur Einschränkung von Reflexen das Metallrohr R mit schwarzer Tuchpappe aus. Die Mattscheibe M aus Uviolglas wurde natürlich nur in Verbindung mit den Kaliumzellen, nicht vor den Kadmiumzellen angewandt, da der selektive Effekt bei diesen nicht berücksichtigt zu werden braucht. Zur Abschwächung diente allein das oben erwähnte Drahtnetzfilter, die Irisblende wurde nur bei Kontrollmessungen angewandt.

Nachdrücklich betonen möchte ich nun an dieser Stelle, daß die Auswahl dieses, wie sich gezeigt hat, sehr zweckmäßigen Instrumentariums auf Vorschläge der Herren Elster und Geitel hin getroffen ist, welche, nachdem ich ihnen geschrieben, daß ich der vorauszusehenden Schwierigkeiten wegen an die Einstellung des komplizierten Instrumentariums in den Dienst der Himmelsoptik nur mit ihrer Hilfe herangehen würde, mir die ersten und weitaus wichtigsten Einrichtungen zusammengestellt und bei allen späteren, teils erweiterten Zwecken, teils der Kontrolle dienenden Anschaffungen, sowie bei Zwischenfällen, an welchen es nicht gefehlt hat, mich stets aufs bereitwilligste und ausgiebigste beraten haben. Herzlichen Dank dafür den unermüdlichen Herren auch an dieser Stelle.

Der springende Punkt bei der zu treffenden Auswahl war, wie ich rückschauend erwähnen möchte, daß ich anfangs nur unempfindliche, evakuierte Zellen in die Hand bekam; bei Anwendung von empfindlichen, argongefüllten Zellen zur Messung der gewaltigen Sonnenintensitäten würde auch ich an derselben Klippe wie Herr Barkow gescheitert sein; man muß schon bedeutende Erfahrungen mit diesen empfindlichen Zellen gesammelt haben, ehe man mit ihnen gefahrlos vor so hohen Intensitäten zu operieren wagen darf. Der Vorzug der evakuierten Zelle ist 1. ihre Unempfindlichkeit, welche bei einiger Aufmerksamkeit eine Überlastung und dadurch Änderungen der Zellenempfindlichkeit, verursacht durch leuchtende Entladung, ausschließt; 2. ihre Unabhängigkeit von der Spannung, da man stets mit Sättigungsstrom arbeitet; 3. ihr großer Photostrom, welcher die Verwendung eines kompendiösen Zeigergalvanometers gestattet; 4. ihre größere Unabhängigkeit von der Temperatur, wofern den argongefüllten Zellen überhaupt ein Temperaturkoeffizient eigen ist.

Die Schaltung war die gewohnte: 2×5000 Ohm Widerstand lagen stets im Stromkreis selbst bei Anwendung der evakuierten Zellen und des Nadirinstruments, 4 Sätze zu 40 Volt Klingelfußsche Akkumulatoren nach Zehnder lieferten die beschleunigende Spannung, die Kontrollierung derselben geschah elektrostatisch mit Hilfe eines dem negativen Pol der Batterie angeschlossenen Wulfschen Elektrometers (diese genaue Kontrolle wurde gewählt mit Rücksicht auf die sehr große Abhängigkeit der Empfindlichkeit der Kadmiumzelle von der Spannung). Der positive Pol der Batterie und der Zelle waren geerdet. Die Meßanordnung war folgende: Nachdem die Spannung mindestens etliche Minuten zuvor angelegt, die Ruhelage des Galvanometers abgelesen und auf Sonne eingestellt war, wurde zunächst unter dem N-Filter (bei niedrigen Sonnenhöhen unter dem O-Filter) exponiert, sodann unter jedesmaliger Abdeckung des Vorsatzrohres während des Filterwechsels der Reihe nach unter den andern Filtern und zum Schluß wieder unter dem N-Filter. Die Sonnenhöhe wurde während der Messung abgelesen und neben der genauen Zeit (wahre Sonnenzeit) notiert — der ganze Turnus dauerte 2 bis 3 Minuten, die einzelnen Expositionen währen nur Sekunden. Die Abweichungen zwischen Anfangs- und Schlußablesung unter dem N-Filter sind gering (normalerweise stets unterhalb 1 Proz.) und liegen in dem zu erwartenden Sinne, daß die zweite Ablesung bei Steigen der Sonne größer, bei Sinken der Sonne kleiner ausfällt, während mittags Abweichungen kaum vorhanden sind. Dies und die Quotienten der bei den verschiedenen Filtern ermittelten Ausschlagswerte, welche einen bestimmten, von der Sonnenhöhe abhängigen Gang haben, sind gleichzeitig die Kontrolle für einwandfrei verlaufende Reihen. Kommen Abweichungen vor, so sind sie fast stets zu ermitteln in Gestalt feinster Schleierbildung vor Sonne, leicht schwankenden Taldunstes oder eines vertriebenen Fadens von Schornsteinrauch. Hinsichtlich der Kontrolle bin ich an meinem bevorzugten Standpunkte ja viel glücklicher daran als der Beobachter der Ebene; auf Grund der gleichmäßigen

1) Um jedweden Isolationsfehlern vorzubeugen, sind beide Spiegelgalvanometer von Hartmann & Braun mit Trockenvorrichtung und Bernsteinionisation versehen worden.

Resultate kann ich an kurzwährende (d. h. Minuten oder Stunden währende), periodische oder aperiodische Schwankungen der Sonnenintensitäten nicht glauben, weder die Tausende und Abertausende von Einzelmessungen, welche ich hier im Laufe von fast 9 Jahren in verschiedenen Spektralbezirken zusammengetragen habe, sprechen hierfür (um die Mittagszeit stelle ich mit Ångströms Pyrheliometer wohl ein dutzendmal hintereinander genau auf denselben Teilstrich = $^3/_{10}$ Milliampère ein), noch die Hunderte von Tagesaufnahmen über die Abhängigkeit der letzten im Sonnenspektrum noch nachweisbaren ultravioletten Linie von der Sonnenhöhe und meteorologischen Faktoren, wie ich sie im Kapitel I 1 D sowie in den Tabellen 19 bis 23 meiner „Studie über Licht und Luft des Hochgebirges" (Vieweg 1911) veröffentlicht habe. Die Kurven verlaufen an wolkenlosen Tagen vollkommen glatt ohne irgendeine Andeutung von kurzen, Minuten oder Stunden währenden, Schwankungen.

Die große Gleichmäßigkeit der Sonnenstrahlung an wolkenlosen Tagen bietet nun gleichzeitig die beste Gelegenheit zur Kontrolle der Zellen selbst, welche sich, wie Barkow sehr richtig formuliert, auf die Beziehung zwischen Lichtstärke und Photostrom, Abhängigkeit des Photostroms von der angelegten Spannung und Konstanz der Zelle zu erstrecken hat. Zu dem ersten Zwecke genügt die Anwendung der Irisblende — ich darf sagen, entgegen meiner Erwartung, denn ich stand ihrer Genauigkeit mißtrauisch gegenüber, obwohl ich bereits an L. Webers Relativphotometer gesehen habe, wie gut die dort eingebaute Irisblende ihren Zweck erfüllt. Zwischen 30 und 10 mm zeigte sie während der von Mai 1915 bis April 1916 recht regelmäßig angestellten Kontrollversuche dauernd folgende, von der Rechnung zwar ein wenig abweichende, aber sich stets genügend gleichbleibende Verhältnisse:

Tabelle I.

Datum	Blendenverhältnis			
	$\frac{25}{30}$	$\frac{20}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{10}{30}$
25. Mai 1915	0,715	0,481	0,289	0,132
3. Juli 1915	0,717	0,480	0,287	0,131
28. Oktober 1915	0,723	0,486	0,295	0,136
laut Rechnung	0,695	0,445	0,250	0,111

Bei 5 mm finde ich Abweichungen bis zu 5 Proz. Die Einstellung auf die Punktmarke ist nicht absolut genau möglich, Abweichungen fallen bei der kleinen Blende stark ins Gewicht. Die Charakteristik der Vakuumzellen ist im Sonnenlicht um die Mittagszeit wiederholt aufgenommen in Abständen der Spannung, welche zur Kontrolle der in unten beschriebener Weise festgelegten Charakteristik vollkommen genügte, und die Konstanz der Zellen wurde bei Anwendung des Netzfilters durch den Vergleich der beiden Parallelzellen untereinander, welcher durch Auswechselung der Zellenkapseln schnell und sicher durchgeführt werden konnte, häufig während der Periode Juni 1915 bis Juni 1916 und stets mit zufriedenstellendem Erfolge festgestellt. Die Galvanometerausschläge bei Anwendung der Zellen I und II verhielten sich im Mittel der 12 Monate wie 1 : 0,905 bei einer mittleren Abweichung von etwa $2^1/_2$ Proz. Die Verhältnisse blieben die gleichen bei Anwendung von allen Spannungen, welche zwischen 120 und 160 Volt lagen.

Waren diese Kontrollen auch bequem und fielen sie auch günstig aus, so genügten sie doch nicht strengen Anforderungen; sie dienten nur zum Beweise, daß die im Zimmer vor schwachen Lichtquellen ermittelten genauen Kontrollresultate den vor der starken Sonnenstrahlung gefundenen entsprachen. Für die genaue Kontrolle traf ich nach mannigfachen Vorversuchen folgende definitive Anordnung:

Nach Ersatz des Metallrohres R (siehe Fig. 2, diese Zeitschr. **13**, 740, 1912) durch einen aufgeschraubten soliden metallenen Zwischenring, dessen Lage zu dem die Zellenkapsel tragenden Gestell und damit zur Zelle selbst durch Zeiger und Marke genau kontrolliert werden konnte, wurde auf diesen mittels Bajonettverschluß das dem Weberschen Milchglasphotometer dienende, innen vollständig schwarz ausgeschlagene, vorn mit weiter Blende abgeschlossene Gehäuse für eine elektrische Meßlampe mit Einstellvorrichtung aufgesteckt. Als Meßlampe diente eine Spezial-Osramlampe (2,48 Volt, 0,952 Amp.), von Akkumulatoren gespeist, durch Hartmann & Braunsche Schieberwiderstände reguliert, durch Normalamperemeter Hartmann & Braun auf Milliampère genau kontrolliert. (Eine merkbare Erwärmung des Gehäuses durch das kleine Lämpchen tritt nicht ein.) Die gewöhnlich angewandte Birne wird hinsichtlich ihrer Konstanz verglichen mit zwei Reservebirnen, welche nur zu Vergleichszwecken mit der ersteren dienen. Die Einstellung der Lampe geschieht auf ein um 45° gegen die Horizontale geneigtes Diopterkreuz derart, daß der schmale, oben keilförmig auslaufende, leuchtende Faden, mit diesem Keil genau in das Kreuz hineinreichend, mit der Keilspitze den Kreuzungspunkt berührt. Auf diese Weise ist stets Gleichheit nicht nur des Höhen- und Seitenabstandes der Birne von der

Zelle, sondern auch Gleichheit der Fadenebene gewährleistet. Der Abstand der Fadenebene von der Mattscheibe beträgt 116 mm. Trotz dieser peinlichen Einrichtung bin ich geneigt, Schwankungen, welche sich bei den Eichungen zeigen, eher auf die Bestrahlungsänderung als auf die Zelle zu schieben. Einer Schwankung der Stromstärke um ein Milliampère entspricht etwa eine Abweichung des Ausschlages um 1 Proz.; noch größer ist der Einfluß der Abweichung der Lampenstellung nach Höhe, Seite und Fadenebene. Es zeigt sich in den Eichungsreihen deutlich, daß, wenn an der Stellung der Lampe innerhalb des Gehäuses nicht gerührt ist, die Abweichungen in den Ausschlägen über lange Zeiten hinweg sich innerhalb 1 Proz. halten, daß sie dagegen nach Neueinstellung der Lampe mehrere Prozente (auch nach größerer Übung und Aufmerksamkeit noch 2 bis $2^1/_2$ Proz.) erreichen konnten. Wie bereits oben erwähnt, wurde bei diesen Kontrollen außer der Mattscheibe aus Uviolglas stets das K_2-Filter angewandt. Die Ausschläge des empfindlichen Galvanometers reichten dann sowohl für die unempfindlichen Zellen und kleinsten Spannungen wie für die empfindlichsten Zellen und größten Spannungen aus. Zur Feststellung und Kontrolle der Empfindlichkeitsverhältnisse der argongefüllten Zellen in den verschiedenen Spektralteilen wurde, um die Zellen nicht zu stark zu belasten und alle Eichungen an demselben Meßinstrument durchzuführen, mit der Spannung heruntergegangen.

Mit dieser Einrichtung sind nun die absoluten Werte und die Charakteristiken der fünf Zellen dauernd überwacht, und zwar mit folgendem befriedigenden Erfolg:

1. Zelle I und II (evakuiert). (Vgl. Tab. II.)

$$\text{Zelle } \frac{I}{II} = \frac{44{,}9}{46{,}1} = 0{,}974 \text{ unter } K_2\text{-Filter.}$$

Die Zellen I und II wurden bei sonst gleicher Einrichtung (unter K_2-Filter) auch fünfmal durch Auswechslung untereinander verglichen und ergaben die Verhältnisse $\frac{I}{II}$.

7.	September	1916	0,991
11.	„	„	0,980
10.	Oktober	„	0,990
16.	„	„	0,966
18.	Juni	1917	0,987
		Mittel	0,983 (gegen oben 0,974).

Die Verhältnisse weichen ganz bedeutend ab von den oben mitgeteilten, vor der Sonne unter Anwendung des Netzfilters ermittelten, welche im Mittel 0,905 betrugen. Der Unterschied wird erklärt durch abweichende Verteilung der Gesamtempfindlichkeit über die verschiedenen Spektralteile, wie unten noch bewiesen werden wird, wie aber auch aus Kontrollversuchen hervorgeht, denn auch vor der Osramlampe war bei Anwendung des Netz- bzw. O-Filters das Verhältnis $\frac{I}{II}$ viel kleiner, nämlich

7.	September	1916	unter	N-Filter	0,929
7.	„	„	„	O- „	0,921
11.	„	„	„	„ „	0,926
18.	Juni	1917	„	„ „	0,924
				Mittel	0,925.

Der Unterschied zwischen 0,925 vor der Osramlampe und 0,905 vor der Sonne erklärt sich sicherlich aus den verschiedenen Spektra der Lichtquellen.

Bei diesen Kontrollmessungen von Zelle I und II wurde, wie im praktischen Gebrauch stets, mit Sättigungsstrom gearbeitet, welcher oberhalb 120 Volt vor kleinsten und größten Strahlungsintensitäten mit Sicherheit gewährleistet war. Belastungen bis zu 180 Volt sollen die Zellen auch im Sonnenlicht vertragen, über 160 Volt habe ich nie angewandt, zwischen 120 und 160 Volt bleiben die Ausschläge praktisch konstant. Die Charakteristik der Zelle I (die

Tabelle II.

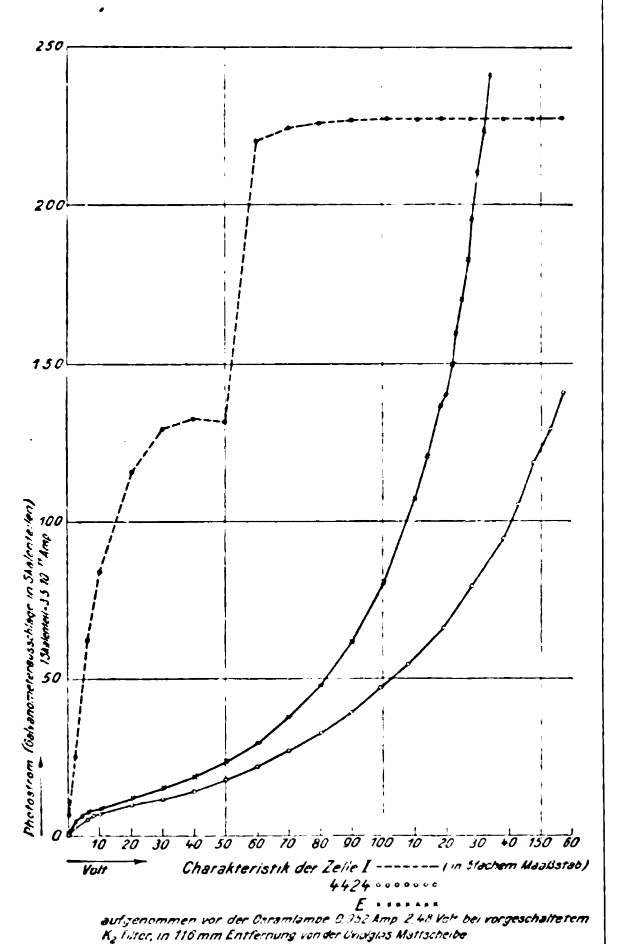
Galvanometerausschläge in Skalenteilen (1 Skalenteil $= 3{,}5 \cdot 10^{-11}$ Amp.) vor der Osramlampe 0,952 Amp., 2,48 Volt bei vorgeschaltetem K_2-Filter in 116 mm Entfernung von der Uviolglas-Mattscheibe bei Sättigungsstrom.

Monat	Zelle I	Monat	Zelle II
1916		**1916**	
Mai	45,8	Juli	47,4
Juni	43,8	„	46,0
„	43,7	September	47,8
„	44,7	„	47,2
September	44,3	„	44,7
„	44,6	„	44,8
„	44,3	„	44,7
„	44,7	„	45,9
„	45,1	„	45,6
„	45,0	**1917**	
„	44,4	Juni	46,5
„	44,2	„	46,2
„	44,6	„	46,2
„	43,9	„	46,3
„	43,9	„	46,3
„	46,3	Mittel	46,1
1917			
Juni	45,9		
„	45,4		
„	45,8		
„	46,2		
„	45,8		
Mittel	44,9		

der Zelle II ist ganz ähnlich) ist in Fig. 1 enthalten.

2. Zelle 4424 und E (argongefüllt).

Dieselbe Figur zeigt auch die Charakteristik und die absoluten Ausschlagswerte bei Anwendung der oben geschilderten Eichungsvorrichtung für die argongefüllte Zelle 4424 (die Charakteristik der Parallelzelle 4423 läuft ganz ähnlich) und die empfindlichste Zelle E. Die kleinen



Schwankungen in der E-Kurve erklären sich jedenfalls dadurch, daß die Spannung nur in runden Voltzahlen abgelesen wurde. Denselben ist nur hinzuzufügen, daß die Form der Charakteristik stets die gleiche geblieben ist, daß aber innerhalb der ersten Monate nach Ankunft die Empfindlichkeit der Zelle 4424 allmählich um etwa 4 Proz. gestiegen ist, jetzt aber stationär zu sein scheint, während die Zelle E heute praktisch dieselben Werte zeigt wie bei ihrer Ankunft im September 1916 trotz der Zwischenfälle, welche unten erwähnt werden werden.

Die Proportionalität zwischen Lichtstärke und Photostrom wurde auch bei dieser Anordnung mit der Irisblende und mit gleichem Erfolge wie vor der Sonne festgestellt. Außerdem wurde sie auch bei Ankunft jeder Zelle durch Bestrahlung mit ein und derselben, annähernd punktförmigen Lichtquelle in verschiedenen Abständen kontrolliert; die Zellen standen alsdann in gewohnter Montierung hinter der runden Mattscheibe aus Uviolglas, bei Vorschaltung des Blaufilters. Die Resultate waren stets zufriedenstellend. Das vor der Hefnerkerze ermittelte, infolge der großen Ausdehnung der Lichtquelle sicherlich schwierigste, lautet folgendermaßen:

Tabelle III.

11. September 1916.

Eichung der Zelle 4424
(hinter Uviolglas Mattscheibe und K_2-Filter)
mit der Hefnerkerze bei 153 Volt.

R Kerzenabstand in Millimetern	G Galvanometerausschläge in Skalenteilen	Quotient G gefunden	Quotient G berechnet
327	5,5	2,75	2,72
397	3,6	1,80	1,85
540	2,0		
337	5,3	2,52	2,56
383	4,0	1,91	1,98
455	3,0	1,43	1,41
540	2,1		

1 MHK = 0,594 Skalenteilen.

Durch diese Messungen sind die in Skalenteilen bzw. Stromstärken ermittelten Werte angeschlossen an das photometrische Normalmaß.

Der von 1 MHK unter Blaufilter bei 153 Volt Belastung in der Zelle 4424 ausgelöste Photostrom beträgt hiernach $2{,}152 \cdot 10^{-11}$ Amp. (hierbei ist die Lichtintensität der Hefnerkerze an Hand der Liebentalschen Kurve entsprechend Barometerstand, Temperatur und relativer Feuchtigkeit korrigiert). Aus der Beziehung der verschiedenen Empfindlichkeiten der Zelle 4424 und der Zellen II und I unter Blaufilter und der Beziehung der Empfindlichkeit der Galvanometer untereinander ist dann abgeleitet: Es entspricht ein Skalenteil des Nadir-Galvanometers bei Zelle I unter Blaufilter einer Bestrahlung durch 145200 MHK, bei Zelle II unter Blaufilter einer Bestrahlung durch 142300 MHK.

Das Resultat ist ein vorläufiges und sicherlich noch nicht genaues, denn es beruht auf der Voraussetzung, daß unter dem Blaufilter die von Osramlampe und Hefnerkerze an Zelle 4424 ausgelösten Ausschläge zueinander in gleichem Verhältnis stehen wie die an Zelle E verursachten, was sicherlich nicht genau zutrifft,

da der vom Filter ausgeschnittene Spektralteil doch noch immer die nicht unbedeutende Ausdehnung von 430 bis 390 $\mu\mu$ hat. Das Resultat soll noch nachgeprüft werden auf zweifachem Wege, 1. durch direkte Eichung der Vakuumzellen unter Blaufilter vor der Hefnerkerze und, da die Ausschläge hierbei recht klein werden und keine sehr genauen Resultate versprechen, 2. durch Anwendung des Voege-Filters P, worauf sogleich noch die Rede kommen wird.

Unter Einsetzen des oben ermittelten Wertes ergibt sich für die Osramlampe, photoelektrisch im Blauspektrum (unter K_2-Filter) gemessen, ein Gegenwert von 2,640 MHK, ohne Filter gemessen ein solcher von 1,942 MHK. Photometrisch ausgewertet in derselben Montur, in welcher sie den Eichungszwecken der Zelle dient, entspricht sie nur 1,724 MHK.

$$\text{Verhältnis } \frac{\text{photoelektrisch}}{\text{photometrisch}} \text{ also} = 1{,}127.$$

Der geringere Gehalt der Hefnerkerze an photoelektrisch wirksamen Strahlen erklärt das leicht, es zeigt sich hierdurch aber auch, wie groß der Irrtum ist, wenn man bei photoelektrischen Messungen Metallfadenlampen anwendet und dann deren photometrisch ermittelten Gegenwert in MHK in die Resultate einsetzt. Elster und Geitel erwähnen daher auch (diese Zeitschr. 17, 273, 1916) ausdrücklich, es müßten in solchen (stets ja nur als roher Anhalt geltenden) Fällen die Metallfadenlampen wenigstens stark unterbelastet brennen.

Um die Zellenmethode in den Dienst der praktischen Photometrie zu stellen, hat Voege[1]) sein (bei mir mit P bezeichnetes) Filter geschaffen. Bei Anwendung desselben liegt das Maximum der Empfindlichkeitskurve der Zelle und des menschlichen Auges an derselben Stelle und es ist auch gleich stark ausgeprägt, das Filter löscht aber sowohl am kurzwelligen, wie auch am langwelligen Ende Spektralteile aus, welche auf das Auge noch wirken. Da die ersteren stärker, die letzteren schwächer auf die Zellen wirken als auf das Auge, so ist der Gesamteffekt der, daß Lichtquellen mit kontinuierlichem Spektrum photometrisch und photoelektrisch unter dem Filter im allgemeinen gleich groß ausgewertet werden (eine etwas überlastete Metallfadenlampe wirkt freilich trotz des Filters auf die Zelle schon weit stärker als auf das Auge). Nach meinen für Registrierzwecke angestellten Vorversuchen scheint das Filter zur photometrischen Auswertung des Sonnenlichtes und der Ortshelligkeit (Beleuchtungsstärke der Horizontalfläche durch Himmel und Sonne) zu genügen, für das diffuse Tages- und das blaue Himmelslicht liefert es von den photometrischen stark abweichende Werte. Das Filter vernachlässigt anscheinend die in den verschieden gefüllten und verschieden belegten Alkalizellen verschiedene Verteilung der Empfindlichkeit.

1) Zeitschr. f. Beleuchtungsw. 1914, 20. Jahrg., Heft 11.

Die wichtige Frage nach der Gestalt der Empfindlichkeitskurven der verschiedenen Zellen hatte von Anfang an meine ganze Aufmerksamkeit mit Rücksicht auf die hier verfolgten Zwecke.

Was zunächst die Abschwächung durch das Netzfilter anlangt, so ist dieselbe im Rahmen der hier nötigen Genauigkeit für alle Zellen und für alle Lichtquellen von gleichem Betrage. Im Nachfolgenden sind die Verhältnisse der ohne Filter erhaltenen Ausschläge zu den unter (eingangs dieses Aufsatzes spezifizierten) verschiedenen Filtern ermittelten angegeben: 1. für alle

Tabelle IV.

Verhältnis der Empfindlichkeiten der Zellen in verschiedenen Spektralteilen.

(Verhältnis der von unfiltriertem und durch die S. 381 spezifizierten Filter filtriertem Licht ausgelösten Photoströme.)

Filterverhältnis	Zellenbezeichnung				
	I	II	4423	4124	E
1. vor Osramlampe					
O/K_1	7,11	7,23	7,37	7,40	6,55
O/K_2	10,27	10,94	11,50	12,51	10,71
O/P	7,94	6,99	5,87	4,81	8,44
O/G	7,73	7,85	7,05	7,17	7,14
O/E	1,39	1,36	1,39	1,36	1,42
2. vor Hefnerkerze					
O/K_1				12,09	8,29
O/K_2				17,02	12,03
O/P				3,33	7,67
O/G				6,85	6,77
O/E				1,29	—
3. vor Sonne bei 40° Höhe					
O/K_1		3,65			
O/K_2		7,06			
O/P		23,20			
O/G		9,09			
O/E		—			

Zellen vor der Osramlampe, 2. für die argongefüllten Zellen 4424 und E vor der Hefnerkerze, 3. für die evakuierte Zelle II bei mittlerer Sonnenhöhe.

Die Empfindlichkeitskurven der verschiedenen Zellen weichen hiernach doch recht bedeutend voneinander ab; sie sind von Anfang 1916 bis jetzt unverändert geblieben. Sie bestärken die Lehre, welche man aus dem durch die Literatur bekannten mittleren Kurvenverlauf schon ziehen mußte, daß es nötig ist, Filter mit engbegrenztem Spektralgebiet anzuwenden, wenn man die spektral recht verschieden zusammengesetzte Sonnenstrahlung bei hoch und tief stehender Sonne oder diejenige der Höhe und der Ebene und das recht verschiedene Himmelsblau in Sonnennähe und Sonnenferne auswerten oder mit verschiedenen Zellen gewonnene Werte untereinander vergleichen will. Ohne Vorschaltung von Filtern ist die Zelle auf die Messung monochromatischen Lichtes und seine Intensitätsschwankungen beschränkt. Es erklärt sich aus der Tabelle auch der oben erwähnte Befund, daß das Verhältnis der Zelle I : II unter dem Blaufilter ein größeres ist als unter dem Netzfilter. Interessant ist, daß das hauptsächlich die kurzwelligen Strahlen schwächende Filter E trotz seiner geringen Gesamtabsorption den Photostrom aller Zellen in fast gleichem Verhältnis herabsetzt. Dies spricht dafür, daß das ähnlich wirkende Voegesche Filter vor allen Kalium- (vielleicht auch anderen Alkali-)Zellen eine jedenfalls für praktische Zwecke genügend gleichmäßige Wirkung ausüben könnte. Der bei Zelle II und I nicht unbedeutende Unterschied des Quotienten $\frac{O}{K_2}$ kommt auch in den Messungen der Sonnenstrahlung zum Ausdruck, vor der an kurzwelligen Strahlen armen Petroleumlampe verschwindet er fast gänzlich.

Von Zwischenfällen, welche ich erlebte und aus denen andere Lehren ziehen können, seien erwähnt:

Auch die evakuierten Zellen I und II gewannen (ähnlich der Zelle 4424) erst nach mehrmonatlichem Gebrauch Konstanz — sie mußten noch „altern".

Am 15. Mai 1915 stiegen bei regem Gebrauch der Zelle I in recht starker Sonnenstrahlung und damals noch nicht bei jedesmaligem Filterwechsel geübter Abdeckung (also bei verhältnismäßig langwährender Exposition gegen starke Sonnenstrahlung) die Ausschläge auf ein ganz anormal hohes Maß bei langsam erfolgendem Ansteigen während der Exposition und verblieben auf demselben während des Tages. Erst der 21. Mai brachte wieder einen Sonnentag; an ihm war annähernd die ursprüngliche Empfindlichkeit wieder erreicht. Augenscheinlich war unter der großen Wärmewirkung eine Destillation von Kaliumdämpfen im Vakuum eingetreten.

Die Charakteristik der Vakuumzellen zeigte anfangs einen merkwürdigen Verlauf: Mit von Null steigender Spannung stieg der Ausschlag bis etwa 40 Volt, um dann bis etwa 70 Volt zu fallen und darauf zu dem zwischen 80 und 120 Volt eintretenden Sättigungstrom zu steigen. Die Auffindung dieser Anomalie hat viel Mühe verursacht, denn sie wurde zunächst in äußeren Einflüssen (vagabundierenden Strömen, schlechter Erdleitung usw.), Galvanometereigenheiten oder Fehlern der Anordnung gesucht. Die Aufklärung fanden Elster und Geitel nach Einsendung der einen Zelle, indem sie feststellten, daß bei der Spannung, in welcher sich die Charakteristik senkte, eine Teilung des Stromes auftrat, indem ein Teil zu dem geerdeten inneren Schutzring abfloß. Diese ihnen neue Erfahrung erklären die Herren durch die große Dimension der Zelle. Nach Durchschneidung der Erdung des Ringes, welche unbedenklich geschehen kann, da derselbe nur zur Verhinderung des bei den hiesigen Messungen natürlich zu vernachlässigenden Dunkeleffektes dient, ist die Anomalie fast ganz geschwunden, der Sprung zum Sättigungsstrom ist aber, wie aus der Kurve erkenntlich, ein jäher geblieben und er tritt nicht stets bei gleichem Potential ein. Oberhalb 120 Volt ist man seiner aber stets und vor allen Lichtstärken sicher.

Die dem ersten Gebrauch dienende, von Günther & Tegetmeyer sorgsam durchdachte und ausgeführte Batterie von 30 kleinen Trockenelementen mit mannigfacher Stöpseleinrichtung und Um- und Ausschalter (das miteingebaute Nadirinstrument konnte dadurch als Spannungs- und Strommesser gebraucht werden) hat sich nicht bewährt. Weder die Montur auf Ebonitplatten noch der Porzellanumschalter boten genügende Isoliersicherheit, auch lieferten die kleinen Trockenelemente nicht genügend schnell Strom nach. Selbst die später angeschafften Klingelfußschen Akkumulatoren laden das ganze System erst allmählich auf das volle Potential; dies erklärt auch die häufig beobachtete Tatsache, daß bei einer sogleich nach Anlegen der Spannung vorgenommenen Messung der letzte Anstieg des Galvanometers sehr langsam erfolgt. Die schärfste Kontrolle über richtig stattgehabten Ausgleich bietet die von mir geübte elektrostatische Messung der Spannung.

Bei der sehr empfindlichen Zelle E liegt das Entladungspotential im Dunkeln schon zwischen 150 und 160 Volt. Dies ist zweimal unbeachtet

geblieben, sodaß leuchtende Entladung eintrat, welche den Effekt hatte, daß sich die Empfindlichkeit der Zelle ganz gewaltig (fast auf den doppelten Wert) erhöhte und erst ganz allmählich im Laufe von etwa 3 Tagen annähernd wieder den normalen Wert erreichte.

Alle Beachtung muß ferner den Zuleitungen geschenkt werden, Schutz vor starken Induktionseinflüssen ist ebenso nötig wie Vermeidung auch der kleinsten Spur von Reibung der Zuleitungsdrähte, welche, soweit sie überhaupt gestützt werden müssen, nur über isoliert hängende Metallhaken zu leiten sind. Erfahrungen mannigfacher Art sind zu sammeln, ehe man das Instrumentarium voll beherrscht und es an allen Stellen anzuwenden imstande ist, an welchen es zur Sonnen- und Himmelsmessung gebraucht wird; dann leistet es aber auch ganz vortreffliche Dienste, indem es gestattet, in mannigfachen (unter Zuhilfenahme der Auflademethode in allen) Spektralgebieten objektiv mit einer der photometrischen Methode nicht nachstehenden Genauigkeit zu messen, und gleichzeitig den großen Vorteil der Registrierungsmöglichkeit bietet.

Herrn Barkows Befunde weichen von den meinigen teilweise sehr ab: Zwar findet auch er für die Beziehung zwischen Lichtstärke und Photostrom Kurven, welche allen Ansprüchen zu genügen scheinen mit Ausnahme der untersten Strecke in seiner Fig. 2, welche zunächst noch unaufgeklärt bleibt (die Zelle mit Wasserstofffüllung kann aus den Betrachtungen ausscheiden; der Wasserstoff ist so reaktionsfähig, daß er auch ohne Photostrom die Kalium-Oberfläche chemisch verändert). Auch die Form der Charakteristik findet Barkow für alle Zellen von dauernd gleichbleibender Form, nur die absoluten Ausschläge schwanken. Der Grund dürfte hauptsächlich in Überlastung der Zellen zu suchen sein. Sie kamen vermutlich während der Versuche kaum je zur Ruhe (drei Tage währte der oben erwähnte Effekt einer nur Sekunden währenden leuchtenden Entladung in der Zelle E). Eine 24 stündige Bestrahlung mit einer 32 kerzigen Glühlampe in $^1/_2$ m Entfernung und eine halbstündige, nur von Verdunklungsmomenten unterbrochene Exposition vor der Sonne sind Kraftproben, welche sicher lange, möglicherweise dauernde Wirkungen nach sich ziehen. Seine Fig. 7 und 8 scheinen von Photoströmen zu sprechen, welche mit 800 bis 900 Skalenteilen des Wertes $2,38 \cdot 10^{-9}$ das Doppelte des auf Seite 214 angegebenen Höchstmaßes erreichen, und auch dies dürfte wohl schon zu hoch liegen, um es für längere Zeit anzuwenden, zumal, soweit aus den Beschreibungen ersichtlich, zwischen negativem Batteriepol und Zelle Widerstände nicht lagen. „Zur Messung geringer Lichtstärken sind ihrer Natur nach die argongefüllten Zellen bestimmt“, schreiben Elster und Geitel, (diese Zeitschr. **15**, 611, 1914), die Größenordnung 10^{-6} Amp. als äußerste Grenze des Photostroms ist als roher Anhalt gegeben mit dem Hinzufügen, daß die Verwendbarkeit jeder Zelle von dem ihr eigenen Gasdruck abhängt, also individuell ist und experimentell festgestellt werden muß, wenn sie vor großen Intensitäten angewandt werden soll.

Vielleicht erklärt sich ein Teil der gefundenen Abweichungen dadurch, daß das mattierte Quarzglas vor den der Sonnenhelligkeit gleichen und sie noch weit übertreffenden Lampenhelligkeiten die Strahlen nicht mehr genügend diffus auf den Zellenbelag warf. Sind denn die Kurven der Fig. 6 wirklich als Ermüdungserscheinungen anzusehen? Wenn der erste Punkt des ersten Kurvenstücks wirklich den ersten Belichtungsaugenblick darstellt, so wäre ich geneigt, hier eine ähnliche Erscheinung zu sehen, wie die von mir am 15. Mai 1915 beobachtete, oben beschriebene. Es würden dann gerade die Fußpunkte der einzelnen Kurvenstücke die richtigen Ausschläge darstellen.

Vergegenwärtigt man sich einerseits den komplizierten Vorgang in der vom Photostrom durchflossenen, gasgefüllten Zelle und andererseits die kürzlich von Elster und Geitel, (diese Zeitschr. **17**, 268ff, 1916) aufgedeckten Veränderungen, welche schon bei Anwesenheit kleinster Spuren von Alkali durch die leuchtende Entladung hervorgebracht werden, und die ungemein große Empfindlichkeit der Zelle gegen solche, so muß für den, der auf Konstanz der Zelle angewiesen ist, als erstes Gesetz gelten, jeder Zellenüberlastung weit vorzubeugen.

Ob durch die sehr wahrscheinliche Überlastung seine Zellen dauernd oder nur vorübergehend gelitten haben, wird Herr Barkow durch Wiederholung der Versuche vor schwachen Lichtquellen ermitteln können. Nach meinen Erfahrungen sind, wie oben dargelegt, bei vorsichtiger Handhabung auch in den argongefüllten Zellen nach eingetretener Alterung die Empfindlichkeitsschwankungen sehr gering, sehr langsam verlaufend und leicht zu kontrollieren.

(Eingegangen 28. Juni 1917.)



Weitere Bemerkungen zur Statistik des Bohrschen Modells.

Von K. F. Herzfeld.

I.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit:[1]) „Zur Quantentheorie der Spektrallinien-Intensitätsfragen" kommt Herr Sommerfeld auch auf eine frühere Arbeit[2]) des Verfassers zu sprechen. Herr Sommerfeld benutzt eine andere Einteilung des Phasenraums, über die wegen der prinzipiellen Wichtigkeit einige Bemerkungen gestattet seien.

In der gewöhnlichen Statistik ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Koordinaten eines bestimmten Teilchens zwischen den Grenzen q_1 und $q_1 + dq_1$, q_n und $q_n + dq_n$, die Momente zwischen p_1 und $p_1 + dp_1$, p_n und $p_n + dp_n$ liegen,

$$dW = dq_1 \dots dq_n,\quad dp_1 \dots dp_n e^{-\frac{E}{kt}}.$$

Es ist also die relative Wahrscheinlichkeit von Zuständen gleicher Energie temperaturunabhängig. Man geht daher gewöhnlich so vor, daß man neue Koordinaten x_1 bis x_{2n} an Stelle der q, p einführt, als x_1 die Energie nimmt und die Zusammenfassung aller Zustände gleicher Energie durch Integration über $x_2 \dots x_n$ durchführt. Analog ist man bei den Quanten vorgegangen. Während in der klassischen Theorie der Phasenraum dicht von den Bildpunkten der Zustände erfüllt ist, befinden sich bei der Quantentheorie nur Gebilde von niedrigerer Dimension als $2n$ im $2n$ dimensionalen Phasenraum. Man rechnet dann in der Statistik so wie in der klassischen Theorie, betrachtet aber das Gewicht der ganzen Umgebung einer „erlaubten" Bahn als das Gewicht eben dieser Bahn. Der Phasenraum ist dann von diesen Umgebungsgebieten ausgefüllt. Die zu behandelnde Frage ist die nach der Begrenzung der einzelnen Gebiete.

Wir wollen folgende Beschränkungen einführen:

1. Die Bahnen sollen unveränderlich und geschlossen sein.

2. Die Eigenschaften einer Bahn sollen durch zwei Parameter x_1 und x_2 zu charakterisieren sein.

3. Wir interessieren uns nur für die Eigenschaften der Bahn, nicht für die Orientierung und nicht für die Lage des Punktes auf der Bahn, d. h. die Integrationen nach x_3 bis $x_2 n$ seien ausgeführt (dies ist wegen der Stationärheit und Geschlossenheit möglich).

1) Münch. Ber. S. 83, 1917. Sitzung vom 3. März.
2) K. Herzfeld, Ann. d. Phys. 51, 261, 1916.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Parameterwerte zwischen x_1 und $x_1 + dx_1$ sowie x_2 und $x_2 + dx_2$ liegen

$$dW = f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2\, e^{-\frac{E}{kt}}.$$

In der Ebene x_1, x_2 liegen im klassischen Fall die Punkte, von denen jeder der Bildpunkt einer Bahn ist, dicht, im Fall der Quantentheorie hingegen liegt nur ein diskretes Punktgitter vor. Die Abgrenzung der Umgebungsgebiete, die das Gewicht für die Gitterpunkte beisteuern, bilden nun zwei Kurvenscharen

$$a_m = \varphi_1(x_1, x_2),\quad b_m = \varphi_2(x_1, x_2)$$

bei deren Auswahl zweierlei willkürlich ist.

Erstens die Kurvenform, d. h. die Form der Funktionen φ, zweitens die Lage der Kurven zu den Gitterpunkten, die entweder in der Mitte oder in der Ecke ihrer Umgebung liegen können, d. h. die Zahlwerte der Konstanten a_m, b_m. Sommerfeld wählt nun folgende Kurvenschar zur Begrenzung seiner Bereiche.

$$n = \frac{2\pi m}{h}\varphi = a_m$$

$$n' = \sqrt{\frac{Nh}{-E}} - \frac{2\pi m\varphi}{h} = b_m$$

wo φ die Flächengeschwindigkeit, N die Rydberg-Frequenz, m die Masse des Elektrons ist. Ich hatte im Anschluß an die klassische Theorie die Kurven

$$E = a_m,\quad \varphi = b_m$$

benutzt.

Um den Zusammenhang der beiden Darstellungen näher anzusehen, wollen wir setzen:

$$x_1 = n^2 = \left(\frac{2\pi m}{h}\right)^2 \varphi^2$$

$$x_2 = n^1 = \sqrt{\frac{Nh}{-E}} = \frac{2\pi m}{h}\varphi.$$

Dann ist

$$f(x_1 x_2) = h^3.$$

Dann erhalten wir folgende Fig. 1. Die Kurven $n = \text{const}$, $n' = \text{const}$ sind strichliert, die E-Kurven ausgezogen. Die Gitterpunkte sind mit dem zugehörigen n, n' bezeichnet. Das Gebiet, das nach der in meiner Arbeit getroffenen Festsetzung zum Punkt 2,2 gehört, ist vertikal schraffiert. Nach der Sommerfeldschen Festsetzung können zum Punkt 2,2 drei Gebiete gehören, und zwar

Fall a), in dem man von $n - \frac{1}{2}$ bis $n + \frac{1}{2}$ integriert (Fig. 1, schief schraffiert),

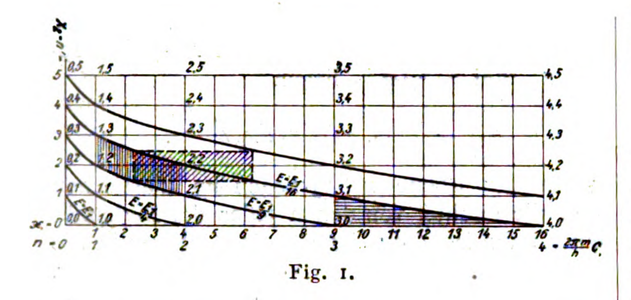


Fig. 1.

Fall b), in dem man von n bis $n+1$ integriert (Fig. 2, vertikal schraffiert),

Fall c), in dem man von $n-1$ bis n integriert (Fig. 2, horizontal schraffiert).

Aus der Figur kann man die Resultate von Herrn Sommerfeld[1]) direkt ablesen, man sieht auch, daß meine Einteilung mit dem Fall c übereinstimmt, mit Ausnahme der Kreisbahn, für die Herr Sommerfeld (wie auch aus Fig. 1 und 2, Punkt 4,0 ersichtlich) 0 erhält, während meine Einteilung $\frac{n-\frac{1}{2}}{3}$ ergibt[2]).

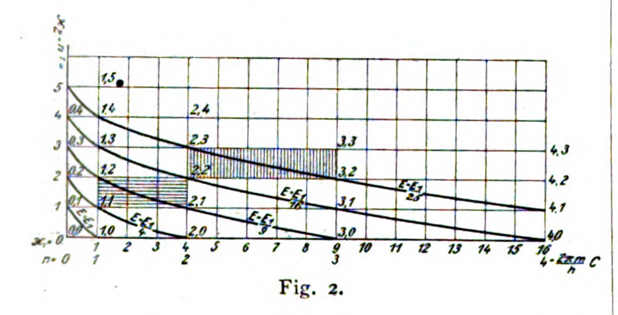


Fig. 2.

Die Einteilung von Herrn Sommerfeld hat infolge ihres engen Zusammenhanges mit den Phasenintegralen $\int p\,dq$ eine sehr große Wahrscheinlichkeit für sich, doch sei nochmals hervorgehoben, daß hier (Fall a und b) zum erstenmal zum Gewicht eines Punktes auch Gebiete beitragen, die über der zu dem Punkte gehörigen Energiekurve liegen. Ferner sieht man, daß im Falle c und bei meiner Einteilung die Ebene vollständig ausgefüllt ist und die Unmöglichkeit der Pendelbahn (Wahrscheinlichkeit null) von selbst folgt, während im Fall a und b die Ausfüllung nur dann fast vollständig ist, wenn die Pendelbahn statistisch möglich ist. Das Viereck 0, 0; $\frac{1}{4}$, 0; $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$; 0, $\frac{1}{2}$ im Fall a, das Viereck 0, 0; 1, 0; 0, 1; 0, 1 im Fall b bleibt frei[1]).

1) l. c. S. 93, 94.

2) In meiner Arbeit, l. c. S. 284, hatte ich gemeint, auch für die Kreisbahn ergebe sich $n-\frac{1}{2}$.

II.

Es ist eine sehr wichtige, aber noch unentschiedene Frage, ob die Bohrschen Bahnen die einzig möglichen sind (analog der ersten Planckschen Resonatorentheorie) (Annahme I); oder ob alle Bahnen möglich sind, dagegen Ausstrahlung, d. h. Übergang zu einer Bahn mit kleinerer Energie, nur von und zu den Bohrschen Bahnen möglich ist; diese letztere Annahme (II) würde der zweiten Planckschen Theorie entsprechen[2]). Die Schärfe der Spektrallinien kann darüber nichts aussagen, da in diesem Falle der freiwilligen Ausstrahlung jedenfalls nur die Bohrschen Bahnen in Betracht kommen. Wohl aber kann man durch gewaltsame Bahnveränderung, durch Ionenstoß, etwas zu erfahren hoffen, indem man die Ionisierungsarbeit, die nötig ist, um das Molekül aus dem Anfangs- in den Endzustand zu überführen, mit der Energiedifferenz[3]) der Bohrschen Bahnen vergleicht. Die Ionisierungsspannung des Wasserstoffes ist zu 11 Volt gefunden.

Bei der Ionisierung sind nun zwei Vorgänge möglich:

A) Ionisierung des Moleküls H_2 in ein neutrales Atom H, ein positives Ion $H^{\cdot}$ und ein Elektron.

B) Ionisierung des Moleküls in ein positives Molion $H_2^{\cdot}$ und ein Elektron. Der Bau des Molions $H_2^{\cdot}$ ist gemäß den Bohrschen Vorstellungen so zu denken, daß dem Molekül einfach ein Elektron genommen wird, die übrige Anordnung aber unverändert bleibt. Die zugehörigen Bahnen sind leicht zu berechnen.

Bezeichnen wir die Energie des Atoms für die Bahn $n+n'=1$ mit J

$$J=\frac{2\pi^2 e^4 m}{h^2},$$

so ergibt eine leichte Rechnung folgende Energiewerte:

Für das neutrale Atom und den Zustand $n+n'=1$

$$J=13{,}2\,e\text{ Volt},$$

für den Zustand $n+n'=2$

$$\frac{J}{4}=3{,}4\cdot e\text{ Volt}.$$

Für das Molekül H_2 und den Zustand $n+n'=1$

1) Im Fall a) verschwindet auch der störende Faktor 3 in der Dissoziationsformel. l. c. S. 278.

2) Vgl. M. Planck, Ann. d. Phys. **52**, 491, 1917.

3) Energie bedeutet hier stets die Arbeit, die nötig ist, um die einzelnen Bestandteile in unendliche Entfernung voneinander und in Ruhe zu bringen.

$$2{,}2 \cdot J = 30{,}14\, e \text{ Volt},$$

für den Zustand $n + n' = 2$

$$2{,}2 \cdot \frac{J}{4} = 7{,}53 \cdot e \text{ Volt}.$$

Für das positive Molion $H_2^{\cdot}$ und den Zustand $n + n' = 1$

$$0{,}88\, J = 12{,}06 \cdot e \text{ Volt},$$

für den Zustand $n + n' = 2$

$$0{,}88 \frac{J}{4} = 3{,}01\, e \text{ Volt}.$$

Gilt die Annahme I, so befindet sich vor und nach dem Stoß das Teilchen im Zustand $n + n' = 1$, da die Wahrscheinlichkeit eines anderen Zustandes viel zu klein ist. Es ist also dann, falls das Resultat der Ionisierung das Molion ist, die Ionisationsspannung

$$\frac{30{,}14\, e - 11{,}06\, e}{e} = 18{,}1 \text{ Volt},$$

falls dagegen ein Atom und ein Atomion entstehen,

$$30{,}14 - 13{,}7 = 16{,}4 \text{ Volt}.$$

Beide Werte sind mit den Messungen unvereinbar.

Nach Annahme II befinden sich die Elektronen im Molekül vor dem Stoß auf irgendeiner Bahn zwischen den Bahnen $n + n' = 1$ und $n + n' = 2$. Der momentanen Bahn entspreche der Wert $n + n' = \mu$, $1 < \mu < 2$, die Energie liegt zwischen den zu den Bahnen 1 und 2 gehörigen Werten 30,14 und 7,53, ist also im Mittel

$$\frac{30{,}14 + 7{,}53}{2} e = 18{,}83 \cdot e \text{ Volt}.$$

Für die Endbahn sind nun drei Annahmen möglich:

a) die Endbahn entspricht stets $n + n' = 1$, also für $H_2^{\cdot}$ der Energie $12.06 \cdot e$ Volt, für $H + H^{\cdot}$ der Energie $13{,}7\, e$ Volt. Die Ionisierungsspannung liegt je nach dem Wert von μ zwischen

$$30{,}14 - 12{,}06 = 18{,}1$$

und

$$7{,}53 - 12{,}06 = -4{,}53 \text{ Volt}$$

(bzw.

$$30{,}14 - 13{,}7 = 16{,}4$$

und

$$7{,}53 - 13{,}7 = -6{,}2),$$

was unstabile H_2-Moleküle ergäbe, also ebenfalls unmöglich ist.

b) Die Endbahn im Molion bzw. Atomion entspricht dem gleichen μ wie die Anfangsbahn im Molekül.

Dann schwankt die Ionisierungsspannung zwischen $30{,}14 - 12{,}06 = 18{,}6$ für $\mu = 1$ und $7{,}53 - 3{,}01 = 4{,}52$ für $\mu = 2$ mit dem Mittelwert 11,3 Volt (bzw. zwischen 16,4 und 4,1 mit dem Mittelwert 10,2). Diese Mittelwerte stimmen mit den Messungen sehr gut überein, doch ist es fraglich, ob eine so große Streuung der Werte mit dem Experiment verträglich ist.

c) Wenn keine Bindung der μ von End- und Anfangsbahn besteht, so wird der Mittelwert nicht geändert, dagegen wird die Streuung noch größer, da alle Kombinationen möglich sind, außerdem treten wieder die negativen Werte wie unter a auf, so daß wir auf Grund unserer Rechnungen die Annahme IIb für die wahrscheinlichste halten müssen.

Zusammenfassung.

I. Es wird der Zusammenhang, in dem die Einteilung des Phasenraumes durch Herrn Sommerfeld zu der früheren Einteilung durch den Verfasser steht, klarzustellen versucht.

II. Es wird durch die Berechnung der Ionisierungsspannung wahrscheinlich gemacht, daß sich die Elektronen im Bohrschen Modell zwischen den Bohrschen Bahnen 1 und 2 bewegen.

K. u. k. Feldpost 641, am 28. Juni 1917.

(Eingegangen 14. Juli 1917.)

BESPRECHUNGEN.

W. Jacobsthal, Mondphasen, Osterrechnung und Ewiger Kalender. 8°. VIII, 116 S. Berlin, Julius Springer. 1917. M. 2.—.

Das Werkchen enthält eine mit elementaren mathematischen Hilfsmitteln durchgeführte Darstellung der Grundlage unserer Kalenderrechnung, nämlich die Ableitung des Datums für das Osterfest. Es ist dem Verf. darum zu tun gewesen, die von Gauß in Zachs Monatl. Korrespondenz (Aug. 1800) zuerst veröffentlichte Osterformel unter Verwertung der zahlentheoretischen Grundsätze einem weiten Leserkreise anschaulich zu machen. Es ist ihm nicht nur das sehr hübsch gelungen, sondern er wird mit seinen Darlegungen auch gewiß den pädagogischen Zweck erreichen, für den Schulgebrauch ein zweckmäßig gewähltes Beispiel für die Anwendung zahlentheoretischer Betrachtungen gegeben zu haben, welches den großen Vorzug hat, aus dem praktischen Leben gegriffen zu sein. Dabei



behandelt er ein Thema, welches wegen seiner scheinbaren Schwierigkeit auf das überall dafür vorhandene Interesse immer abschreckend zu wirken pflegt. Die mit der Berechnung des Osterfestes verbundenen anderen Fragen, betr. Wochentag für ein gegebenes Datum, Bestimmung der „Epakte", der „güldenen Zahl" sind folgerichtig aus den einfachen Betrachtungen mit entwickelt und dadurch in ihrer Bedeutung für das Kalenderwesen erläutert, wobei, wie der Verfasser besonders betont, das historische Moment in der Entwicklung unserer Zeitrechnung überall in den Hintergrund getreten ist. Zum Schluß gibt der Verfasser noch eine Tabelle für die Daten des Osterfestes während des Zeitraumes von 1580—2000, d. h. für die Zeit von der Gültigkeit der Gregorianischen Kalenderreform an. Inwieweit des Verfassers Annahme, die auch Gauß 1800 schon ausspricht, begründet sein dürfte, daß diese Kalenderform nicht mehr von allzulanger Dauer sein werde, mag dahin gestellt bleiben. Neuere Vorschläge in dieser Richtung scheinen wenig Aussicht auf Erfolg zu haben. Was die Form der Gaußschen Osterformel anlangt, so wäre dazu noch zu bemerken, daß mehrfach umfangreichere Ableitungen derselben gegeben worden sind, so Crelles Journal 22 und 138. Auch hat neuerdings Professor Hartmann eine recht zweckmäßige Vereinfachung derselben in A. N. 187, S. 129 bekannt gemacht.

Ambronn.

O. Stolz und J. A. Gmeiner, Theoretische Arithmetik. II. Abteilung: Die Lehre von den reellen und von den komplexen Zahlen. Zweite Auflage, bearbeitet von J. A. Gmeiner. (Dritte Auflage der Abschnitte 5—8, 10, 11 des I. und 1, 2, 5 des II. Teiles der Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik von O. Stolz.) gr. 8. VIII u. 369 S. Mit 23 Fig. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1915. Geh. M. 12.—, geb. M. 13.—

Das bewährte Buch hat nach mehrfachem Umguß nun in gewissem Sinne eine endgültige Gestalt gewonnen. Ein Teil der Abschnitte der Stolzschen Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik bilden seine erste Auflage; 1902 erschien es in vollständig neu bearbeiteter Gestalt unter dem jetzigen Titel in einem Bande und von der dritten Auflage erschien 1911 eine erste Abteilung, die in vier Abschnitten die Lehre von den rationalen Zahlen bringt, und 1915 die uns jetzt vorliegende zweite Abteilung mit den Abschnitten 5—13 über die reellen und komplexen Zahlen.

Der Gesamtinhalt hat sich gegenüber der zweiten Auflage wenig geändert; im einzelnen ist sehr viel verbessert, vereinfacht, vervollständigt. Am stärksten gewandelt hat sich der 7. Abschnitt über die Erklärung, Vergleichung und die Grundoperationen der reellen Zahlen, die ausschließlich nach der Cantor-Méray-schen Methode gegeben werden. Der Gesamtumfang des Werkes hat sich um etwa 100 Seiten vermehrt. Und hier ist es am Platze, dem Verfasser ein Halt zuzurufen: Die Erfahrungen der vergangenen Auflagen, vielfach geäußerte Wünsche und Ratschläge verleiten dazu, mehr und mehr aufzunehmen oder immer tiefer in das Detail einzugehen. So läuft das Buch ernste Gefahr, sich zu einem Handbuch auszuwachsen und dadurch viel an Brauchbarkeit und Einfluß (insbesondere auf die Studierenden) zu verlieren. Darum unterdrücke ich jedweden Wunsch, der sich auf diesen oder jenen noch fehlenden Gegenstand beziehen könnte und spreche dafür nur diesen aus: Wenn das Buch, wie wir zuversichtlich hoffen können, noch viele weitere Auflagen erlebt, so möge es nicht immer dicker werden, sondern möge immer einfacher und klarer die Hauptlinien der Entwicklung hervortreten lassen und von allem (aber auch allem!) nebensächlichen oder nicht unbedingt wesentlichen Beiwerk befreit erscheinen.

K. Knopp.

A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik. In 6 Bänden. Erster Band: Einführung in die Mechanik. 5. Auflage. gr. 8°. XVI u. 431 S. m. 104 Figuren. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1917. M. 9.20, geb. M. 10.—.

Von dem vorgenannten ersten Bande der Föpplschen Vorlesungen wurde die dritte Auflage in dieser Zeitschrift **7**, 511, 1906, die vierte ebenda **12**, 784, 1911, ausführlich besprochen. Die fünfte unterscheidet sich von den vorhergehenden nur in unwesentlichen Einzelheiten, und es braucht zum Lobe dieses nicht bloß bei den Studierenden und nicht bloß bei den Ingenieuren so beliebten Buches, wofür seine rasche Auflagenfolge zeugt, nichts hinzugefügt zu werden.

R. Grammel.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Freiburg i. B. Dr. Walter Friedrich für Physik.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Tübingen Dr. Karl Bülow zum ord. Honorarprofessor für Chemie an derselben Hochschule.

Verliehen: Dem Privatdozenten der physiologischen Chemie an der Universität Marburg Dr. Martin Schenk und dem Leiter des physikalisch-meteorologischen Observatoriums in Davos Dr. C. Dorno der Titel Professor, dem Privatdozenten für physikalische Chemie an der Universität München (bisher an der Technischen Hochschule Karlsruhe) Dr. Kasimir Fajans der Titel Professor.

Gestorben: Der frühere Professor der Chemie an der Bergakademie Clausthal Dr. Friedrich Wilhelm Küster, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Georg Frobenius.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 17. 1. September 1917. 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 18 am 27. August 1917.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Energieabsorption in Schallantennen.

Von H. Lichte.

Kürzlich ist gezeigt worden[1]), daß zwischen akustischen und elektrischen Feldern und Antennen eine weitgehende Analogie besteht. Im Anschluß an Rayleigh[2]) werden in obiger Arbeit die Strahlungskörper nullter und erster Ordnung behandelt und aus den Druck- bzw. Kraftgleichungen die schwingenden Massen und Dämpfungen akustischer Systeme bestimmt.

Im folgenden sollen die Verhältnisse bei der Energieabsorption in Schallantennen, und zwar Strahlern nullter Ordnung, die sich in einem Schallfelde befinden, näher beleuchtet werden. (Die Behandlung der Strahler erster Ordnung ist einer späteren Arbeit vorbehalten.)

Für Antennen der drahtlosen Telegraphie sind diese Verhältnisse bereits von Rüdenberg[3]) untersucht worden. Die Art der Behandlung des Problems ist hier ganz analog. Um die Vorstellung zu fixieren, sei ein bestimmtes Beispiel gewählt: Die Kolbenmembran[4]) von der Größe $2F$ im freien Medium.

Bedeuten:

m die Masse der Membran,
σ die Dichte des Mediums,
R der Radius der Membran,
ξ die Amplitude der Membran,
$\dot\xi$, $\ddot\xi$ die zeitlichen Ableitungen von ξ,
a die Schallgeschwindigkeit in dem Medium, in dem sich die Antenne befindet,
λ die Wellenlänge,
μ die Restitutionskraft,
P der Schalldruck,
w_ν der akustische Bremswiderstand,

so ist die vollständige Schwingungsgleichung des Resonators

$$M\ddot\xi + \left(w_\nu + \frac{a\sigma\pi}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 R^4\right)\dot\xi + \mu\xi = 2PR^2\pi. \quad (1)$$

Hier ist

$$M = m + \frac{8\sigma R^3}{3} \quad (2)$$

die gesamte schwingende Masse.

Vorausgesetzt ist, daß die Dimensionen des Resonators klein sind zur Wellenlänge.

Man kann die Gleichung auch aus dem Energieprinzip ableiten. Es ist nämlich die kinetische Energie des Systems

$$V = \frac{1}{2}M\cdot\dot\xi^2, \quad (3)$$

die potentielle Energie

$$T = \frac{1}{2}\mu\xi^2, \quad (4)$$

mithin die gesamte innere Energie

$$U = \frac{1}{2}M\dot\xi^2 + \frac{1}{2}\mu\xi^2, \quad (5)$$

und deren sekundliche Änderung

$$\frac{\partial U}{\partial t} = M\dot\xi\ddot\xi + \mu\xi\dot\xi. \quad (6)$$

Diese wird bewirkt durch die in der Schallantenne akustisch abgebremste Leistung L_n, sowie die den auffallenden Wellen entnommene und die durch Rückstrahlung auf das Feld abgegebene Leistung L_e bzw. L_a.

Diese Leistungen sind:

$$L_n = w_\nu\dot\xi^2, \quad (7)$$

$$L_e = 2PR^2\pi\cdot\dot\xi, \quad (8)$$

$$L_a = \frac{a\sigma\pi}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\cdot R^4\cdot\dot\xi^2. \quad (9)$$

1) W. Hahnemann u. H. Hecht, diese Zeitschr. 17, 601—609, 1916; 18, 261—270, 1917.

2) Rayleigh, Theorie des Schalles. — Deutsche Ausgabe von Neesen. Braunschweig 1880.

3) Rüdenberg, Ann. d. Phys. (4) 25, 446—466, 1908.

4) Hahnemann u. Hecht, diese Zeitschr. 18, 263, 1917; Rayleigh, Bd. II, S. 193—204.

Es muß also sein

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L_e - L_n - L_a, \tag{10}$$

oder

$$M\dot{\xi}\ddot{\xi} + \mu\xi\dot{\xi} - 2PR^2\pi\dot{\xi} + w_\nu\dot{\xi}^2 + w_\Sigma\cdot\dot{\xi}^2 = 0, \tag{11}$$

wo

$$w_\Sigma = \frac{a\sigma\pi}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot R^4 \tag{12}$$

gesetzt ist.

Aus (11) folgt durch Division mit $\dot{\xi}$ Gleichung (1).

Setzt man

$$\frac{w_\nu + w_\Sigma}{M} = 2(\delta_\nu + \delta_\Sigma) = 2\delta \tag{13}$$

und

$$\frac{\mu}{M} = \omega_0^2, \tag{14}$$

wo δ der Dämpfungsfaktor (δ_ν der Nutzdämpfungsfaktor, δ_Σ der Strahlungsdämpfungsfaktor) und ω_0 die Eigenfrequenz des Resonators bedeuten, so nimmt (1) die einfachere Form an

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{2FP}{M}. \tag{15}$$

Im Falle ungedämpfter Wellenzüge ist:

$$P = P_0 \sin \omega t. \tag{16}$$

Die Lösung von (15) lautet dann

$$\xi = A \sin(\omega t - \Theta), \tag{17}$$

wo

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{18}$$

und

$$A = \frac{2FP_0}{M[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \cos\Theta + 2\delta\omega \sin\Theta]} \tag{19a}$$

$$= \frac{2FP_0 \sin\Theta}{M \cdot 2\delta\omega} \tag{19b}$$

$$= \frac{2FP_0}{M\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}. \tag{19c}$$

Also ist

$$\xi = \frac{2FP_0}{M\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \sin(\omega t - \Theta) \tag{20}$$

und

$$\dot{\xi} = \frac{2FP_0\omega}{M\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \Theta). \tag{21}$$

Die aufgenommene Nutzenergie ist im zeitlichen Mittel

$$L_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2FP_0}{M}\right)^2 \cdot \frac{w_\nu \cdot \omega^2}{[\omega_0^2 - \omega^2]^2 + 4\delta^2\omega^2}. \tag{22}$$

Für die ausgestrahlte Energie erhält man

$$\left.\begin{aligned} L_a &= \frac{R^4\pi^2 P_0^2}{M^2} \cdot \frac{a\sigma\pi\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot R^4 \cdot \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} = \\ &= L_n \cdot \frac{2a\sigma\pi\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 R^4}{w_\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

und endlich für die eingestrahlte Energie

$$L_e = \frac{\frac{1}{2}(2FP_0)^2\omega}{M\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}. \tag{24}$$

Im Resonanzfall ist

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{2FP_0}{M\cdot 2\delta\omega} \sin(\omega t - \Theta) = \\ &= \frac{2FP_0}{(w_\nu + w_\Sigma)\,\omega} \sin(\omega t - \Theta) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{2FP_0}{M\cdot 2\delta} \cos(\omega t - \Theta) = \\ &= \frac{2FP_0}{(w_\nu + w_\Sigma)} \cos(\omega t - \Theta). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die nutzbar absorbierte Energie ist

$$\left.\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{2FP_0}{M}\right)^2 \frac{w_\nu}{4\delta^2} = \\ &= \frac{1}{2}(2FP_0)^2 \cdot \frac{w_\nu}{(w_\nu + w_\Sigma)^2} = \\ &= \frac{1}{2}(2FP_0)^2 \cdot \frac{\delta_\nu}{M\cdot 2\cdot(\delta_\nu + \delta_\Sigma)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Man sieht, sie ist abhängig von der Nutzdämpfung. Ihr Maximum wird erreicht, wenn

$$\frac{\partial L_n}{\partial \delta_\nu} = 0 \tag{28}$$

oder

$$\delta_\nu = \delta_\Sigma, \tag{29}$$

also die Nutzdämpfung gleich der Strahlungsdämpfung ist, wie das beim Empfang elektrischer Wellen auch der Fall ist.

Es kann maximal die Energie absorbiert werden

$$L_{n\,\max} = \frac{1}{2}(2R^2\pi P_0)^2 \cdot \frac{1}{4w_\Sigma}, \tag{30a}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot P_0^2 \cdot \frac{1}{a\sigma\pi} \cdot \lambda^2. \tag{30b}$$

Sie ist um so größer, je größer die Wellenlänge, aber unabhängig von der Größe des Resonators.

Um den Einfluß des Resonators im akustischen Strahlungsfelde festzustellen, ist das Eigenfeld des Resonators zu bestimmen.

Nach Rayleigh[1]) ist das Geschwindigkeitspotential eines Zuges von harmonischen Wellen, welche kontinuierlich nach außen von einer Schallquelle forteilen,

$$\varphi = -\frac{B}{4\pi r}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at-r), \quad (31)$$

wo B den Maximalwert des durch den schwingenden Resonator erzeugten Mediumstromes bedeutet.

Im vorliegenden Falle ist

$$B = \pi\cdot n\cdot 2F\cdot\xi, \quad (32)$$

also

$$\varphi = -\frac{\omega F\cdot\xi}{4\pi r}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at-r), \quad (33a)$$

$$= \frac{2F^2P_0\cdot\omega}{4\pi r\cdot M\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at-r). \quad (33b)$$

Im ungestörten primären Feld ist das Potential

$$\psi = -\frac{P_0}{\omega\sigma}\cos\omega t. \quad (34)$$

Man erhält also für das Amplitudenverhältnis von sekundärer zu primärer Welle

$$\alpha = \frac{2F^2\omega^2\sigma}{4\pi r M\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}, \quad (35)$$

was im Resonanzfalle das Maximum

$$\alpha_{\max} = \frac{F^2\omega\sigma}{4\pi r M\delta} \quad (36)$$

erreicht. Bei kleiner Nutzdämpfung ist

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\lambda}{r}, \quad (37)$$

also nur von dem Verhältnis $\frac{\lambda}{r}$ abhängig.

Rechnet man den Störungsbereich so weit, daß an seiner Grenze das primäre Feld nur noch um 1 Proz. gestört wird, so ist

$$\alpha = \frac{1}{100} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\lambda}{r_s}, \quad (38)$$

mithin

$$r_s = \frac{100}{2\pi}\cdot\lambda = 16\lambda. \quad (39)$$

Die Rückwirkung des Resonators auf das Feld kann sich auf eine Strecke von etwa 16 Wellenlängen bemerkbar machen. Bei stärkerer Energieabsorption aus dem Felde ist der Störungsradius halb so groß.

Hiernach müssen zwei gleiche Resonatoren, wenn sie sich bei stärkster Energieabsorption aus dem Felde weniger als 20 Proz. stören sollen, 1,6 λ voneinander entfernt sein.

Endlich sei noch die vom Resonator nutzbar absorbierte Energie mit dem Energiestrom verglichen, der durch eine bestimmte Fläche im ungestörten Strahlungsfelde wandert.

Die Intensität der ungestörten Welle ist

$$L = \frac{P_0{}^2}{2\sigma a}\ ^1), \quad (40)$$

während die nutzbar absorbierte Energie durch (22) gegeben ist.

Beide Leistungen sind gleich für eine Fläche

$$Q = \frac{L_n}{L} = \frac{(2F)^2}{M}\frac{w_\nu\omega^2\cdot\sigma a}{[\omega_0{}^2-\omega^2]^2+4\delta^2\omega^2}. \quad (41)$$

Im Falle der Resonanz und gleicher Strahlungs- und Nutzdämpfung wird

$$Q = \frac{\lambda^2}{2\pi}, \quad (42)$$

und man erhält als größten Radius der kreisförmigen Absorptionsfläche

$$r_a = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}, \quad = 0{,}225\,\lambda. \quad (43)$$

Zusammenfassung.

1. Es wird die von einem in einem Schallfelde befindlichen Nullstrahler absorbierte Energie bestimmt. Sie ist proportional dem Quadrat der Wellenlänge.

2. Es wird die Störung des primären durch das sekundäre Feld als proportional zu $\frac{\lambda}{r}$ bestimmt. Eine Rückwirkung des Resonators von 1 Proz. kann sich noch auf eine Strecke von 16 λ bemerkbar machen.

3. Es wird die Größe der Absorptionsfläche bestimmt.

4. Die für den akustischen Nullstrahler gefundenen Ergebnisse stimmen qualitativ mit denen für die Antennen der drahtlosen Telegraphie überein.

1) Hahnemann u. Hecht, l. c.

Kiel, den 15. Juli 1917.

(Eingegangen 23. Juli 1917.)

Über die Entropie eines realen Gases als Funktion der mittleren räumlichen Temperatur- und Dichteverteilung.

Von R. Fürth.

Ph. Frank hat in einer Abhandlung[1]) gezeigt, daß sich die Entropie eines idealen Gases

1) Rayleigh, Bd. II, S. 128.

1) Ph. Frank, Die Entropie als Maß für die Gleichförmigkeit der Temperatur- und Dichteverteilung. „Lotos". Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Prag 64, 1916.



als Maß für die Gleichförmigkeit der Temperatur- und Dichteverteilung auffassen läßt und auch analytisch so darstellbar ist. Er bekommt für die Entropie S eines Mols des Gases folgende Formel

$$S = S_0 - \frac{1}{2}\left[C\overline{\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^2} + R\overline{\left(\frac{s-s_0}{s_0}\right)^2}\right], \quad (1)$$

worin die eingeführten Größen bedeuten: S_0 die Entropie im Normalzustande, C die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, R die absolute Gaskonstante, T und s die Temperatur und Dichte eines Volumelements des Gases, T_0 und s_0 die räumlichen Mittelwerte dieser Größen. Die Querstriche bedeuten ebenfalls räumliche Mittelbildung über alle Volumelemente. Die Formel zeigt, daß die Entropie dann ihr Maximum hat, wenn die Temperatur und Dichte gleichmäßig über die Volumelemente des Gases verteilt sind und daß sich daher nach dem zweiten Hauptsatze dieser Zustand automatisch herstellen muß.

Die an diesem Spezialfall angewandte Methode legt es nahe, eine ähnliche Formel für die Entropie bei einem realen Gase unter Zugrundelegung einer anderen Zustandsgleichung als der Boyle-Charlesschen zu suchen und zu schauen, wie sich da die Entropie durch die Temperatur- und Dichteverteilung ausdrückt. Das soll nun im folgenden versucht und der so abgeleitete Entropieausdruck verwendet werden, um mit Hilfe des Boltzmannschen Theorems die seinerzeit von M. v. Smoluchowski[1]) abgeleitete Formel für die mittlere Dichteschwankung eines Gases in der Nähe des kritischen Zustandes daraus auf anderem Wege zu gewinnen.

§ 1. Ableitung der Entropieformel für ein reales Gas.

Definitionsgemäß ist die Entropie eines homogenen Systems gegeben durch folgende Formel

$$S = \int \frac{du + p\,dv}{T}, \quad (2)$$

wo u die innere Energie, p den Druck, v das spezifische Volumen, T die absolute Temperatur bedeuten.

Wir denken uns zunächst eine gleichmäßige Temperatur- und Dichteverteilung in dem Gase, das der van der Waalschen Zustandsgleichung genügen soll

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT, \quad (3)$$

wo a, b und R die charakteristischen Konstanten des Gases sind.

1) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **25**, 295 ff., 1908.

Um einen Ausdruck für die innere Energie zu bekommen, gebrauchen wir den in der Thermodynamik aus dem zweiten Hauptsatz abgeleiteten Ansatz[1])

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\frac{\partial p}{\partial T} - p \quad (4)$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = C,$$

wo die Differentiation das erstemal bei konstantem T, das zweitemal bei konstantem v vorzunehmen ist. Daraus ergibt sich:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT. \quad (5)$$

Für den Fall der Zustandsgleichung (3) ergibt sich aus (4) und (5)

$$du = \frac{a}{v^2}dv + C\,dT \quad (6)$$

und integriert (bis auf eine unwesentliche Konstante)

$$u = -\frac{a}{v} + CT. \quad (6')$$

Aus (2) und (6) folgt nun

$$S = \int \frac{C}{T}dT + \int \frac{R}{v-b}dv$$
$$= C\log T + R\log(v-b) + \text{const} \quad (7)$$

für die Entropie eines Mols des Gases.

Wir lassen nun die Annahme der gleichmäßigen Temperatur- und Dichteverteilung fallen, wollen aber voraussetzen, daß die räumliche Verteilung dieser Größen eine solche ist, daß Temperatur und Dichte benachbarter Volumelemente des Gases nur wenig voneinander verschieden sein sollen (so daß das Quadrat ihres Gradienten sich vernachlässigen läßt). Ferner machen wir die Voraussetzung, daß innerhalb eines genügend kleinen Volumelements Temperatur und Dichte als konstant angesehen werden können[2]). Schließlich sollen die Abweichungen von Temperatur und Dichte vom Normalzustande der Gleichverteilung so wenig abweichen, daß man bei ihrer Entwicklung Glieder von höherer als der zweiten Ordnung vernachlässigen kann.

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir die Entropie des Gases berechnen als Summe der Entropien aller Volumelemente. Gegen die Zulässigkeit dieser Berechnungsart läßt sich nun allerdings ein Einwand erheben, den Herr v. Smoluchowski so freundlich war, in einem

1) O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. Braunschweig, **3**, 510, 1905.

2) Nach unten ergibt sich die Grenze für die Verkleinerung der Volumelemente, indem ja in jedem einzelnen so viel Moleküle enthalten sein müssen, daß daselbst eine Temperatur definiert ist.

Briefe an Herrn Ph. Frank mitzuteilen, in dem es unter anderem heißt:

„Ich glaube, man könnte den Einwand formulieren: Die Entropie des Gases ist eine Funktion der Mikroverteilung, aber nicht der Makroverteilung. Im Falle des Gleichgewichts läßt sie sich allerdings als Funktion von v und T ausdrücken, weil da gewisse statistische Beziehungen zwischen den Mikrovariabeln statthaben, aber das geht nicht allgemein. Er wäre eine unendliche Mannigfaltigkeit von Systemen denkbar, welche identische v, T Verteilung, aber verschiedene Entropiewerte haben. Nimmt man hiervon diejenigen deren Entropie mit der aus dem Gleichgewichtszustand der einzelnen Elemente berechneten übereinstimmt, so trifft man eine willkürliche Auswahl."

Dieser Einwand, der vollkommen richtig ist, hat aber doch, wie ich glaube, auf die Anwendbarkeit dieser Überlegungen auf unseren Fall keinen wesentlichen Einfluß, da ja gemäß den gemachten Voraussetzungen sich das Gas tatsächlich in einem solchen Zustand der Temperatur- und Dichteverteilung befindet, daß sich die Gesamtentropie als Summe der Entropien der einzelnen Volumelemente ergibt.

Nun wird allerdings das Gas im Laufe der Zeit Zustände annehmen, die von der normalen Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung beliebig weit abweichen und auf die sich dann die Überlegung nicht anwenden läßt, aber, wie aus der kinetischen Gastheorie bekannt, ist die Wahrscheinlichkeit der Maxwellschen Verteilung außerordentlich überwiegend, so daß die von ihr stark abweichenden Verteilungen gegen sie fast völlig verschwinden, da ja die tatsächlich beobachtbaren Dichte- und Temperaturschwankungen nur zeitliche Mittelwerte darstellen. Wenn also auch im Laufe der Zeit Zustände eintreten, wo die Entropie tatsächlich einen anderen Wert hat, als unsere Formeln ihn berechnen, so sind diese doch so selten, daß sie nicht in Betracht gezogen werden müssen.

Damit scheint mir das hier eingeschlagene Verfahren gerechtfertigt, das sich durch eine besondere Anschaulichkeit auszeichnet und außer dem Boltzmannschen Prinzip keinerlei kinetische Betrachtungen erfordert. Nun wollen wir uns wieder der eigentlichen Rechnung zuwenden. Bezeichnen wir mit S die Entropie des ganzen Gases mit dem Volumen V und mit S_0 die bei gleichmäßiger Temperatur- und Dichteverteilung bestehende normale, so erhält man durch Integration über alle Volumelemente $d\omega$

$$S - S_0 = \int\Big[C\,(s\log T - s_0\log T_0) + R\,\Big(s\log\Big(\frac{1}{s} - b\Big) - s_0\log\Big(\frac{1}{s_0} - b\Big)\Big)\Big]d\omega \tag{8}$$

wenn man unter s bzw. s_0 die Dichte versteht, die mit v verknüpft ist durch

$$vs = 1\,. \tag{9}$$

Wir setzen nun

$$s = s_0 + \sigma\,,\quad T = T_0 + \tau, \tag{10}$$

wo laut Voraussetzung höhere als die zweiten Potenzen von $\frac{\sigma}{s_0}$ und $\frac{\tau}{T_0}$ sich gegen 1 vernachlässigen lassen.

Da das Gas nach außen hin als abgeschlossen gedacht ist, müssen die beiden Bedingungen über die Konstanz der Masse und der Energie erfüllt sein, nämlich

$$\int s\,d\omega = \int s_0\,d\omega = 1, \tag{11}$$

woraus sich ergibt

$$\int \sigma\,d\omega = 0 \tag{11'}$$

und ferner

$$\int su\,d\omega = \int s(CT - as)\,d\omega = s_0(CT_0 - as_0)\,d\omega = s_0(CT_0 - as_0)V\,. \tag{12}$$

Setzt man hier für s und T aus (10) ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (11')

$$s_0\,C\int\tau\,d\omega - a\int\sigma^2 d\omega + C\int\sigma\tau\,d\omega = 0\,. \tag{12'}$$

Ferner resultiert durch Einsetzung aus (10) und Entwicklung von $\log T$ nach Potenzen von $\frac{\tau}{T_0}$, sowie der erwähnten Vernachlässigung

$$\int C\,(s\log T - s_0\log T_0)\,d\omega = \int C\Big(s_0\frac{\tau}{T_0} - \frac{s_0}{2}\frac{\tau^2}{T_0^2} + \sigma\log T_0 + \frac{\sigma\tau}{T_0}\Big)d\omega. \tag{13}$$

Unter Berücksichtigung von (11') und (12') folgt daraus weiter

$$\int C\,(s\log T - s_0\log T_0)\,d\omega = \frac{a}{T_0}\int\sigma^2 d\omega - \frac{Cs_0}{2T_0^2}\int\tau^2 d\omega = \frac{a}{T_0}\int\sigma^2 d\omega - \frac{C}{2V}\int\Big(\frac{\tau}{T_0}\Big)^2 d\omega \tag{14}$$

für den ersten Term des Ausdruckes (8).

Um nun auch den zweiten Term von (8) zu finden, entwickeln wir $\log(1/s - b)$ nach Potenzen von $\frac{\sigma}{s_0}$, wobei wir beachten, daß jedenfalls

$$b \ll v$$

also $\dfrac{\sigma}{\frac{1}{b} - s_0}$ eine kleine Größe ist.

Es ergibt sich

$$\log\Big(\frac{1}{s} - b\Big) = -\log s + \log(1 - bs) = -\log s_0 - \frac{\sigma}{s_0} + \frac{\sigma^2}{2s_0^2} + \log(1 - bs_0) - \frac{b\sigma}{1 - bs_0} - \frac{b^2\sigma^2}{2(1 - bs_0)^2} = -\log s_0 + \log(1 - bs_0) - \frac{\sigma}{s_0(1 - bs_0)} + \frac{\sigma^2}{2s_0^2}\frac{1 - 2bs_0}{(1 - bs_0)^2} \tag{15}$$

und weiter

$$s \log\left(\frac{1}{s} - b\right) - s_0 \log\left(\frac{1}{s_0} - b\right) = \sigma \log\left(\frac{1}{s_0} - b\right) - \frac{\sigma}{1 - b s_0} - \frac{\sigma^2}{s_0 (1 - b s_0)} + \frac{\sigma^2}{2 s_0} \frac{1 - 2 b s_0}{(1 - b s_0)^2}. \qquad (15')$$

Und daher folgt für den zweiten Term von (8) unter Berücksichtigung von (11′)

$$\int R \left[s \log\left(\frac{1}{s} - b\right) - s_0 \log\left(\frac{1}{s_0} - b\right)\right] d\omega = -\frac{R}{V} \frac{1}{2(1 - b s_0)^2} \int \left(\frac{\sigma}{s_0}\right)^2 d\omega. \qquad (16)$$

Aus (14) und (16) folgt schließlich für (8)

$$S - S_0 = -\frac{1}{2V} \int \left[C\left(\frac{\tau}{T_0}\right)^2 + \left\{\frac{R}{(1 - b s_0)^2} - \frac{2a}{T_0 V}\right\}\left(\frac{\sigma}{s_0}\right)^2\right] d\omega = -\frac{1}{2}\left[C\overline{\left(\frac{T - T_0}{T_0}\right)^2} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{V^2}{T_0} \overline{\left(\frac{s - s_0}{s_0}\right)^2}\right] \qquad (8a)$$

wie man sieht, wenn man für $\frac{\partial p}{\partial v}$ aus (3) einsetzt. Die Querstriche bedeuten wieder eine räumliche Mittelbildung über alle Volumelemente des Gasvolumens V.

Formel (8a) liefert uns nun tatsächlich den gesuchten Ausdruck der Entropie als Funktion der Temperatur- und Dichteverteilung in dem Gase.

§ 2. Diskussion der Entropieformel.

Setzen wir zunächst voraus, das Gas sei ein ideales Gas, dann ist $a = b = 0$ und

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{R T_0}{V^2};$$

daher verwandelt sich (8a) in

$$S - S_0 = -\frac{1}{2}\left[C\overline{\left(\frac{T - T}{T_0}\right)^2} + R\overline{\left(\frac{s - s_0}{s_0}\right)^2}\right]$$

was mit der von **Frank** (l. c.) abgeleiteten Formel, die am Anfange dieser Arbeit steht, identisch ist.

Aus der Formel ist zu sehen, daß die Entropie S immer kleiner ist, als die der Gleichverteilung von Temperatur und Dichte entsprechende S_0 und daß sich daher nach dem zweiten Hauptsatze dieser Zustand automatisch als stabiler Endzustand herstellen wird.

Lassen wir nun die Annahme über die spezielle Wahl von a und b fallen, betrachten wir also ein sogenanntes „reales" Gas, so haben wir Formel (8a) direkt zu diskutieren. Betrachtet man zunächst die Dichteverteilung als gegeben, so sieht man, daß S dann seinen größten Wert annimmt, wenn die Größe $\overline{\left(\frac{T - T_0}{T_0}\right)^2}$ verschwindet, d. h. wenn die Temperaturverteilung dem Gleichgewicht entspricht. Dies bietet also keinen Unterschied gegen früher. Anders ist es aber mit dem zweiten Gliede. Solange $\frac{\partial p}{\partial v} < 0$, ist es klar, daß $S - S_0$ seinen größten Wert nur dann haben kann, wenn die wesentlich negative Größe auf der rechten Seite von (8a) verschwindet, d. h. im Falle von Gleichverteilung von Temperatur und Dichte. Das Gas verhält sich in diesem Gebiete wie ein ideales Gas. Ist dagegen $\frac{\partial p}{\partial v} > 0$, so sehen wir, daß mit wachsendem $\overline{\left(\frac{s - s_0}{s_0}\right)^2}$ auch S wächst und im Endlichen keinen größten Wert besitzen kann. Es wird also in diesem Falle ein Gleichgewicht der Dichteverteilung überhaupt nicht eintreten können, das Gas wird von selbst immer inhomogener; d. h. der Zustand $\frac{\partial p}{\partial v} > 0$ ist nicht stabil.

Ist schließlich $\frac{\partial p}{\partial v} = 0$, so kommt, wie man sieht, jeder beliebigen Dichteverteilung die gleiche Entropie zu, d. h. jede Dichteinhomogeneität kann sich in diesem Zustande beliebig lange erhalten.

Betrachten wir nun eine Isotherme des Gases unterhalb der kritischen, so sehen wir an ihr tatsächlich die drei besprochenen Gebiete verwirklicht; im allgemeinen stellt die Gleichverteilung von Temperatur und Dichte das Maximum der Entropie dar, dagegen ist das Stück der Isotherme zwischen den beiden Wendepunkten nach dem vorigen instabil, wie ja tatsächlich allgemein bekannt. Den beiden Wendepunkten selbst kommt die Eigenschaft zu, daß sich beliebige Inhomogeneitäten der Dichte daselbst erhalten können. Bei der kritischen Isotherme selbst ist letzterer Zustand auf einen Punkt, den kritischen, zusammengeschrumpft, das instabile Gebiet verschwunden. Alle höheren Isothermen zeigen das Verhalten eines idealen Gases.

§ 3. Anwendung der Entropieformel zur Berechnung der „mittleren Schwankung".

Die vorhergehenden Ausführungen gaben eine rein thermodynamische Ableitung der gesuchten Entropieformel und deren Diskussion nach dem zweiten Hauptsatze. In diesem Paragraphen wollen wir nun von dieser Auffassung

abgehen und die Entropieformel im Boltzmannschen Sinne zu deuten suchen.

Wir nehmen zunächst Temperaturgleichgewicht an, d. h., wir setzen $\overline{\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^2} = 0$ und beschäftigen uns bloß mit den Dichteschwankungen. Die Größe $\sqrt{\overline{\left(\frac{s-s_0}{s_0}\right)^2}}$, welche mir die mittlere Abweichung der Dichteverteilung des Gases von der normalen in einem bestimmten Zeitpunkte gibt, will ich mit δ bezeichnen. Die Wahrscheinlichkeit des Vorhandenseins eines bestimmten δ in diesem Zeitpunkte soll mit $W(\delta)$ bezeichnet werden[1]). Bezeichnet k wie üblich die Plancksche Konstante, so gilt das Boltzmannsche Prinzip in der Form

$$S - S_0 = k \log \frac{W}{W_0}, \tag{17}$$

oder

$$\frac{W}{W_0} = e^{\frac{S-S_0}{k}} = e^{\frac{1}{2k}\frac{\partial p}{\partial v}\frac{V^2}{T_0}\delta^2}. \tag{17'}$$

Die Konstante W_0 kann bestimmt werden durch die Bedingung, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß irgend ein δ vorhanden ist, die Gewißheit sein muß

$$\int_0^\infty W(\delta)\, d\delta = 1 \tag{18}$$

woraus sich ergibt

$$W_0 = \sqrt{-2\frac{\partial p}{\partial v}\frac{V^2}{T_0 \pi k}}, \tag{19}$$

welche Größe man sich in (17') eingesetzt denken muß. Aus der gefundenen Wahrscheinlichkeit von δ wollen wir nun den Mittelwert von δ^2, den wir mit $\overline{\delta^2}$ bezeichnen wollen, berechnen. Die Sachlage ist ja so, daß von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet im aufsteigenden Teil der Isotherme allerdings $\delta = 0$ den wahrscheinlichsten Zustand ausdrückt, was man nun aber beobachtet, ist ja nicht der wahrscheinlichste, sondern der durchschnittliche Zustand, indem man sich denken muß, daß die verschiedenen Zustände sehr rasch aufeinander folgen, so daß das Gesamtbild ein mittlerer Zustand sein wird. Die Berechnung ergibt

$$\overline{\delta^2} = \int_0^\infty \delta^2 W(\delta)\, d\delta = -\frac{T_0 R}{V^2 N}\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial v}} \tag{20}$$

woraus für die „mittlere Schwankung" folgt

$$\sqrt{\overline{\delta^2}} = \sqrt{-\frac{T_0 R}{V^2 N \frac{\partial p}{\partial v}}}. \tag{20a}$$

Berechnet man statt des Mittelwertes von δ^2 den von δ, so ergibt sich

$$\bar{\delta} = \int_0^\infty \delta W(\delta)\, d\delta = \sqrt{-\frac{2RT_0}{V^2 N \pi \frac{\partial p}{\partial v}}}. \tag{21}$$

Die beiden Formeln (20a) und (21) unterscheiden sich bloß um den Faktor $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, was bei allen ähnlichen Mittelbildungen der Fall ist. Das kommt einer Abweichung der beiden Formeln voneinander um 12,5 Proz. gleich.

Formel (21) ist identisch mit der seinerzeit von Smoluchowski[1]) abgeleiteten, während Formel (20a) übereinstimmt mit der von Kamerlingh Onnes u. Keesom[2]) in ihrer Abhandlung über die kritische Opaleszenz verwendeten Formel.

Aus den beiden Formeln (20a) und (21) ist zu ersehen, daß die „mittlere Schwankung" in der Nähe des kritischen Zustandes, wo $\frac{\partial p}{\partial v} = 0$ sehr groß wird, während sie dort, wo die Isothermen steil aufsteigen, nicht besonders in Erscheinung tritt. Es ist allgemein bekannt, daß die makroskopische Folgeerscheinung dieser Dichteschwankungen die „kritische Opaleszenz" bildet, die bereits theoretisch und experimentell untersucht[3]) und als unmittelbare Folge der durch die Dichteschwankungen hervorgerufenen Schwankungen des Brechungsexponenten erkannt worden ist.

Zusammenfassung.

Auf Grund einer einfachen thermodynamischen Betrachtung wird unter Zugrundelegung der van der Waalschen Zustandsgleichung die Entropie eines „realen" Gases als Funktion der mittleren Abweichung der Temperatur- und Dichteverteilung von der gleichförmigen berechnet und die erhaltene Formel für die verschiedenen Gebiete der Isothermen diskutiert.

1) Das ist so zu verstehen, daß $W(\delta)\, d\delta$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß δ zwischen δ und $\delta + d\delta$ liegt.

1) l. c. S. 211 Formel (9).

2) Kamerlingh Onnes u. Keesom, Comm. from Phys. Lab., Leiden Nr. 104, 1908 u. Ann. d. Phys. **35**, 591 ff., 1911.

3) M. v. Smoluchowski (l. c.); Kamerlingh Onnes u. Keesom (l. c.); Smoluchowski, Bull. de l'acad. d. sc. de Cracovie 1911 u. Phil. Mag. **23**, 165, 1912; A. Einstein, Ann. d. Phys. **33**, 1275 ff., 1910.

Über die ähnliche Erscheinung der „kritischen Opaleszenz" bei binären Flüssigkeitsgemischen siehe auch R. Fürth, Wiener Ber. **124**, IIa, 1915; F. Zernike, Dissertation, Amsterdam 1915.

Die Formel wird ferner durch Anwendung des Boltzmannschen Prinzips dazu benutzt, um die „mittlere Schwankung" in der Nähe des kritischen Zustandes zu erhalten. Es zeigt sich, daß das Resultat mit den auf kinetischem Wege abgeleiteten Ausdrücken identisch ist.

Prag, im Juni 1917.

(Eingegangen 9. Juli 1917.)

Der positive Kern der Atome.

Von A. Haas.

Neben vielen anderen Vorzügen besitzt die Rutherfordsche Atomtheorie[1]) auch den nicht unwesentlichen, daß auf ihrer Grundlage die gesamte Masse der Materie elektromagnetisch erklärt werden kann. Denn da eine Kugel von dem Halbmesser r und der elektrischen Ladung Q eine elektromagnetische Masse von der Größe besitzt:

$$m_e = \frac{2}{3c^2}\frac{Q^2}{a}, \qquad (1)$$

so genügt die Annahme, daß der kugelförmig gedachte positive Kern eines Atoms (den man nach Rutherford beliebig klein annehmen kann) einen Radius von solcher Länge habe, daß die Gl. (1) beim Einsetzen dieses Wertes für a und der Kernladung für Q die tatsächliche Masse des betreffenden Atoms ergibt.

Da aber nun jedenfalls die der Rutherfordschen Theorie zugrunde liegenden Beobachtungen im allgemeinen eine ziemliche Proportionalität zwischen Atomgewicht und Kernladung erkennen lassen, so müßte aus Gl. (1) geschlossen werden, daß sich ebenso wie die Atomgewichte verschiedenartiger Atome auch die Radien ihrer Kerne verhalten. Die Volumina der Kerne wären also der dritten Potenz des Atomgewichts direkt, die Dichte der positiven Elektrizität in den Kernen demnach der dritten Potenz des Atomgewichts umgekehrt proportional. Das ist eine so unwahrscheinliche Annahme, daß man sie mit Recht mit A. Crehore[2]) ablehnen muß.

Will man diese Schwierigkeit vermeiden, so muß man offenbar (auch um eine Erklärung für die beobachteten Umwandlungen von Atomen zu gewinnen) nach Art der negativen Elektronen individuelle positive Ladungen von je einem Elementarquantum und von unveränderlichem Radius annehmen, den man zweckmäßig so groß wählt, daß nach Gl. (1) daraus der Wert der Masse des Wasserstoffatoms folgt. Es müßte also der Halbmesser eines solchen „positiven Elektrons" ungefähr 1800mal kleiner sein als der eines negativen Elektrons. Eine neue Schwierigkeit entsteht indessen durch die Frage, durch was für Kräfte diese positiven Elektronen zum Kerne zusammengehalten werden sollen, da sie einander doch im umgekehrt quadratischen Verhältnis ihrer Abstände abstoßen.

Eine dritte Schwierigkeit wird schließlich durch die von Rutherford festgestellte Tatsache bedingt, daß die Ladung des positiven Kernes keineswegs (was anzunehmen doch das nächstliegende wäre) ebenso viele positive Elementarquanten beträgt, als das Atomgewicht des betreffenden Elements ist, sondern nur ungefähr halb soviel. Andererseits könnte aber, wenn die Zahl der positiven Elektronen nur ungefähr halb so groß ist wie das Atomgewicht, und jedes der positiven Elektronen die Masse des Wasserstoffatoms hätte, nie eine Gesamtmasse resultieren, die gleich ist dem Produkt aus der Masse des Wasserstoffatoms und dem Atomgewicht.

Die erwähnten Schwierigkeiten ließen sich nun vielleicht durch die im folgenden kurz zu erörternde Hypothese beseitigen. Es sei das Atomgewicht des betreffenden Elements (auf ganze Zahlen abgerundet) r; der Kern wirke aber so, als ob er nur s positive Elementarquanten enthalten würde, wobei eben nach Rutherford s ungefähr der Hälfte von r gleich wäre. Man könnte dann annehmen, daß sich der Atomkern dennoch aus r positiven Elektronen zusammensetze, woraus ohne weiteres folgen würde, daß seine Masse $r$mal so groß sein muß wie m_H, die Masse des Wasserstoffatoms, also tatsächlich gleich sein muß dem Produkt aus m_H und dem Atomgewicht.

Die Gesamtmenge der im Atom enthaltenen negativen Elektrizität muß dann (wenigstens im neutralen Zustande) auch gleich sein r Elementarquanten. Doch sollen im Atom nur s negative Elektronen beweglich sein und um den Kern kreisen. Die übrige negative Elektrizität von $(r - s)$ Elementarquanten soll dazu dienen, um den Zusammenhalt der r positiven Elektronen zu einem einheitlichen Kerne herzustellen. Der Kern würde dann eine Ladung von r positiven und von $(r - s)$ negativen Elementarquanten haben; er würde also mit einer positiven Ladung von s Elementarquanten wirken und im übrigen die Masse $r \cdot m_H$ besitzen. Um diesen Kern würden dann die s beweglichen negativen Elektronen im Sinne der Bohrschen Theorie ihre durch die Quantenbedingung bestimmten Bahnen beschreiben.

1) Vgl. N. Bohr, On the quantum theory of radiation and the structure of the atom. Phil. Mag. 30, 394, 1915.
2) Phil. Mag. 29, 310, 1915.

Auf Grund dieser Hypothese wäre eine recht einfache Deutung der Moseleyschen Formel für die K_α-Linie der Röntgenspektren[1]) möglich, wonach die Schwingungszahl ν dieser Linie gleich ist

$$\frac{\nu}{R} = \frac{3}{4}(z-1)^2, \tag{2}$$

wenn R die Rydbergsche Konstante ist und z die Ordnungszahl, die dem betreffenden chemischen Element im periodischen System zukommt, wenn man die Elemente nach steigendem Atomgewicht ordnet (z ist im allgemeinen der Hälfte des Atomgewichts gleich). Die Moseleysche Formel ergibt sich dann ohne weiteres, wenn man annimmt, daß die K_α-Linie bei dem Übergang eines der kreisenden negativen Elektronen aus einer zweiquantigen in eine einquantige Bahn zustande kommt und daß die Zahl s der beweglichen, im Atome kreisenden Elektronen (wenigstens für die Elemente mit den Ordnungszahlen von 11 bis etwa 30, also von Natrium bis etwa Zink) um eins kleiner ist als die Ordnungszahl des Elements.

Denn in der Tat wird auf Grund dieser Annahme die Anziehungskraft, die der Kern auf ein negatives Elektron von der Ladung ε und der Masse μ in der Entfernung a ausübt,

$$K = \frac{(z-1)\,\varepsilon^2}{a^2}. \tag{3}$$

Da diese Kraft der Zentrifugalkraft entgegengesetzt gleich sein muß, muß

$$\mu v^2 = \frac{(z-1)\,\varepsilon^2}{a} \tag{4}$$

sein. Nach der Bohrschen Quantenbedingung muß aber für eine einquantige Bahn

$$\mu a v = \frac{h}{2\pi} \tag{5}$$

sein. Kombiniert man die Gl. (4) und (5) und verwertet man die Relation, die die Rydbergsche Konstante mit den Grundgrößen der Elektronentheorie verknüpft, nämlich[2])

$$R = \frac{2\pi^2\mu\,\varepsilon^4}{h^3}, \tag{6}$$

so ergibt sich für die lebendige Kraft der Wert

$$\frac{\mu v^2}{2} = Rh(z-1)^2. \tag{7}$$

Die potentielle Energie ist

$$-(z-1)\frac{\varepsilon^2}{a} = -2Rh(z-1)^2, \tag{8}$$

so daß sich für die gesamte Energie des Elektrons in einer einquantigen Bahn der Wert ergibt

$$W_1 = -Rh(z-1)^2. \tag{9}$$

Für eine zweiquantige Bahn nimmt die Quantenbedingung die Form an

$$\mu a' v' = 2\frac{h}{2\pi}, \tag{10}$$

so daß durch eine ganz analoge Überlegung für die Energie eines Elektrons in einer zweiquantigen Bahn folgt

$$W_2 = -\frac{Rh}{4}(z-1)^2. \tag{11}$$

Die Frequenz der bei dem Übergange von der zweiquantigen in die einquantige Bahn ausgestrahlten Energie ist aber nach der Theorie von Bohr durch die Beziehung gegeben

$$\nu = \frac{W_2 - W_1}{h}, \tag{12}$$

so daß sich bei Einsetzen der Werte aus den Gl. (9) und (11) in der Tat für ν die Formel von Moseley ergibt. Besondere Hypothesen über Umlagerungen von Elektronenringen, wie sie der Untersuchung von P. Debye[1]) zugrunde liegen, wären dann nicht mehr notwendig. In ähnlicher Weise kann man übrigens auch das Zustandekommen der L_α-Linie der Röntgenspektren durch Übergang eines negativen Elektrons aus einer dreiquantigen in eine zweiquantige Bahn erklären.

Die Bindung der positiven Elektronen durch die negative Elektrizität kann man sich auf mannigfache Art bewirkt denken. Wohl am einfachsten dürfte die Annahme sein, daß die negative Elektrizität von $(r-s)$ Elementarquanten eine einzige Kugel im Zentrum des Atoms bildet[2]). Diese Kugel wäre wohl (hinsichtlich des Volumens) milliardenmal größer als die positiven Elektronen, aber andererseits doch noch billionenmal kleiner als das Atom selbst. Die positiven Elektronen könnte man sich dann entweder in symmetrischer Verteilung an der Oberfläche der Kugel haftend denken, oder man könnte ein Bild gebrauchen, das sich ergibt, wenn man das bekannte Thomsonsche

1) Phil. Mag. **26**, 1024, 1913 und **27**, 703, 1914.

2) Diese Relation findet sich (was in diesem Zusammenhange zu bemerken gestattet sei) zum erstenmal in einer Abhandlung des Verfassers dieses Aufsatzes, und zwar in den Sitz.-Ber. d. Wiener Akad., Math.-naturwiss. Klasse, Abt. IIa, **119**, 1910 auf S. 138 als Gl. (67). Die dort gebrauchte Größe γ ist das Verhältnis ε/μ. Nur tritt dort statt des Zahlenfaktors 2 der Faktor 4 auf. Dieser Unterschied erklärt sich daraus, daß der Wert für die potentielle Energie in der Thomsonschen Theorie (weil in dieser Theorie die Anziehungskraft quasielastisch ist) nur halb so groß, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen erscheint wie in der Rutherfordschen Theorie.

1) Diese Zeitschrift **18**, 276, 1917.

2) Auf die Möglichkeit komplizierterer Annahmen scheint andererseits die Tatsache hinzudeuten, daß jeder radioaktive Zerfall mit der Bildung von Heliumatomen verbunden ist.

Atommodell hinsichtlich des Volumens billionenmal verkleinert und in ihm nun die Rollen der positiven und der negativen Elektrizität vertauscht. Man könnte nämlich annehmen, daß die positiven Elektronen in der viel größeren (im Verhältnis zum Atom trotzdem jedoch verschwindend kleinen) Kugel von homogener negativer Elektrizität, in deren Innerem sie quasielastische Anziehungen erfahren, zu symmetrischen Gleichgewichtslagen[1]) angeordnet sind. Gegenüber dem Thomsonschen Modell bestünde, abgesehen von der Verkleinerung und der wechselseitigen Vertauschung von positiver und negativer Elektrizität allerdings noch in zweifacher Hinsicht ein weiterer Unterschied. Die Gesamtmenge der in der negativen Kugel eingeschlossenen positiven Elektrizität wäre nicht so groß wie die negative Elektrizität selbst; es würde vielmehr die positive Elektrizität überwiegen. (Daß trotzdem Gleichgewichtslagen möglich sind, geht aus einer früheren Untersuchung des Verfassers[2]) hervor.) Ferner hätte man sich die positiven Elektronen innerhalb der negativen Kugel nicht kreisend, sondern ruhend zu denken.

Denn was sich im Atome bewegt und dadurch unter Umständen zur Strahlungsemission Anlaß gibt, sollen ja nicht die positiven Elektronen im Kerne sein, sondern die um diesen Kern von der Masse $r \cdot m_H$ und der scheinbaren Ladung $s \cdot \varepsilon$ in ein- oder mehrquantigen Bahnen kreisenden s negativen Elektronen.

1) Das Heliumatom (für das wegen der Kleinheit seiner Ordnungszahl $z = 2$ die vorerwähnte Relation $s = z - 1$ nicht gilt) könnte man sich etwa bestehend denken aus einer negativen Kugel von zwei Elementarquanten, in der ein Tetraeder von vier positiven Elektronen eingeschlossen wäre, während zwei negative Elektronen den Kern umkreisen würden. — Das Wasserstoffatom, bei dem negative Elektrizität zur Bindung des Kernes überflüssig ist, dürfte wohl eine Sonderstellung einnehmen.

2) Über Gleichgewichtslagen von Elektronengruppen in einer äquivalenten Kugel von homogener positiver Elektrizität. Ber. d. Wien. Akad., Math.-naturw. Klasse, Abt. IIa, **120**, 1111—1171, 1911.

Leipzig, am 19. Juli 1917.

(Eingegangen 23. Juli 1917.)

Zur Bestimmung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus. Ein Lokalvariometer.

Von C. Dieterici.

Die hier beschriebene Methode zur Bestimmung der Horizontalintensität H des Erdmagnetismus ist aus dem Bedürfnis entstanden, im physikalischen Praktikum eine schnell ausführbare und sichere Resultate gebende Apparatur zu schaffen. Es ergab sich, daß man sie mit großer Sicherheit auch als Lokalvariometer benutzen kann.

In allen Instituten ist zur Bestimmung von H die Gaußsche Methode in Gebrauch, die als einzige, wirklich absolute, ihren unvergänglichen Wert hat, weil sie die Grundlage des absoluten Maßsystems bildet. Sie hat nur den Nachteil, daß die Ausführung der Schwingungs- und Ablenkungsbeobachtung viel Zeit in Anspruch nimmt und zumal bei ungeübten Beobachtern selten an einem Tage zum Abschluß kommt. Wohl aus diesem Grunde ist vielfach eine zweite Methode eingeführt: durch Zusammenschaltung eines geeichten Ampèremeters mit einer Tangentenbussole aus dem Reduktionsfaktor der letzteren H zu ermitteln. Diese zweite Methode ist natürlich keine absolute, wie die Gaußsche; da ja aber heute geeichte Ampèremeter leicht zur Verfügung stehen, wird sie vielfach als Ersatz der umständlicheren Gaußschen Methode angewendet.

Die Methode, die ich seit einiger Zeit im hiesigen Institut ausführen lasse, beruht auf folgender Überlegung: ein Stabmagnet sei in der Mitte einer — unendlich — langen Spule aufgehängt zur Beobachtung seiner Schwingungsdauer nach Gauß. Ein Akkumulator gestattet unter Einschaltung eines Widerstandskastens, Milliampèremeters und Wippe in die Spule einen Strom genau meßbarer Stärke zu schicken; die Spule mit Magnet liege genau in der Richtung des magnetischen Meridians.

Ist t_0 die Schwingungsdauer des Magneten, ohne daß das Spulenfeld erregt ist, also allein unter Einfluß des Erdmagnetismus H, so hat derselbe Magnet eine Schwingungsdauer t_1, wenn sich das Spulenfeld H_s in gleichem Sinne über das Erdfeld superponiert und es ist

$$t_0^2 : t_1^2 = 1 + \frac{H_s}{H}.$$

Bei entgegengesetzter Stromrichtung tritt eine neue Schwingungsdauer t_2 auf und es ist

$$t_0^2 : t_2^2 = 1 - \frac{H_s}{H}.$$

Die Feldstärke des superponierten Spulenfeldes kann in erster Annäherung aus der Windungszahl der Spule durch

$$H_s = \frac{4 \pi n i}{10} \text{ Gauß}$$

berechnet werden, und damit ist aus dem Verhältnis der Quadrate der Schwingungsdauern H bestimmbar.

Man erkennt, daß es nicht nötig ist, das Trägheitsmoment des Magneten und seines Schwingungsschiffchens zu bestimmen, weil es bei beiden Beobachtungen ungeändert bleibt,

ferner, daß eine Reduktion der Schwingungsdauern auf unendlich kleine Schwingungen nicht nötig ist, sofern man nur dafür sorgt, daß die Schwingungsweiten bei beiden Beobachtungen annähernd gleiche sind, drittens muß — sofern keine Störungen die Beobachtung beeinflußt haben — das Verhältnis $t_0^2 : t_1^2$ genau soviel über der Eins liegen, wie $t_0^2 : t_2^2$ unter der Eins. Man kann endlich die Stärke des superponierten Spulenfeldes beliebig verändern: nur muß man unterhalb der Grenze der Astasierung des Magneten bleiben[1]).

In der Werkstatt des Instituts wurde ein altes Galvanometergestell zu einem „Spulenmagnetometer" umgearbeitet in der Art, daß an die Aufhängevorrichtung ein kleiner, 8 cm langer Stabmagnet aus einem Meyersteinschen Magnetometer mit seinem Lager angehängt wurde. Die Spule war im ganzen 49 cm lang und trug 348 Windungen eines 1 mm dicken Leitungsdrahtes in einer Lage, der Durchmesser der Spule betrug 5 cm, der Radius der Windungen war also, unter Berücksichtigung der Drahtdicke, 2,55 cm. Die Spule bestand aus zwei Hälften, welche von beiden Seiten über den Magneten zusammengeschoben werden konnte, in der Mitte nur eine enge Durchbohrung freilassend, um den das Schwingungsschiffchen mit Magneten tragenden Stift hindurch zu lassen. Die beiden hintereinander verbundenen Spulenhälften ruhten auf einem Lager, welches um die Achse des Instruments drehbar war, so daß sie genau in der Nord—Süd-Richtung festgeklemmt werden konnte, was man daran erkennt, daß der Magnet aus seiner Ruhelage durch das Spulenfeld nicht abgelenkt wird. Die Schwingungsdauer wird mit Spiegel und Skala an einem Chronometer beobachtet, der Hohlraum der Spule bietet genügenden Raum für die Schwingungen des Magneten.

Aus den angegebenen Dimensionen der Spule ergibt sich nach der angenäherten Formel für das Kraftlinienfeld der Spule

$$H_s = \frac{4\pi n i}{10} = 8{,}9247 \text{ Gauß pro Amp.}$$

Berücksichtigt man, daß die Spule nicht unendlich lang ist und berechnet das Kraftlinienfeld nach den genaueren Formeln[2]) in der Mitte der Spule, so erhält man

$$H_s = 3{,}9784 \frac{\pi n i}{10} = 8{,}8766 \text{ Gauß pro Amp.,}$$

also eine Feldstärke, die nur um $^1/_2$ Proz. von der angenäherten abweicht, und die Formeln ergeben, daß man das Spulenfeld in der Längsrichtung auf Strecken gleich der Länge des angewendeten Magneten auf 0,1 Proz. konstant annehmen kann. Der Wert

$$H_s = 8{,}8766 \text{ Gauß pro Amp.}$$

ist im folgenden verwendet.

Zur Prüfung des Spulenmagnetometers wurden an derselben Stelle des Obergeschosses, an der das Meyersteinsche Magnetometer $0{,}186 \pm 0{,}01$ Gauß ergeben hatte, die in nachfolgender Tabelle enthaltenen Beobachtungen ausgeführt.

Am Kopf der Tabelle steht die beobachtete Schwingungsdauer t_0 des Magneten ohne Spulenfeld, unter i ist die am geeichten Milliampèremeter abgelesene Stromstärke angegeben, unter t_1 und t_2 die Schwingungsdauern bei gleich bzw. entgegengesetzt gerichtetem Spulenfeld. Daraus folgt aus dem Verhältnis der Quadrate der Schwingungsdauern das Verhältnis $H_s : H$, und mit dem oben angegebenen Wert für H_s pro Amp. die Horizontalintensität H, berechnet mit dem Mittelwert von $H_s : H$.

Tabelle I. Obergeschoß.

Magnet I. $t_0 = 8{,}360$ sec.

i	t_1	t_2	$\frac{H_s}{H}$	H
0,00724 Amp.	7,200 sec	10,315 sec	0,3481	
			0,3433	
			0,3457	0,1859 Gauß
0,00880	7,008	10,929	0,4230	
			0,4150	
			0,4190	0,1864
0,01130	6,750	12,222	0,5338	
			0,5321	
			0,5330	0,1882
				0,1868 Gauß

Das erhaltene Resultat stimmt mit dem nach der Gaußschen Methode an derselben Stelle gefundenen gut überein.

Fragt man nach den möglichen Beobachtungsfehlern, so ist zu bemerken, daß die Bestimmung der Schwingungsdauern — sofern keine äußeren Störungen in Betracht kommen — mit einem guten Chronometer durch Terminsbeobachtung zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit gebracht werden kann. Nimmt man 0,005 sec Zeitfehler in der Bestimmung der Schwingungsdauer an, oder etwa 1 : 2000, so kann das Verhältnis $t_0^2 : t_1^2$ bzw. $t_2^2 : t_1^2$ im

1) Eine Astasierungsvorrichtung für Magnetometer in ähnlicher Art beschreibt E. Gumlich, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 406—410, 1914.

2) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys., 12. Aufl., S. 535, 1914.

ungünstigsten Falle um 1 : 500 falsch sein und damit dürfte das Verhältnis $H_s:H$, je nachdem es viel oder wenig über der Eins liegt, nur Fehler haben, die kleiner als 1 Proz. sind. Die mit $H_s:H$ überschriebene Spalte zeigt aber Abweichungen, die mehr als das Doppelte betragen. Es zeigen sich hier die momentanen Störungen, welche in einem ungeschützten Gebäude durch Straßenbahnbetrieb u. dgl. hervorgerufen werden und die es unmöglich machen, die Schwingungsdauer eines Magneten mit dem Grade der Genauigkeit zu bestimmen, den die reine Zeitbeobachtung der Durchgänge durch die Ruhelage erreichen ließe.

Als konstante Fehlerquellen der hier beschriebenen Methode kommen zwei in Betracht: erstens die Frage, ob das magnetische Spulenfeld in der Mitte inhomogen ist in Richtung des Durchmessers, und zweitens, ob Induktionsströme, die durch die Bewegung des Magneten in der Spule induziert werden, einen merklichen Einfluß haben.

Um die erste Frage zu beantworten, ließ ich den Aufhängefaden so weit herab, daß der Magnet um mehr als 1 cm niedriger lag, als die Spulenachse. Ich konnte aber keine Veränderung der Schwingungsdauer feststellen, die über die äußeren Störungen hinausging. Daraus folgt, daß man wohl wenigstens in dem mittleren Teile, der für die Schwingungen des Magneten in Betracht kommt, in einer geraden Spule das magnetische Feld als homogen ansehen kann.

Auch eine merkliche Beeinflussung der Schwingungsdauern durch Induktionsströme, die eine Dämpfung hätten hervorbringen müssen, konnte nicht beobachtet werden.

Da sich die aus Spulenmagnetometer, Milliamperemeter usw. zusammengesetzte Apparatur ohne Schwierigkeit an anderen Stellen aufstellen ließ, veranlaßte ich Herrn stud. phil. Portal, an verschiedenen Stellen des Instituts die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus zu bestimmen und so die Apparatur als Lokalvariometer zu benutzen. Es seien nur die Beobachtungen an zwei Stellen wiedergegeben (siehe Tabelle II und III).

Man erkennt, daß die Beobachtungen an jeder einzelnen Stelle unter sich gut übereinstimmen, aber die lokalen Verschiedenheiten deutlich heraustreten zu lassen, daß daher die beschriebene Methode sich auch als Lokalvariometer gut verwenden läßt.

Für das physikalische Praktikum hat sie den Vorteil, daß sie sich unmittelbar an die Gaußsche Methode anlehnt, und schneller als diese ausgeführt werden kann. Natürlich ist auch sie keine absolute im Gaußschen Sinne, weil sie sich auf die Angaben des Milliamperemeters stützt.

Kiel, Physikalisches Institut der Universität, Juli 1917.

(Eingegangen 28. Juli 1917.)

Tabelle II. Kellergeschoß.

Magnet I. $t_0 = 10{,}772$ sec.

i	t_1	t_2	$H_s:H$	H
0,00760 Amp.	9,030 sec	14,07 sec	0,4230	
			0,4139	
			0,4185	0,1612 Gauß
0,0094	8,740	15,44	0,5190	
			0,5132	
			0,5161	0,1617
0,0124	8,283	19,090	0,6913	
			0,6816	
			0,6865	0,1603
				0,1614 Gauß

Tabelle III. Sockelgeschoß.

Magnet II. $t_0 = 8{,}715$ sec.

i	t_1	t_2	$H_s:H$	H
0,00752 Amp.	7,480 sec	11,140 sec	0,3574	
			0,3881	
			0,3733	0,1788 Gauß
0,0094	7,194	12,015	0,4675	
			0,4740	
			0,4708	0,1772
0,0124	6,850	14,185	0,6185	
			0,6226	
			0,6207	0,1773
				0,1778 Gauß

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Röntgenspektroskopie [1]).

Von Ernst Wagner.

Mit Tafel XI.

Obwohl die Röntgenspektroskopie heute erst einige wenige Jahre besteht — Laues Entdeckung fällt in den April 1912, Braggs Spektrometer datiert vom April 1913 —, so kann schon jetzt ein zusammenfassender Bericht über die Ergebnisse dieser jüngsten spektroskopischen Wissenschaft versucht werden. Denn sowohl in Hinsicht auf ihre Methoden als auch auf den weiten Umfang des gewonnenen Materials von Wellenlängenmessungen der Linien- und Absorptionsspektren fast aller Elemente ist ein befriedigender Standpunkt erreicht.

Die Klarheit und wunderbare Einfachheit, die in der Beziehung dieser Spektren zu der das Element charakterisierenden Stellung im periodischen System zutage getreten ist, verschafft der Röntgenspektroskopie bereits den Vorrang vor der verwickelteren optischen Schwesterwissenschaft. Eine weittragende Theorie der Spektren auf Grund der Rutherford-Bohrschen Atomvorstellungen ist im Begriffe, uns Einblick in den Aufbau der Atome zu gewähren. Messungen über die Anregungsbedingungen der Atomlinienspektren durch Kathodenstrahlen verschiedener Geschwindigkeit bzw. durch Röntgenstrahlen selbst ergänzen einander und bestätigen im einzelnen das theoretische Bild des hier obwaltenden Fluoreszenzmechanismus.

Endlich ist durch die Untersuchung des kontinuierlichen Röntgenspektrums, das von Kathodenstrahlen streng konstanter Geschwindigkeit erzeugt wird, ein für die Theorie der Strahlung wichtiges Ergebnis gewonnen: Die Entdeckung eines scharf definierten kurzwelligen Endes im Spektrum. Die Abhängigkeit dieser Grenzfrequenz vom Potential ist streng reguliert durch die Einsteinsche Quantenbeziehung: $Ve = h \cdot \nu$ und ermöglicht eine Präzisionsmessung der wichtigen Strahlungskonstante h.

Grundlagen und Methoden.

Im Laueschen Versuch wird ein Kristall von einem schmalen zylindrischen Bündel von Röntgenstrahlen durchsetzt; es geht dann von dem getroffenen Kristallteil nach verschiedenen Richtungen das System der abgebeugten Röntgenstrahlen aus. In ihrer räumlichen Anordnung „spiegelt" sich im eigentlichen Sinne der Bau des Raumgitters wieder, indem man nach der anschaulichen Betrachtungsweise Braggs die Lage der abgebeugten Strahlen als durch Reflexion der primären an den mit Atomen besetzten Netzebenen im Kristallinnern entstanden denken kann. Eine solche Reflexion würde vermöge der molekularen, nur durch die Wärmebewegungen getrübten Ebenheit von Kristallflächen für Röntgenstrahlen jeder Wellenlänge zustande kommen, wenn nur eine einzige Atomebene in Frage käme: ihre räumliche Wiederholung im Abstand d in parallelen äquidistanten Schichten verbunden mit dem Durchdringungsvermögen der Röntgenstrahlen bewirkt aber durch Interferenz eine Auslöschung aller Wellenlängen mit Ausnahme einiger weniger, die im Verhältnis von einfachen ganzen Zahlen (Obertönen) zueinander stehen und folgende Grundbeziehung der Röntgenspektroskopie erfüllen (vgl. Fig. 1):

$$n\lambda = 2d \sin\varphi,$$

d. h. in Worten: Eine Reflexion unter dem Winkel φ zwischen Strahl und Netzebene (häufig „Glanzwinkel" genannt) kann an einer

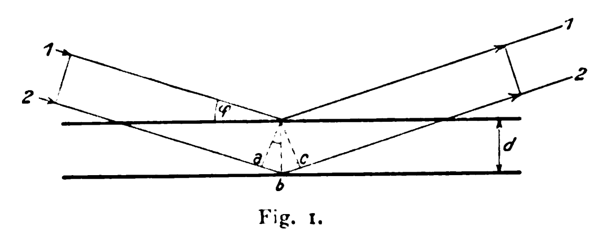


Fig. 1.

Netzebene mit der „Gitterkonstanten" d nur für eine Strahlung stattfinden von ganz bestimmten Wellenlängen λ und, in abnehmender Stärke, von $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{\lambda}{3}$ usw. entsprechend dem Gangunterschied n von 1, 2, 3 usw. ganzen Wellenlängen bei der Interferenz der an aufeinanderfolgenden Netzebenen reflektierten Strahlen (z. B. 1 und 2 Fig. 1, wo $abc = 2d \sin\varphi$).

Im Laueschen Versuch durchsetzt das Primärbündel gleichzeitig Netzebenen verschiedenster Gitterkonstanten und unter verschiedenstem Winkel: Soll Reflexion an allen diesen Ebenen stattfinden, wie der Versuch tatsächlich zeigt, so müssen im allgemeinen die verschiedensten Wellenlängen in der einfallenden Strahlung vorhanden sein. Wir erkennen so als Voraussetzung für das Zustandekommen der Laue-

1) Als zusammenfassende Übersichten seien genannt: M. v. Laue, Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften. W. L. Bragg, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 11, 346, 1914. M. Siegbahn, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 296, 1916. Hier findet sich eine ausführliche Literaturübersicht.

schen Interferenzbilder die Existenz des kontinuierlichen (Brems-)Spektrums, aus dem die einzelnen abgebeugten Strahlenbündel diskrete annähernd monochromatische Wellenlängen aussondern. Hiermit war eine erste Aussage über das Röntgenspektrum ermöglicht. Seine Beschränkung nach kurzen Wellen, seine Abhängigkeit von der Härte der Röntgenröhre war aus der Schwärzungsverteilung der Interferenzflecken auf der photographischen Platte zwar qualitativ zu entnehmen, zu einem tieferen Eindringen ist indessen diese Methode nicht geeignet. Denn einmal schließt sie durch Absorption im Kristall die Untersuchung der längeren Wellenlängen aus; vor allem ist die Intensität der Reflexion an den verschiedenen Netzebenen stark abhängig von deren Gitterkonstante und dem Reflexionswinkel. In der Tat konnten in dieser Weise angestellte Versuche[1]) nur ein rohes Bild des kontinuierlichen (photographisch wirksamen) Röntgenspektrums gewinnen, ebensowenig hat diese Methode zur Auffindung der scharfen Spektrallinien oder Absorptionsbandkanten geführt oder führen können.

Andererseits erweist sie sich zur Strukturerforschung der Kristalle von größtem Nutzen durch ihre reichhaltigen, viele Netzebenen gleichzeitig betreffenden Aussagen.

Den entscheidenden Schritt zur Erzeugung eines Spektrums mit scharfen Abbildungsbedingungen taten W. H. und W. L. Bragg[2]) in unmittelbarer Anwendung ihrer Reflexionsanschauung.

Die Braggsche Methode benutzt die Reflexion des durch enge Blenden begrenzten Primärstrahles an einer einzigen intensiv reflektierenden Kristallfläche, deren schrittweise Drehung den Reflexionswinkel φ zwischen 0^0 und 90^0 zu ändern erlaubt. Das reflektierte Bündel stellt auf diese Weise in zeitlicher Folge räumlich getrennt den Wellenlängenbereich von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 2d$ als Spektrum dar. Die Intensitätsabnahme der Reflexion mit wachsendem Winkel φ beschränkt das Spektrum meist auf kleinere Bereiche. Bei kleinen Werten von φ (und λ) wird φ angenähert λ proportional, so daß sehr kurze Wellenlängen relativ sehr ungenau zu messen sind. Als Kristallfläche wird — was wesentlich ist — eine äußere natürliche Spaltfläche oder auch eine künstlich angeschliffene Netzebene verwendet.

1) P. P. Ewald, Ann. d. Phys. **44**, 257, 1914; E. Keller, Ann. d. Phys. **46**, 157, 1915.

2) W. H. und W. L. Bragg, Proc. Roy. Soc. A. **88**, 428, 1913.

Fig. 2 zeigt die Anordnung schematisch im einzelnen[1]).

Der Kristall K steht mit der spiegelnden Fläche in der Achse O eines Goniometers. Durch die Bleispalte S_1 und S_3 fällt die Primärstrahlung axial unter kleinem Öffnungswinkel δ ein, d. i. der Winkel, unter dem der Brennfleck der Kathodenstrahlen auf der Antikathode vom Spalt S_1 erscheint. Das reflektierte Bündel dringt durch den Bleispalt S_2 in die Ionisationskammer IK ein, die zur Verstärkung der Ionisierung meistens mit einem schweren Gas (Methyljodid, Schwefeldioxyd) gefüllt wird. Zur Erforschung des Spektrums wird der Kristall in kleinen Schritten weitergedreht und mit der Ionisationskammer im doppelten Winkelbetrag nachgefahren. Zur Verhütung von Kapazitätsänderungen und aus mechanischen Gründen wird die Elektrometerverbindung zur Ionisationskammer auf dem Weg über die Drehachse bewirkt. Das Elektrometer steht praktisch unter dem Goniometer.

Eine Komplikation für den Strahlengang schien in der Braggschen Anordnung dadurch gegeben, daß die Reflexion von Strahlung einer bestimmten Wellenlänge λ_0 unter ihrem konstanten Winkel φ_0 nicht nur bei einer einzigen Kristallstellung statthat, sondern infolge des Öffnungswinkels δ über einen Bereich δ von Kristallpositionen während der Drehung erfolgt: Es fragte sich, ob unter diesen Umständen das reflektierte Strahlenbündel einen festen Konvergenzpunkt besitzt und damit spektrale Reinheit ermöglicht. W. H. und W. L. Bragg konnten sogleich in ihrer ersten Arbeit zeigen, daß bei Anwendung ebener Kristallflächen wirklich eine (nicht vorauszusehende und für die Methode sehr wichtige) Fokussierung homogener Strahlen zustande kommt. An Fig. 3 sei der Strahlengang in der Einfallsebene erläutert. Die Kristallstellung AA ist so gewählt, daß aus dem einfallenden homogenen Bündel (λ_0) gerade der axiale Strahl S_1O unter seinem selektiven Winkel φ_0 nach OS_2 reflektiert wird: Kein anderer Kristallteil außer dem sehr kleinen Bereich O kann gleichzeitig aus dem Primärbündel δ diese Strahlung reflektieren. Nach einer kleinen Drehung der Kristallebene in die Lage BB kann O nicht mehr spiegeln und es sei jetzt B der reflexionsfähige Punkt des Kristalls ($\varphi = \varphi_0$) geworden. Der hier reflektierte Strahl schneidet in S_2 den vorher reflektierten. Nach einfacher geometrischer Überlegung gehen während der Drehung um den Winkel δ alle reflektierten Strahlen derselben Wellenlänge

1) Vgl. auch die Abbildung des Braggschen Spektrometers bei W. L. Bragg, Jahrb. d. Rad. **11**, 355, 1914.



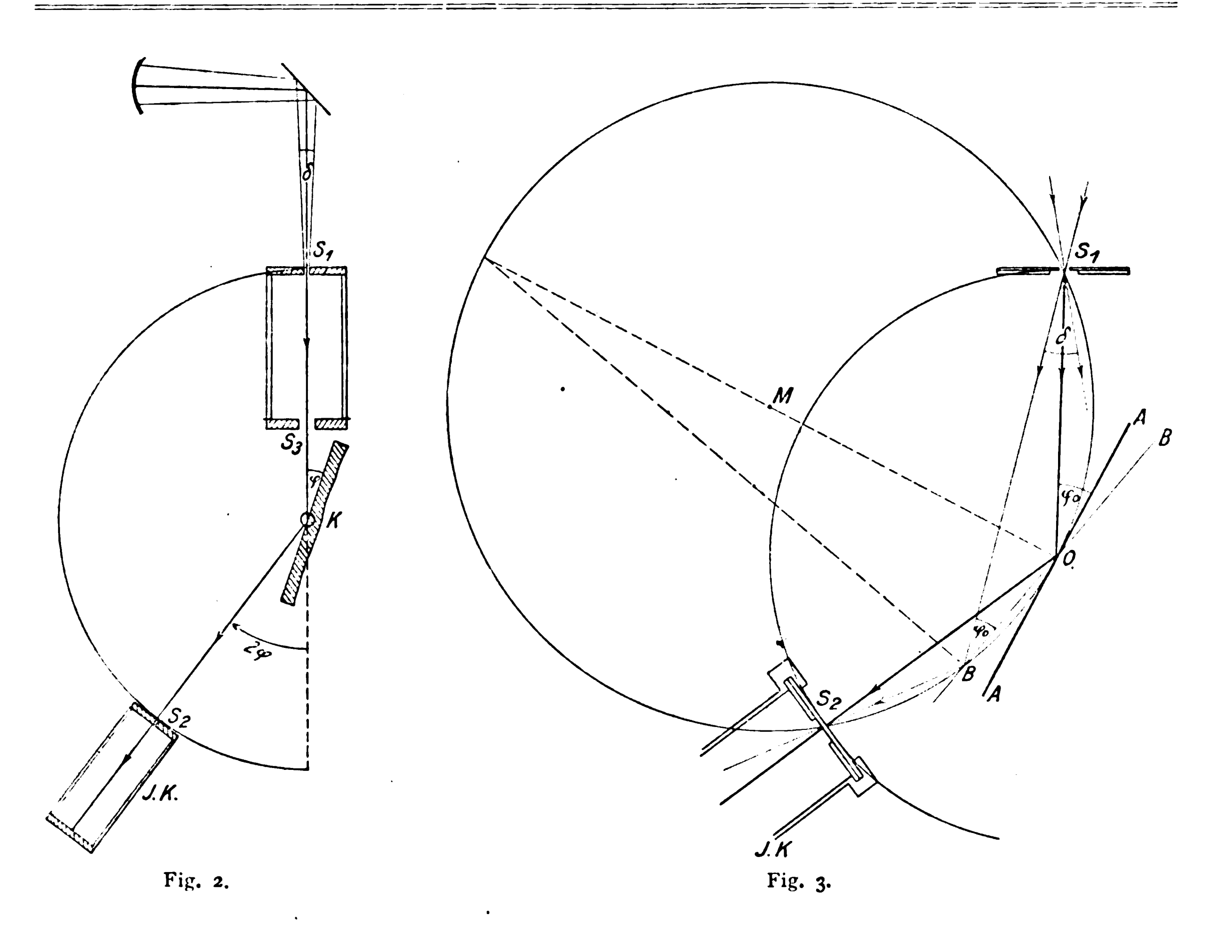


Fig. 2. Fig. 3.

durch denselben Punkt S_2. Legt man einen Kreis durch S_1OS_2, so liegen die gerade reflektierenden Punkte der Kristallebene auf den Schnittpunkten dieses Kreises mit der Kristallebene. Der „Fokus“ S_2 hat von der Achse O den gleichen Abstand wie der Spalt S_1. Natürlich gilt diese „Fokusbedingung“ für alle Wellenlängen. Daher ist es für eine scharfe Abbildung des Spektrums nötig, den Spalt der Ionisierungskammer bzw. die empfindliche photographische Schicht (als Film) kreisförmig und im richtigen Abstand von der Drehachse um O laufen zu lassen. Indessen erlaubt die meistens bestehende Kleinheit von δ ohne Schaden von dieser Bedingung einigermaßen abzuweichen und für kleine Spektralbezirke ebene photographische Platten zu verwenden, die tangential zu dem Fokussierungskreis aufzustellen sind.

Man kann diesen überraschenden fokussierenden Effekt des Drehkristalls für homogene Strahlung gut mit dem Fluoreszenzschirm beobachten. Eine harte Röhre mit Palladiumantikathode ist sehr geeignet. Beim Drehen des Kristalls mit der Hand bemerkt man das gleichmäßige Wandern der Helligkeit, die vom kontinuierlichen Spektrum stammt, sobald man aber in die Stellung des Kristalls gelangt, wo die starke α-Linie der K-Serie reflektiert wird, bleibt diese helle Reflexionslinie so lange stehen, als man durch den Öffnungswinkel δ dreht, währenddessen der kontinuierliche Spektralteil weiter wandert.

Einfluß der Kristallfehler auf die Abbildung und seine Vermeidung durch die Methode der **stetigen** Kristalldrehung.

Setzt man eine streng ebene und im mikrokristallinischen Bau fehlerfreie Spaltfläche voraus, so ist erstens die Reflexion homogener Strahlung auf ein Winkelgebiet δ des Kristalls beschränkt, der gleich dem Öffnungswinkel des Primärbündels ist; zweitens verlaufen alle reflektierten Strahlen während einer stetigen Drehung um δ durch den Fokus; drittens haben sie währenddessen gleiche Intensität — gleiche Intensitätsverteilung innerhalb des Primärbündels vorausgesetzt —, obwohl sie von immer anderen Kristallteilen stammen.

Unsystematische Fehler im Kristallbau (z. B. Verwerfungen wellenförmiger Art, wie sie häufig am Steinsalz auftreten) bewirken, daß während der Drehung erstens die Reflexion homogener Strahlen auf einem größeren Winkelgebiet als dem Öffnungswinkel stattfindet; daß zweitens

der reflektierte Strahl um die fehlerfreie Richtung nach Fehlerart herumschwankt und so eine Unschärfe der fokussierten Abbildung bedingt; daß drittens die reflektierte Intensität in unregelmäßiger Weise wechselt und um so kleiner in den einzelnen Zwischenstellungen des Kristalls ist, je größer das Reflexionsgebiet ist.

Solange man also — wie W. H. und W. L. Bragg in allen ihren Arbeiten — mit Kristall und Ionisationskammer im Reflexionsverhältnis zueinander schrittweise[1]) durch das Spektrum geht, mißt man in Wirklichkeit jeweils bei feststehendem Kristall die Reflexion und erhält jene Zufallswerte in der Intensität, die die Kristallfehler unvermeidlich bedingen.

Von diesen macht, nach W. H. Bragg[2]), jede Methode frei, welche die Gesamtintensität homogener Reflexion während der Kristalldrehung durch das gesamte überhaupt reflektierende Gebiet mißt. Dies gelingt elektrometrisch, indem man den Spalt der Ionisationskammer unter Erfüllung der Fokusbedingung fest in die gewünschte Stellung im Spektrum bringt und die Gesamtionisation mißt, die sich ergibt, wenn der Kristall in zeitlich gleichmäßigen kleinen Schritten oder besser stetig durch das ganze Reflexionsgebiet hindurchgedreht wird. Auf diese Weise beteiligen sich alle bestrahlten Kristallteilchen entsprechend ihrer Lagerung nacheinander an der Reflexion und setzen einen Mittelwert der Reflexion zusammen, der als das wahre Maß der Reflexion zu gelten hat. W. H. Bragg maß nach dieser Methode zum erstenmal exakt die reflektierte Intensität der homogenen Rhodiumstrahlung an Steinsalz und Diamant in mehreren Ordnungen, sowie den Einfluß der Temperatur des Kristallgitters auf die reflektierte Intensität.

Es ist einleuchtend, daß bei dieser summierenden Art der Reflexionsmessung am drehenden Kristall die Reflexionswerte in vergleichbarer Weise für Gebiete spektraler Nachbarschaft zustande kommen; für weiter getrennte Gebiete ist zu bedenken, daß im Falle kleiner Wellenlängen und entprechend kleiner Winkel φ auch die peripheren Teile der Kristallfläche (diese genügend ausgedehnt gedacht) innerhalb des Öffnungswinkels δ zur Reflexion gelangen und damit neue Reflexionsbedingungen geschaffen werden.

Über die Beziehung zwischen Intensität der reflektierten Strahlung und dem Öffnungswinkel δ sei folgendes erwähnt. Die von den summierenden Methoden gemessene Gesamtintensität der Reflexion homogener Strahlung während der Drehung des Kristalls ist unabhängig von δ, d. h. unabhängig von der Größe des Kathodenstrahlenfokus (gleichen Kathodenstrom usw. vorausgesetzt). Denn der Reflexionsbereich ist proportional δ, die primäre und also auch die reflektierte Intensität pro Grad des Bereiches ist umgekehrt proportional δ. Wichtig ist, daß bei großem Öffnungswinkel δ der Kristall lang genug ist, um ihn auszunutzen; bei kleinem (mit δ vergleichbarem) φ — d. i. bei kurzen Wellenlängen — ist das nicht mehr möglich. Darum wird mit dem drehenden Kristall der äußerst kurzwellige Spektralbereich mit zu kleiner Gesamtintensität reflektiert.

Will man dagegen mit dem, zeitlich getrennte Eindrücke nicht summierenden Auge, d. h. also bei feststehendem Kristall die reflektierte Intensität, z. B. einer Spektrallinie auf dem Fluoreszenzschirm möglichst hell sehen (oder in der Ionisationskammer möglichst große Ströme messen), so kommt es auf möglichst große Strahlungsdichte an. δ ist hier möglichst klein zu wählen; dies geschieht entweder durch kleinen Kathodenstrahlfokus oder nach W. H. Bragg, indem man die Antikathodenebene parallel Spalt und Drehachse stellt, so daß die Primärstrahlung sie fast streifend verläßt. Da die Linienstrahlung Fluoreszenzstrahlung ist, so bleibt die Gesamtemission, entgegen Lamberts Gesetz, bei streifendem Austritt konstant und ist auf einen sehr kleinen Winkel δ konzentriert.

Schon vor der wichtigen Erkenntnis[1]) der fehlerausgleichenden Wirkung des drehenden Kristalls erntete de Broglie[2]) ihre Früchte mit Versuchen, bei welchen er die reflektierte Intensität auf die photographische Platte[3]) einwirken ließ. Die photographische Methode hat von selbst die Eigenschaft der elektrometrischen in der Braggschen jüngsten Anwendung: Der Summierung von Wirkungen an dem gleichen Plattenort in zeitlicher Folge. Indem de Broglie die Platte fokussiert aufstellte und den Kristall über den gewünschten Spektralbereich mit einem Heliostatenuhrwerk langsam hinweg drehen ließ, erhielt er die ersten objektiven (l. c. publizierten) Röntgenspektra, die aus-

1) Oder auch kontinuierlich, wie A. H. Compton, Phys. Rev. **7**, 646, 1916 mit seinem registrierenden Spektrometer. Denn auch hier wird jeder Ionisationskammerstellung immer nur eine Kristallposition zugeordnet.

2) W. H. Bragg, Phil. Mag. **27**, 881, 1914.

1) W. H. Bragg, Phil. Mag. l. c.; E. Wagner, diese Zeitschr. **16**, 30, 1915.

2) M. de Broglie, C. R. **157**, 924, 1913; **158**, 177, 1914.

3) Unter den ersten Versuchen ist J. Herweg, Verh. d. D. phys. Ges. **15**, 555, 1913, zu nennen, der mit feststehendem Kristall Spektrallinien am Gips erhielt; die späteren Versuche (l. c. **16**, 73, 1914) des Autors mit dem drehenden Kristall zeigen wegen mangelnder Fokussierung unscharfe Linien.

gezeichnet waren durch überraschende Schärfe der Linien- und Bandenköpfe.

Die photographische Methode bietet gegenüber der mühseligen und zeitraubenden Ionisationsmethode wesentliche Vorteile dar. Einmal stehen bei den jetzt üblichen verkürzten Hin- und Herschwenkungen des Kristalls (mittels elektrischen Schaltwerkes und Elektromotoren) alle Spektralgebiete unter gleichen Bedingungen der Primärstrahlen (bzw. des Röhrenzustandes). Dann registriert die Platte beliebig dicht nebeneinander — z. B. im Spektralbereich einer Linie — ohne weiteres die während der Kristalldrehung summierten Reflexionsintensitäten. Diese doppelte Variation in der Stellung von Kristall und Ionisationskammerspalt würde eine erhebliche Mühe für die Ionisationsmethode bedeuten. Endlich summiert die Ionisation alle reflektierten Intensitäten in der Längsrichtung des Kammerspaltes. Die Krümmung der Spektrallinien und Fehler im Parallelismus von Spalt und Spektrallinie veranlassen so Verwischungen der feinen Details, die auf der Platte erhalten bleiben. Für die Ausmessung von Spektren bietet also die photographische Methode ganz erhebliche Vorzüge; durch die rasche Übersicht der Resultate ist sie der Ionisationsmethode völlig überlegen, bezüglich der Messungen von Intensitäten und der Empfindlichkeit auf geringe Energien kehrt sich indessen das Güteverhältnis um.

In Hinsicht auf die Technik der photographischen Methode ist zu erwähnen, daß die Kassette zweckmäßig mit einer dünnen Aluminiumfolie lichtdicht verschlossen wird. Bei sehr weicher Strahlung darf die Folie nur wenige 0,01 mm dick sein und wird wegen der Löcher am besten doppelt genommen. Die in der ärztlichen Röntgentechnik üblichen Verstärkerschirme machen scharfe Linien diffus und stören durch Absorption im Schirm oder in dem Glas der photographischen Platte.

Die Drehung des Kristalls muß mechanisch gleichförmig geschehen, was durch ein Uhrwerk nur unvollkommen erreicht wird. Sehr bewährt hat sich die vom Verf. verwendete doppelte Schneckenübertragung auf die Achse eines Elektromotors. Bei Intensitätsvergleichungen im Spektrum ist darauf zu achten, daß gleichförmige Winkelgeschwindigkeit des Kristalls nicht gleichförmige Geschwindigkeit beim Durchlaufen des Spektrums bedeutet.

Die Dimensionierung der meisten Röntgenspektrometer ist ungefähr die gleiche: 12 bis 15 cm beträgt der Abstand Spalt-Achse bzw. Achse-Platte (oder Spalt der Ionisationskammer). Der Spalt wird meist 0,2 bis 0,1 mm geöffnet. Bei noch engeren Spalten besteht die Gefahr, daß die meist erhebliche Dicke der Spaltbacken (meist Blei) den Öffnungswinkel δ und damit die Intensität verkleinert.

Die Schärfe der mittels der Drehmethode, z. B. von E. Wagner[1]), erhaltenen Spektren mag man ersehen aus Fig. 4 (Tafel XI), die in 4facher Vergrößerung sowohl das kontinuierliche wie das Linien-Spektrum der L-Serie des Platins darstellt. Die Spaltweite betrug 0,12 mm. Zum Vergleich bringt Fig. 5 (Tafel XI) zwei schmale Spektralbereiche, die den darüber stehenden entsprechen, und welche mit der Methode des feststehenden Kristalls gewonnen wurden (bei Benutzung des gleichen Exemplars Steinsalz). Hier kommt (vgl. Fig. 6) das Spektrum ver-

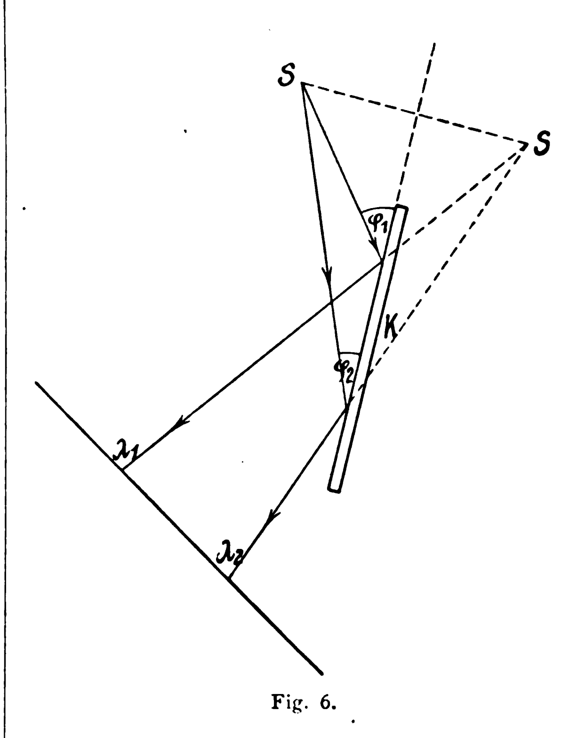


Fig. 6.

möge der im Primärbündel vorhandenen (meist recht geringen) Divergenz zustande und ist daher auf kleine spektrale Bereiche beschränkt, wenn nicht, wie bei Moseley, der Spalt sehr nahe an den Kathodenstrahlfokus auf der Antikathode herangebracht wird. Während die Spektrallinien beim unbewegten Kristall eine eben genügende Schärfe zeigen, ist das Kontinuum in eine wolkige Struktur zerfasert, die im wesentlichen ein Abbild der Kristallfehler darstellt. Denn es ist für die Wirkungsweise des feststehenden Kristalls charakteristisch, daß eine bestimmte Wellenlänge ausschließlich von ihrem ganz bestimmten sehr

1) E. Wagner, diese Zeitschr. 16, 30, 1915.

kleinen Bereich des Kristalls reflektiert wird, infolgedessen müssen sich die Fehler in diesen Bereichen in der Reflexion nach Richtung und Intensität geltend machen. Solche Fehler einigermaßen regelmäßig über die Kristallfläche angeordnet, ließen in den Versuchen H. Seemanns[1]) am feststehenden Kristall das ganze kontinuierliche Spektrum fälschlich als dichtes Linienspektrum erscheinen.

Fig. 4 (Tafel XI) zeigt, in wie unerwartet hohem Grade die Drehmethode solch grobe Fehler herausmittelt. Natürlich erfordert auch sie möglichst gute und ebene Spaltflächen. Eine Prüfung in dieser Richtung geschieht erfolgreich durch Reflexionsversuche nicht sowohl mit Licht als mit kontinuierlichen X-Strahlen selbst. Den Einfluß von Krümmungen der Spaltflächen auf den Strahlengang beim drehenden Kristall findet man bei Wagner[2]) und Seemann[3]) erörtert; er ist bedeutend nur bei Krümmungen in der Einfallsebene und bei längeren Flächen, wie solche aus Intensitätsgründen benötigt werden im kurzwelligen Gebiet und bei größeren Divergenzen im Primärbündel. Um äußerste Schärfe der Abbildungen zu erreichen, muß ein kleines ausgesucht fehlerfreies Spaltstück ausgeblendet werden. Dies bedingt einen kleinen Öffnungswinkel δ; zur Erreichung genügender Lichtstärke ist in diesem Falle die Anwendung der Antikathodenstellung in streifender Emission geboten. Übrigens verlangt äußerste Schärfe der Abbildung punktförmige Beleuchtung. Bei einer solchen sind nämlich die Spektrallinien gekrümmt; bei einer Ausdehnung des Fokus in der Spaltrichtung durchkreuzt sich also das System der in dieser Richtung verschobenen Spektrallinien und bewirkt eine (geringfügige) Unschärfe.

Einen weiteren wichtigen Grund zur Unschärfe liefert der Umstand, daß die Reflexion nicht an einer Oberflächenschicht stattfindet, sondern, als Interferenzvorgang und von einer durchdringenden Strahlung herrührend, in einem wohl meßbaren Tiefenbereich. Das reflektierte Bündel muß daher eine gewisse Breite haben, selbst wenn das einfallende merklich schmal ist. Nach Maßgabe der Absorption im Kristall ist die Intensität auf seine Breite verteilt. W. H. Bragg[4]) konnte diesen Effekt mit der Ionisationsmethode an der durchdringenden Strahlung der K-α-Linie des Rh nachweisen bei dem durchlässigen Diamant. Wagner[5]) teilte Spektralphotographien der K-α-Linien des Pd mit, deren photometrierter Schwärzungsverlauf (diffuse Verbreiterung der Linien nach der kurzwelligen Seite) diesen in II. Ordnung gesteigerten Eindringungseffekt zeigte. Die wirksame Eindringtiefe — bis zu welcher praktisch völlige Absorption statthat — ergab sich bei jener Strahlung am $NaCl$ = ca. 0,1 mm. Sie läßt die Spektrallinien ungefähr doppelt so breit erscheinen. Die weicheren Pt-Linien zeigten am $NaCl$ diesen Effekt noch nicht. Diesem für die Genauigkeit spektrometrischer Messungen verhängnisvollen Umstand kann man begegnen durch sehr dünne (freilich leicht unebene) Kristallschichten oder stark absorbierende Kristalle.

H. Seemann teilte kürzlich (diese Zeitschr. **18**, 242, 1917) eine spektroskopische Anordnung („Lochkameramethode") mit, die den wichtigen Vorzug besitzt, die Linienverbreiterung infolge des reflektierenden Tiefenbereichs zu vermeiden. Dazu ist nur nötig (in der Anordnung des feststehenden Kristalls mit reflektierender Spaltungsfläche bei ausgedehnter Strahlungsquelle), den der Kristallfläche parallelen Spalt in das reflektierte Bündel zu verlegen anstatt in das einfallende Primärbündel. Der Spalt läßt dann aus der Gesamtheit der homogenen parallelen reflektierten Strahlenbündel — einschließlich der aus dem Tiefenbereich stammenden — nur ein paralleles Bündel hindurch, das seiner Spaltweite entspricht. Hierbei setzt sich das ausgeblendete Bündel aus Strahlungen zusammen, die von ein wenig verschiedenen Orten der Antikathode stammen.

Die mitgeteilten Aufnahmen des Pt-Linienspektrums bei Verwendung von durchlässigen Zuckerkristallen zeigen sehr deutlich einerseits die starke Linienverbreiterung bei der Stellung des Spaltes zwischen Quelle und Kristall; andererseits demonstrieren sie bei der Spaltanordnung zwischen Kristall und Platte die gelungene Vermeidung jener Verbreiterung an der großen Linienschärfe.

Einige andere Methoden, Spektren zu erzeugen, sind folgende. Durch Reflexion an einem gebogenen (feststehenden) Glimmerblatt haben de Broglie und Lindemann[1]) recht scharfe Linienspektren erhalten. Die Biegung bietet gegenüber ebenen Flächen den Vorteil größerer Spektralbereiche; Glimmer als solcher spaltet leicht in vorzügliche Flächen auf. Indes verbietet seine große Gitterkonstante eine genügende Dispersion im kurzwelligen Spektrum, auch begegnet die genügend genaue Ausmessung

1) H. Seemann, diese Zeitschr. **15**, 794, 1914.
2) E. Wagner, Ann. d. Phys. **49**, 625, 1916.
3) H. Seemann, Ann. d. Phys. **51**, 391, 1916.
4) W. H. Bragg, Phil. Mag. **27**, 881, 1914.
5) E. Wagner, Ann. d. Phys. **49**, 625, 1916.

1) M. de Broglie und F. A. Lindemann, C. R. **158**, 914, 1914 und Journ. d. Phys. **4**, 265, 1914, wo ein Linienspektrum abgebildet ist. Vgl. auch H. Rohmann, diese Zeitschr. **15**, 510 u. 715, 1914.



des Spektrums Schwierigkeiten. Vor allem bleiben die prinzipiellen Mängel des unbewegten Kristalls bestehen.

Es ist eine Frage von Interesse, ob es mit biegsamem kristallinem Material möglich ist, Flächen zu belegen, die weit geöffnete homogene Strahlenbündel fokussieren[1]) und dadurch eine große Intensitätssteigerung ergeben.

Die Reflexionsbedingung $\varphi =$ const. schließt das aus. Indessen erlaubt eine zylindrische oder konische Glimmerfläche wenigstens konische Bündel zu vereinigen und damit eine hohe monochromatische Flächenhelligkeit zu erzeugen (vgl. Fig. 7). Durch die Lochblende A tritt das

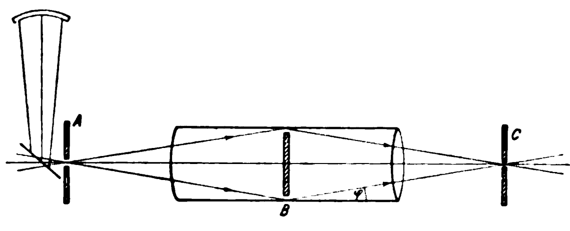


Fig. 7.

Primärbündel ein, das homogene konische Bündel wird ringsum am Glimmerrohr nach C reflektiert, wo durch eine Lochblende die intensive homogene Strahlung austritt. Die Bleischeibe B blendet jede fremde Strahlung ab. G. Gouy[2]) hat den Fall des Glimmerrohrs näher diskutiert; insbesondere die spektrale Optik längs der Achse, wo die photographische Platte aufzustellen wäre.

Auf sehr eigenartige Weise erhielt de Broglie[3]) ein Röntgenspektrum, indem er ein dünnes Platinblech mit einem schlitzförmigen Strahlenbündel durchstrahlt: Es zeigte sich hinter dem Blech das voll ausgebildete abgebeugte Spektrum der benutzten Platinantikathode. Offenbar ist dies nach de Broglie erzeugt durch die ungeordnete mikrokristallinische Struktur des Metalles; auf diese Weise finden sich immer Kristallflächen, die unter dem selektiven Winkel der einzelnen homogenen Strahlungen zum Primärstrahl stehen.

Debye und Scherrer[4]) stellten bewußt durch Zerreiben großer Kristalle in Pulver ungeordnete mikrokristallinische Körper her und konnten sogar rückwärts aus dem Interferenzbild homogener Strahlung auf die Struktur des Kristalls (Graphit und Kohle) schließen.

1) Vgl. hierzu auch die von de Broglie erwähnte Fläche einer logarithmischen Spirale. Journ. de Phys. **4**, 267, 1914.
2) G. Gouy, Ann. de Phys. **5**, 241, 1916.
3) M. de Broglie und F. A. Lindemann, Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 198, 1914.
4) P. Debye u. P. Scherrer, Gött. Nachr. S. 1, 1916 und diese Zeitschr. **18**, 291, 1917.

Schwerlich kann diese Methode die Linienschärfe des Drehkristalls erreichen, dafür liefert sie uns in erstaunlicher Einfachheit Röntgenstrahlspektren, die wie de Broglie und Lindemann sagen, bei jedem Absorptionsversuch der Röntgenstrahlen in einem Metallfilm hätten gefunden werden können.

H. Seemann[1]) beschreibt eine spektroskopische Anordnung „ohne Spalt". Hier wird eine scharfe Metallschneide auf (oder bis dicht auf) die Kristalloberfläche gesetzt und mit einer ausgedehnten Strahlenquelle (großer Kathodenstrahlfokus) beleuchtet. Der Spalt liegt hier zwischen Schneide und der größten praktisch in Betracht kommenden Eindringtiefe der Strahlung in den Kristall. Diese Anwendung des feststehenden Kristalls besitzt den Vorzug, daß nur ein sehr kleiner Kristallbereich für die Reflexion aller λ in Frage kommt. Daher vermeidet sie weitgehend die oben betonten Mängel.

E. Rutherford[2]) hat mit Erfolg für den Fall sehr kurzer Wellenlängen (γ-Strahlung) folgende Anordnung benutzt, die er als „Transmissionsmethode" bezeichnet. K ist ein dünner $NaCl$-Kristall (vgl. Fig. 8), der beim Versuch feststehen bleibt. A, das schmale Emanationsrohr, entsendet ein weit geöffnetes Strahlenbündel, aus dem eine homogene Welle an den inneren Würfelebenen (gestrichelt) bei B nach E reflektiert werde.

Eine photographische Platte P_1 zeigt die Spektrallinien bei E und ferner Absorptionslinien bei A', die durch den Intensitätsverlust im Strahl ABA' bei der Reflexion bewirkt werden. Wird eine Spaltblende so aufgestellt (vgl. Fig. 8), daß der Spalt S alle reflektierten Strahlen und nur diese hindurchläßt, so erscheinen auf einer Platte in P_2 nur die Spektrallinien ungestört von Absorptionslinien.

Die Breite b von (streng homogenen) Spektrallinien ergibt sich in der Transmissionsanordnung zu

$$b = 2d \cdot \operatorname{tg}\varphi,$$

wo d die Dicke des Kristalls, φ der Winkel zwischen reflektierender Ebene und Strahl sei. b ist also merklich breit außer bei sehr kleinem φ. Die reflektierte Intensität ist gleichförmig über b verteilt, da die Absorptionswege aller Strahlen des reflektierten Bündels im Kristall gleich sind.

Einen Vorzug bedeutet die Reflexion an den inneren unverletzten Kristallflächen gegenüber der Verwendung der äußeren Spaltflächen,

1) H. Seemann, Ann. d. Phys. **49**, 470, 1916; **51**, 391, 1916.
2) E. Rutherford u. da Andrade, Phil. Mag. **28**, 263, 1914.

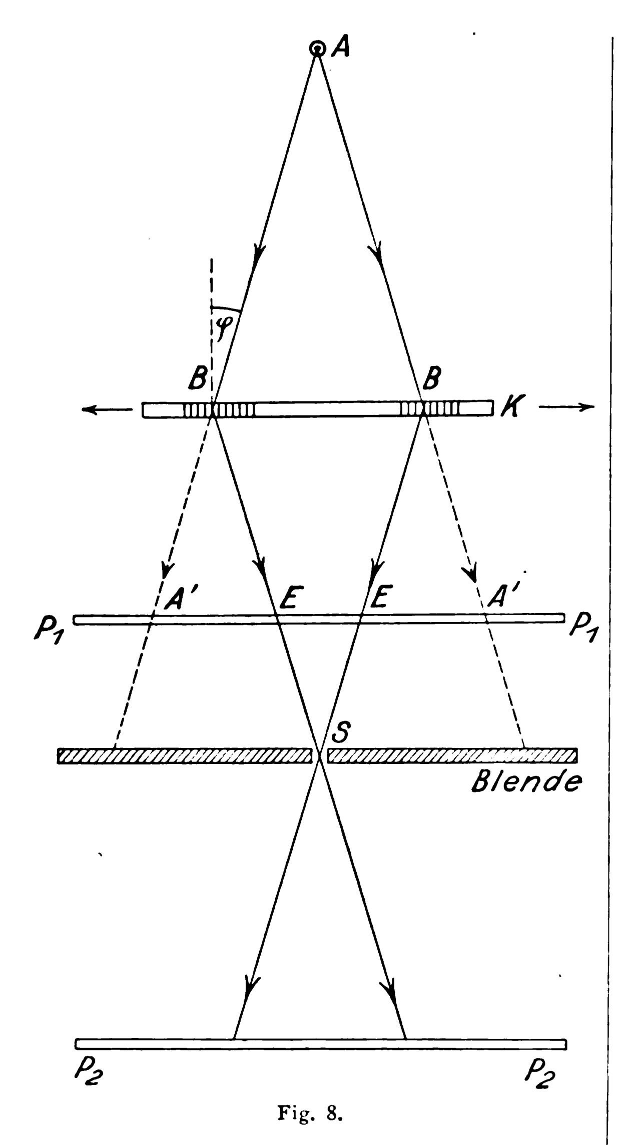


Fig. 8.

denn beim Spalten findet eine treppenartige Absplitterung und Lockerung der Kohäsion gerade des zur Reflexion dienenden Bereiches statt.

Von den Mängeln der Methoden des unbewegten Kristalls ist auch die Rutherfordsche nicht frei. Durch eine hin- und hergehende Parallelschiebung des Kristalls längs der gezeichneten Pfeile wären diese Mängel zu heben.

Die Bestimmung der Wellenlänge λ im absoluten Maß erfordert die Kenntnis der Gitterkonstante d. Da diese durch direkte Messung nicht gewonnen werden kann, so ist man auf die Braggschen Schlüsse[1]) angewiesen, die diese Autoren mit überzeugender Beweiskraft über den Bau der Kristalle zogen aus ihren bekannten Reflexionsversuchen an verschiedenen ausgezeichneten Netzebenen desselben Kristalls und in aufeinanderfolgenden Interferenzordnungen der angewandten homogenen X-Strahlung. d folgt dann in einfacher Weise aus dem Molekulargewicht M der den Kristall aufbauenden Elemente, der Kristalldichte σ und der Avogadroschen Zahl A, d. i. die Anzahl der Moleküle im Gramm-Mol.

Aus den Untersuchungen W. L. Braggs folgt, daß z. B. Steinsalz aus kleinsten Würfeln aufgebaut ist, in deren Ecken abwechselnd ein Na- und ein Cl-Atom liegt. Ist d die Länge der Würfelkante (= Gitterkonstante für Würfelebene), so haben wir:

$$A \cdot \sigma \cdot d^3 = \frac{M}{2}.$$

Setzen wir mit Moseley

$$\sigma = 2{,}167; \quad M = 23{,}00 + 35{,}46 = 58{,}46; \quad A = 6{,}05 \cdot 10^{23},$$

so folgt:

$$d = 2{,}814 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}.$$

Die Unsicherheit der Avogadroschen Zahl von einigen Prozenten setzt die Grenze für die Genauigkeit der absoluten Größe der Gitterkonstanten bzw. der Wellenlängen von ca. 1 Proz.

Da die Meßgenauigkeit der Reflexionswinkel φ, d. h. die relative Genauigkeit der Wellenlängenmessung erheblich weiter geht, so wäre es sehr unzweckmäßig, die absoluten Werte der Wellenlängen bzw. Gitterkonstanten stets neuen verbesserten Werten der drei Größen σ, M und vor allem A anzupassen. Es wurde darum vom Verf. der bisher von allen Autoren von selbst befolgte Vorschlag gemacht: im Interesse der Einheitlichkeit und Vergleichbarkeit aller Wellenlängen den Moseleyschen Wert $2{,}814 \cdot 10^{-8}$ cm als Gitterkonstante d der Würfelebene von Steinsalz festzuhalten und auf ihn alle λ- bzw. d-Werte der anderen Kristalle zu beziehen. — Voraussetzung hierfür ist die Übereinstimmung der Gitterkonstante für verschiedene Exemplare desselben Kristalls. Eine experimentelle Prüfung dieser Frage durch E. Wagner[1]) an Steinsalz sehr verschiedenen Ursprungs (darunter ein grob trübes Stück) ergab Übereinstimmung innerhalb der Meßfehler (ca. 1 pro Mille). Zur relativen Messung der Gitterkonstanten d_1 und d_2 zweier Kristalle benutzt man die Reflexion derselben homogenen Strahlung (in unserem Falle die $K\alpha$-Linien von Pd). Es gilt dann die Gleichung: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1}$. Die ge-

1) Vgl. dazu: W. L. Bragg, Jahrb. d. Radioakt. 11, 346, 1914.

1) E. Wagner, Ann. d. Phys. 49, 646, 1916.

naue Messung von φ bedingte bei der hier angewandten photographischen Methode (mittels Drehkristalls) exakte Abstandsmessung der empfindlichen Schicht von der Drehachse; genaue Justierung von Kristall und Platte zum Strahlengang; Verwendung ebener Spiegelglasplatten anstatt der gekrümmten gewöhnlichen photographischen Platten.

Besondere Erörterung verlangt die unvermeidbare Abweichung f der reflektierenden Kristallfläche von der Drehachse, da diese einen Fehler in der Linienposition von annähernd $2f$ bewirkt. l. c. wird eine einwandfreie Art seiner Eliminierung angegeben durch Verwendung von zwei Reflexionsordnungen, und zwar symmetrisch auf beiden Seiten zum Primärstrahl. Die Grenze in der Meßgenauigkeit von φ setzte die asymmetrische Breite der Pd-Linien, infolge der Tiefe der reflektierenden Schicht und die Krümmung der Spaltfläche; sie betrug bestenfalls ca. $\frac{1}{2000}$ von φ ($\varphi = 6^0$). Aus diesen Messungen ergab sich:

$$\text{I.} \qquad \frac{d_{KCl}}{d_{NaCl}} = 1{,}1144$$

in guter Übereinstimmung mit dem Wert 1,1162, der aus den Strukturen folgt.

Als Wellenlängen für Pd folgte:

$$\text{II.} \qquad \begin{aligned} \lambda_\alpha &= 0{,}5872\ \text{Å} \\ \lambda_\alpha' &= 0{,}5828\ \text{Å}. \end{aligned}$$

Mit der Ionisationsmethode bestimmte W. H. Bragg den Winkel φ der Rhodium-K-α-Strahlung an der Diamantfläche 111 möglichst genau auf folgende Weise.

Bei eng geöffnetem Primärbündel (ca. einige Bogenminuten, Antikathodenstellung in streifender Emission) wird die Reflexionsintensität gemessen, die durch den weit geöffneten Spalt der feststehenden Ionisationskammer dringt, wenn der Kristall in kleinen Schritten (12 Schritte durch etwa 5 Bogenminuten) durch das ganze Reflexionsgebiet der K-α-Linie gedreht wird.

Der Kristallort für die maximale Intensität wurde so in I. und III. Ordnung bestimmt; die Mittelwerte der Orte stimmten auf $1'$ überein. Aus der Differenz der Mittelwerte der zwei Ordnungen folgt dann rechnerisch, unbeeinflußt von Abweichungen der reflektierenden Fläche von der Drehachse,

$$\varphi = 8^0\,35{,}2'$$

und

$$\lambda_{Rh;\alpha} = 0{,}614 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}.$$

Vergleicht man die bis jetzt im Röntgengebiet erreichte Trennbarkeit zweier benachbarter Spektrallinien mit der in der Optik, so kann man sagen, daß sie die Auflösung der beiden D-Linien im Natriumspektrum nicht viel übertrifft.

Wir geben hier noch eine kleine Zusammenstellung von Werten der Gitterkonstanten einiger häufiger gebrauchter Kristalle (bei Zimmertemperatur)[1]).

Tabelle I.

Kristall	Ebene	Gitterkonstante $\times 10^8$ cm
$NaCl$	100	2,814
KCl	100	3,136
Diamant	111	2,07
Kalkspat	100	3,04
Gips	Spaltfläche	7,621
Ferrozyankalium	Spaltfläche	8,454
Glimmer	Spaltfläche	ca. 10

Für den Fortschritt in der Genauigkeit der Wellenlängenmessungen wäre es sehr wünschenswert, wenn noch mehrere Wellenlängen, z. B. von Cu, Ag, Pt möglichst genau bestimmt würden, um bei der photographischen Methode als Bezugslinien auf der gleichen Platte zu dienen.

Strahlungsquellen und Instrumentarium.

Um mit dem Drehkristall in genügend kurzer Zeit über einen Bereich $\Delta\varphi$ von ca. 3^0—10^0 ausgedehnte Spektren auf der Platte zu erhalten, benutzt man am besten die mächtigen störungsfrei arbeitenden Hochspannungsgleichrichter-Anlagen in Verbindung mit den technischen luft- oder wassergekühlten Röntgenröhren, z. B. von Gundelach oder Müller. Sehr praktisch ist das Rohr von Siegbahn (Hersteller Gundelach, Gehlberg) mit der wassergekühlten mittels Schliff auswechselbaren Antikathode, auf der auch leicht die zu untersuchenden Substanzen anzubringen sind, z. B. Pulver einfach durch Einreiben in Ritzen der kupfernen Antikathode. Bei exakten Vergleichsaufnahmen ist die Anordnung Moseleys empfehlenswert, bei der mehrere Substanzen auf einem im Vakuum zu betätigenden Schlitten nebeneinander angebracht sind, der sie an den Ort des Kathodenstrahlfokus zu schieben erlaubt. Den Spalt in die Röntgenröhre nahe zum Fokus zu verlegen, bringt großen Gewinn an Lichtstärke, verlangt aber natürlich feste Aufstellung der Röhre gegen das Spektrometer.

Das „Sekundärstrahlungsverfahren" benutzt als Strahlungsquelle die Eigenstrahlung der Elemente in Luft, die durch primäre Röntgenstrahlen angeregt wird. de Broglie[2]), Gla-

1) Die Änderung der Gitterkonstante mit der Temperatur hat W. H. Bragg, Phil. Mag. **27**, 881, 1914 deutlich beobachten können.

2) M. de Broglie, C. R. **158**, 1493, 1785, 1914.

golew[1]) und Siegbahn[2]) haben sich dieser Methode mit Erfolg bedient. Sie leidet unter dem Mangel an Intensität, besticht allerdings durch ihre Anwendbarkeit auf Substanzen und chemische Verbindungen, die im Vakuum und durch die intensive Kathodenstrahlung Zersetzung erleiden. —

Bei der Untersuchung weicher Strahlung verwendet man die durchlässigen „Lindemann"-Glasfenster (Lithiumglas) oder Aluminiumfenster. Da extrem weiche Strahlen bereits in Luft erheblich absorbiert werden, so erfordert deren Erforschung den Vakuumspektrographen. Moseley[3]) war der erste Erbauer eines solchen. Er ordnete Plattenhalter und Kristallhalter drehbar (auf Stahlkugeln in Kreisrinnen laufend) in einem zylindrischen Eisenkasten an, der gegen das Hochvakuum der Röntgenröhre durch ein Fenster dünnster Goldschlägerhaut abgedichtet war. Da Moseley nicht mit kontinuierlicher Kristalldrehung arbeitete, wurden Kristall und Platte vor jedem Versuch in die passende Stellung gebracht. Ein sehr vollkommener Vakuumspektrograph stammt von M. Siegbahn[4]). Vor allem erlaubt dieser durch einen abgedichteten Drehzapfen eine stetige Hin- und Herdrehung des Kristalls auszuführen. Zwei konaxiale Konusse führen durch den Boden eines zylindrischen Messingkastens; der eine trägt im Innern den Arm des Plattenhalters, der andere dient zur Drehung des Kristalls. Beider Drehung und Stellung ist auf außen angebrachten Teilungen abzulesen. Hochvakuum und Spektrograph kommunizieren nur durch den 0,1 mm breiten Spalt, den dünnes rotes Papier lichtdicht verschließt, zugleich den geringen Druckunterschied zwischen Hochvakuum und Spektrographenvakuum aufrecht erhaltend. Zur Untersuchung kurzer Wellen wird meistens das intensiv reflektierende Steinsalz verwendet, obwohl die Würfelebene häufig uneben aufspaltet; für lange Wellen eignet sich Gips und Glimmer.

Einen Prüfstein für scharfe Abbildung bildet z. B. die Trennbarkeit der starken Kupferlinien α und α' der K-Serie.

Experimentelle Ergebnisse.

Die Linienspektren der Elemente.

Mit ihrem Spektrometer stellten zuerst W. H. und W. L. Bragg[5]) die Existenz scharfer Intensitätsmaxima der Ionisation fest bei bestimmten Reflexionswinkeln φ auf kontinuierlichem Untergrund. Diese Maxima wiederholten sich bei Winkeln in zweiter, dritter... (nter) Ordnung mit verminderter Stärke in exakter Erfüllung des Gesetzes der Interferenzreflexion:

$$n \cdot \lambda = 2d \cdot \sin\varphi,$$

wobei die Härte ihrer Strahlung, an Absorption in Aluminium gemessen, gleichblieb.

Hiermit war zugleich dreierlei gezeigt: I. der Gitteraufbau der Kristalle; II. der Interferenzcharakter der Laueschen Erscheinung, d. i. der Wellencharakter der Röntgenstrahlung; III. die Existenz scharfer Frequenzen im Röntgenspektrum der Elemente. Bezüglich dieses letzteren ergab Variation im Antikathodenmaterial, daß die Spektrallinien dem betreffenden chemischen Element eigentümlich waren und, nach ihrer Härte geschlossen, die Barklasche Fluoreszenzstrahlung der weichen L-Serie bei den schweren Atomen wie Pt, die harte K-Strahlung bei den leichteren Atomen Cu, Pd, Rh darstellten. Dieser Befund wurde fast gleichzeitig durch noch verschärfte Messungen von Moseley und Darwin[1]) ebenfalls mit der sehr verfeinerten Ionisationsmethode bestätigt. Sie stellten die Gültigkeit der Reflexionsgleichung für 5 Platinlinien fest an Steinsalz, Ferrozyankalium und Gips in mehreren Ordnungen und mit einer Genauigkeit von 1 Bogenminute im Werte der Reflexionswinkel. Indem Moseley[2]) mit der rasch arbeitenden übersichtlichen photographischen Methode (feststehender Kristall, weit geöffnetes Primärbündel) die Untersuchung der Linienspektren auf möglichst alle erreichbaren Elemente (von Aluminium bis Gold) erstreckte, trat eine fundamentale Gesetzmäßigkeit in quantitativ reiner Form zutage, die in den bewunderungswürdigen Versuchen Barklas bereits sich ausgesprochen hatte. Wir erinnern kurz an letztere.

Bestrahlt man die Elemente mit Röntgenstrahlen genügender sonst variabler Härte, so bewirkt deren Absorption im Element eine sekundäre X-Strahlung, ihre charakteristische oder Fluoreszenz-Strahlung. Diese setzt sich zusammen aus zwei Arten „homogener" Strahlung (d. i. von gleicher Absorbierbarkeit in Aluminium), der harten K- und der weichen L-Strahlung. Mit wachsendem Atomgewicht wächst die Härte beider Serien gesetzmäßig im ganzen untersuchten Bereich der Elemente. Die Spektralanalyse Moseleys löste beide Strahlungen in Gruppen von scharfen Linien auf, getrennt durch ein relativ großes linienfreies Intervall, wobei die mittleren Wellen-

1) M. Glagolew, C. R. **160**, 709, 1915.
2) M. Siegbahn, Verh. d. D. phys. Ges. **17**, 469, 1915 und J. Malmer, Dissertation, Lund 1915.
3) G. J. Moseley, Phil. Mag. **27**, 705, 1914.
4) M. Siegbahn u. E. Friman, diese Zeitschr. **17**, 176, 1916; neuestes Modell, Jahrb. d. Rad. **13**, 307, 1916. E. Friman, Dissertation, Lund 1916.
5) W. H. u. W. L. Bragg, Proc. Roy. Soc. A. **88**, 428, 1913.

1) J. Moseley u. G. Darwin, Phil. Mag. **26**, 210, 1913.
2) J. Moseley, Phil. Mag. **26**, 1024, 1913 u. **27**, 703, 1914.

längen der Gruppen ungefähr im Verhältnis 1 : 7 stehen. Eine neue noch weichere Serie, die M-Serie, fand M. Siegbahn[1]) (naturgemäß bei den schwersten Atomen) auf, wobei wiederum deren mittlere Wellenlänge ca. 4 mal die der L-Serie übertrifft.

Die K-Strahlung erwies sich als die intensivste und einfachste mit nur 4 Linien: dem intensiven Dublett α α', dann in abnehmender Intensität und Wellenlänge folgend die β- und γ-Linie (Fig. 16). Die äußersten Wellenlängen unterscheiden sich um nur ca. 10 Proz. und darum konnte wohl ihre mittlere Härte in den Barklaschen Absorptionsmessungen homogen erscheinen.

Die L-Strahlung erwies sich als komplexer; sie besteht aus ca. 14 Linien (Fig. 4). Ihre äußersten Wellenlängen differieren bei Palladium um 20 Proz., bei Uran um 70 Proz.

Der Vergleich der Spektra der Elemente ergab das sehr bemerkenswerte Resultat, daß das Spektrallinienbild jeder Serie in seinen feinsten Zügen: in der Anzahl der Linien, in der Intensitätsverteilung untereinander und weitgehend in ihrer spektralen Anordnung bei allen Elementen wiedergefunden wird oder, soweit sich einige Züge in geringem Grade ändern, daß diese Änderungen sich stetig von Element zu Element verfolgen lassen. Dabei wandert beim Fortschreiten von leichten zu schweren Atomen der Ort der Serienemission im Spektrum um annähernd gleiche Schritte nach der kurzwelligen Seite, wenn man von einem Element zu dem nächsten geht. Das Moseleysche Gesetz tritt aber scharf erst hervor, wenn man nicht die Atomgewichte in Beziehung zu den Frequenzen setzt, sondern die Atomart. Diese ändert sich in regelmäßiger (periodisch wiederkehrender) Weise, wenn man den Anordnungsplan des natürlichen Systems schrittweise von einem Element zum nächsten durchläuft. Numeriert man dementsprechend die Elemente, mit $H = 1$, $H = 2$, $Li = 3$ usw. beginnend, bis zum Uran $= 92$, jedes Atom durch diese seine „Ordnungszahl" N[2]) (oder „Atomzahl") bezeichnend, so lautet die Moseleysche Beziehung:

$$\sqrt{\nu} = a(N - b),$$

in Worten: Die Quadratwurzel aus allen zusammengehörigen Frequenzen $\left(\nu = \frac{1}{\lambda}\right)$ der Elemente stehen in linearer Abhängigkeit zu ihren Ordnungszahlen N im periodischen System.

1) M. Siegbahn, Verh. d. D. phys. Ges. **18**, 278, 1916.
2) Vgl. die von Fajans (diese Zeitschr. **16**, 467, 1915) gegebene Anordnung der Elemente.

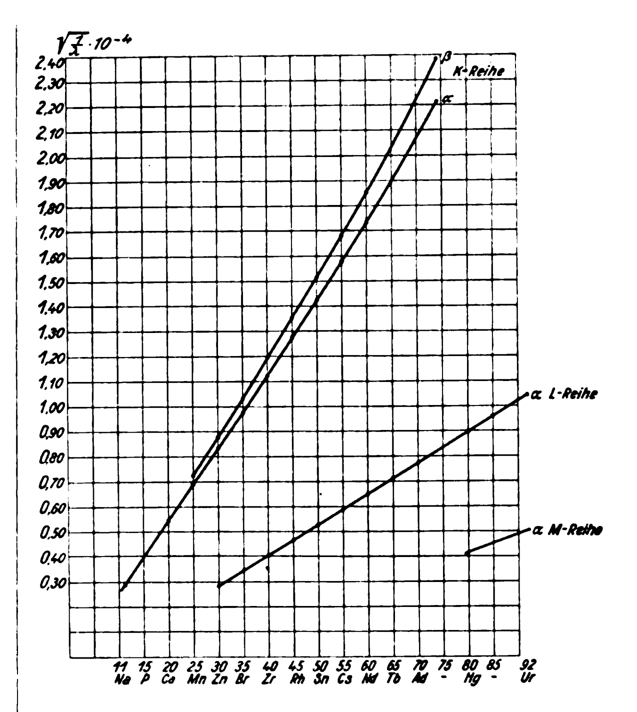


Fig. 9.

In Fig. 9 ist für die α- und β-Linien der K-Serie das Resultat der Messungen wiedergegeben; für die L- und M-Serie der Verlauf nur für die Hauptlinien α.

Moseley erhält für die stärksten (α) Linien der K- und L-Serie im Intervall $N = 13$ bis 79 folgende Konstanten:

$$\sqrt{\nu_K} = \sqrt{\frac{3}{4}\nu_o} \cdot (N - 1)$$

und

$$\sqrt{\nu_L} = \sqrt{\frac{5}{36}\nu_o} \cdot (N - 7{,}4).$$

$^3/_4$ bzw. $^5/_{36}$ haben die spektraltheoretische Bedeutung:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}; \quad \frac{5}{36} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \text{ (Balmerserie).}$$

ν_o ist die Rydbergsche Fundamentalfrequenz.

Die Kurven ($\sqrt{\nu}$, N) verlaufen nicht streng linear, sondern bei hohen Ordnungszahlen etwas konvex gegen die N-Achse; auch variiert ihr Verlauf für die einzelnen Spektrallinien innerhalb der L-Gruppe, so daß Durchkreuzungen stattfinden (vgl. Fig. 10). Stets aber liegen die $\sqrt{\nu}$-Werte homologer Reihen innerhalb der Meßgenauigkeit auf solchen glatten Kurven; woraus für die Wiedererkennung zusammengehöriger Linien im Spektrum ein großer interpolatorischer Vorteil erwächst.

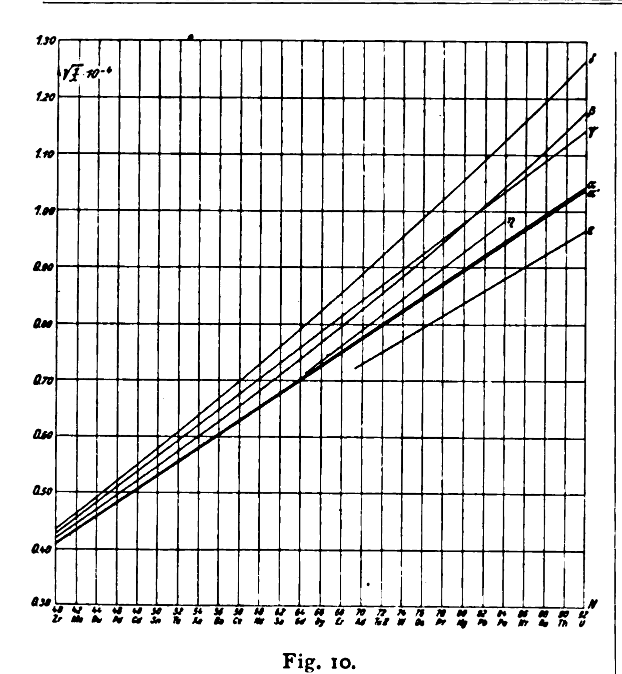


Fig. 10.

Wie die Messungen zeigen, erfüllen alle bekannten Elemente ausnahmslos die Moseleysche Beziehung, insbesondere auch die schwierig im periodischen System anzuordnenden seltenen Erden. Die Röntgenspektralmessungen ermöglichen damit unabhängig von jeder Theorie eine quantitativ sichere Ermittlung des Platzes N der Elemente im System, im Gegensatz zu den ganz individuellen optischen Spektren. Dieser Platz wird in bester Übereinstimmung mit dem gefundenen, den man auf Grund der chemischen Eigenschaften ihnen anwies und steht beim *Co* und *Te* im Gegensatz zu der Reihenfolge, den die Atomgewichte vorschreiben. Diese Folgerung konnte schon Barkla für *Co* ziehen.

Die Spektralmessungen ergaben weiter, daß die $\sqrt{\nu}$-Werte der bekannten Elemente auch alle möglichen Plätze in der Reihe der Ordnungszahlen von 11 bis 92 wirklich erfüllten mit Ausnahme von nur 6, für die sich findet $N = 43, 61, 72, 75, 85, 87$. Davon sind 61 und 72 seltene Erden; 43, 75 und 85 gehören der gleichen, VII. Vertikalreihe des periodischen Systems an (Homologe des Mangans). —

Während wir aus dem Obigen einerseits erkennen, daß im periodischen System für mehr als 92 Elemente kein Platz ist, dürfen wir andererseits schließen, daß auf der Erdoberfläche alle in der Natur überhaupt möglichen Atombauten (mit Ausnahme der wenigen 6) vorkommen.

Zugleich eröffnen die Spektralversuche in einfacher Weise den Weg zur Auffindung der noch unbekannten Elemente: liefert doch die erste Aufnahme, die jene fehlenden Spektrallinien am genau vorher bestimmten Ort im Spektrum aufzeigt, den bündigen Existenzbeweis. Es versteht sich hiernach von selbst, daß die Röntgenspektralanalyse überhaupt die Aufgaben der qualitativen chemischen Analyse in sehr viel entscheidenderer Weise löst als die Bunsen-Kirchhoffsche; wobei ihr allerdings die Gase und leichten Elemente unzugänglich sind. Bei Legierungen oder chemischen Verbindungen kommen stets deren Komponenten im Röntgenspektrum unverändert durch die chemische Bindung zur Geltung. Im Falle von Zersetzung, Verflüchtigung usw. der Substanz durch Kathodenstrahlen bleibt die Sekundärstrahlungs- oder die Absorptionsmethode (vgl. unten) übrig.

Moseley erschloß durch seine systematischen Untersuchungen bereits fast das ganze Gebiet der Elemente; von seinen Nachfolgern sind neben J. Malmer[1]) hauptsächlich die systematischen und präzisen Arbeiten von M. Siegbahn[2]) und seinen Mitarbeitern N. Stenström und E. Friman zu nennen, die nach der photographischen Methode und mittels des Drehkristalls arbeiteten und vorzüglich scharfe Linienspektra erhielten (vgl. die Reproduktionen in Frimans Dissertation). Besonders wertvoll sind die Untersuchungen über die seltenen Erden[3]), die von Auer v. Welsbach zur Verfügung gestellt waren; sowie die hohe Vollständigkeit, mit der das extrem langwellige Spektralgebiet mittels des Vakuumspektrographen erschlossen wurde.

Die Spektren einzelner Elemente wurden ferner von Bragg[4]), Herweg[5]), de Broglie[6]), Gorton[7]), Wagner[8]) ausgemessen. Die schwache γ-Linie in der K-Serie wurde von Bragg und Wagner aufgefunden. Die Übereinstimmung des L-Serienspektrums im einzelnen am *Pt, Wo, Ta,* sowie die Existenz der neuen Serienlinie l im L-Spektrum wurde vom Verf. unabhängig von den umfassenderen Messungen Siegbahns und Frimans mitgeteilt.

Die Übereinstimmung der Wellenlängenmessungen verschiedener Autoren er-

1) J. Malmer, Dissertation, Lund, 1915; auch Phil. Mag. **28**, 787, 1914.
2) Vgl. Jahrgang 1916 der Ann. d. Phys.; diese Zeitschr.; Verh. d. D. phys. Ges.
3) M. Siegbahn, diese Zeitschr. **17**, 176, 1916.
4) W. H. Bragg, Proc. Roy. Soc.
5) J. Herweg, Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 73, 1914.
6) M. de Broglie, C. R. **158**, 623, 907, 1914.
7) W. S. Gorton, Phys. Rev. **7**, 203, 1916 (vgl. auch J. Barnes, Phil. Mag. **30**, 368, 1915).
8) E. Wagner, Ber. d. Bayr. Akad. Math.-phys.-Kl. S. 31, 1916.

reicht bereits fast die Meßfehlergrenze der Methode. Die photographisch gewonnenen λ-Werte Moseleys in seiner systematischen Arbeit sind alle um 1 Proz. größer als die Siegbahns; letzterer vermutet als Ursache einen ebenso großen Fehler in den Gitterkonstanten des von Moseley benutzten Ferrozyankaliumkristalls. Die besten Messungen differieren um ca. 1′ in der Angabe vom Reflexionswinkel am Steinsalz (vgl. folgende Tabellen).

Röntgenspektrum des Platins (L-Serie).

Moseley u. Darwin	Siegbahn u. Friman	Linie
13° 31′	13° 36′	α'
	13° 29′	α
11° 28′	11° 28,6′	β
11° 17′	11° 17,2′	γ
9° 47′	9° 48,0′	δ
9° 29′	9° 30,0′	

Bemerkung: Die Moseleyschen Messungen sind nach der Ionisationsmethode, die Siegbahnschen photographisch ausgeführt.
Das Dublett $\alpha\alpha'$ ist bei M. u. D. nicht getrennt.

Zum weiteren Vergleich führen wir folgende Zusammenstellung (φ am Steinsalz) bei Friman (Dissert. S. 44) an; sämtliche Werte sind hier photographisch gewonnen.

Röntgenspektrum des Wolframs (L-Serie).

Siegbahn u. Friman	de Broglie	Gorton	Linie
15° 15,4′	—	15° 12,6′	α'
15° 9,3′	15° 9′	15° 6′	α
13° 19,1′	—	13° 16,8′	
13° 7,3′	13° 8′	13° 6,6′	β
12° 55,3′	12° 55′	12° 52,8′	
12° 44,3′	12° 44′	12° 42′	γ
11° 13,3′	11° 14′	11° 12,6′	δ
10° 50,1′	—	10° 49,8′	

Während Moseley im Gebiet der langen Wellen der K-Serie bis zu $\lambda = 8{,}36$ Å beim Aluminium ($N = 13$) vordrang, erreichten Siegbahn und Friman $\lambda = 11{,}95$ Å beim Na ($N = 11$) im Vakuumspektrographen und als überhaupt längste Wellenlänge $\lambda = 12{,}3$ Å für die α-Linie des Zn ($N = 30$) in der L-Serie.

Es ist vorerst unmöglich in der Untersuchung der K-Serie noch einen Schritt weiter zu gehen, da das nächste Element Fl ($N = 10$) gemäß der Moseleyschen Beziehung bereits fast die doppelte Wellenlänge der vom Aluminium erwarten läßt: $\lambda = 19$ Å. Zu ihrer Darstellung sind die Gitterkonstanten der bisher gebrauchten Kristalle zu klein. Hier werden andere Methoden einsetzen, um das noch 6 Oktaven umspannende Spektralgebiet zwischen den längsten Wellenlängen der Röntgenstrahlen und der kürzesten der ultravioletten Strahlen ($\lambda = 1000$ Å) zu überbrücken und so den Anschluß zu gewinnen an das L-Serienspektrum des Wasserstoffs ($N = 1$), das uns in dem wohlbekannten Balmerspektrum sichtbar wiedererscheint.

Im Gebiet der kurzen Wellen der K-Serie erreichte Moseley die Grenze mit $\lambda = 0{,}56$ Å beim Silber ($N = 47$); Malmer drang bis $\lambda = 0{,}29$ Å vor beim Neodym ($N = 60$); de Broglie[1]), Ledoux-Lebard u. Dauvillier[2]) und Hull u. Rice[3]) konnten jüngst mit der Coolidge-Röhre (Glühkathode) durch Anwendung höchster Spannungen am Wo ($N = 74$) $\lambda_\alpha = 0{,}203$ Å und $\lambda_\beta = 0{,}177$ Å erzielen.

Hiermit umfaßt das Röntgen-Linienspektrum 6 Oktaven.

Bezüglich der Intensität der Serien und Linien ist folgendes zu bemerken:

Die Intensität der Emission der K-Serie erscheint als die größte, es folgen die L- und die M-Serie, doch liegen diskutierte Intensitätsmessungen noch nicht vor.

Bemerkenswert ist das Intensitätsverhältnis einiger Linien derselben Serie relativ zueinander. Wenn man die Reihe der Elemente nach abnehmendem N durchläuft, wird die γ-Linie im Vergleich zur β-Linie in der K-Serie immer schwächer[4]), um unterhalb Ca ($N = 20$) unmerklich zu werden. Ebenso verhält sich die β-Linie gegenüber der α-Linie. Andererseits treten bei kleinem N im K-Spektrum neue Doppellinien auf (α_3 α_4) (vgl. Tabelle).

Als einzig diffuse Linie wird die l-Linie der L-Serie von Wagner beschrieben, vielleicht ist sie aber ein unaufgelöstes Dublett.

Im folgenden teilen wir die Wellenlängenmessungen von Siegbahn-Stenström-Friman-Malmer mit.

Die verschiedene Bezeichnungsweise der Linien von Moseley, Siegbahn, Sommerfeld ist am Kopf angegeben; die starken Linien sind fett eingerahmt. Es ist zu wünschen, daß die an Moseley sich anschließende, den Serienzusammenhang zum Ausdruck bringende Nomenklatur Sommerfelds sich einbürgert.

---

1) M. de Broglie, C. R. **162**, 596, 1916.
2) Ledoux-Lebard und Dauvillier, C. R. **163**, 754, 1916.
3) W. Hull und M. Rice, Proc. Nat. Ac. **2**, 365, 1916.
4) M. Siegbahn, diese Zeitschr. **17**, 318, 1916; E. Wagner, Ber. Bayr. Ak. S. 31, 1916.

Tabelle II.

K-Reihe.

$\lambda \cdot 10^8$ cm.

Element	γ	β				α		α'	Bragg, Wagner, Sommerfeld
Nr.	β_2	β_1	α_4	$\alpha_3\,\alpha_4$ (nicht trennbar)	α_3	α_1	$\alpha_1\,\alpha_2$ (nicht trennbar)	α_2	Siegbahn
11 *Na*	—	—	—	—	—	—	11,951	—	
12 *Mg*	—	9,477	9,845	—	9,856	—	9,915	—	
13 *Al*	—	7,986	8,300	—	8,310	—	8,360	—	
14 *Si*	—	6,759	7,080	—	7,088	—	7,131	—	
15 *P*	—	5,808	6,122	—	6,129	—	6,168	—	
16 *S*	—	5,018	5,314	—	5,317	—	5,360	—	
17 *Cl*	—	4,394	—	4,692	—	—	4,712	—	
18 *Ar*	—	—	—	—	—	—	—	—	
19 *K*	—	3,449	—	3,724	—	3,735	—	3,738	
20 *Ca*	3,074	3,086	—	3,328	—	3,355	—	3,359	
21 *Sc*	—	2,778	—	3,011	—	3,028	—	3,032	
22 *Ti*	2,492	2,509	—	2,729	—	2,742	—	2,746	
23 *Va*	—	2,281	—	—	—	2,498	—	2,502	
24 *Cr*	2,069	2,079	—	—	—	2,284	—	2,288	
25 *Mn*	1,892	1,902	—	—	—	2,093	—	2,097	
26 *Fe*	1,736	1,748	—	—	—	1,928	—	1,932	
27 *Co*	1,602	1,613	—	—	—	1,781	—	1,785	
28 *Ni*	1,488	1,497	—	—	—	1,653	—	1,657	
29 *Cu*	1,379	1,391	—	—	—	1,539	—	1,543	
30 *Zn*	1,281	1,294	—	—	—	1,433	—	1,437	
31 *Ga*	—	—	—	—	—	—	—	—	
32 *Ge*	1,121	1,131	—	—	—	1,257	—	1,261	
33 *As*	1,038	1,052	—	—	—	1,170	—	1,174	
34 *Se*	—	0,993	—	—	—	1,104	—	1,109	
35 *Br*	0,914	0,929	—	—	—	1,035	—	1,040	
36 *Kr*	—	—	—	—	—	—	—	—	
37 *Rb*	0,813	0,825	—	—	—	0,922	—	0,926	
38 *Sr*	0,767	0,779	—	—	—	0,871	—	0,876	
39 *Y*	0,733	0,746	—	—	—	0,835	—	0,840	
40 *Zr*	—	0,705	—	—	—	0,788	—	0,793	
41 *Nb*	0,657	0,669	—	—	—	0,749	—	0,754	
42 *Mo*	—	0,633	—	—	—	0,710	—	0,714	
43 —	—	—	—	—	—	—	—	—	
44 *Ru*	—	0,574	—	—	—	0,645	—	—	
45 *Rh*	0,537	0,547	—	—	—	0,615	—	0,619	
46 *Pd*	—	0,521	—	—	—	0,586	—	0,590	
47 *Ag*	0,491	0,501	—	—	—	0,562	—	0,567	
48 *Cd*	—	0,479	—	—	—	0,538	—	0,543	
49 *In*	0,440	0,453	—	—	—	0,510	—	0,515	
50 *Sn*	—	0,432	—	—	—	0,487	—	0,490	
51 *Sb*	0,408	0,416	—	—	—	0,468	—	0,472	
52 *Te*	—	0,404	—	—	—	0,456	—	—	
53 *J*	—	0,388	—	—	—	0,437	—	—	
54 *X*	—	—	—	—	—	—	—	—	
55 *Cs*	—	0,352	—	—	—	0,398	—	0,402	
56 *Ba*	—	0,343	—	—	—	0,388	—	0,393	
57 *La*	—	0,329	—	—	—	0,372	—	0,376	
58 *Ce*	—	0,314	—	—	—	0,355	—	0,360	
59 *Pr*	—	0,301	—	—	—	0,342	—	0,347	
60 *Nd*	—	0,292	—	—	—	0,330	—	0,335	

Tabelle III.

L-Reihe.

$\lambda \cdot 10^8$ cm.

Moseley		α					β	γ	φ						
Sommerfeld: Element	ε	α′	α		η	v	β	γ	φ	ζ	δ	ϑ	χ	ψ
Siegbahn	l	α_2	α_1	α_3	η	β_4	β_1	β_2	β_3	β_5	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
30 *Zn*	—	—	12,346	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
33 *As*	—	—	9,701	—	—	—	9,449	—	—	—	—	—	—	—
35 *Br*	—	—	8,391	8,360	—	—	8,141	—	—	—	—	—	—	—
37 *Rb*	—	—	7,335	7,305	—	—	7,091	—	—	—	—	—	—	—
38 *Sr*	—	—	6,879	—	—	—	6,639	—	—	—	—	—	—	—
39 *Y*	—	—	6,464	6,440	—	—	6,227	—	—	—	—	—	—	—
40 *Zr*	—	—	6,083	6,057	—	—	5,851	—	—	—	5,386	—	—	—
41 *Nb*	—	5,731	5,724	5,709	—	—	5,493	5,317	—	—	—	—	—	—
42 *Mo*	—	5,410	5,403	5,381	—	—	5,175	—	—	—	—	—	—	—
44 *Ru*	—	4,853	4,845	4,823	—	—	4,630	—	—	—	—	—	—	—
45 *Rh*	—	—	4,596	4,577	—	—	4,372	—	—	—	—	—	—	—
46 *Pd*	—	4,374	4,365	4,352	—	4,071	4,144	3,904	4,030	—	3,720	3,597		—
47 *Ag*	—	4,155	4,146	4,133	—	3,861	3,928	3,698	3,823	—	3,515	—	—	—
48 *Cd*	—	3,959	3,949	—	—	3,676	3,733	3,514	3,639	—	3,331	—	—	—
49 *In*	—	3,774	3,766	—	—	—	3,550	3,354	—	—	3,160	—	—	—
50 *Sn*	—	3,604	3,594	—	—	3,337	3,381	3,172	3,300	—	2,999	2,903	2,889	2,831
51 *Sb*	—	3,443	3,434	—	—	3,184	3,222	3,021	3,149	—	2,849	2,782		—
52 *Te*	—	3,299	3,290	—	—	3,044	3,074	2,881	3,007	—	2,712	—	—	—
53 *J*	—	3,155	3,146	—	—	2,911	2,934	2,750	2,873	—	2,583	—	—	—
55 *Cs*	—	2,899	2,891	—	—	2,668	2,684	2,514	2,629	—	2,350	2,234		—
56 *Ba*	—	2,786	2,776	—	—	2,558	2,569	2,407	2,520	—	2,245	—	—	—
57 *La*	—	2,674	2,665	—	—	2,453	2,461	2,307	2,414	—	2,146	—	—	—
58 *Ce*	—	2,573	2,563	—	—	2,357	2,359	2,212	2,307	—	2,052	2,003		—
59 *Pr*	—	2,472	2,462	—	—	—	2,259	2,120	2,217	—	1,958	1,937	1,933	—
60 *Nd*	—	2,379	2,369	—	—	2,167	2,167	2,036	2,128	—	1,875	1,803	1,775	—
62 *Sa*	—	2,210	2,200	—	—	—	2,000	1,884	1,965	—	1,725	1,659		—
63 *Eu*	—	2,131	2,121	—	—	1,923	1,918	1,810	1,888	—	1,662	1,599	1,590	—
64 *Gd*	—	2,054	2,043	—	—	1,851	1,844	1,744	1,811	—	1,597	(1,562)	(1,558)	—
65 *Tb*	—	1,983	1,973	—	1,935	1,784	1,775	1,682	1,745	1,659	1,531	1 477	1,470	1,437
66 *Dy*	—	1,916	1,907	—	—	1,721	1,709	1,622	1,683	—	1,470	1,422	1,418	—
67 *Ho*	—	1,854	1,843	—	—	1,657	1,646	1,568	1,620	—	1,415	1,369	1,365	—
68 *Er*	—	1,794	1,783	—	1,725	1,599	1,586	1,514	1,560	—	1,367	1,323	1,316	—
70 *Ad*	1,892	1,681	1,670	—	1,618	1,490	1,474	1,414	1,451	1,422	1,267	1,228	1,223	—
71 *Cp*	1,834	1,629	1,619	—	—	1,437	1,421	1,368	1,399	—	1,224	1,188	1,183	—
73 *Ta*	—	1,528	1,518	—	1,435	1,343	1,323	1,280	1,303	—	1,135	1,101	1,097	—
74 *W*	1,672	1,481	1,471	—	—	1,296	1,278	1,241	1,258	—	1,095	1,064	1,058	—
76 *Os*	—	1,398	1,388	—	—	1,414	1,194	1,167	1,176	—	1,021	—	—	—
77 *Ir*	1,540	1,360	1,350	—	—	1,176	1,154	1,133	1,138	1,101	0,989	0,962	0,956	0,917
78 *Pt*	1,499	1,323	1,313	—	1,242	1,142	1,120	1,101	1,098	1,072	0,958	0,933	0,929	0,900
79 *Au*	1,457	1,283	1,271	—	1,197	1,102	1,080	1,065	1,059	1,035	0,922	0,898	0,894	0,869
80 *Hg*	—	1,251	1,240	—	—	—	1,049	1,042	—	—	0,896	—	—	—
81 *Tl*	1,385	1,215	1,205	—	1,124	1,036	1,012	1,006	0,998	0,977	0,864	0,844	0,840	0,808
82 *Pb*	1,348	1,186	1,175	—	1,091	1,008	0,983	0,983	0,968	—	0,842	0,820	0,816	0,792
83 *Bi*	1,317	1,153	1,144	—	1,059	0,977	0,950	0,954	0,937	0,923	0,810	0,794	0,790	0,762
84 *Po*	—	—	1,109	—	—	—	0,920	—	—	—	—	—	—	—
88 *Ra*	—	—	1,010	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
90 *Th*	1,117	0,969	0,957	—	—	—	0,776	0,797	0,758	—	0,654	0,635		--
92 *U*	1,066	0,922	0,911	—	—	—	0,720	0,756	0,710	—	0,615	0,596		—

Tabelle IV.

M-Reihe.

$\lambda \cdot 10^8$ cm.

	α	β	γ_1	γ_2	δ_1	δ_2	ε
79 *Au*	5,838	5,623	5,384	5,284	5,146	5,102	—
81 *Tl*	5,479	5,250	—	--	—	4,826	4,735
82 *Pb*	5,303	5,095	4,910	—	—	4,695	—
83 *Bi*	5,117	4,903	4,726	—	4,561	4,532	4,456
90 *Th*	4,139	3,941	3,812	3,678	—	—	—
92 *U*	3,905	3,715	—	3,480	3,363	3,324	—

(Fortsetzung folgt.)



BESPRECHUNGEN.

St. Meyer u. E. v. Schweidler, Radioaktivität. (Naturwissenschaft u. Technik in Lehre u. Forschung.) gr. 8°. XI u. 542 Seiten, m. 87 Abbildungen im Text. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1916. M. 22.50, geb. M. 26.50.

Die Radioaktivität, deren Entdeckung nunmehr 20 Jahre zurückliegt, hat sich in dieser kurzen Zeit zu einem so umfangreichen und vielgegliederten Grenzgebiet zwischen Chemie und Physik entwickelt, daß eine Einführung in die reichhaltige Literatur unentbehrlich geworden ist. Nun besitzen wir zwar die ausgezeichneten Lehrbücher von Frau Curie (1911) und E. Rutherford (1913) (auch in brauchbaren Übersetzungen), die in dieser Hinsicht die besten Dienste leisten können. An einem ursprünglich deutschen Werke der Art und einem solchen, das zugleich bis auf die neueste Zeit durchgeführt ist, hat es aber bisher gefehlt.

Es ist den beiden Verfassern, die bekanntlich selbst wertvolle Beiträge zur Kenntnis der Radioaktivität geliefert haben, gelungen, den weitschichtigen Stoff auf 541 Seiten so zusammenzudrängen, daß die nach jetziger Auffassung wichtigsten Ergebnisse zu einer einheitlichen Darstellung verarbeitet sind; dabei ist die Gesamtheit der reichhaltigen Literatur in denjenigen Verzeichnissen vollständig aufgeführt, die jedem Abschnitt besonders beigegeben sind. Diese Zusammendrängung ist wesentlich dadurch ermöglicht worden, daß die durch die Erfahrung in jeder Hinsicht bestätigte Rutherfordsche Zerfallstheorie von vornherein zugrunde gelegt wird. Im Vordergrunde des theoretischen Interesses stehen die Ausführungen über die Stellung der Radioelemente zum periodischen System (die Lehre von den Isotopen) und die Frage nach der Beschaffenheit des Atoms. Die Praxis der radioaktiven Untersuchungen ist in dem Kapitel über die Meßverfahren ausführlich nach dem neuesten Stande der Methodik dargestellt. Wir besitzen noch kein Buch, das uns in so mustergültiger Weise die radioaktiven Maße und Meßverfahren (zum Teil Originalverfahren des Wiener Radiologischen Instituts) klarlegt. Die Aufzählung der Wirkungen der radioaktiven Strahlung und die Kapitel über die radioaktiven Substanzen selbst und ihren Zusammenhang untereinander sind überaus reichhaltig. Der letzte Abschnitt gibt einen klaren Überblick über die Beziehungen der Radioaktivität zur Geophysik. Auf noch zu lösende Aufgaben weist uns das Kapitel über kosmische Radioaktivität hin, in dem das Rätsel der Heßschen durchdringenden Strahlung behandelt wird.

Alle, die mit radioaktiven Untersuchungen beschäftigt sind, ob Physiker, Chemiker oder Naturwissenschaftler, sie werden den Verfassern für die große Mühe dankbar sein, mit der sie sich der kritischen Sichtung und übersichtlichen Ordnung der einschlägigen Arbeiten unterzogen haben.

Karl Bergwitz.

Tagesereignisse.

Die **deutsche Hochschule in Brünn** soll durch die Einrichtung eines elektrotechnischen und chemischen Instituts sowie einer Material-Prüfungsstelle bedeutend erweitert werden.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent für Chemie, Nahrungs- und Genußmittel an der Universität Frankfurt a. M. Dr. M. Tillmans zum a. o. Professor an derselben Hochschule.

Ehrung: Geheimrat Prof. Dr. W. Nernst in Berlin zum stimmberechtigten Ritter des Ordens Pour le mérite für Wissenschaft und Künste.

Berufen: Der Oberlehrer am Mommsen-Gymnasium in Charlottenburg Professor Dr. Hans Beck zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Bonn.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Chemie an der Universität München Wirkl. Geh. Rat Dr. Adolf v. Baeyer, der Professor der Chemie an der Universität Würzburg Geh. Regierungsrat Dr. Eduard Buchner infolge einer im Felde erhaltenen schweren Verwundung, der Professor der Chemie an der Ecole des Mines in Mons H. van Laer.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



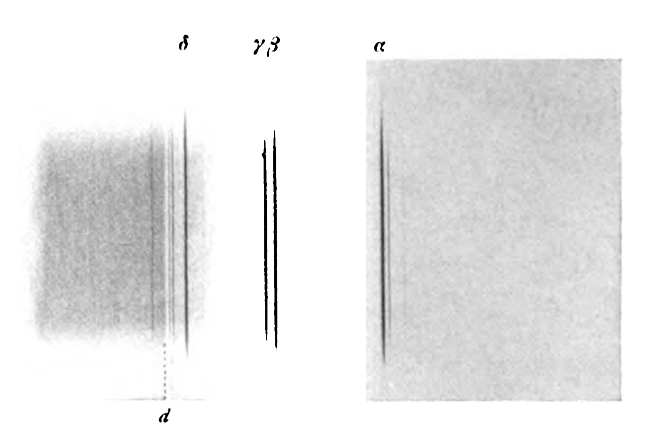


Fig. 4. (Drehender Kristall.)
L-Serie des Platins.



Fig. 5. (Stehender Kristall.)

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 18. 15. September 1917. 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 19 am 10. September 1917.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Thermodynamik des Drosselvorgangs.

Bemerkung zur gleichnamigen Arbeit von R. Plank[1]).

Von M. Jakob.

Plank erhält aus der von ihm abgeleiteten Formel

$$\frac{v}{T} = \frac{c_p^0}{10^4 \cdot A} \int \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial p}\right)_T dT + f(p) \qquad (1)$$

die Zustandsgleichung der Luft

$$v = \frac{RT}{10^4 \cdot p} + 0{,}0103 \left(\frac{8{,}9}{T} - \frac{7833}{T^2} + \frac{15 p^2}{T^3}\right), \quad (2)$$

indem er die Abkühlung bei Drosselung auf Atmosphärendruck darstellt durch die Formel

$$\Delta = -\frac{17{,}8\, p}{T} + \frac{23\,500\, p}{T^2} - \frac{20\, p^3}{T^3}. \qquad (3)$$

Gleichung (2) führt zu falschen Volumenwerten, worauf schon Schames[2]) hingewiesen hat. Plank[3]) betont demgegenüber, daß seine empirischen Gleichungen nur in dem Gebiet von — 100 bis 0° C und von 70 bis 200 at Anspruch auf Zuverlässigkeit erheben; aber auch in diesem Bereich weicht v viel zu stark von den besten bekannten Beobachtungswerten ab, bei dem höchsten genannten Druck z. B. um über 10 Proz.

Aus der Bemerkung von Schames geht nicht hervor, ob diese Unstimmigkeit von der Gleichung (1) oder wo sonst herrührt. Im folgenden wird gezeigt, daß sie im wesentlichen auf die Annahme zurückzuführen ist, die Plank für die Funktion $f(p)$ in Gleichung (1) getroffen hat. Um eine in weiten Grenzen brauchbare Zustandsgleichung aus der Formel (1) zu gewinnen, muß man außerdem Gleichung (3) durch eine Ausgangsgleichung von größerem Gültigkeitsbereich ersetzen.

Plank setzt die willkürliche Funktion in Gleichung (1) $f(p) = \frac{R}{10^4 \cdot p}$, weil für ein ideales Gas der Integralwert auf der rechten Seite der Gleichung (1) verschwinde und $\frac{v}{T} = \frac{R}{10^4 \cdot p}$ werde. Für ein ideales Gas verschwindet nun in der Tat der Integralwert, weil für ein solches bei allen Temperaturen $\left(\frac{\partial \Delta}{\partial p}\right)_T = 0$ ist[1]), aber wenn der Integralwert verschwindet, so ist damit noch nicht gesagt, daß die betrachtete Substanz bei dem betreffenden Zustand ein ideales Gas ist oder sich wie ein solches verhält. Nach Gleichung (3) wird der Integralwert unendlich klein für $T = \infty$ und für

$$T = 440 \pm \sqrt{193600 - 1{,}686\, p^2}.$$

Planks Rechnung wäre korrekt, wenn das eine oder andere die Gleichung der „Idealkurve" wäre. Die Erfahrung zeigt, daß dies nicht der Fall ist; also darf die willkürliche Funktion $f(p)$ nicht $= \frac{R}{10^4 \cdot p}$ angenommen werden. Um sie zu bestimmen, muß man v als Funktion des Druckes bei einer Temperatur kennen, und daß man das muß, ist gerade der Sinn der Funktion $f(p)$. Es läßt sich also nicht, wie Plank annimmt, v für beliebige Drucke und Temperaturen aus der Gaskonstanten und den Drosselversuchen allein bestimmen, sondern nur aus diesen und einer Isotherme[2]).

1) R. Plank, diese Zeitschr. **17**, 521, 1916.
2) L. Schames, diese Zeitschr. **18**, 30, 1917.
3) R. Plank, diese Zeitschr. **18**, 33, 1917.

1) Nach der von Plank abgeleiteten Gleichung für den Thomson-Joule-Effekt $\alpha = \frac{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial p}\right)_T}{1 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial T}\right)_p}$ wird nämlich offenbar der Zähler $\left(\frac{\partial \Delta}{\partial p}\right)_T$ gleichzeitig mit α unendlich klein.

2) Ein anderer Weg wäre, Gleichung (3) eine Form zu geben, nach der $\int \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial p}\right)_T dT = 0$ identisch mit der

Unter Beibehaltung der Gleichung (3) erhält man aus einer beliebigen Isotherme etwa nach Amagat und nach Holborn und Schultze die empirische Gleichung

$$\left.\begin{aligned} f(p) &= \frac{R}{10^4 \cdot p} + \varphi(p) = \frac{R}{10^4 \cdot p} + \\ &+ \left(1{,}6 - \frac{0{,}6}{1{,}015^p}\right)\frac{1}{10^6}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Fügt man nun $T\varphi(p)$ zur rechten Seite der Gleichung (2), so wird v mit einem Schlag in dem Bereich von -80 bis $+200^0$ C und von 0 bis 200 at auf mindestens 1 Proz. richtig. Dagegen bleibt der Einwand von Schames bestehen, daß die differentielle Inversionskurve $\left(\frac{\partial \Delta}{\partial p}\right)_T = 0$ einen unmöglichen Verlauf hat.

Um diesem Einwand zu begegnen, muß man unbedingt auch die Gleichung (3) abändern. Ich habe, wie aus einem ausführlichen Bericht darüber vorweg genommen werden soll, eine Gleichung für Δ entwickelt, welche die Versuchswerte von Bradley und Hale und von Noell zwischen $p = 0$ und $p = 200$ at und von -120 bis $+250^0$C mit genügender Genauigkeit wiedergibt, und zu einer Zustandsgleichung von vielen Gliedern, aber von mathematisch ganz einfachem Aufbau führt. Die aus dieser Zustandsgleichung berechneten Volumina stimmen in dem eben genannten Druck- und Temperaturbereich gut überein mit den Beobachtungen von Amagat, Witkowski, Koch und von Holborn und Schultze, ferner mit den Messungen von Amagat zwischen 0 und 200^0 bis über 700 at und bei 200^0 bis über 1000 at. Der von Plank erstmals beschrittene Weg führt also zum Ziel, wenn man ihn richtig verfolgt.

Gleichung der „Idealkurve" wäre. In diesem Falle wäre $f(p) = \frac{R}{10^4 p}$; statt einer Isotherme müßte dann aber die Idealkurve gegeben sein.

Charlottenburg, 31. Juli 1917.

(Eingegangen 3. August 1917.)

Versuche über die Modifizierung des Faradayeffektes im Eisen in Anwesenheit nichtferromagnetischer Metalle.

(Vorläufige Mitteilung)[1]).

Von Béla Pogány.

Herr W. Voigt[2]) hat in einer theoretischen Arbeit auf Grund der Beobachtungen Ingersolls über den magnetooptischen Kerreffekt den Schluß gezogen, daß das magnetooptische Verhalten von Eisen und Kobalt wenigstens im ultraroten Teile des Spektrums vorwiegend durch die Leitungselektronen bestimmt ist. Vorausgesetzt nun, daß die Leitungselektronen der gewöhnlichen Lorentz-Kraft unterliegen, berechnet Voigt auf Grund der Beobachtungen die Stärke der magnetischen Felder, innerhalb welcher sich diese Leitungselektronen bewegen. Es ergibt sich dafür 10^7 Gauß. Dieselbe Größenordnung bekommt Voigt auf Grund der P. Weissschen Theorie des Ferromagnetismus für die Stärke des bei den Ingersollschen Beobachtungen im Eisen bzw. Kobalt auftretenden molekularen Feldes. Von zwei verschiedenen Seiten wurde also Voigt zu der Annahme der hohen molekularen Feldstärken geführt. Es scheint nun, daß die Leitungselektronen und die hohen molekularen Felder die zwei Faktoren sind, die bei dem magnetooptischen Verhalten der ferromagnetischen Metalle die wesentlichen Rollen spielen.

Da ja nun Leitungselektronen auch in den nichtferromagnetischen Metallen vorhanden sind, so fand ich es nicht uninteressant, nachzusehen, ob nicht auch die nichtferromagnetischen Metalle den Faradayeffekt in derselben Größenordnung wie die ferromagnetischen Metalle ergeben, wenn nur ihre Leitungselektronen sich in den hohen molekularen Feldern des Eisens bewegen. Letzteres dachte ich mir in allerdings roher Annäherung so zu realisieren, daß ich eine dünne Schicht nichtferromagnetischen Metalls zwischen zwei Eisenschichten brachte. Dies waren die Überlegungen, die zu den im folgenden beschriebenen Versuchen geführt haben. Ich werde zuerst die zu den Versuchen benutzten Präparate und die Versuchsanordnung kurz beschreiben und dann die bisherigen Resultate mitteilen. Zuletzt will ich dann einige Überlegungen besprechen, welche darauf hinweisen, daß die Heranziehung sekundärer Erscheinungen zur Erklärung der Beobachtungsresultate nicht recht möglich ist.

1. Die benutzten Präparate.

Sämtliche Metallschichten wurden durch Kathodenzerstäubung hergestellt auf Zeißsche Spiegelglasdeckgläser von 26×76 mm Größe und 0,5 bis 0,7 mm Dicke. In demjenigen Vakuumgefäß, wo die nichtferromagnetischen Metalle zerstäubt wurden, befanden sich gar keine Eisenteile. Die Präparate wurden in der Weise hergestellt, daß zuerst die ganze Glasplatte mit einer Eisenschicht, Fe_2, überzogen wurde, dann wurde die eine Hälfte mit einer Glasplatte bedeckt und die andere mit einer

1) Vorgelegt d. Ung. Akad. d. Wiss. am 18. Juni 1917.
2) W. Voigt, Gött. Nachr. 1915, S. 139; diese Zeitschr. 16, 298, 1915.

nichtferromagnetischen Metallschicht belegt und schließlich wieder die ganze Platte mit Eisen, Fe_2, bestäubt (Fig. 1). In den beiden Hälften

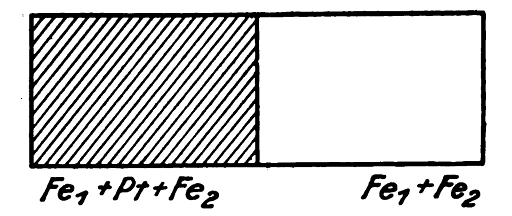


Fig. 1.

des Präparates habe ich dann im durchgehenden Lichte die magnetische Drehung der Polarisationsebene beobachtet, und die Differenz dieser beiden Beobachtungen würde dann die auf die nichtferromagnetische Metallschicht entfallende Drehung ergeben. Spätere Präparate habe ich auch beobachtet, bevor die zweite Eisenschicht auf die Platte gekommen ist. Zuletzt habe ich noch das nichtferromagnetische Metall treppenartig zwischen zwei Eisenschichten angeordnet, so daß ich die Drehung zwischen denselben beiden Eisenschichten allein als Funktion der Dicke des nichtferromagnetischen Metalles untersuchte.

2. Versuchsanordnung.

Das Licht einer Bogenlampe oder Sonnenlicht, durch ein Hilgersches Spektrometer konstanter Ablenkung monochromatisiert und durch ein Tessarobjektiv wieder parallel gemacht, fiel auf ein Nicolsches Prisma. Das linear polarisierte Licht ging dann durch das zwischen den Polschuhen eines Du Boisschen Elektromagneten befindliche Präparat, durch eine Halbschattenplatte, dann durch einen Analysator und fiel schließlich auf das Objektiv eines auf die Halbschattenplatte eingestellten Fernrohres. Die Halbschattenplatte, welche zwischen Präparat und Analysator angeordnet war, war eine sogenannte unsymmetrische Platte[1]). Bei einigen Beobachtungen, wo es sich um die Durchleuchtung dickerer Metallschichten handelte, habe ich zwei symmetrische, dickere, aber auch unempfindlichere Halbschattenplatten benutzt. Um über große Intensität zu verfügen, habe ich den Spalt des Monochromators breit (ungefähr 1,5 mm) gewählt. Die Drehungen des Analysators wurden auf einem Kreis von 20 cm Radius abgelesen; der Nonius war in 10″ geteilt. Die Stärke des magnetischen Feldes habe ich mit einer Wismutspirale von 5 mm Durchmesser als Funktion der Stromstärke im Elektromagneten gemessen, und bei den optischen Beobachtungen wurde immer die Stromstärke mit einem zu $^1/_{10}$ Amp. geteilten Westonschen Instrument eingestellt. Das Präparat war in einer messingenen Fassung angebracht, welche auf einer massiven Messingschiene bewegbar war. Die Schiene war mit der Grundplatte des Elektromagneten derart fest verbunden, daß das Präparat mit sich parallel zwischen den Polschuhen verschoben werden konnte.

1) Ich verdanke diese Platte der Liebenswürdigkeit von Herrn Geheimrat Voigt.

3. Die Resultate der Beobachtungen.

Alle Beobachtungen habe ich im gelben Licht (ungefähr $\lambda = 590\ \mu\mu$), im selben Interferricum bei 3,6 Amp. Stromstärke angestellt, was einer Feldstärke von rund 23000 Gauß entsprach. Die Feldrichtung habe ich immer kommutiert, so daß die doppelte Drehung gemessen wurde. Den Gang der Beobachtung kann man am einfachsten an einem Beispiel übersehen. Ich teile deshalb das Beobachtungsprotokoll Nr. 55 mit.

21. III. 1917. $\lambda = 590\ \mu\mu$. $I = 3{,}6$ A. Dicke der Glasplatte 0,64 mm.

$Fe_1 + Pt$	Fe_1
8° 59′ 40″	9° 3′ 50″
59 40	4 00
Mittelwert: 8° 59′ 40″	Mittelwert: 9° 3′ 55″

Kommutierung.

$Fe_1 + Pt$	Fe_1
7° 46′ 40″	7° 58′ 50″
46 30	59 40
Mittelwert: 7° 46′ 35″	59 00
2(Glas + Fe_1 + Pt) = 1° 13′ 5″	Mittelwert: 7° 59′ 10″
	2 (Glas + Fe_1) = 1° 4′ 45″

$2\,Pt = 8'\,20''$, $Pt = 4'\,10''$

Nach Bestäuben mit Fe_2:

$Fe_1 + Pt + Fe_2$	$Fe_1 + Fe_2$
7° 24′ 40″	7° 47′ 00″
23 40	48 00
23 30	48 50
23 20	46 40
23 40	46 30
	46 00
Mittelwert: 7° 23′ 46″	Mittelwert: 7° 47′ 10″

Kommutierung.

$Fe_1 + Pt + Fe_2$	$Fe_1 + Fe_2$
9° 31′ 20″	9° 17′ 00″
30 30	15 40
30 30	16 40
29 50	16 50
	15 50
Mittelwert: 9° 30′ 32″	Mittelwert: 9° 16′ 24″
2 (Glas + Fe_1 + Pt + Fe_2) = 2° 6′ 46″	2 (Glas + Fe_1 + Fe_2) = 1° 29′ 14″

$2\,Pt = 37'\,32''$, $Pt = 18'\,46''$.

In der dritten bzw. vierten Kolonne der Tabellen sind die Winkel (im Protokoll einfach mit Pt bezeichnet) eingetragen, um welche die magnetische Drehung von $Fe_1 + Pt$ bzw. $Fe_1 + Pt + Fe_2$ größer war als diejenige von Fe_1 bzw. $Fe_1 + Fe_2$.

Die Dicke der Eisenschichten wurde aus ihrer Drehung berechnet, diejenige der nichtferromagnetischen Metallschichten durch Wägung bestimmt. Bei den treppenartigen Präparaten wurde die ganze Treppe abgewogen und die Stufenhöhe unter der Voraussetzung berechnet, daß alle Stufen gleich hoch sind. War die Bestäubungszeit der ersten Stufe t, so war diejenige der $k$ten Stufe unter möglichst konstanten Verhältnissen $k \times t$. Ich werde also immer nur die Höhe der ersten Stufe angeben. In der ersten Tabelle sind die ersten, mehr qualitativen Beobachtungen mitgeteilt. Die Dicke der nichtferromagnetischen Metallschicht ist noch unbekannt. Die Dicke der Eisenschichten Fe_1 und Fe_2 ist auch nur in ihrer Summe $Fe_1 + Fe_2$ bekannt.

Tabelle I.

Plattennummer	Material u. Dicke der nichtferromagnetischen Schicht		$(Fe_1+Pt+Fe_2)-$ $-(Fe_1+Fe_2)$	Dicke von Fe_1+Fe_2	Glasdicke
40	Pt	—	7′ 43″	28,4 μμ	0,70 mm
41	„	10,0 μμ	14 35	25,0	0,56
41	„	10,0	12 52	25,0	0,56
41	„	10,0	12 54	25,0	0,56
42	Au	—	5 10	31,0	0,56
43	Pd	—	3 23	24,3	0,70

Die nichtferromagnetischen Schichten der Präparate 40 bis 43 wurden noch in demselben Vakuumgefäß mit Eisenanode hergestellt wie die Eisenschichten. Ab Nr. 44 wurden alle nichtferromagnetischen Metallschichten in einem anderen Vakuumgefäß mit einem Messingteller als Anode hergestellt.

Tabelle II.
Material der nichtferromagnetischen Schicht: Pt.

Plattennummer	Dicke der nichtferromagnetischen Schicht	$(Fe_1+Pt+Fe_2)-$ $-(Fe_1+Fe_2)$	Dicke von Fe_1+Fe_2	Dicke der Glasplatte
44	16,4 μμ	10′ 37″	17,4 μμ	0,70 mm
45	9,5	11 38	16,6	0,56
46	5,3	2 00	36,7	0,56
47	3,5	6 00	25,0	0,65
48	2,8	1 30	38,4	0,68
49	5,5	12 48	21,5	0,62
50	7,8	14 20	24,2	0,64
50	7,8	15 18	24,2	0,64
51	8,0	10 41	19,0	0,66

Ab Nr. 52 habe ich die Präparate auch in dem Zustand untersucht, als die Fe_2-Schicht noch fehlte, also auf der einen Hälfte Fe_1, auf der anderen z. B. $Fe_1 + Pt$ war. Die nichtferromagnetische Metallschicht grenzte also nur auf der einen Seite an Eisen. Es konnte so gemessen werden, um welchen Betrag die Drehung $(Fe_1 + Pt) - Fe_1$ sich unter dem Einfluß von Fe_2 ändert, sich also von

$$(Fe_1 + Pt + Fe_2) - (Fe_1 + Fe_2)$$

unterscheidet. Wie die Kolonnen 3 und 4 der Tabelle III zeigen, ist die Wirkung von Fe_2 gut zu beobachten.

Die Angaben der Tabelle III beziehen sich mit Ausnahme von 56 alle auf Pt. Mit Ausnahme von 53, 54 und 64 wuchs die Drehung

Tabelle III.

Plattennummer	Material und Dicke der nichtferromagnetischen Schicht		$(Fe_1 + Pt) - Fe_1$	$(Fe_1 + Pt + Fe_2)-$ $-(Fe_1 + Fe_2)$	Dicke von Fe_1	und Fe_2	Dicke der Glasplatte
52	Pt	1?,8 μμ	10′ 45″	12′ 11″	24,8 μμ	22,8 μμ	0,66 mm
52	„	13,8	—	12 50	24,8	22,8	0.66
53	„	8,4	7′ 3″	4 35	9,5	5,5	0,68
53	„	8,4	—	3 15	9,5	5.5	0,68
54	„	10,6	2′ 10″	0 20	7,9	5,1	0,69
55	„	26,1	4 10	18 46	9,3	10,2	0,61
			$(Fe_1 + Au) - Fe_1$	$(Fe_1 + Au + Fe_2) -$ usw.			
56	Au	6,4	2′ 45″	3′ 50″	9,2	12,6	0,62
			$(Fe_1 + Pt) - Fe_1$	$(Fe_1 + Pt + Fe_2) -$ usw.			
57	Pt	11,0	3′ 24″	12′ 00″	13,4	17,1	0,62
58	„	7,4	7 24	16 19	27,0	47,0	0,60
59	„	10,8	7 11	9 52	22,7	42.0	0,58
60	„	5.0	3 13	3 2	13 4	23,5	0,63
61	„	3,4	4 14	4 15	11,6	17,2	0,63
62	„	9,1	4 56	10 30	17,0	25,6	0,60
63	„	10,8	4 43	13 2	12,4	26,2	0,70
64	„	46,8	9 2	0 15	10,4	30,2	0,71
65	„	7.1	2 55	6 50	11,2	17,7	0,72
66	„	16,3	7 49	—	13.3	—	0.70

bei *Pt* unter dem Einfluß von Fe_2. Der Grund für die Abnahme der Drehung unter dem Einfluß von Fe_2 im Falle von 53 und 54 liegt wahrscheinlich in der geringen Dicke von Fe_1 bzw. Fe_2. Bei später zu veröffentlichenden Versuchen über den Faradayeffekt in Eisenschichten habe ich nämlich gefunden, daß die spezifische Drehung in Eisen unterhalb gewisser Grenzdicke abnimmt. Die Dicken von Fe_2 bei 53, von Fe_1 und Fe_2 bei 54 fallen nun jede für sich genommen unterhalb, die Dicke ihrer Summe, $Fe_1 + Fe_2$ aber oberhalb jener Grenzdicke. Es ist deshalb die spezifische Drehung von $Fe_1 + Fe_2$ größer als diejenige von Fe_1 oder Fe_2. Die Abnahme der Drehung unter dem Einfluß von Fe_2 bei Nr. 64 ist höchstwahrscheinlich in der relativ großen Dicke (46,8 $\mu\mu$) der *Pt*-Schicht begründet. Diese Deutung wird durch die an den treppenartigen Präparaten gewonnenen Resultate nahegelegt. Im allgemeinen sieht man, daß die auf die nichtferromagnetische Metallschicht entfallende Drehung sowohl von der Dicke der Eisenschichten Fe_1 und Fe_2, wie auch von derjenigen der nichtferromagnetischen Metallschicht abhängt. Ich wollte zuerst die Abhängigkeit von der Dicke der nichtferromagnetischen Metallschicht untersuchen und habe deshalb die treppenartigen Präparate hergestellt. Im folgenden sind die an den *Pt*-, *Pd*-, *Au*-, *Ag*- und *Cu*-Treppen gewonnenen Resultate mitgeteilt.

67. *Pt.* Dicke der Glasplatte = 0,58 mm.

Dicke von $Fe_1 = 21{,}7\ \mu\mu$
" " $Fe_2 = 22{,}2$
" " $Pt_1 = 6$

	Pt_1	Pt_2	Pt_3	Pt_4	Pt_5	Pt_6
$(Fe_1 + Pt_x) - Fe_1 =$	4 33″	7′ 6″	9′ 55″	10′ 23″	10′ 47″	—
$(Fe_1 + Pt_x + Fe_2) - (Fe_1 + Fe_2) =$	11 9	15 00	17 4	17 32	15 51	13′ 32″
4 Wochen später mit einer symmetrischen Halbschattenplatte: =	13′ 45″	17′ 5″	19′ 30″	19′ 16″	18′ 20″	—

68. *Pt.* Dicke der Glasplatte = 0,68 mm.

Dicke von $Fe_1 = 8{,}0\ \mu\mu$
" " $Pt_1 = 5{,}6$

	Pt_1	Pt_2	Pt_3	Pt_4	Pt_5	Pt_6
$(Fe_1 + Pt_x) - Fe_1 =$	2′ 18″	3′ 53″	5′ 11″	5′ 46″	6′ 28″	7′ 33″

69. *Au.* Dicke der Glasplatte = 0,64 mm.

Dicke von $Fe_1 = 13{,}8\ \mu\mu$
" " $Au_1 = 10{,}9$

	Au_1	Au_2	Au_3
$(Fe_1 + Au_x) - Fe_1 =$	1′ 35″	2′ 30″	3′ 25″

70. *Cu.* Dicke der Glasplatte = 0,64 mm.

Dicke von $Fe_1 = 20{,}4\ \mu\mu$
" " $Fe_2 = 30{,}5$
" " $Cu_1 = 8{,}0$

	Cu_1	Cu_2	Cu_4	Cu_6	Cu_8
$(Fe_1 + Cu_x) - Fe_1 =$	0′ 30″	4′ 45″	8′ 00″	8′ 38″	9′ 34″
$(Fe_1 + Cu_x + Fe_2) - (Fe_1 + Fe_2) =$	− 2 00	5 17	7 00	—	—
=	− 1 50	4 40	5 40	4 5	5 24
nach einem Monat =	− 1 45	4 11	5 17	3 35	2 25

Das Präparat 71 ist verdorben.

72. *Pt.* Dicke der Glasplatte = 0,65 mm.

Dicke von $Fe_1 = 20{,}0\ \mu\mu$
" " $Fe_2 = 29{,}4$
" " $Pt_1 = 8{,}8$

	Pt_1	Pt_2	Pt_3	Pt_4	Pt_5	Pt_6
$(Fe_1 + Pt_x) - Fe_1 =$	0′ 55″	2′ 10″	2′ 30″	6′ 20″	3′ 32″	—
$(Fe_1 + Pt_x + Fe_2) - (Fe_1 + Fe_2) =$	7 35	11 25	9 15	12 00	—	—
(nach einem Monat mit Sonnenlicht auch Pt_6 durchleuchtet) =	6 5	10 50	8 20	9 50	5 00	− 1′ 15″

73. *Pt.* Dicke der Glasplatte = 0,57 mm.

Dicke von $Fe_1 = 17{,}0\ \mu\mu$
" " $Fe_2 = 31{,}0$
" " $Pt_1 = 8{,}7$

	Pt_1	Pt_2	Pt_3	Pt_4	Pt_5
$(Fe_1 + Pt_x) - Fe_1 =$	4′ 00″	6′ 55″	8′ 15″	8′ 37″	8′ 5″
$(Fe_1 + Pt_x + Fe_2) - (Fe_1 + Fe_2) =$	13 2	13 2	13 7	12 7	8 2

74. *Cu.* Dicke der Glasplatte = 0,67 m.

Dicke von $Fe_1 = 20{,}0\ \mu\mu$
" " $Fe_2 = 43{,}3$
" " $Cu_1 = 30{,}0$

	Cu_1	Cu_2	Cu_3	Cu_4
$(Fe_1 + Cu_x) - Fe_1 =$	8′ 47″	11′ 32″	14′ 1″	13′ 7″
$(Fe_1 + Cu_x + Fe_2) - (Fe_1 + Fe_2) =$	9 37	8 53	7 40	—

75. *Pd.* Dicke der Glaspatte = 0,58 mm.

Dicke von $Fe_1 = 13{,}1\ \mu\mu$
" " $Fe_2 = 26{,}0$
" " $Pd_1 = 7{,}0$

	Pd_1	Pd_2	Pd_3	Pd_4	Pd_5	Pd_6
$(Fe_1 + Pd_x) - Fe_1 =$	4′ 43″	8′ 50″	11′ 36″	11′ 32″	10′ 10″	8′ 12″
$(Fe_1 + Pd_x + Fe_2) - (Fe_1 + Fe_2) =$	4 30	7 30	7 20	6 5	3 30	2 30

76. *Ag.* Dicke der Glasplatte = 0,64 mm.

Dicke von $Fe_1 = 23{,}0\ \mu\mu$
" " $Fe_2 = 49{,}0$
" " $Ag_1 = 16{,}9$

	Ag_1	Ag_2	Ag_3	Ag_4	Ag_5	Ag_6
$(Fe_1 + Ag_x) - Fe_1 =$	6′ 21″	10′ 5″	12′ 35″	12′ 15″	10′ 6″	10′ 56″
$Fe_1 + Ag_x + Fe_2) - (Fe_1 + Fe_2) =$	7 50	15 06	13 21	—	—	—

Die vorstehenden Resultate sind durch die Kurven der Fig. 2—9 veranschaulicht. Der allgemeine Habitus der Kurven ist bei allen fünf untersuchten Metallen derselbe. Es soll hierbei bemerkt werden, daß das Maximum der Kurve Fe_1 + nichtferromagnetisches Metall + Fe_2 teil-

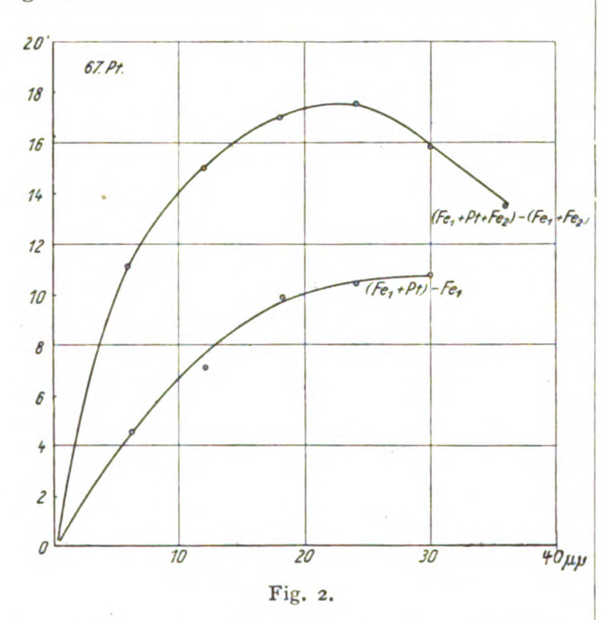


Fig. 2.

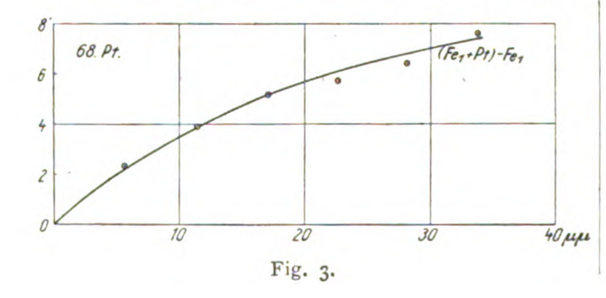


Fig. 3.

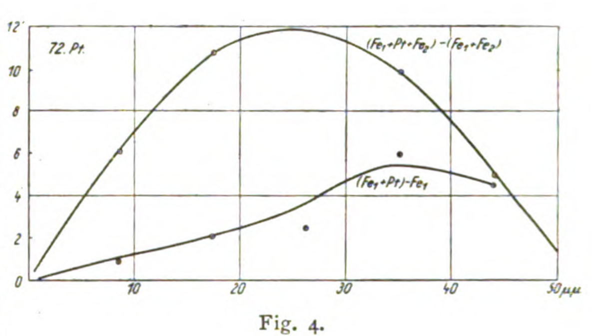


Fig. 4.

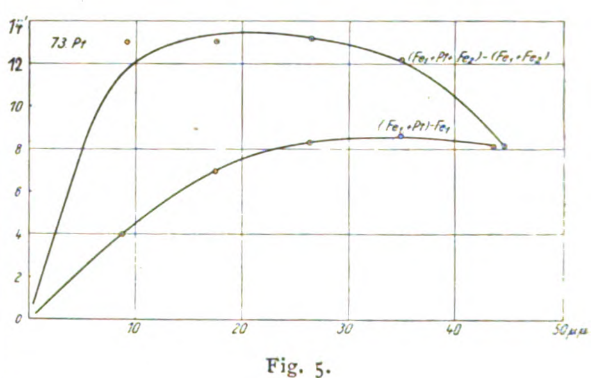


Fig. 5.

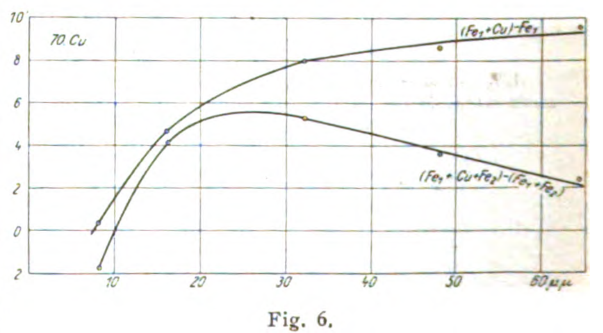


Fig. 6.

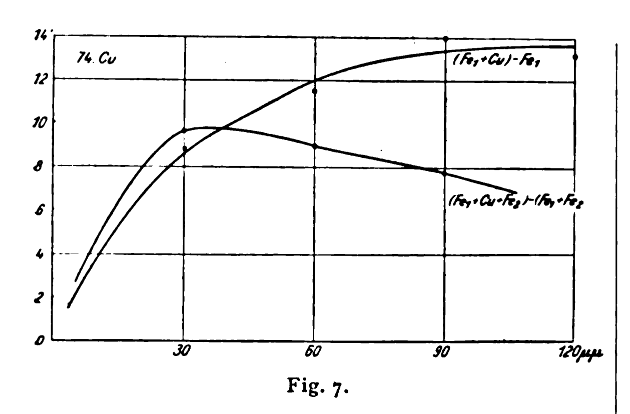


Fig. 7.

weise seinen Ursprung darin hat, daß die Dicke der Eisenschichten in der Mitte der länglichen Platte um einige $\mu\mu$ größer war als an den Enden. Jedoch scheint dieser Umstand das Maximum nur teilweise zu erklären, was neben den quantitativen Verhältnissen qualitativ auch aus der Vergleichung der *Cu*-Kurven 70 und

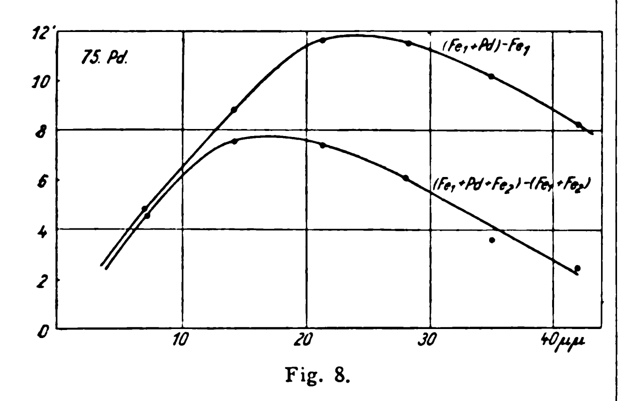


Fig. 8.

74 hervorgeht, wo das Maximum jedesmal bei ungefähr 30 $\mu\mu$ *Cu*-Dicke einmal in der Mitte und einmal nahe dem Ende der Platte auftritt. In den endgültigen Messungen wird die durch obigen Umstand bedingte Korrektion zum Teil leicht anzubringen sein, zum Teil aber, da hier auch die Abhängigkeit der auf die nichtferro-

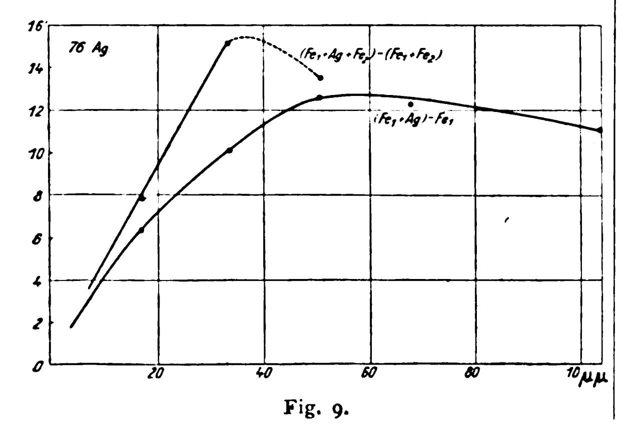


Fig. 9.

magnetische Metallschicht entfallenden Drehung von der Dicke der Eisenschicht ins Spiel tritt, näheres Studium erfordern. Die Herstellung von Eisenschichten, die einen wesentlich größeren Grad von Homogenität aufweisen, was durch Anwendung noch größerer Kathoden ebenfalls versucht werden soll, wäre natürlich der einfachste Ausweg.

Die bisherigen Resultate sind also dahin zusammenzufassen, daß die mit einer nichtferromagnetischen Metallschicht belegte Eisenschicht bzw. die Kombination $Fe_1 +$ nichtferromagnetisches Metall $+ Fe_2$ im allgemeinen eine größere magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes aufweisen, als die Eisenschichten Fe_1 bzw. $Fe_1 + Fe_2$. Man erhält nun eine mögliche einfache Erklärung dieser Resultate, wenn man sich auf den in der Einleitung skizzierten Standpunkt stellt, der ja auch die Versuche veranlaßt hat, wenn man also voraussetzt, daß unter dem Einfluß des molekularen magnetischen Feldes des Eisens auch die nichtferromagnetische Metallschicht die Polarisationsebene des Lichtes dreht. Da nun in Anwesenheit der nichtferromagnetischen Metallschicht der Faradayeffekt des Eisens sich vergrößerte, so würden die bisherigen Versuche ergeben, daß die untersuchten Metalle ebenfalls positiv drehen. Daß von den untersuchten Metallen *Pt* und *Pd* paramagnetisch, *Au*, *Ag*, *Cu* diamagnetisch sind, würde keine Schwierigkeit bereiten, da ja, wie bekannt, positive Drehung sowohl bei para- wie bei diamagnetischen Körpern vorkommt. Wie aus den Tabellen ersichtlich, wäre die Größenordnung der Drehung in den günstigen Fällen ungefähr dieselbe (etwas kleiner) wie bei Eisen. Diese Betrachtungen bilden wie gesagt nur eine mögliche Erklärung der Versuchsresultate, eine endgültige Stellungnahme wird von den Ergebnissen weiterer Versuche abhängen. Neben Ausdehnung der Versuche auf andere ferromagnetische und nichtferromagnetische Metalle kommt hier wohl zunächst die Untersuchung der Abhängigkeit der Drehung von der Dicke der Eisenschichten in Betracht.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß einige Präparate von beiden Seiten untersucht, also auch bei auf die Glasseite einfallendem Lichte, innerhalb der Versuchsfehler dasselbe Resultat ergeben haben. Die Präparate 55 und 67 habe ich auch ohne Halbschattenplatte nur mit einem Nicolschen Prisma als Analysator beobachtet unter Vorschaltung eines Glimmerkompensators, da das durchtretende Licht schwach elliptisch polarisiert war. Ich habe zu diesem Zweck das Beobachtungsfernrohr eines Fueßschen Polarisationsspektrometers an die Stelle der gewöhnlich benutzten Anordnung (Halbschattenplatte,

Nicol, Fernrohr) gebracht, und die Azimute der wiederhergestellten linearen Polarisationen beobachtet, was in dem besonderen Falle (sehr kleine Elliptizität und $^1/_4$ Wellenlängenplatte für die benutzte Lichtart) im wesentlichen durch die Kompensatorablesungen bestimmt war. Wie die kleine Zusammenstellung zeigt, ist die Übereinstimmung mit den früheren Beobachtungen gut.

	55	67 Pt_1	Pt_2	Pt_4
Unsymmetr. Halbschattenplatte .	17′ 30″	11′ 9″	15′ 00″	17′ 32″
Fueßsches Polarisat.-Spektrometer	16 30	12 30	16 00	18 00

Es soll zuletzt an eine sekundäre Erscheinung erinnert werden, die bei der Erklärung der obigen Resultate wenigstens qualitativ ihrem Sinne nach in Betracht käme. Wird nämlich die magnetisch-aktive Schicht von der Lichtwelle nicht nur einmal, sondern infolge innerer Reflexionen dreimal, fünfmal durchsetzt, so modifiziert sich die Einstellung einer Halbschattenplatte derart, daß die Drehung scheinbar größer wird, daß also am beobachteten Drehungswinkel δ eine Korrektion[1])

$$d\delta = -\frac{j}{2J}\sin 4\delta$$

anzubringen ist, wobei J die Intensität der direkt austretenden, j diejenige der nach zweifacher innerer Reflexion austretenden Lichtwelle ist. Will man obige Versuchsresultate durch diese Erscheinung erklären, so kommen als aktive Schichten die zwei Eisenschichten in Betracht. Wie die Rechnung zeigt, ist aber die so entstehende Korrektion (meistens kleiner als eine Bogenminute) quantitativ nicht imstande, die Beobachtungen zu erklären. Neben J ist nämlich j sehr klein, nicht nur infolge der zweifachen Reflexion, sondern auch infolge der auf dem dreifachen Wege im Eisen erlittenen Absorption.

Die Beobachtungen stammen aus dem Phys. Inst. d. Universität Kolozsvár. Dem Direktor des Instituts, Herrn Prof. K. Tangl, sage ich aufrichtigen Dank für sein wohlwollendes Interesse und für die Beschaffung der experimentellen Hilfsmittel.

1) Siehe W. Voigt, Magnetooptik, S. 13.

(Eingegangen 23. Juli 1917.)

Optische Absorptionsgrenzen.

Von P. Debye.

Die Barkla-Wagnerschen Absorptionsgrenzen im Gebiete der Röntgenfrequenzen beanspruchen in Zusammenhange mit den modernen, auf Bohr zurückgehenden Spekulationen über den Atomaufbau ein erhebliches Interesse.

Verfolgt man die Absorption monochromatischer Röntgenstrahlung als Funktion der Wellenlänge in irgendeinem chemischen Element, dann nimmt der Absorptionskoeffizient mit abnehmender Wellenlänge zunächst stetig ab. An einigen Stellen im Spektrum findet man aber einen plötzlichen Sprung jenes Koeffizienten auf ein Vielfaches des vor den Absorptionsgrenzen zu beobachtenden Wertes. Die Wellenlängen jener Grenzen stehen in unmittelbarem Zusammenhange mit den bei geeigneter Anregung auftretenden Emissionsfrequenzen des absorbierenden Elements; zur K-Serie gehört ein einfacher, zur L-Serie ein doppelter Absorptionssprung. Das sind kurz die bekannten Tatsachen.

Die Vorstellung, welche man sich von dem Zustandekommen jener Absorptionssprünge macht, ist die folgende:

Um das Elektron, dem man die Erzeugung z. B. der K-Serie eines chemischen Elements zuschreibt (indem man annimmt, daß es mit Erzeugung von monochromatischer Strahlung Übergänge ausführt zwischen einigen im Atominnern gelegenen, quantenhaft ausgezeichneten Bahnen), völlig aus dem Atomverband zu entfernen, muß eine bestimmte Energie E aufgewendet werden. In Zusammenhange mit unseren Quantenvorstellungen soll diese Energie nur geliefert werden können von Strahlung, deren Frequenz ν der Bedingung

$$h\nu > E$$

genügt. Die Frequenz ν_g einer Absorptionsgrenze ist also bestimmt durch die Gleichung

$$\nu_g = \frac{E}{h}.$$

Es schien mir nun der Anlage dieser ganzen Auffassung zu entsprechen nicht allein im Gebiete der Röntgenfrequenzen, sondern auch im optisch zugänglichen Gebiet nach ähnlichen Absorptionsgrenzen zu suchen. Tatsächlich liegen Beobachtungen und Bemerkungen über optische Absorptionen vom Barkla-Wagnerschen Typus in der Literatur vor. Wie Wood[1]) zeigte absorbiert nichtleuchtender Na-Dampf nicht allein die Frequenzen seiner Hauptserienglieder, außerdem setzt am Ende der Serie eine

1) Phil. Mag. 18, 530, 1909.

Absorption ein, welche sich auf eine längere Strecke in das ultraviolette Gebiet hinein erstreckt. Schon Bohr[1]) verwertet diese Beobachtung im Sinne der Gleichung $E = h\nu$, welche ihrerseits in Anwendung auf den analogen lichtelektrischen Effekt zuerst bei Einstein[2]) auftritt. Nun stellt die Na-Absorption nicht den denkbar einfachsten Fall dar, derselbe würde offenbar zu erwarten sein bei Wasserstoff. Zwar liegt auch hier die der K-Serie entsprechende Emissionsserie

$$\frac{\nu}{R} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}, \; (R = \text{Rydbergsche Zahl})$$

im äußersten Ultraviolett, die der L-Serie wohl entsprechende Balmer-Serie

$$\frac{\nu}{R} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}$$

dagegen ist bis zu ihrem Ende leicht erreichbar.

Daß am Ende der Wasserstoffserie eine Absorption vorhanden sein wird, vermutet schon Wood offenbar unter Heranziehung des Kirchhoffschen Satzes, als er loc. cit. bemerkt: Auf der Sonne setze am Ende der Wasserstoffserie ein schwaches, kontinuierliches Emissionsspektrum ein. Versuche, welche ich veranlaßte, um im Laboratorium die gesuchte Absorption am leuchtenden Wasserstoff festzustellen, mußten vorzeitig abgebrochen werden. Inzwischen aber hörte ich von Herrn Hartmann, daß Anzeichen für den gesuchten Effekt in Sternspektren vom Wasserstofftypus vorhanden sind. Die schönen Photogramme, welche mir Herr Hartmann zeigte, sind völlig überzeugend. Die nachstehende Hartmannsche Notiz bringt das Material, sowie einige Reproduktionen von den fraglichen Spektren. Die Zeilen, welche ich hier jener Notiz vorangehen lasse, verfolgen im wesentlichen nur den Zweck, die physikalische Bedeutung der Hartmannschen Aufnahmen gebührend hervorzuheben. In letzter Zeit hat im hiesigen Laboratorium Herr J. Holtsmark die von anderer Seite angefangenen und abgebrochenen Versuche wieder aufgenommen. Da aber infolge der nachstehenden Notiz der Effekt beim Wasserstoff nicht mehr gesucht zu werden braucht, wurde das Hauptaugenmerk nunmehr auf die Dämpfe der Alkalien gerichtet, da das Absorptionsspektrum hier experimentell viel leichter zugänglich ist. Im optischen Gebiet ist die Messung zurzeit noch mit viel größerer Genauigkeit ausführbar als das für Röntgenstrahlen statthat; man darf also hoffen, die Besonderheiten der Absorption sehr eingehend untersuchen zu können.

1) Phil. Mag. **26**, 17, 1913.
2) Ann. d. Phys. **17**, 146, 1905.

Die Alkalien verhalten sich, wie zu erwarten war, dem Na-Dampf ähnlich, jedes hat seine eigene an das Serienende anschließende Absorptionsgrenze. Wenn auch ein Unterschied zwischen diesen Absorptionen und den Absorptionen im Röntgengebiet insofern besteht, als hier von einer Absorption in den K- oder L-Linien selbst nie etwas bemerkt wurde, während dort die Linienabsorption am auffälligsten ist, so scheint mir doch dadurch die Ähnlichkeit der Fälle nicht allzusehr verwischt zu werden. Insbesondere scheint es mir von Interesse, ob die Absorptionsgrenze scharf ist oder nur einen steilen Anstieg hat, wie letzteres im Röntgengebiet von Kossel[1]) befürwortet wird auf Grund des anomalen Absorptionskoeffizienten von Brom-K-Strahlung in Gold. Über die Resultate der optischen Untersuchung wird Herr Holtsmark demnächst selbst berichten.

Hier kam es mir neben dem oben erwähnten Hauptzweck noch darauf an, die Analogie der Fälle hervorzuheben und auf die Möglichkeiten hinzuweisen, welche uns die außerordentlich genauen Methoden der Optik an die Hand geben.

1) Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 345, 1916.

Göttingen, Physik. Institut.

(Eingegangen 17. Juli 1917.)

Ein ausgedehntes Absorptionsgebiet im Spektrum der Wasserstoffsterne.

Von J. Hartmann.

Mit Tafel XII.

In den Jahren 1903—1905 habe ich mit einem in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde **25**, 161, 1905 beschriebenen Quarzspektrographen eine Anzahl von Sternspektren aufgenommen, um sie möglichst weit ins Ultraviolett zu verfolgen; eine Bearbeitung des Materials durch Herrn Dr. Kohl wurde in den Astronomischen Mitteilungen der Kgl. Sternwarte zu Göttingen **16**, 1913 veröffentlicht. Diese Aufnahmen zeigten eine Erscheinung, die, wie die vorstehende Notiz Debyes zeigt, vielleicht in direktem Zusammenhang mit dem eigenartigen Barkla-Wagnerschen Absorptionsbefund bei Röntgenstrahlen steht, und die deshalb an dieser Stelle etwas eingehender besprochen werden soll.

Die bei der Aufnahme eines Sternspektrums an jeder Stelle der photographischen Platte eintretende Schwärzung ist im allgemeinen von sieben verschiedenen Umständen abhängig. Es sind dies: 1 Die durch die Temperatur des Sterns bedingte Emission der leuchtenden Schicht,

2. die von der Zusammensetzung, Dichte und Temperatur der äußeren, sogenannten umkehrenden Schicht abhängige Absorption in der Gashülle des Sterns, 3. die Absorption in der irdischen Atmosphäre, 4. die Absorption in den optischen Teilen des benutzten Fernrohrs und Spektrographen, 5. die durch diese Teile bedingte Art der Verteilung des Lichts verschiedener Brechbarkeit auf der photographischen Platte, 6. die Empfindlichkeit der Platte für die verschiedenen Wellenlängen und 7. die Entwicklung. Wegen dieser verwickelten Abhängigkeit sind stets besondere Anordnungen der Aufnahmen notwendig, wenn man aus den Schwärzungen die wahre Intensitätsverteilung im Sternspektrum ableiten will; durch besondere Versuchsaufnahmen wird man den Zusammenhang zwischen Schwärzung und Lichtintensität ermitteln und durch Aufnahmen von Spektren mit bekannter Intensitätsverteilung die Wirkung der Ursachen 3 bis 7 feststellen oder unschädlich machen. Bei den in Rede stehenden ersten Aufnahmen war eine photometrische Verwertung zunächst nicht beabsichtigt, daher fehlen diese Hilfsuntersuchungen und eine strenge photometrische Auswertung der Platten ist nicht möglich. Immerhin können wir einige allgemeine Schlüsse ziehen. Die unter 1 genannte Emission wird bei den hier in Betracht kommenden Temperaturen ein im Ultraviolett liegendes Intensitätsmaximum erzeugen, von dem aus der Helligkeitsabfall nach beiden Seiten ganz stetig erfolgt. Die atmosphärische Absorption (3) nimmt mit abnehmender Wellenlänge gleichförmig zu und steigt erst nahe bei λ 2900 plötzlich bis zur völligen Auslöschung an. Die optischen Teile beschränkten sich im vorliegenden Falle auf ein Objektivprisma aus Quarz und eine einfache Kameralinse aus derselben Substanz; Absorption und Lichtverteilung hatten daher in dem hier in Frage kommenden Gebiete einen gleichmäßigen Verlauf, und zwar mußte wegen der nach dem ultravioletten Ende des Spektrums stark zunehmenden Dispersion die Intensität der Belichtung nach dahin abnehmen. Endlich dürfen wir die Empfindlichkeit der Platte und die Wirkung der Entwicklung als konstant annehmen; nur im sichtbaren Spektrum, etwa bei λ 5000, nimmt die Empfindlichkeit der nicht sensibilisierten Platten rasch bis auf Null ab.

Hiernach wird man im blauen oder violetten Teile des Spektrums ein Maximum der Schwärzung zu erwarten haben, von wo aus dieselbe nach beiden Seiten hin ziemlich gleichmäßig abnimmt. In Fig. 1 auf Tafel XII sind die etwa achtmal vergrößerten Spektra von β Geminorum und α Leonis nebeneinander abgebildet; der erste Stern ist vom II. Typus und zeigt ein Helligkeitsmaximum im positiven Bilde, dem also das Schwärzungsmaximum im negativen entspricht, nahe bei λ 4000, der zweite Stern ist vom I. Typus und hat das Maximum bei λ 3800. Die in Fig. 2 wiedergegebenen Spektra von α Cygni und α Lyrae wurden aufgenommen, nachdem der Spektrograph mit einem Kollimator versehen und mit dem Potsdamer 80-cm-Refraktor verbunden worden war. Man erkennt hier die starke Absorption in der etwa 12 cm dicken Glasmasse des 80-cm-Objektivs: während sich das Spektrum von α Leonis in Fig. 1 bis λ 3100 erstreckt, wurde durch das Glas schon vor λ 3600 alles Licht abgeschnitten. Von Interesse dürfte namentlich das Spektrum von α Lyrae sein, weil es die ganze Reihe der Wasserstofflinien von $H\alpha$ an bis zu ihrem Verschwinden mit $H\varrho$ zeigt. Die Aufnahmen in Fig. 2 sind, wie auch das nebengelagerte Vergleichsspektrum des Eisenbogens erkennen läßt, mit ziemlich weitem Spalt gemacht worden, so daß die feineren Absorptionslinien der Sterne größtenteils verschwunden sind. Die Platten waren für Rot sensibilisiert und ergeben deshalb zwei Helligkeitsmaxima.

Die wie Fig. 1, 3 und 4 ohne Dazwischenkunft von Glas nur mit der Quarzoptik aufgenommenen Spektra vom I. Typus zeigen nun die folgende merkwürdige Erscheinung. Je nach der Breite der Wasserstofflinien, die in den einzelnen Sternen verschieden ist (man vergleiche z. B. die ziemlich scharfen Linien in α Cygni mit den viel breiteren in α Lyrae), fließen die höheren Glieder der Serie früher oder später zusammen, so daß eine kontinuierliche Absorption entsteht und die Helligkeit des Spektrums etwa bei λ 3700 rasch stark abfällt. Man sollte nun erwarten, daß dicht hinter dem bei λ 3646 liegenden Kopfe der Serie, dessen Lage in Fig. 3 und 4 durch einen Pfeil angedeutet ist, die Absorption in einer scharfen Kante aufhören, die Helligkeit des Spektrums also plötzlich wieder zunehmen sollte. Das ist nun aber durchaus nicht der Fall. Das Aufhören der Wasserstoffserie markiert sich in keiner Weise, vielmehr erstreckt sich die vom Zusammenfließen der Wasserstofflinien an verstärkte Absorption gleichmäßig weiter in das Ultraviolett hinein, so daß von da an nur noch ein ganz geringer Abfall der Helligkeit bis zum Verschwinden des Spektrums stattfindet. Auch wenn man annehmen wollte, daß in dem Sternspektrum nur eine beschränkte Anzahl von Wasserstofflinien vorhanden wäre, die Serie also bereits vor ihrem Kopfe abbräche, so müßte man an dieser Stelle eben den plötzlichen Anstieg der Helligkeit erwarten.

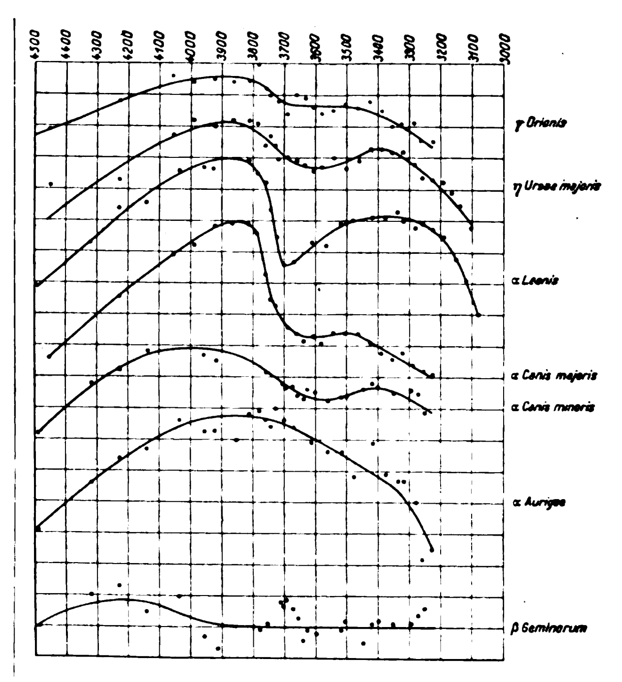
Diese sich etwa von λ 3700 bis λ 3400 er-



streckende allgemeine Absorption ist nun nur bei den weißen Wasserstoffsternen vom I. Spektraltypus vorhanden, während die gelben Sterne vom II. Typus nichts davon erkennen lassen. Recht anschaulich tritt die Erscheinung daher hervor, wenn man Spektra dieser beiden Arten dicht nebeneinander legt, wie dies in Fig. 3 und 4 geschehen ist. Da die Originalaufnahmen der Sternspektra nur etwa 0,2 mm breit sind, mußten sie für die Reproduktion 20mal vergrößert werden. Um hierbei die relative Helligkeit der beiden zu vergleichenden Spektren nicht zu verändern, wurden dieselben mit Hilfe meines Spektrokomparators optisch nebeneinander gelagert und gleichzeitig vergrößert, so daß sie alle Operationen des zur Reproduktion notwendigen Umkopierens gemeinsam durchgemacht haben.

In Fig. 3 ist β Geminorum ein Stern vom späten II. Typus (in der Harvard-Klassifikation K), α Canis minoris vom späten I. Typus (F 5), der schon den Übergang zum II. Typus bildet. Das Spektrum des letzteren Sterns ist am Anfang bei λ 4000 und am Ende bei λ 3300 erheblich heller als das des ersteren, in der Mitte dagegen, von dem durch einen Pfeil bezeichneten Orte des Kopfes der Wasserstoffserie bis etwa λ 3500 ist der Helligkeitsunterschied viel geringer. Noch viel deutlicher tritt die Erscheinung aber hervor, wenn man das Spektrum eines reinen Wasserstoffsterns vom frühen I. Typus zum Vergleiche heranzieht. α Leonis (Fig. 4) enthält außer der Wasserstoffserie nur eine matte Spur der Heliumlinie λ 4026 (Harvard-Klasse B 8), das daneben abgebildete Spektrum von α Aurigae ist dagegen dem unserer Sonne sehr ähnlich (G). Am Anfang und Ende ist wieder das Spektrum von α Leonis erheblich heller als das von α Aurigae, von λ 3700 an bis über den Kopf der Wasserstoffserie hinaus wird die Helligkeit dagegen völlig gleich, ein Zeichen, daß hier eine starke Absorption im Wasserstoffsterne herrscht. Ich brauche wohl kaum zu bemerken, daß man die Vergleichung nur an den Stellen der Spektra ausführen darf, die möglichst frei von Absorptionslinien sind, d. h. an den hellsten Stellen des oberen Spektrums.

Am beweiskräftigsten ist aber die wirkliche Ausmessung des Helligkeitsverlaufs, deren Ergebnis in der nebenstehenden Kurventafel veranschaulicht ist. Die Schwärzungen der betreffenden Spektrogramme wurden mit dem Mikrophotometer gemessen. Wollte man diese Schwärzungswerte direkt graphisch darstellen, so würde man bei dem hier angewandten Maßstabe für jeden Stern eine um mehrere Dezimeter auf- und absteigende Kurve erhalten, in



der geringere Helligkeitsschwankungen kaum zu erkennen wären. Um diese hervortreten zu lassen und die Ausdehnung der Figur zu beschränken, habe ich in den Kurven nur die Abweichung der gemessenen Schwärzung von einer gleichmäßigen, der Wellenlänge proportionalen Abnahme dargestellt. Dieses Verfahren ist erlaubt, weil es uns hier auf die Schwärzungen selbst nicht ankommt, und weil deren Verlauf nach dem oben Gesagten im allgemeinen gleichmäßig sein würde. Noch besser hätte man die Kurven ebnen können, wenn man außer dem linearen noch ein von λ^2 abhängiges Glied von den gemessenen Schwärzungen abgezogen hätte. Doch genügt die hier gewonnene Darstellung schon vollkommen, um die Wasserstoffabsorption deutlich hervortreten zu lassen. Die Spektra sind in der jetzt allgemein angenommenen Reihenfolge nach ihrem Typus geordnet. In γ Orionis (B 2) und η Ursae majoris (B 3) ist neben dem Wasserstoff noch reichlich Helium vorhanden. Auch in diesen Spektren zeigt sich die Schwärzungsabnahme im Negativ (also Helligkeitsabnahme im Sternspektrum) zwischen λ 3750 und λ 3400 schon deutlich. Ganz auffallend wird diese aber bei dem fast ganz reinen Wasserstoffsterne α Leonis (B 8). Mit dem Zurücktreten des Wasserstoffs und der Zunahme der Metallinien in den Spektren von α Canis majoris (A), α Canis minoris (F 5), α Aurigae (G) und β Geminorum (K) verschwindet dann auch das breite Absorptionsgebiet des Wasserstoffs nach und nach wieder. In den letzten sehr linienreichen Spektren ist es kaum möglich, für

die Schwärzungsmessung eine von Absorptionslinien hinreichend freie Stelle aufzufinden, so daß die Messung stets mit einer großen Unsicherheit behaftet bleibt; hierdurch erklärt sich die stärkere Verstreuung der beobachteten Werte.

Es ist hier nicht der Ort, um das ganze Zahlenmaterial und die an anderen Sternspektren ausgeführten Messungen wiederzugeben. Aus meinen Beobachtungen geht mit Sicherheit hervor, daß in den Wasserstoffsternen eine allgemeine Absorption herrscht, die sich über den Kopf der Wasserstoffserie hinweg etwa bis λ 3400 erstreckt.

Die erste frühere Erwähnung dieser Erscheinung findet sich bei Huggins. Er schreibt[1]): „Eine charakteristische Erscheinung in den Spektren der weißen Sterne besteht in der ziemlich plötzlichen Helligkeitsabnahme des kontinuierlichen Spektrums in der Gegend des Endes der Wasserstoffserie. Das Spektrum setzt sich stark abgeschwächt ohne weiteren plötzlichen Abfall dann fort, bis es durch die Absorption in unserer Atmosphäre begrenzt wird." Dagegen nur zum Teil deckt sich mit der hier in Rede stehenden Erscheinung die kürzlich von Dr. H. Rosenberg[1]) gemachte Beobachtung, daß in seinen extrafokalen Aufnahmen die Helligkeit des kontinuierlichen Spektrums weißer Sterne etwa bei λ 4000 beginnend allmählich bis zu λ 3700 oder λ 3600 eine Art Depression erlitt; bei ihm handelt es sich in der Hauptsache nur um das Zusammenfließen der absichtlich unscharf abgebildeten Wasserstofflinien. Dagegen ist beiden Autoren gerade der wichtigste, auffälligste Punkt der Erscheinung entgangen, daß man nämlich nach dem Aufhören der Wasserstoffreihe, sei es nun am wirklichen Kopfe der Serie oder schon vorher, einen plötzlichen Anstieg der Helligkeit des kontinuierlichen Spektrums erwarten müßte, der aber in den Aufnahmen vollständig fehlt.

1) An atlas of representative stellar spectra, S. 85, 1899.

1) Photographische Untersuchung der Intensitätsverteilung in Sternspektren. Nova Acta Leop. CI, 103, 1914.

(Eingegangen 12. Juli 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Röntgenspektroskopie.

Von Ernst Wagner.

(Fortsetzung.)

Mit Tafel XIII.

Das Spektrum der γ-Strahlung von Radium-B und C.

Die längst vermutete Identität von γ-Strahlen und Röntgenstrahlen nachzuweisen gelang Rutherford und Andrade[1]). Bei ihren Versuchen ging die γ-Strahlung von einem dünnwandigen Glasröhrchen aus, das mit 100 Millicurie Emanation gefüllt war. Das Spektrum wurde mit dem drehenden Kristall (Steinsalz) auf einer photographischen Platte in 24stündiger Expositionsdauer entworfen. Ein starkes Magnetfeld schützte die Platte vor der β-Strahlung. Das Spektrum der weichen γ-Strahlung erwies sich als ein Linienspektrum von der Art der L-Serie bei den schweren Atomen. Bei der Wellenlängenmessung ergab sich, daß viele Linien, darunter die stärksten, mit denen des Bleies innerhalb der Meßfehler koinzidierten. Folgende Tabelle V zeigt den Umfang der Übereinstimmung der Spektren nach den Frimanschen Messungen.

Auf Grund ihrer chemischen Untrennbarkeit waren schon vor diesen Versuchen von Soddy und Fajans RaB und Pb der gleiche Platz im periodischen System zugewiesen und solche Elemente als Isotope bezeichnet worden. In überraschender Weise liefert die Identität ihrer Röntgenspektren den bündigen experimentellen Nachweis für diese Gleichheit ihrer Ordnungszahlen $N = 82$. Dabei unterscheiden sich ihre Atomgewichte beträchtlich: $RaB = 215$; $Pb = 207$. Es ist sehr bemerkenswert, daß auch für instabile Elemente die Moseleysche Gesetzmäßigkeit der Röntgenspektren ihre Gültigkeit streng behauptet.

Nach Siegbahn[1]) und Swinne[2]) fallen viele Linien im γ-Spektrum auch mit L-Linien des Wismuts zusammen (vgl. Tabelle; Messungen von Friman). Ihre Herkunft wäre ableitbar aus der Isotopie von RaC und Bi ($N = 83$).

Rutherford und Andrade[3]) gelang es, das Spektrum auch der durchdringenden

1) E. Rutherford und N. da Andrade, Phil. Mag. **27**, 854, 1914.

1) M. Siegbahn, Jahrb. d. Rad. **13**, 332, 1916.
2) R. Swinne, diese Zeitschr. **17**, 481, 1916.
3) E. Rutherford und da Andrade, Phil. Mag. **28**, 263, 1914.



Tabelle V.

Radium B u. C weiches γ-Strahlen-spektrum		Blei L-Serien-spektrum (RaB)		Wismut L-Serien-spektrum (RaC)	
Wellenlänge $\times 10^8$ cm	Stärke	Wellenlänge $\times 10^8$ cm	Stärke	Wellenlänge $\times 10^8$ cm	Stärke
	[1]			0,762	0
				0,790	2
0,793	m	0,792	0	0,794	1
0,809	m	—		0,810	3
—		0,816	1	—	
—		0.820	1	—	
0,838	m	0,842	3	—	
0,853	m	—		—	
0,917	f	—		0,923	2
—		—		0,937	2
—		—		{0,950	8
0,953	m	0,955	2	{0,954	6
—		0,968	2	{0,977	2
0,983	s	0,983	9	—	
—		—		0,992	2
1,006	m	1,008	2	—	
1,029	m	1,023	2	—	
1,055	f	—		1,059	1
1,100	f	1,091	0	—	
1,141	m	—		{1,144	10
—		—		{1,153	3
1,175	s	{1,175	10	1,171	0
1,196	m	{1,186	3	—	
1,219	f	—		—	
1,266	f	—		—	
1,286	f	—		—	
1,315	f	—		1.317	3
1,349	m	1,348	3	—	
1,365	m	—		—	

γ-Strahlung von RaB und RaC zu photographieren. Sie verwandten zuerst die Reflexionsmethode am drehenden Kristall ($NaCl$). Das starke Eindringungsvermögen der Strahlen in den Kristall verlangte zur Erzielung scharfer Spektren dünne Kristalle. Zur Sicherung der Resultate wurde die früher beschriebene Transmissionsmethode herangezogen. Diese lieferte sowohl im Reflexions- wie im Absorptionsspektrum (vgl. dort) gute Übereinstimmung mit den Wellenlängenmessungen am Drehkristall. Tabelle VI enthält die Resultate.

Mit A und B bezeichnet Rutherford die stärksten Linien. A erschien als schwer trennbares Dublett. Aus Absorptionsversuchen im Blei schließt Rutherford, daß die Strahlung mit $\lambda < 1{,}37 \cdot 10^{-9}$ cm RaC angehört. Extrapoliert man die Werte für die Wellenlängen der K-Serie für RaB und RaC nach der Moseleyschen Beziehung für $N = 82$ und $= 83$, so erhält man nahe die beobachteten Hauptlinien A.

Dagegen besteht für $\lambda < 1{,}37 \cdot 10^{-9}$ cm, insbesondere für $\lambda = 0{,}72 \cdot 10^{-7}$ cm vorerst keine Analogie in den Röntgenspektren: solch kurzen

1) f = fein, m = mittel, s = stark.

Tabelle VI.

Durchdringende γ-Strahlung von Radium B und Radium C.

Reflexionswinkel am Steinsalz	Wellenlänge $\times 10^9$ cm
44'	0,72
B 1° 6'	0,99
1° 11'	1,16
1° 24'	1,37
A {1° 37'	1,59
A {1° 43'	1,69
2° 0'	1,96
2° 28'	2,42
2° 40'	2,62
3° 0'	2,96
3° 18' [1]	3,24
4° 0' [1]	3,93
4° 22'	4,28

Wellenlängen würde eine härtere „J-Serie" entsprechen, die kürzlich von Barkla bei den leichten Elementen gefunden sein soll.

Die Absorptionsspektren der Elemente

Barkla hatte bereits die hauptsächlichsten Züge in dem Absorptionsverhalten der Elemente aufgefunden. Als Strahlung benutzte er die charakteristische Fluoreszenzstrahlung der Elemente, die ihrerseits durch Absorption genügend harter, sonst beliebiger primärer Röntgenstrahlung erzeugt worden war. Indem er die Reihe der Elemente als Strahler (der K-Serie zumeist) durchlief, variierte er deren Härte stufenweise und konnte so den Absorptionsverlauf in einem gegebenen Element feststellen. Hierbei ergab sich der plötzliche starke Absorptionsanstieg im Fortschreiten nach größerer Härte, der als Energieäquivalent die Emission der Eigenstrahlung des absorbierenden Elementes zur Folge hat. Die erregte (K-)Strahlung erwies sich stets weicher als die absorbierte. Mit dieser Erfüllung der Stokesschen Regel war der Vorgang als Fluoreszenz charakterisiert.

Die Kristall-Spektralanalyse gewährt den Vorteil, erstens statt der komplexen K-Strahlung die homogene Strahlung (sei es einer Spektrallinie, sei es aus dem kontinuierlichen Spektrum) anzuwenden; zweitens statt des nur in Stufen variierbaren Wellenlängenbereiches der Fluoreszenzstrahlung der Elemente das kontinuierliche Spektrum der Bremsstrahlung zur Absorption gelangen zu lassen.

Die Versuchsanordnung unterscheidet sich kaum von der zur Untersuchung der Linienspektren. Die geringere Intensität des kontinuierlichen Spektrums macht es nötig, breitere Spalte zu

1) Vielleicht II. Ordnung.

benutzen. Unsere Versuche wurden meist mit 0,4 mm breitem Spalte und 12 cm Abstand: Achse—Platte, gemacht und verlangten im Gebiet der längeren Wellen bei Verwendung eines durchlässigen Lindemannglasfensters und dünner Aluminiumfolie als Kassettenabschluß einige Stunden Exposition bei 5 Milliampere Entladungsstrom. Der exponierte Spektralbereich entsprach hierbei ungefähr einem Drehbereich des $NaCl$ von 5 bis 10°. Bequem zur Untersuchung der Absorption ist ein langer Spalt und entsprechend großer Kristall (ca. 4 cm), die mehrere Substanzen gleichzeitig im Spektrum übereinander zu untersuchen erlauben. Folien (bei Metallen) bringt man in schmalen Streifen dicht vor der Kassette längs des Spektrums an; Substanzen (auch als chemische Verbindungen) in Pulverform in einem flachen Papiersäckchen; kleine Blättchen direkt am Spalt. Die passende Dicke der Schichten wird durch einen Probeversuch ermittelt. Sie betrug bei Fe z. B. ca. 0,02 mm und kann im kurzwelligen Spektrum stark zunehmen. Die Anwendung des feststehenden Kristalls ist bei der Erzeugung des kontinuierlichen Spektrums völlig auszuschließen. Die Versuche wurden mit der photographischen Methode ausgeführt. Da diese das primäre kontinuierliche Spektrum in eigentümlicher Weise wiedergibt, so gehen wir hierauf zunächst ein.

Das kontinuierliche Röntgenspektrum auf der photographischen Platte dargestellt durch die selektiven Eigenschaften des Bromsilbers. Die zwei komplementären Arten der Absorptionsspektren.

Fig. 11[1]) zeigt das kontinuierliche Spektrum nach einer Aufnahme von Wagner u. Brentano[2]) ohne Zwischenschaltung selektiv absorbierender Medien. O ist der überstrahlte Durchstoßpunkt der Primärstrahlung, von hier aus erstreckt sich das Spektrum im Sinne von Null an wachsender Wellenlängen über die merkwürdigen zwei kontinuierlichen Banden A und B zu den langen Wellen des Wolframlinienspektrums (L-Reihe), das nur zum Teil auf die Platte kam. (Wolfram bildete die Antikathode.) Die obere Hälfte II des Spektrums war durch ein 1,4 mm dickes Aluminiumblech abgedeckt, dessen Absorption die langen Wellen völlig auslöscht, insbesondere die Linien und die Bande B. Die geringere Absorption der Bandkante A_1 gegenüber B kennzeichnet erstere deutlich als härteren Ursprungs: sie ist die Wiederholung der harten kurzwelligen Bande A in II. Ordnung. Die zwei Banden A und B treten stets auf der photographischen Platte auf, unabhängig von der Art des Antikathodenmetalls und dienen so als bequeme Marksteine im Spektrum. Es hat sich einer Vermutung Braggs u. Siegbahns entsprechend ergeben, daß sie durch die selektive Absorption im Ag (Bande A) und Brom (Bande B) hervorgebracht sind. Durch die nach kurzen Wellen zu plötzlich einsetzende verstärkte Absorption der Strahlung in jenen Atomen wird eine erhöhte photographische Wirkung (Sensibilisation) erzeugt, die ohne Zweifel hervorgerufen ist durch die von der absorbierten Strahlung gespeiste Emission der annähernd homogenen K-Strahlung der betreffenden Atome. Die Schwärzung im kontinuierlichen Spektrum stellt somit auch nicht annähernd den wahren Intensitätsverlauf des Spektrums der Röntgenstrahlen dar. Die Brombande kommt bei den gewöhnlichen (medizinischen oder Laue-)Röntgenaufnahmen nicht zur Geltung, da das Glas der Röntgenröhren (wie das Aluminium in dem Versuch Fig. 11) die weiche, das Brom stark anregende Strahlung praktisch verschluckt. Die hohe Empfindlichkeit der photographischen Platte gegen Röntgenstrahlen verdankt sie also wesentlich der gerade in das wichtige Härtegebiet fallenden Eigenstrahlung des Silbers; die Schwärzung gewöhnlicher Röntgenbilder ist hiernach letzten Endes hervorgebracht im wesentlichen durch monochromatische Fluoreszenzstrahlung, die mehr oder weniger angeregt wird nach Maßgabe der Intensität und variablen Härte der Primärstrahlung. Das Auftreten der weichen Wo-Linien jenseits der beiden Banden (Fig. 11) auf der Platte zeigt an, daß auch unabhängig von den selektiven Gebieten der Bromsilberstrahlungen eine direkte Wirkung der Röntgenstrahlen auf die empfindliche Schicht besteht: diese dürfte das $BrAg$-Molekül betreffen und von derselben chemischen Art wie die Wirkung des Lichtes sein. — Der Nachweis für den geschilderten Ursprung der zwei Banden wurde von Wagner, l. c. 1. durch einen Analogieversuch mit Zinn und 2. durch einen Absorptionsversuch im Silber erbracht.

1. Nachdem Zinnfolie dicht auf die empfindliche Schicht gedrückt war, wurde auf der photographischen Platte von der Glasseite her das Spektrum aufgenommen. Der Effekt war das Auftreten einer der Silberbande A ganz analogen Zinnbande C (vgl. Fig. 12a). Hier konnte entschieden werden, ob diese Bande durch die Emission von Elektronen- oder Fluoreszenzstrahlung des Zinnes bedingt war. Zwischen Zinn und empfindliche Schicht wurde eine dünne Aluminiumfolie mit einem Fensterschlitz längs des Spektrums gebracht. Die Dicke des Aluminiums war so bemessen, daß die Elektronen

1) Die Figuren 11—13 befinden sich auf Tafel XIII.
2) Sitzber. bayr. Akad. S. 329, 1914.



leicht, die Fluoreszenzstrahlung nicht merklich zurückgehalten werden konnte; andererseits kam Aluminium selbst weder als Absorbens der Primärstrahlung noch als Emittens eigener Strahlungen in Betracht: Der Versuch zeigte keine bemerkbare Schwächung der Zinnbande hinter dem Aluminium an; wir haben daher die Fluoreszenzstrahlung als die Quelle der Zinnbande und daher wohl auch der Silber- und Brombande anzusprechen.

2. Zum quantitativen Nachweis des Ursprungs der Silberbande aus dem Silber der empfindlichen Schicht wurde eine dünne Silberfolie in den Strahlengang längs des Spektrums als Absorbens eingeschaltet. Je nach der Dicke der Folie konnte die Silberbande gerade ausgelöscht oder in ihr Gegenteil verkehrt werden, so daß die Bandkante genau am alten spektralen Ort, aber hell auf dunkel erschien. Vgl. Fig. 13, auf der, dem Negativ der Platte entsprechend, die absorbierten Gebiete hell erscheinen. Zugleich sind noch die Absorptionsspektren der zwei Nachbarmetalle *Cd* und *Pd* wiedergegeben.

Am Zinn wurde der gleiche Umkehrungsversuch zu Fig. 12a wie am Silber angestellt: Fig. 12b zeigt ebenfalls im Negativ den Absorptionsversuch mit der hellen Absorptionsbande *C* auf der dunklen Silberbande, deren Kante *A* ist.

Es bestehen hiernach zwei Wege zur Erzeugung von Absorptionsspektren: Der eigentliche Absorptionsversuch und seine komplementäre Umkehrung, der Emissionsversuch. Der letzte Weg kann in seltenen Fällen Vorteile bringen, z. B. wenn sich dünne Absorptionsschichten nicht herstellen lassen. Andererseits bedingt er Intensitätsverluste besonders im langwelligen Spektrum durch Absorption im Glas oder Film der photographischen Platte sowie Unschärfe der Bandkante infolge des wirksamen Tiefenbereiches der ausgelösten Fluoreszenzstrahlung in dem Absorbens oder infolge mangelnder Berührung von empfindlicher Schicht und Substanz. Im allgemeinen ist daher die eigentliche Absorptionsanordnung vorzuziehen.

W. H. Bragg hat (Proc. Roy. Soc. **89**, 430, 1913) darauf hingewiesen, daß die den reflektierenden Kristall zusammensetzenden chemischen Elemente bereits Veranlassung geben zu einem charakteristischen Absorptionsspektrum. Bei Kristallen aus leichten Elementen (*NaCl*, Diamant, Zucker usw.) würde dieser Einfluß nur für sehr lange Wellen in Frage kommen; bei Zinkblende, Ferrocyankalium und ähnlichen schwereren Kristallen dagegen fällt er in den Bereich mittlerer Wellenlängen. Diese experimentell gefundene Absorptionswirkung zeigt sehr deutlich, daß die Interferenzreflexion keine Oberflächenreflexion ist, sondern aus einem merklichen Tiefenbereich stammt.

Systematische Untersuchungen der Absorptionsspektren der Elemente wurden von E. Wagner[1]) und de Broglie nach der photographischen Methode und mittels des Drehkristalls ausgeführt.

In der *K*-Serie zeigte sich (vgl. die Fig. 13) eine sehr intensive und schroffe Absorptionsbandkante, deren Wellenlänge λ_A von Wagner teils direkt aus den Apparatkonstanten unter möglichster Benutzung der II. Ordnung abgeleitet, teils durch Anschluß an die Moseleyschen Wellenlängenwerte von Spektrallinien erhalten wurde, die gleichzeitig im Spektrum auftraten. Sowohl infolge dieser verschiedenen Herkunft als auch wegen der größeren Spaltweite sowie der Asymmetrie der Bandkante wird nicht die Genauigkeit der Spektrallinienmessungen beansprucht. M. de Broglie teilte kürzlich[2]) analoge Messungen mit; er vermochte ferner durch Anwendung extremer Härte der Coolidgeröhre in der Untersuchung der Elemente bis zur Absorptionsbandkante des Wismuts messend vorzudringen und noch die des Thoriums zu schätzen. Hiermit ist die bisher kürzeste definierte Wellenlänge im Röntgenspektrum erreicht. Sie fällt zusammen mit der stärksten Linie im γ-Spektrum von *RaC*. Sofern keine *J*-Serie besteht, ist die unmittelbar benachbarte Absorptionsbandkante des Urans die kürzeste überhaupt mögliche charakteristische Röntgenwellenlänge. Die kürzeste Wellenlänge der *RaC*-γ-Linien beträgt ca. $^3/_4$ der letzteren. Wahrscheinlich sind im kontinuierlichen Röntgenspektrum der Coolidgeröhre Wellenlängen auch von dieser γ-Kürze erreichbar.

Die Untersuchung der Absorptionsspektren der *L*-Serie durch Wagner ergab zwei inmitten des Linienspektrums der betr. Serie liegende schwache Absorptionsbanden mit scharfen Kanten A_1 und A_2. Die langwellige A_1 ist die intensivere. Die Untersuchung betraf nur Gold und Platin. Im Absorptionsspektrum des Goldes war eine dritte noch schwächere Bandkante A_3 nahe bei A_2 nach kurzen Wellen unsicher angedeutet.

Kürzlich bestätigte de Broglie[3]) die Duplizität der Kanten, dehnte die Untersuchung auf Blei, Thor und Uran aus und konnte auch die dritte Kante an allen 5 Elementen beobachten, aber (offenbar wegen ihrer Schwäche) keine Messungen anstellen.

1) E. Wagner, Ann. d. Phys. **46**, 868, 1915.
2) M. de Broglie, C. R. **163**, 87, 1916.
3) de Broglie, C. R. **163**, 354, 1916.

Tabelle VII.

Die Wellenlänge $\lambda \times 10^8$ cm der Absorptionsbandkanten der Elemente.

K-Reihe

N	Element	λ_A	
		Wagner	de Broglie
26	*Fe*	1,759	—
28	*Ni*	1,502	—
29	*Cu*	1,386	—
35	*Br*	0,926	0,913
37	*Rb*	—	0,809
38	*Sr*	—	0,764
40	*Zr*	—	0,681
41	*Nb*	—	0,645
42	*Mo*	—	0,611
46	*Pd*	0,513	0,503
47	*Ag*	0,490	0,479
48	*Cd*	0,468	0,458
50	*Sn*	0,425	0,419
51	*Sb*	0,405	0,399
52	*Te*	0,383	0,383
53	*J*	0,369	0,366
55	*Cs*	—	0,338
56	*Ba*	0,331	0,325
57	*La*	—	0,310
58	*Ce*	0,298	0,298
60	*Nd*	0,282	—
66 + 68	*Er* + *Ho*	ca. 0,227	—
78	*Pt*	—	0,150
79	*Au*	—	0,146
80	*Hg*	—	0,143
81	*Te*	—	0,139
82	*Pb*	—	0,135
83	*Bi*	—	0,131
90	*Th*	—	ca. 0,1

L-Reihe

N	Element	λ_{A_1}	λ_{A_2}	λ_{A_1}	λ_{A_2}
		Wagner		de Broglie	
78	*Pt*	1,072	0,934	1,067	—
79	*Au*	1,042	0,914	1,037	0,898
82	*Pb*			0,945	0,811
90	*Th*			0,756	—
92	*U*			0,718	0,588

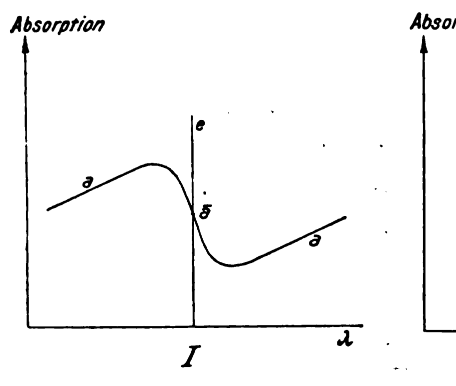
Vorstehende Tabelle enthält die Resultate für die *K*- und *L*-Serie.

Wie aus der Tabelle ersichtlich, sind die Wellenlängen λ_A der Absorptionskanten der Elemente charakteristisch für ihre Stellung N (Ordnungszahl) im periodischen System; es besteht zwischen der Quadratwurzel aus den Frequenzen $\sqrt{\nu_A}$ und N dieselbe angenähert lineare Abhängigkeit wie die Moseleysche für die Linienfrequenzen: $\sqrt{\nu_A} = \text{konst.} \cdot (N - 3{,}5)$. Auch hier ist die Kurve keine strenge Gerade, sondern es zeigen die $\sqrt{\nu_A}$-Werte bei großem N ein beschleunigtes Wachstum.

Aus dem Absorptionsspektrum ist also die chemische Natur einer Substanz ebenso sicher und eindeutig zu ermitteln, wie aus den Fluoreszenzspektren. Bemerkenswert ist die vergleichsweise große technische Einfachheit, Absorptionsspektren zu erzeugen. Der Stoff ist außerhalb der Röntgenröhre in den Strahlengang zu bringen; er bleibt darum unverändert beim Versuch und kann auch in jeder Art chemischer Verbindung verwendet werden. Mehrere Stoffe können gleichzeitig und in minimalen Mengen untersucht werden. Die Nachteile gegenüber dem Linienspektrum sind: die größeren Expositionszeiten besonders im langwelligen Spektrum, die Unschärfe durch den weiteren Spalt, die geringere Deutlichkeit der Kanten gegenüber den Linien, wenn diese von geringen Stoffmengen herrühren (z. B. als Verunreinigungen).

Die Schärfe der Absorptionsbandkante hat sich nach photometrischen Untersuchungen des Verf. an der Brombandkante *d* im *Pt*-Spektrum (Fig. 4) als ebenso groß erwiesen wie die der Linien. Da die Breite letzterer völlig erklärt wird durch Spaltweite, Eindringtiefe der Strahlung in den Kristall und Abbildungsfehler des Drehkristalls, so bleiben keine Andeutungen übrig, die auf eine endliche spektrale Breite schließen lassen. W. Kossel[1]) hat aus Absorptionsversuchen mit Angerer von sekundären spektral nicht zerlegten *K*-Strahlungen passender Elemente in Gold den Schluß ziehen zu können geglaubt, daß eine endliche Breite im Verlauf des Absorptionssprunges sich geltend mache. Er stellte nämlich den auffallenden Befund Barklas nochmals fest, wonach ein mittlerer Absorptionswert zwischen dem minimalen und maximalen in-

1) W. Kossel, Verh. d. D. phys. Ges. **18**, 346, 1916.



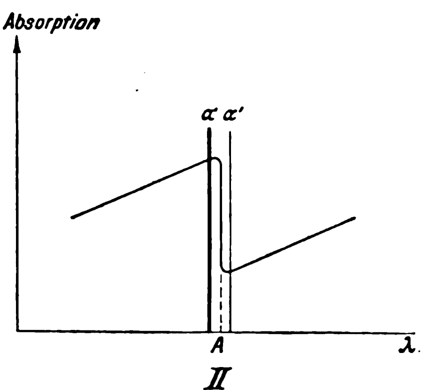


Fig. 14.

mitten des Absorptionssprunges gefunden wird, und zwar für die K-Strahlung des Broms. Kossel erblickt in diesem Faktum das Ergebnis einer mittleren Absorption $\bar{a}$ (vgl. Fig. 14 I) einer zur spektralen Breite des Absorptionssprunges vergleichsweise monochromatischen Strahlung e des Br, die zufällig genau in den Sprung fällt.

Indessen hat Verf. durch Spektralaufnahmen direkt zeigen können, daß obiges Versuchsresultat durch die komplexe Natur der K-a-Strahlung (α- und α'-Linie) des Br vorgetäuscht wird, indem die scharfe Goldabsorptionskante A gerade zwischen die zwei Komponenten hineinfällt (vgl. Fig. 14 II). Es ist einleuchtend, wieso hier ohne Annahme einer spektralen Breite der Kante ein mittlerer Absorptionswert der Gesamtstrahlung ($\alpha + \alpha'$) zustande kommt.

Über den quantitativen Verlauf des Absorptionskoeffizienten im Spektrum liegen wenig ausgedehnte Messungen von W. H. Bragg und S. E. Peirce[1]) vor. Sie maßen mit Ionisationsmethode und Kristallspektrometer die Absorption der spektral zerlegten K-Strahlungen (der zwei Linien α und β) der drei Antikathodenmetalle Ag, Pd, Rh in 10 Metallen. Infolge dieser Anwendung diskreter Wellenlängen kann in den Versuchen der scharfe Absorptionssprung nicht in Erscheinung treten und sein genauer Ort nicht gefunden werden. Als zusammenfassende Formel ergab sich:

$$A = C \cdot N^4 \cdot \lambda^{5/2}.$$

A ist der Atomabsorptionskoeffizient, d. i. der gewöhnliche Absorptionskoeffizient, dividiert durch die Anzahl der Atome im ccm der Substanz.

N ist die Ordnungszahl des absorbierenden Elementes, λ die Wellenlänge.

1) W. H. Bragg und S. E. Peirce, Phil. Mag. **28**, 626, 1914.

$C = 1{,}79 \cdot 10^{-6}$ im kurzwelligen Gebiet unmittelbar nach dem Absorptionssprung,
$= 0{,}235 \cdot 10^{-6}$ im langwelligen Gebiet unmittelbar vor dem Absorptionssprung.

Hiernach beträgt der Sprung des Absorptionskoeffizienten in der K-Serie 7,6. Die angeführte Wellenlängenabhängigkeit der Absorption konnten Bragg und Peirce nicht ihren Messungen entnehmen wegen des zu geringen Spektralbereiches; sie war bereits früher von mehreren Autoren[1]) abgeleitet worden auf Grund der ausgedehnten Absorptionsmessungen von Barkla und Sadler. Zu diesem Zweck wurde die mittlere Wellenlänge der verwandten (komplexen!) K-Strahlungen der Elemente aus den Tabellen von Moseley bzw. Siegbahn entnommen. Der Mangel an Homogenität der absorbierten K-Strahlung in den Barklaschen Versuchen dürfte das Resultat nicht sehr stark beeinflussen.

Fig. 15 zeigt schematisch den für alle Elemente typischen Absorptionsverlauf im K-Gebiet in der üblichen Darstellung des log der Absorptionskoeffizienten gegen den log der Wellenlängen. Bemerkenswert scharf und spektral umfassend für dasselbe Element ist die lineare Beziehung in der logarithmischen Darstellung, d. h. eine rein exponentielle zwischen Absorptionskoeffizient und Wellenlänge selbst. Sogar beim Durchschreiten der diskontinuierlichen Gebiete der K- und L-Absorption bleibt der Exponent numerisch erhalten. Für verschiedene Elemente schwankt der Exponent zwischen 2,9 (Platin) und 2,5 (Aluminium). Im Mittel ergibt sich für den Absorptionskoeffizienten a

$$a = \text{const.}\ \lambda^{2,7}.$$

Nach Rutherford bewährt sich diese Beziehung bis zu den kürzesten Wellenlängen der

1) C. G. Darwin, Phil. Mag. **27**, 230, 1914; M. Siegbahn, diese Zeitschr. **15**, 753, 1914; W. Kossel, Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 898, 1914; E. Rutherford, Phil. Mag. **28**, 272, 1914.

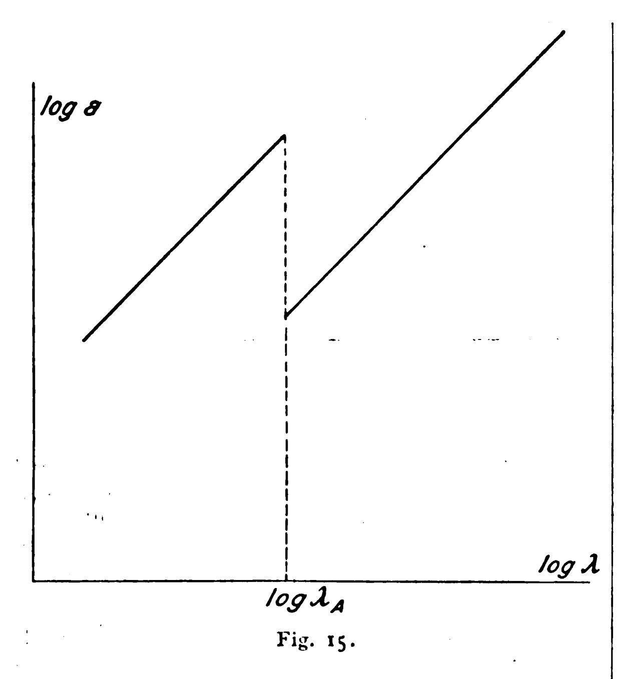


Fig. 15.

γ-Strahlung. Sie erlaubt daher in bequemer Weise — wenn homogene Strahlung vorliegt — aus dem Absorptionskoeffizienten die Wellenlänge abzuleiten.

Beziehungen zwischen Absorptionsspektrum und Linienemissionsspektrum der Elemente (Stokessches Gesetz der Fluoreszenz).

Die Linienemission der Elemente wird gewöhnlich in der Entladungsröhre durch Kathodenstrahlen erzeugt. Es ist für unsere Betrachtungen wichtig, voraus zu bemerken, daß das Spektrum ungeändert bleibt, wenn es durch Absorption von Röntgenstrahlen hervorgebracht wird, wie die Versuche von de Broglie, Glagolew und Siegbahn lehren, die bei einzelnen Elementen diese Barklasche Sekundärstrahlung spektrographieren konnten.

Der energetische Zusammenhang zwischen Absorptions- und Linienspektrum tritt in dem oben erläuterten Doppelversuch am Zinn in dem einfachen Falle der K-Serie besonders anschaulich hervor. Sobald, von langen Wellenlängen herkommend, in der auffallenden Strahlung die Wellenlänge c der Absorptionsbandkante erreicht wird, setzt plötzlich eine starke Vermehrung der Absorption im Zinn ein (Fig. 12b); diese sprunghaft vermehrte Aufnahme strahlender Energie tritt — mindestens teilweise — in der ebenso sprunghaft einsetzenden Abgabe neuer, vorher nicht vorhandener, strahlender Energie (Fig. 12a) wieder zutage: diese ist die K-Linienemission.

Das diese Emission speisende Absorptions- bzw. Erregungsgebiet erstreckt sich im Spektrum von der Erregungsgrenze λ_A kontinuierlich unbegrenzt weiter nach den kurzen Wellen; es ist nicht auf schmale spektrale Absorptionsstellen beschränkt wie denn die Analogie zu den Fraunhoferschen Absorptionslinien völlig im Röntgenspektrum fehlt.

Der auf gleiche einfallende Primärintensität bezogene Emissionskoeffizient E (der K-Strahlung) findet sich proportional der vierten Potenz der erregenden Wellenlänge λ:

$$E = \text{const.}\ \lambda^4.$$

Diese Beziehung folgerte R. Glocker[1]) aus den Messungen von Sadler, indem er die Wellenlängen der bei jenen Versuchen erregenden K-Strahlungen der Elemente den Siegbahnschen Tabellen entnahm. Der Gültigkeitsbereich dieser Beziehung beschränkt sich vorerst auf die drei benachbarten Metalle Fe, Cr, Cu und auf den Wellenlängenbereich 1 zu 3.

Die Stärke A der Absorption fanden wir oben proportional der 2,7ten Potenz der (die K-Strahlung) erregenden Wellenlänge λ:

$$A = \text{const.}\ \lambda^{2,7}.$$

W. Schottky[2]) weist darauf hin, daß aus der Kombination der beiden Gleichungen für die Ausbeute Q an K-Strahlung (auf gleiche absorbierte Energie bezogen) ungefähr (indem er 2,7 durch 3 approximiert) folgt:

$$Q = \frac{E}{A} = \text{const.} \cdot \lambda.$$

Dies Resultat findet Schottky in Übereinstimmung mit der Einsteinschen Quantentheorie der Absorption.

Der, soweit die Messungen gehen, gleichmäßige (stufenfreie) Intensitätsverlauf innerhalb der K-Absorption läßt es wahrscheinlich erscheinen, daß alle Linien der K-Serie in einem zusammenhängenden Akt erregt werden und nicht etwa die einzelnen Linien ihre eigenen spektral getrennten Erregungsgrenzen haben. Dies wird erhärtet durch später anzuführende Untersuchungen über die Erregungsbedingungen der Serienlinien durch Kathodenstrahlen.

Der Vergleich der Wellenlänge der erregten K-Linien mit der Wellenlänge λ_A der Erregungsgrenze führte[3]) zu dem für alle Elemente gültigen Satz: Die Wellenlänge aller erregten K-Linien ist länger als die längste unter den erregenden, d. i. die Wellenlänge λ_A der Erregungsgrenze. Speziell erweist sich

1) R. Glocker, diese Zeitschr. **17**, 488, 1916.
2) W. Schottky, diese Zeitschr. **17**, 582, 1916.
3) E. Wagner, Ann. d. Phys. **46**, 868, 1915.

die kürzeste Wellenlänge λ_γ im K-Spektrum als eben merklich noch länger als λ_A. Mit dieser strengen Erfüllung des Stokesschen Gesetzes ist der hier obwaltende Mechanismus als Fluoreszenz gekennzeichnet.

Die organische Einheit von Absorptions- und Emissionsvorgang zeigt sich sinnfällig in der Koinzidenz der Seriengrenze (Häufungsstelle der Serienlinien nach der kurzwelligen Seite im Spektrum) mit der Absorptionsbandkante (vgl. Fig. 16). Wagner untersuchte diese Verhältnisse genauer am Pd, indem

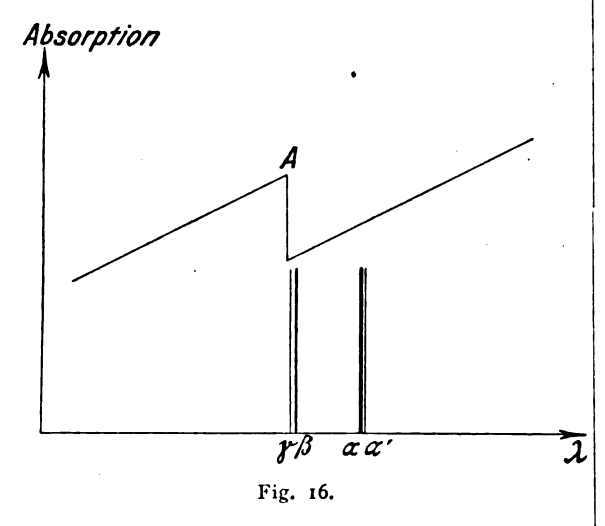


Fig. 16.

er die Pd-K-Linien (und zwar in der erhöhten Dispersion der II. Ordnung) gleichzeitig mit der Pd-Absorption spektrographierte.

Das Spektralintervall zwischen Absorptionskante und der kurzwelligen γ-Linie war nicht mehr zuverlässig meßbar; mit Sicherheit jedoch steht die γ-Linie selbst noch außerhalb der starken K-Absorption.

Die merkliche Koinzidenz der γ-Linie mit der Absorptionskante wurde von Wagner[1]) ferner an Ag, Cu, Ni, Fe festgestellt, wobei die Wellenlänge λ_A an die Linienmessungen Moseleys angeschlossen war (vgl. folgende Tabelle).

Tabelle VIII.

Element	λ_A	λ_γ
Silber	0,490 Å	0,491 Å
Palladium	0,513	0,513
Kupfer	1,386	1,390
Nickel	1,502	1,500
Eisen	1,759	1,760
Wolfram	0,171	0,171

Der Wert λ_A für Wolfram ist durch erlaubte Extrapolation der $\sqrt{\nu_A}$-Werte von Nachbarelementen bei de Broglie[1]) gewonnen. Der Wert für λ_γ wurde — wohl mit einiger Unsicherheit — aus den de Broglieschen Messungen von λ_α und λ_β durch Differenzbildung erhalten gegen die (absolut mit diesen etwas differierenden) Messungen der gesamten K-Serie λ_α $\lambda_{\alpha'}$ λ_β λ_γ von Ledoux-Lebard u. A. Dauvillier[2]).

Bildet man das Wellenlängenverhältnis der stärksten (α-)Linie zur Absorptionsbandkante $\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_A}$, so findet man den Wert dieses „Stokesschen Sprunges" der Wellenlängen für die verschiedenen Elemente annähernd gleich. Er wächst von 1,11 beim Fe ($N = 26$) bis zu 1,19 beim Wo ($N = 74$). Ähnliches gilt, nebenbei bemerkt, für das Verhältnis $\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}$.

In der L-Serie herrschen weniger durchsichtige Verhältnisse. Entsprechend den zwei (bzw. drei) nahe benachbarten und sich überlagernden Absorptionsgebieten, sind mehrere übereinander greifende Liniensysteme zu erwarten.

Folgende vom Verf. vorgeschlagene Zuordnung hat sich bewährt:

Das langwelligere Absorptionsgebiet A_1 speist die Linien α und γ.

Das kurzwelligere Absorptionsgebiet A_2 speist die Linien β und δ.

Diese Zuordnung (auf Fig. 17 am Pt-Spektrum veranschaulicht) erfüllt in jedem Gebiet das Stokessche Gesetz; sie trägt auch einer Beobachtung Moseleys und Darwins Rech-

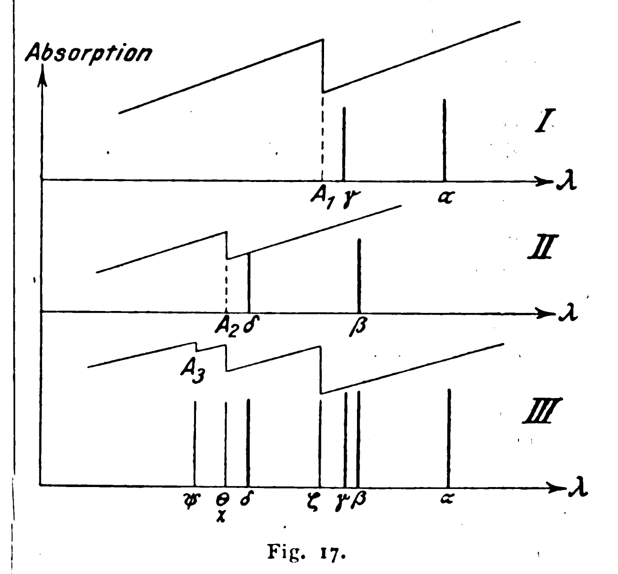


Fig. 17.

1) E. Wagner, Sitzber. bayr. Akad. S. 33, 1916.

1) M. de Broglie, C. R. 162, 596, 1916.

2) Ledoux-Lebard u. A. Dauvillier, C. R. 163, 754, 1916.

nung, nach welcher β und γ in von den Entladungsspannungen stark abhängigem Intensitätsverhältnis erregt werden. Bei den Elementen mit wachsender Atomnummer N sondern sich die zwei Liniensysteme spektral immer mehr, so daß sie bei den zwei schwersten Thor und Uran bereits völlig, d. h. soweit getrennt liegen, daß $\lambda_{A_1} > \lambda_\beta$[1]), daß also allein schon auf Grund des Stokesschen Gesetzes A_1 nicht für die Erregung des zweiten Systems β und δ in Frage kommen kann. Hierdurch erscheint unsere Zuordnung völlig gesichert.

Die kurzwelligste Linie ψ ist noch kürzerwellig als λ_{A_2}. Dies bedeutete einen ernsten Einwand gegen das Stokessche Gesetz, solange ein noch kurzwelligeres neues Absorptionsgebiet nicht gefunden ward. Die nunmehr von de Broglie sichergestellte dritte Kante A_3, für die er angibt $\lambda_{A_3} < \lambda_{A_2}$, dürfte den Einwand beseitigt haben. Vermutlich koinzidiert A_3 mit ψ.

Für den „Stokesschen Sprung" der Wellenlängen ergeben sich im L-Gebiet die Werte:

$$\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_{A_1}} = 1{,}24 \text{ und } \frac{\lambda_\beta}{\lambda_{A_2}} = 1{,}20 \text{ (für } Pt \text{ u. } Au).$$

Ein Vergleich mit dem entsprechenden Stokesschen Sprung in der K-Serie muß sich auf gleiche Elemente beziehen. Die Messungen am benachbarten Wolfram ergeben:

$$(K\text{-Serie}) \quad \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_A} = 1{,}19.$$

Diese annähernde Gleichheit der Werte deutet auf eine wichtige Ähnlichkeit im Mechanismus der Fluoreszenz der beiden Serien.

Die Erregungsbedingungen der Röntgenspektren durch Kathodenstrahlen.

I. Das kontinuierliche Spektrum.

Solange man mit den üblichen Hilfsmitteln der Röntgentechnik arbeitete, insbesondere mit dem Transformator die pulsierenden, von dem Gaszustand der Röhre stark abhängigen Spannungen erzeugte, konnten einwandfreie quantitative Versuchsresultate über die Intensitätsverteilung im kontinuierlichen Spektrum nicht erzielt werden. Unter den qualitativen Vorarbeiten sei die Feststellung Friedrichs[2]) erwähnt, daß harte Primärstrahlen im Laueschen Interferenzbild die Schwärzung von Interferenzflecken kurzwelliger Strahlung verstärkten. Schon vorher gelang es Moseley u. Darwin[3]) mit ihrer sehr fein ausgebildeten Ionisationsmethode und dem Kristallspektrometer unter annähernd konstanten Spannungen die Verteilungskurve der Ionisation in mehreren Spektralordnungen aufzunehmen. Sie fanden eine steil vom kurzwelligen Ende her aufsteigende Kurve mit scharfem Maximum bei $\lambda = 0{,}4$ Å für eine „weiche" Röhre. Das Spektrum erstreckte sich in merklicher Intensität über ca. $2^1/_2$ Oktaven. Der Ort des Maximums sowie die gesamte Verteilungskurve erwies sich stark vom Zustand der Röhre abhängig, insbesondere rückte das Maximum bei höheren Spannungen zu kürzeren Wellenlängen.

Unter vollendeten Versuchsbedingungen: der gasfreien fein regulierbaren Glühkathodenröhre von Coolidge und einer Akkumulatorenbatterie von 20000 Zellen wurden kürzlich die Versuche von Duane u. Hunt[1]), Webster[2]) und Hull u. Rice[3]) einwandfrei durchgeführt. Duane u. Hunt maßen die „Isochromaten" im Spektrum, d. h. sie maßen die Ionisation einer Röntgenstrahlung bestimmter Wellenlänge in Abhängigkeit vom Potential. Die Ionisationskammer bleibt also beim Versuch in fester Reflexionsstellung. Die erhaltenen Kurven zeigen, daß die Intensität erst nach Überschreitung eines sehr bestimmten Minimalwertes V_0 der Spannung „merklich" wird (vgl. Fig. 18). Das

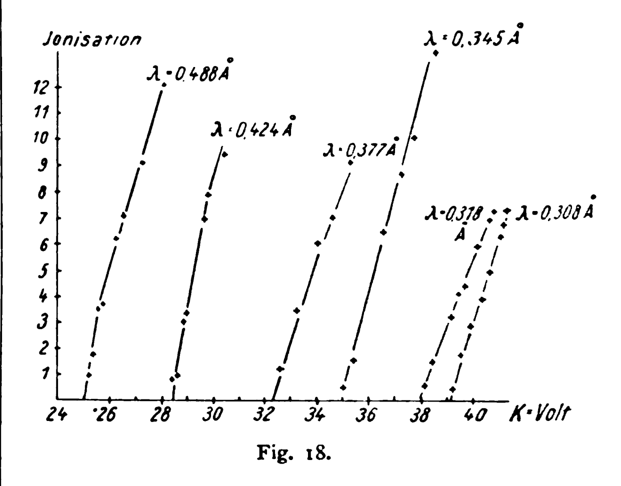


Fig. 18.

lineare, nicht asymptotische, Anwachsen der Intensität von null an berechtigt anzunehmen, daß hier nicht nur ein für die Empfindlichkeit der Methode bestehender, sondern ein wirklicher Schwellenwert vorliegt. Hiernach existiert im kontinuierlichen Spektrum nach der kurzwelligen Seite eine scharf definierte kürzeste Grenzwellenlänge

1) Dies folgt mit Sicherheit aus Frimans Zahlen, wenn nach des Verf. Vermutung (Sitzber. bayr. Akad. S. 38, 1916) A_1 mit ζ koinzidiert, was nach de Broglies Angaben sich zu bestätigen scheint. Die direkten Wellenlängenmessungen liefern für Uran: $\lambda_{A_1} = 0{,}718$ Å, $\lambda_\beta = 0{,}720$ Å.

2) W. Friedrich, Ann. d. Phys. **44**. 1169, 1914.

3) J. Moseley u. G. Darwin, Phil. Mag. **26**, 210, 1913.

1) W. Duane u. F. L. Hunt, Phys. Rev. **6**, 166, 1915.

2) D. L. Webster, Proc. Amer. Acad. **2**, 90, 1916.

3) A. W. Hull u. M. Rice, Proc. Amer. Acad. **2**, 265, 1916.

$\lambda_{min.}$ (oder eine Maximalfrequenz $\nu_{max.}$) bei gegebener Entladungsspannung V_0.

Es ergab sich als Abhängigkeit zwischen $\lambda_{min.}$ und V_0 mit einer Genauigkeit von einigen Prozenten das sehr einfache Gesetz:

$$V_0 \cdot \lambda_{min} = \text{const}$$

bzw.

$$V_0 = \text{const} \cdot \nu_{max.} = k \cdot \nu_{max.}$$

Das untersuchte Wellenlängengebiet erstreckte sich von 0,488 Å bis 0,308 Å entsprechend dem Intervall von 25000 bis 39000 Volt.

In der ersten Form erkennt man das Wiensche Verschiebungsgesetz wieder, in der zweiten die Einsteinsche Gleichung:

$$e \cdot V = h \cdot \nu$$

e = Ladung des Elektrons
h = Plancksche Strahlungskonstante.

Die Konstante k in der Duane-Huntschen Gleichung stimmt nun in bemerkenswerter Weise überein mit $\left(\frac{h}{e}\right)$ in der Einsteinschen Formel.

Nimmt man für e den Millikanschen Wert $4,77 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. und darnach für die Gitterkonstante des verwandten Kalkspates den Braggschen Wert $3,03 \cdot 10^{-8}$ cm, so wird

$$h = k \cdot e = 6,50 \cdot 10^{-27}.$$

Mit der gleichen Versuchsanordnung (Coolidgerohr mit Rhodiumantikathode) erhielt D. L. Webster

$$h = 6,55 \cdot 10^{-27} \text{ bzw. } 6,52 \cdot 10^{-27}$$
$$\text{bei } \lambda = 0,548 \text{ Å bzw. } 0,558 \text{ Å}.$$

Wir stellen dem die mit anderen Methoden gefundenen h-Werte zur Seite:

Planck I	$6,55 \cdot 10^{-27}$	Wärmestrahlung
II	6,41	
Sommerfeld	6,51	Quantentheorie der Spektrallinien unter Anlehnung an die Wärmestrahlung
Millikan	6,57	Photoelektrischer Effekt
Duane-Hunt	6,50	λ_{min} im Röntgenspektrum.
Webster	6,53	

Hull dehnte die Untersuchungen der letzten Forscher bis zu 100000 Volt konstanter Spannung aus; hier erhielt er $\lambda_{min.} = 0,142$ Å; dem entspricht $h = 7,5 \cdot 10^{-27}$. Mit geringerer Genauigkeit konnte bis 150000 Volt gemessen werden, wo sich $\lambda_{min.} = 0,08$ Å ergab; daraus folgt $h = 6,4 \cdot 10^{-27}$. Hull u. Rice veröffentlichten auch ein mit dem Drehkristall ($NaCl$) photographisch aufgenommenes Spektrum am Wolfram bei 100000 Volt konstanter Spannung. Das schroff abbrechende kurzwellige Ende ist deutlich erkennbar, doch fehlen genauere Diskussionen darüber, inwieweit die Reflexionsverhältnisse am Kristall bei fast streifender Inzidenz ($\varphi = 1^1/_2{}^0$) selbst die Intensität im gleichen Sinne beeinflussen konnten.

Erstaunlich umfassend stellt sich nach den obigen Ergebnissen der Gültigkeitsbereich der Einsteinschen Beziehung dar. Sie bewährt sich in quantitativer Schärfe von der Lichtwellenlänge bis zu den kürzesten Wellenlängen im Röntgenspektrum, d. i. im Verhältnis von 1 : 150000.

Da die Messungen von h im Gebiete des Röntgenspektrums so hohe Potentiale verwenden, daß gegen sie die beim photoelektrischen Effekt störenden Kontaktpotentiale verschwinden, so dürften sie eine Präzisionsmessung der wichtigen Quantenkonstanten h ermöglichen.

Die numerische Übereinstimmung des im Röntgengebiet erhaltenen Wertes von h mit dem auf mehrfach andere Weise gefundenen Werte ist ein starker Beweis für die Richtigkeit der absoluten Wellenlängenbestimmung, wie sie aus den Braggschen Folgerungen über den Bau der Kristalle hervorgeht.

Die Messung der spektralen Energieverteilung bei konstantem Potential wurde als — weniger genaue — Ergänzung der Isochromatenmessung ebenfalls von den oben genannten Autoren ausgeführt. Fig. 19 gibt eine von Duane und Hunt mitgeteilte Kurve

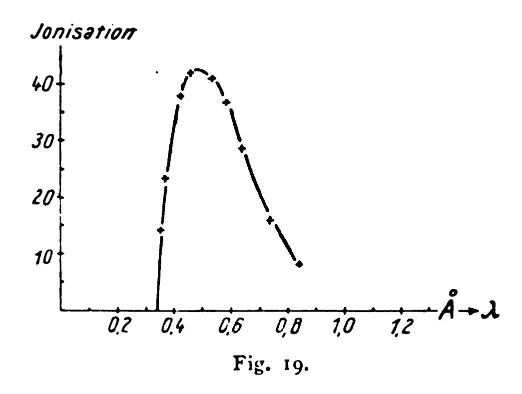


Fig. 19.

wieder. Charakteristisch ist der steile Absturz zu dem Schwellenwert der kürzesten Wellenlänge. Es ist jedoch zu beachten, daß diese Kurven sämtlicher Autoren nicht die wahre Energieverteilung im Spektrum zum Ausdruck bringen, sondern nur die, von der Wellenlänge abhängige, Ionisierung der bis zur Ionisationskammer gelangenden und in ihr absorbierten Strahlung darstellen. Einwandfrei bleibt vorerst nur der Schwellenwert der Wellenlänge. Doch dürfte auch der Ort des Maximums im wesentlichen richtig sein. Hull u. Rice finden für:

50000 60000 70000 Volt
als Wellenlänge des Maximums:
2,4 2,6 $2,75 \cdot 10^{-9}$ cm.

Rutherford, Barnes u. Richardson[1]) stellten gleichfalls die Existenz der kurzwelligen „Endstrahlung" im kontinuierlichen Spektrum bei konstantem Potential fest und untersuchten die Abhängigkeit ihrer Härte vom Potential bis zu 175000 Volt. Indessen sind ihre Resultate nicht in Übereinstimmung mit den einfachen soeben geschilderten Ergebnissen; sie fanden vielmehr mit dem Potential wachsende Abweichungen von der Einsteinschen Gleichung in dem Sinne zu großer $\lambda_{min.}$ (d. i. zu großer Werte für h) bei gegebenem Potential. Es schien sich $\lambda_{min.}$ mit wachsendem Potential sogar einer festen Grenze $= 1,72 \cdot 10^{-9}$ cm zu nähern.

Indessen dürfte hier nach der Meinung des Verf. den Autoren eine Täuschung widerfahren sein, die bedingt ist durch die Untersuchungsmethode der kürzesten Wellenlänge, verbunden mit dem Auftreten des starken K-Linienspektrums des Wolframs bei jenen hohen Potentialen. Die Strahlung war nicht spektral zerlegt, sondern es wurden der Gesamtstrahlung durch starke nicht selektive Absorption ihre weicheren Bestandteile soweit entzogen, bis die harte Reststrahlung einen von der Dicke unabhängigen Absorptionskoeffizienten μ im Aluminium zeigte. Hierdurch schien die Homogenität der Reststrahlung gesichert und definiert; aus μ konnte dann auf $\lambda_{min.}$ durch das oben mitgeteilte Gesetz $\mu = \lambda^{2,7} \cdot \text{const}$ geschlossen werden. Oberhalb 70000 Volt beginnt nun aber die Strahlung der Wolframlinien am kurzwelligen Ende des Spektrums mit so stark wachsender Intensität bei zunehmender Spannung, daß dagegen das kontinuierliche Spektrum, insbesondere dessen schwächeres Ende zurücktritt. Das Resultat einer Absorptionsanalyse eines solchen Strahlengemisches wird das Rutherfordsche sein: die große Intensität der im Spektrum fest bleibenden Linienstrahlung mit $\lambda_\beta = 0,17$ Å verdeckt die schwache Intensität des in Wahrheit sich mit wachsendem Potential gesetzmäßig weiter verschiebenden kurzwelligen Endes des kontinuierlichen Spektrums und täuscht eine feste Endstrahlung von $\lambda = 0,17$ Å vor. Man vergleiche hierzu die mit der Ionisationsmethode aufgenommenen Spektren von Hull u. Rice am Wolfram in Intervallen von je 10000 Volt zwischen 40000 und 90000 Volt, die das Gesagte augenscheinlich bestätigen.

Ähnliche Resultate wie die Rutherfordschen sind bei Versuchen bis 140000 Volt von Ledoux-Lebard u. Dauvillier[1]) erhalten worden; sie finden ebenfalls eine starke Verminderung von $\nu_{max.}$ gegenüber der Einsteinschen Gleichung bei hohen Potentialen. Ihre Methode war die photographische Kristallspektrometrie.

Angesichts der vorzüglichen Versuchsbedingungen und Resultate bei Webster und Hull u. Rice scheint uns eine Abweichung von der Einsteinschen Gleichung nicht sichergestellt zu sein.

II. Die Erregungsbedingungen des Linienspektrums der K-Serie durch Kathodenstrahlen.

D. L. Webster untersuchte die Linienerregung des Rhodiums als Antikathode in einer Coolidgeröhre nach der Isochromatenmethode. Wird der Spalt der Ionisierungskammer auf den Ort der Wellenlänge λ_a fest eingestellt, die der reflektierten Strahlung des α-Dubletts der K-Serie entspricht, so beginnt erst nach Überschreitung einer bestimmten Minimalspannung V_a die Intensität der betreffenden Strahlung merklich zu werden. Mit wachsendem Potential erfolgt ein nahezu linearer Anstieg der Intensität (vgl. Fig. 20) bis zu dem Potential V_k, wo

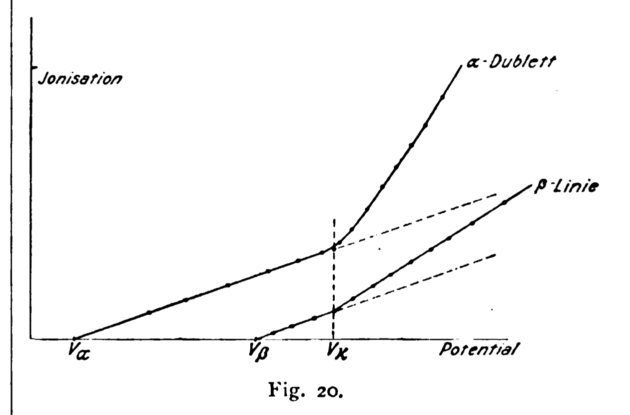


Fig. 20.

plötzlich ein steilerer Anstieg einsetzt. Das Verhalten zwischen V_a und V_k entspricht völlig dem unter I. erläuterten Verhalten des kontinuierlichen Spektrums, insbesondere ist die Einsteinsche Beziehung numerisch genau erfüllt: $V_a \cdot \lambda_a = \frac{h}{e}$. Da ein in spektraler Nähe von λ_a angestellter Isochromatenversuch einen Knick analog dem bei V_k nicht zeigt, so bedeutet offenbar V_k das Erregungspotential der α-Linien, deren Strahlung von hier ab mit wachsendem Potential selbst anwächst und

1) Rutherford, Barnes u. Richardson, Phil. Mag. **30**, 339, 1915.

1) C. R. **163**, 754, 1916.

sich der Strahlung derselben Wellenlänge im kontinuierlichen Spektrum superponiert.

Ein analoger Versuch an der β-Linie ergab das gleiche Erregungspotential V_k (vgl. Fig. 20). Da β kurzwelliger ist als α, so ist der Bereich $V_k - V_\beta$, innerhalb dessen der λ_β entsprechende kontinuierliche Spektralbereich allein erregt wird, kleiner als bei der α-Linie. Die γ-Linie ist nicht untersucht; es ist aber anzunehmen, daß für sie dasselbe Erregungspotential V_k besteht. V_k ist nach Webster 1,3 Proz.[1]) größer als die Minimalspannung V_γ zur Erregung von λ_γ im kontinuierlichen Spektrum. Beim Erregungspotential V_k selbst fällt also die kürzeste Wellenlänge (γ) im diskontinuierlichen Spektrum ungefähr zusammen mit der kürzesten Wellenlänge im kontinuierlichen Spektrum, während die langwelligeren Linien β und α dabei auf dem Hintergrund des bereits erregten kontinuierlichen Spektrums entstehen. Das wesentliche Ergebnis der Versuche lautet: Alle Linien der K-Serie haben das gleiche scharf definierte Erregungspotential V_k der erzeugenden Kathodenstrahlen; die Linien sind daher einzeln nicht erregbar.

Die Fluoreszenzemission der K-Linien stellt sich hiernach als ein einheitlicher Akt dar, wie dies oben bereits auf Grund ihrer Erregungsweise durch Absorption wahrscheinlich gemacht werden konnte. Diese Einheitlichkeit findet eine Bestätigung in dem weiteren Versuch Websters, der das gleiche Intensitätsverhältnis der α- zur β-Linienemission ergab in einem beträchtlichen Intervall von Potentialen, mit deren Wachstum die Linienemission beschleunigt anstieg.

1) Nach Tab. 8 ist λ_A merklich gleich λ_γ und würde die Differenz zwischen V_k und V_γ kleiner sein als 1,3 Proz. (vgl. unten).

Das Erregungspotential V_k der K-Serienemission und ihre Erregungsgrenze V_A im Absorptionsspektrum entsprechen offenbar einander und erlauben auf sie die Einsteinsche Äquivalenzgleichung von Potential und Frequenz anzuwenden:

$$e \cdot V_k = h \cdot \nu_A .$$

V_k ist für Rhodium $= 23250$ Volt nach Websters Messungen. Aus Wagners Messungen von $\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_A} = 1,145$ folgt mit $\lambda_\alpha = 0,616 \cdot 10^{-8}$ cm (Siegbahn)

$$\lambda_A = 0,537 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Mit diesen Daten und dem Millikanschen e folgt:

$$h = 6,62 \cdot 10^{-27}$$

in genügender Übereinstimmung mit den früheren Werten für h.

Mit dieser Verknüpfung der beiden scharfen Schwellenwerte in der Erregungsart des Fluoreszenzmechanismus ist ein neuer interessanter Geltungsbereich der Einsteinschen Beziehung gewonnen, aus dem ein zweiter Weg zu einer Präzisionsbestimmung von h sich ergibt.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

H. Buchholz, Angewandte Mathematik. Das mechanische Potential und seine Anwendung zur Bestimmung der Figur der Erde (Höhere Geodäsie). Mit einem ergänzenden Anhang über das elastische und hydrodynamische Potential (auf Grund von Vorlesungen Ludwig Boltzmanns). Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. gr 8°. XXXVIII und 820 S. mit 237 Textfiguren. Leipzig, J. A. Barth. 1916. Preis geb. M. 30. —

Der Titel „Angewandte Mathematik" — unter welcher Abkürzung das Buch doch im allgemeinen zitiert werden dürfte — ist leider geeignet leicht übersehen zu lassen, daß es sich hier um Potentialtheorie für die Bedürfnisse der höheren Geodäsie handelt und daß der bescheiden als Anhang bezeichnete, 198 Seiten starke dritte Teil des Werkes eine dem Physiker höchst wertvolle Bearbeitung Boltzmannscher Vorlesungen bildet, die, ebenso wie der erste 244 Seiten umfassende Teil über das mechanische Potential, welcher auch Boltzmannschen Vorlesungen (Wintersemester 1892/93) seine Entstehung verdankt, eine durchaus beachtenswerte Ergänzung zu den im Barthschen Verlag erschienenen Werken Boltzmanns bilden. Dem Referenten will es scheinen, daß es besser gewesen wäre, den ersten und dritten Teil des Buches als (bearbeitete) Vorlesungen Boltzmanns herauszugeben und den zweiten Teil unter Beziehung darauf getrennt als geodätisches Werk zu verlegen. Davon hat den Autor offenbar das Bestreben abgehalten, die Theorie der Bestimmung der Figur der Erde in didaktisch möglichst vollkommener Form im Zusammenhang mit allen nötigen Grundlagen aus einem Gusse darzustellen. Für die Leser dieser Zeitschrift hat vorwiegend der potentialtheoretische Inhalt Interesse, und dazu sei folgendes bemerkt. Potentialtheorie studiert der Physiker meist in seinen ersten theoretisch-physikalischen Semestern, also zu einer Zeit, in der er erfahrungsgemäß stärker als später das Bedürfnis empfindet von dem anschaulichen Inhalte mathematischer Idealisierung Rechenschaft zu erhalten. In diesem Stadium ist ihm auch eine ausführlichere, Zwischenrechnungen nicht überspringende Darstellung naturgemäß erwünscht. Die hier vorliegende Bearbeitung des Stoffes

ist in dieser Beziehung als hervorragend gut zu bezeichnen. Ohne „breit" zu sein, werden die originellen Darstellungen Boltzmanns in einer seltenen Klarheit und Lauterkeit vorgeführt. Auch die Textfiguren sind vorzüglich. Dabei soll aber nicht etwa gesagt sein, daß das Buch nur für Anfänger bestimmt wäre — gerade der mit dem Stoff Vertraute wird manches Anziehende finden. So die Ableitung der Laplaceschen Gleichung im dritten Kapitel und Boltzmanns Beweis des Dirichletschen Prinzips in Kap. VIII und die am Schluß der ersten Abteilung zu findende Behandlung des „Laplaceschen Sphäroids". — Der Inhalt der die „höhere Geodäsie" behandelnden zweiten Abteilung gliedert sich folgendermaßen: Grundzüge der klassischen mechanischen Theorie der Gestalt der Erde, Geodätische Fundamentalbestimmungen, Die wahre oder mathematische Figur der Erde: das Geoid (die Brunsschen Arbeiten werden hier eingehend gewürdigt), Die Bestimmung der Schwerkraft durch Pendelbeobachtungen und des aus den Schweremessungen resultierenden Wertes der Abplattung der Erde. Schlußresumee zur Bestimmung der mathematischen Figur der Erde. — Der „Anhang" über den „Potentialbegriff in der theoretischen Physik" handelt von dem „elastischen Potential" und dem hydrodynamischen oder Geschwindigkeits-Potential mit Anwendungen". Bei der Bearbeitung sind Vorlesungsnachschriften des Herausgebers sowie nachgelassene Aufzeichnungen Boltzmanns benutzt worden. Zuerst werden „Die allgemeinen Grundlagen und Fundamentalgleichungen der Mechanik elastisch fester Körper (Elastizitätstheorie), das elastische Potential, Anwendungen" gegeben. Hervorzuheben ist die ausgezeichnete Entwicklung der Grundlagen, die dem Bemühen des Autors, die lichtvolle Art Boltzmannscher Ableitungen zu wahren, alle Ehre macht. Beachtung dürfte speziell auch § 92 verdienen: „Gültigkeitsnachweis des Prinzips der lebendigen Kraft für die elastische Energie" und „Verwendung des elastischen Potentials zum Gültigkeitsnachweis des Hamiltonschen Prinzips für einen elastischen Körper". Der folgende Abschnitt behandelt: „Die verschiedenen Formen der Fundamentalgleichungen der Hydrodynamik. Das Geschwindigkeitspotential". Sowohl die allgemeinen Grundlagen als die Herleitung und Anwendungen des Geschwindigkeitspotentials wird man besonders bei vektoranalytischen Vergleichsgedanken mit Vergnügen lesen! Auch die Behandlung der Wellenbewegungen ist gut. Hinweisen will ich auch auf die in § 100 vorliegende Behandlung der Wirbelbewegungen.

Der Physiker, der sich für Boltzmannsche Darstellungen interessiert, sei jedenfalls nachdrücklich auf vorliegendes Werk aufmerksam gemacht.

H. Hörig.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Professor für Mathematik und Mechanik an der Bergakademie in Clausthal Dr. Hans Mohrmann zum ord. Professor der Geometrie an der Technischen Hochschule Karlsruhe, der Privatdozent an der Universität München und Direktor der meteorologischen Zentralstation daselbst Dr. August Schmauß zum ord. Honorarprofessor für Physik der Atmosphäre, speziell Meteorologie und Klimatologie an derselben Hochschule, der Privatdozent an der Universität Göttingen Dr. Adolf Bestelmeyer zum a.o. Professor der Physik an der Universität Greifswald, der a.o. Professor an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Becker zum a.o. Honorarprofessor für chemisch-technische Warenkunde ebendaselbst.

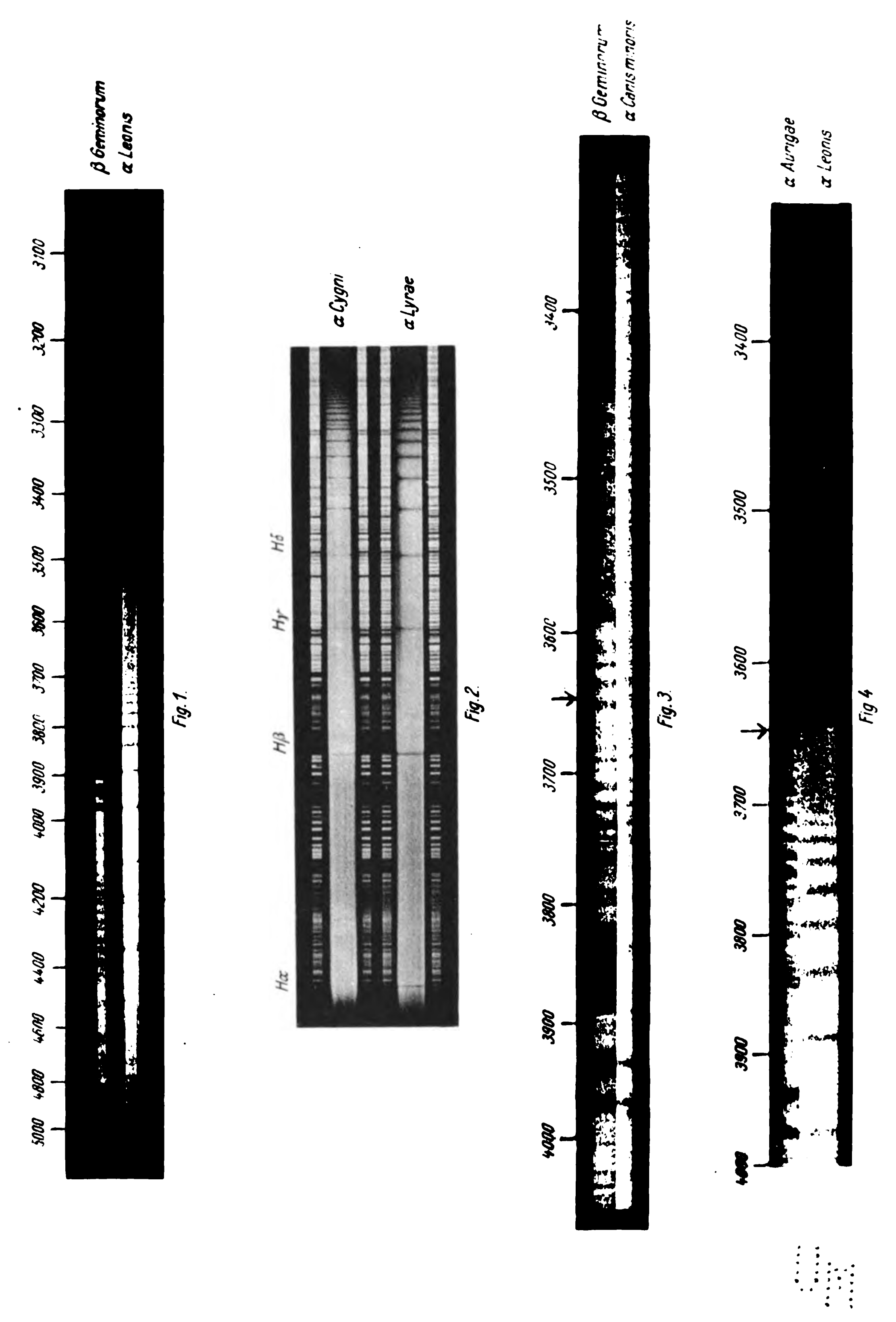
Verliehen: Dem Privatdozenten der Physik und Astronomie an der Universität Bonn Dr. Leonhard Grebe, sowie den Privatdozenten für Chemie an der Universität München Dr. Rudolf Pummerer und Dr. Kurt Meyer und dem wissenschaftlichen Mitarbeiter am Chemischen Staatslaboratorium in München Dr. Artur Stoll der Titel Professor, dem ord. Professor der Mathematik an der deutschen Universität Prag Dr. Georg Pick, dem ord. Professor der Mathematik an der Universität Lemberg Dr. Josef Kniaz v. Kozielsko-Puzyna, dem ord. Professor für allgemeine und technische Mechanik an der Technischen Hochschule Graz Dr. Ferdinand Wittenbauer und dem ord. Professor für Elektrotechnik an der deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Karl Zickler der Titel Hofrat.

Gestorben: Der Professor für chemisch-technische Untersuchungen an der Hochschule für Bodenkultur Dr. Josef Schmidt, der frühere ord. Professor der Ophthalmologie an der Universität Dorpat und Farbenforscher Wirkl. Geh. Staatsrat Dr. Eduard Raehlmann, der ord. Professor der Physik an der Universität Krakau und gegenwärtige Rektor derselben Dr. Maryam Smoluchowski, der Schriftleiter der Deutschen Färberzeitung Chemiker Dr. Adolf Kielmeyer in Leipzig, der Vizepräsident und Ehrensekretär der Chemists Association Charles Frederick Carr aus Nottingham (in Frankreich gefallen).

Angebote.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



J. Hartmann, Ein ausgedehntes Absorptionsgebiet im Spektrum der Wasserstoffsterne.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

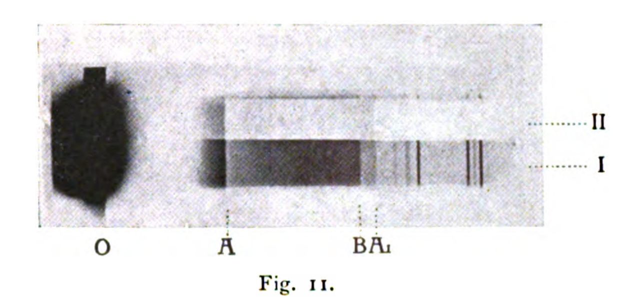


Fig. 11.

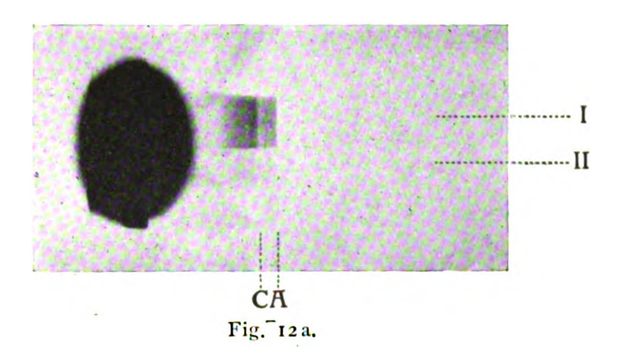


Fig. 12a.

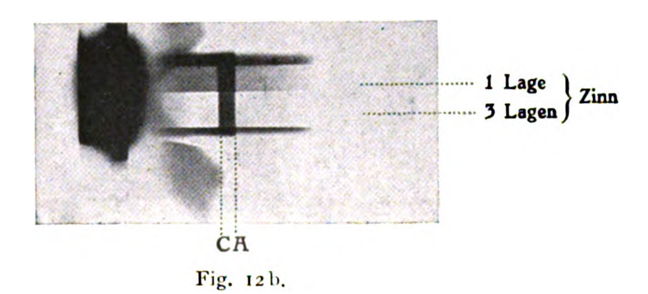


Fig. 12b.

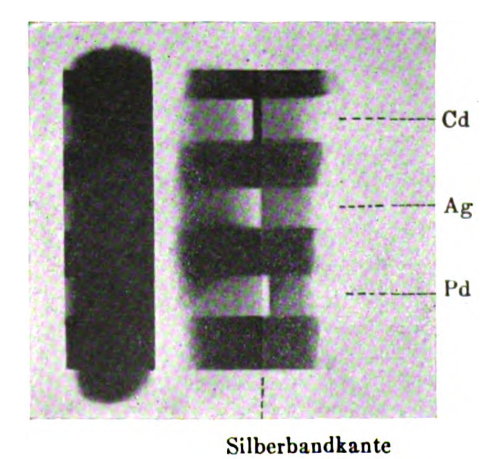


Fig. 13.



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 19. | 1. Oktober 1917. Redaktionsschluß für No. 21 am 11. Oktober 1917. | 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Akustik der Atmosphäre.

Von E. Schrödinger.

(Aus dem II. physikalischen Institut der Universität Wien.)

§ 1. Einleitung.

Zur Erklärung der äußeren Zone sogen. abnormaler Hörbarkeit, welche nun schon bei sehr vielen Explosionskatastrophen (Vulkanausbrüchen, Bombardements von ungewöhnlicher Stärke) regelmäßig beobachtet wurde[1]), hat Herr v. d. Borne angenommen, daß in diesem Gebiet Schallstrahlen die Erde wieder erreichen, welche in 70 bis 100 km Höhe, in dem Übergangsgebiet zwischen der Stickstoff-Sauerstoff- und der Wasserstoffsphäre, wo ein kräftiger, aufwärts gerichteter Gradient der Schallgeschwindigkeit bestehen muß, allmählich umgebogen und wieder zur Erde zurückgeleitet würden. Gegen diese Erklärung sind verschiedene Bedenken geltend gemacht worden[3]), welche jedoch alle verhältnismäßig geringfügig erscheinen gegenüber einem Einwand energetischer Natur, den Herr Wilhelm Schmidt-Wien[4]) gegen die Theorie erhoben hat und der, wenn er stichhaltig wäre, die Annahme, daß Schallstrahlen noch mit wahrnehmbarer Intensität aus solcher Höhe zurückkehren können, ein für allemal außer Diskussion setzen würde.

Der genannte Einwand des Herrn W. Schmidt gründet sich darauf, daß eine Schallwelle, welche in so große Höhen vordringt, ganz abgesehen von der Intensitätsabnahme nach dem Entfernungsquadratgesetz und durch Dämpfung, auch noch eine bedeutende Schwächung entsprechend dem Dichteverhältnis der Luft (in der Höhe und am Erdboden) erfahren müsse. Denn in einer ebenen Welle könne die Amplitude doch jedenfalls nicht zunehmen, sondern höchstens — bei vollständig fehlender Dämpfung — konstant bleiben. Dann nimmt aber die Energie oder, was dasselbe ist, die Intensität des Schallstrahls proportional mit der Dichte ab. Bei einer Kugelwelle wird sich diese Intensitätsabnahme nach dem Dichteverhältnis der Intensitätsabnahme nach dem Entfernungsquadratgesetz überlagern.

Herr Schmidt nimmt konsequenterweise an, daß bei der Rückkehr der Schallwelle von ihrem Kulminationspunkt zum Erdboden nach dem Reziprozitätsgesetz noch einmal eine solche „abnormale" Schwächung im Verhältnis der Dichten eintritt. Die Endintensität erscheint demnach gegenüber einer Welle, die in homogener Luft die gleiche Strecke zurückgelegt hätte, mit dem Quadrat des Verhältnisses

$$\frac{\text{Luftdichte im Kulminationspunkt}}{\text{Luftdichte am Erdboden}}$$

multipliziert.

Da nun dieser Quotient für die großen Höhen, die hier in Betracht kommen (mindestens 50 km), schon einen verschwindend kleinen Wert hat, so ist klar — und Herr Schmidt hat das durch Zahlenbeispiele belegt —, daß der von oben zurückkehrende Schallstrahl eine viel zu geringe Intensität hätte, um noch mit dem Ohr oder sonst in irgendeiner Weise wahrgenommen werden zu können.

Es erhebt sich nun aber die Frage, was denn mit der Energie geschieht, die eine, sagen wir ebene Schallwelle beim Fortschreiten in höhere, dünnere Schichten der Atmosphäre verliert. Im ersten Augenblick könnte man an innere Reflexionen oder dgl. denken, da die wirkliche Atmosphäre ja wegen der Veränderlichkeit der Temperatur mit der Höhe akustisch inhomogen ist. Aber die dargelegte Schlußweise steht mit der Veränderlichkeit der Temperatur in gar

1) Siehe z. B. E. van Everdingen, Proc. Amsterdam 18, Nr. 6, 933, 1915.
2) G. v. d. Borne, Über die Schallverbreitung bei Explosionskatastrophen, diese Zeitschr. 11, 483, 1910.
3) Fr. Nölke, diese Zeitschr. 17, 31, 283, 1916.
4) W. Schmidt, diese Zeitschr. 17, 333, 1916; auch Meteorolog. Zeitschr. 32, 266, 1915 u. 33, 314, 1916; ferner ebendort 34, 134, 1917.

keinem Zusammenhang, sondern überträgt sich unverändert auf eine ideale isotherme Atmosphäre. Eine solche ist trotz der großen Veränderlichkeit der Dichte nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch akustisch homogen. Denn die Schallgeschwindigkeit ist bei konstanter Temperatur vom Druck bzw. von der Dichte unabhängig, und hat daher in jedem Punkte einer isothermen Atmosphäre denselben Wert. Da wir in einem akustisch homogenen Mittel innere Reflexionen so wenig voraussetzen dürfen, wie Brechung, bleibt der Verbleib der verloren gegangenen Energie völlig unaufgeklärt.

Durch folgerichtige Anwendung allgemein wellentheoretischer Grundsätze auf den Vorgang der Schallbewegung in der Atmosphäre sind wir also in einen unlösbaren Widerspruch gegen das Energieprinzip verwickelt worden. Da nun das letztere immer richtig sein muß, kommen wir zu dem Schlusse, daß offenbar die ersteren — nämlich die allgemein wellentheoretischen Grundsätze — auf unseren Fall nicht anwendbar sind. Das heißt aber gar nichts anderes, als daß die Schallbewegung, selbst in einer isothermen Atmosphäre, nicht durch die Wellengleichung beherrscht wird:

$$v^2 \Delta f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

(f eine der Größen, welche den Zustand in irgendeinem Punkte des Mediums bestimmen), sondern durch etwas andere Gleichungen, die sich durch Anwendung der allgemeinen hydrodynamischen Prinzipien auf den vorliegenden Fall müssen ableiten lassen. Dies soll in den folgenden Zeilen geschehen. Wir können vorwegnehmen, daß sich zugleich mit der Lösung des oben bezeichneten energetischen Widerspruchs der Einwand des Herrn W. Schmidt gegen die Theorie des Herrn v. d. Borne als hinfällig erweisen wird. — Im letzten Abschnitt (§ 5) wird dann die tatsächliche Dämpfung durch Wärmeleitung und innere Reibung berechnet. Wegen der angenähert exponentiellen Zunahme der Temperaturleitfähigkeit und des Verhältnisses der Reibung zur Dichte mit wachsender Höhe ergibt sich eine so bedeutende Zunahme der Dämpfung, daß hierdurch die Theorie des Herrn v. d. Borne in der Tat ziemlich unwahrscheinlich gemacht wird.

§ 2. Ebene Vertikalwellen.

Wir denken uns eine, im Gleichgewicht isotherme, Atmosphäre, in welcher Druck und Dichte nach der gewöhnlichen barometrischen Höhenformel verteilt sind. Wir betrachten zunächst nur solche kleine Schwingungen in dieser Atmosphäre, bei welchen in jedem Punkte eines beliebigen Horizontalschnittes der gleiche Bewegungszustand herrscht und überhaupt nur Bewegungen in vertikaler Richtung vorkommen. Wir können demnach alle Überlegungen an einer (gedachten) vertikalen Röhre mit dem Querschnitt 1 durchführen. Die Variablen wählen wir aus später zu erwähnenden Gründen nicht in Eulerscher, sondern in Lagrangescher Art. Wir bezeichnen also mit x die Höhe über dem Erdboden eines individuellen, materiellen Querschnitts im Ruhezustand, mit y die Höhe desselben materiellen Querschnitts zu irgendeiner Zeit t. y ist also eine Funktion von x und t, die an dem materiellen Volumelement haftet. Ebenso denken wir den Druck p und die Dichte ϱ als Funktionen von x und t an dem materiellen Volumelement haftend. Es stellt also z. B. $\varrho(x,t)$ nicht die Dichte zur Zeit t in der Höhe x über dem Erdboden dar, sondern die Dichte, die jenes materielle Volumelement zur Zeit t besitzt, welches im Ruhezustand die Höhe x hat; oder auch die Dichte zur Zeit t in der Höhe $y(x,t)$ über dem Erdboden. Im Ruhezustand, wenn keine Störung vorhanden ist, sei

$$\varrho(x,t) = \varrho_0 e^{-\alpha x} = \bar{\varrho}, \quad p(x,t) = p_0 e^{-\alpha x} = \bar{p} \qquad (2)$$

Es bedeuten also ϱ_0 und p_0 die störungsfreien Werte dieser Größen am Erdboden, α die Barometerkonstante. Bekanntlich ist

$$\alpha = \frac{g \varrho_0}{p_0}. \qquad (3)$$

Während zwischen p_0, ϱ_0, $\bar{p}$, $\bar{\varrho}$ die isotherme Beziehung besteht

$$\frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}} = \frac{p_0}{\varrho_0}, \qquad (4)$$

erfolgen die Zustandsänderungen in der Schallwelle natürlich adiabatisch. Es muß also im Verlaufe der Bewegung

$$\frac{p}{\varrho^\varkappa} = \frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}^\varkappa}, \quad p = \left(\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}\right)^\varkappa \bar{p}, \qquad (5)$$

wo $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen[1]).

Betrachten wir nun das scheibenförmige Volumelement, das sich im Ruhezustand mit der Dichte $\bar{\varrho}$ zwischen x und $x + dx$ befand, also die Dicke dx hatte. Zu irgendeiner Zeit, im Verlaufe der Bewegung, erstreckt sich dasselbe von y bis

1) Die Beziehung (5) ist richtig, weil die Funktionen am materiellen Volumelement haften. Bei Eulerscher Wahl der unabhängigen Veränderlichen, d. h. für einen im Raum festen Querschnitt, gilt sie nicht, da ein solcher im Laufe der Bewegung von materiellen Volumelementen passiert wird, die aus verschiedenen Höhen stammen, deren Zustände also nicht auf rein adiabatischem Wege ineinander übergeführt werden können.

$$y + \frac{\partial y}{\partial x} dx,$$

hat also die Dicke $\frac{\partial y}{\partial x} dx$. Also muß

$$\varrho\, dx = \bar{\varrho} \frac{\partial y}{\partial x} dx, \quad \frac{\varrho}{\bar{\varrho}} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1}. \tag{6}$$

Ferner hat dieses Volumelement die Masse $\bar{\varrho}\, dx$ und die aufwärts gerichtete Beschleunigung $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Es wirkt darauf die Kraft p nach aufwärts und

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \bar{\varrho} g\, dx$$

nach abwärts, in Summa also nach aufwärts

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx - \bar{\varrho} g\, dx.$$

Daher lautet die Bewegungsgleichung

$$\bar{\varrho} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = -\frac{\partial p}{\partial x} dx - \bar{\varrho} g\, dx$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{\bar{\varrho}} \frac{\partial p}{\partial x} - g. \tag{7}$$

Setzen wir nun in die rechte Seite der Gleichung (5) für p und $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$ ihre Werte aus (2) und (6) ein, so finden wir

$$\begin{aligned} p &= p_0 e^{-\alpha x} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\varkappa} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\alpha p_0 e^{-\alpha x} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\varkappa} - \\ &\quad - \varkappa p_0 e^{-\alpha x} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\varkappa - 1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Führen wir noch die Bezeichnung v ein für die Schallgeschwindigkeit in homogener Luft von derselben Temperatur, also

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa p_0}{\varrho_0}}, \tag{9}$$

so erhalten wir durch Einsetzen von (8) in die Bewegungsgleichung (7) unter Rücksicht auf den Wert von $\bar{\varrho}$ nach (2), ferner auf (3) und (9):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\varkappa - 1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + g\left[1 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\varkappa}\right] = 0 \tag{10}$$

als exakte partielle Differentialgleichung unseres Problems[1]).

Wir führen jetzt die Annahme ein, daß es sich um kleine Schwingungen handelt, so daß wir setzen können

$$y(x, t) = x + \eta(x, t), \tag{11}$$

wo η, die Elongation, eine kleine Größe ist, deren Quadrate und höhere Potenzen wir vernachlässigen[1]). Mit dieser Annäherung finden wir leicht aus (10) die Differentialgleichung für η

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + g\varkappa \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \tag{12}$$

die wir mit Rücksicht auf (3) und (9) und bei etwas geänderter Anordnung der Terme auch schreiben können

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0. \tag{12a}$$

Man sieht sofort, daß eine Lösung dieser Gleichung gegeben ist durch den reellen Teil von

$$e^{i\nu t + \mu x},$$

wo ν beliebig, reell, μ aber eine Wurzel der Gleichung:

$$\mu^2 - \alpha\mu + \frac{\nu^2}{v^2} = 0. \tag{13}$$

Es ist also

$$\mu = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{i\nu}{v} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 v^2}{4\nu^2}} = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{i\nu}{c(\nu)},$$

wobei gesetzt ist

$$c(\nu) = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 v^2}{4\nu^2}}}. \tag{14}$$

Eine Lösung von (12a) lautet also in reeller Form z. B.

$$\eta = A e^{\frac{\alpha x}{2}} \cos \nu \left(t \pm \frac{x}{c(\nu)}\right), \tag{15}$$

wobei A eine beliebige reelle Konstante und die Funktion $c(\nu)$ durch (14) gegeben ist. In Worten heißt das:

In einer ebenen, einfach harmonischen Welle, die in einer isothermen Atmosphäre vertikal aufwärts oder abwärts fortschreitet, nimmt die Amplitude im umgekehrten Verhältnis der Quadratwurzeln aus den Dichten zu bzw. ab. Hierdurch wird die Konstanz der Energie gewahrt[2]). Außerdem findet Dispersion statt. Nur sehr hochfrequente, d. h. kurze Wellen haben die normale Schallgeschwindigkeit, längere Wellen pflanzen sich rascher fort.

1) S. a. Rayleigh, The theory of sound, 2. Aufl. Bd. 2, S. 31, Gleichung (4), mit welcher unsere Gleichung (10) bis auf das 3. Glied, welches den Einfluß des Schwerefeldes darstellt, genau übereinstimmt.

1) Wir können uns mit dieser laxen Ausdrucksweise begnügen, da in dieser Beziehung ganz dieselben Verhältnisse vorliegen, die aus der Akustik homogener Medien hinreichend bekannt sind.

2) Man vergleiche hierzu auch die treffenden Ausführungen A. Wegeners, Meteorolog. Zeitschr. 33, 523, 1916.

Um die Größe der Dispersion zu beurteilen, schreiben wir (14) in der Form:

$$\frac{c(\nu)^2}{v^2} = 1 + \frac{\alpha^2 c(\nu)^2}{4\nu^2} \tag{14a}$$

und beachten, daß erstens

$$\frac{\nu}{c(\nu)} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ist, wenn λ die Wellenlänge bedeutet, und daß zweitens $\frac{1}{\alpha} = H$, der sogenannten virtuellen Höhe der homogenen Atmosphäre, bekanntlich rund 8 km. Wir haben dann

$$\frac{c(\nu)^2}{v^2} = 1 + \frac{1}{16\pi^2}\frac{\lambda^2}{H^2} \tag{14b}$$

oder angenähert

$$c(\nu) = v\left(1 + \frac{1}{32\pi^2}\frac{\lambda^2}{H^2}\right). \tag{14c}$$

Die Dispersion würde also selbst für Wellen von 8 km Länge erst etwa 3 Promille betragen und ist für akustische Wellen absolut zu vernachlässigen und ohne jedes Interesse.

Dieser Umstand ermöglicht uns, mit einer für akustische Zwecke weitaus hinreichenden Genauigkeit die allgemeine Lösung der Gleichung (12a) anzugeben. Wenn wir uns auf Wellen beschränken, deren Länge klein ist gegen $H = \frac{1}{\alpha}$, dürfen wir auf der linken Seite von (12a) das Glied $\frac{\alpha^2}{4}\eta$ addieren, denn diese Größe ist gegenüber den Hauptgliedern von der Größenordnung $\frac{\lambda^2}{H^2}$[1]. Die Gleichung

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \frac{\alpha^2}{4}\eta = 0 \tag{12b}$$

hat aber, wie man leicht durch Ausrechnen bestätigt, die allgemeinen Lösungen

$$\eta = e^{\frac{\alpha x}{2}} f\left(t \pm \frac{x}{v}\right). \tag{16}$$

f ist eine beliebige Funktion; das untere Vorzeichen liefert eine nach aufwärts, das obere eine nach abwärts fortschreitende Welle von beliebiger Gestalt.

Der Einfluß des Schwerefeldes äußert sich also auch bei einer Welle von beliebiger Gestalt im wesentlichen nur darin, daß die Schwingungsweite beim Fortschreiten im umgekehrten Verhältnis der Quadratwurzeln aus den Dichten abnimmt bzw. zunimmt. Dasselbe gilt für die Größe der relativen Dichteabweichung, während sich die absolute Dichteabweichung direkt proportional mit der Wurzel aus der Dichte ändert. Setzen wir nämlich in (6)

$$\varrho = {}^{-}(1 + \sigma), \tag{17}$$

so finden wir für die relative Dichteabweichung σ unter Rücksicht auf (11) und (16): .

$$\sigma = -\frac{\partial\eta}{\partial x} = e^{\frac{\alpha x}{2}}\left(\mp\frac{1}{c}f' - \frac{\alpha}{2}f\right). \tag{18}$$

Die absolute Dichteabweichung hat, mit Rücksicht auf (2), den Wert

$$\bar{\varrho}\sigma = \varrho_0 e^{-\frac{\alpha x}{2}}\left(\mp\frac{1}{c}f' - \frac{\alpha}{2}f\right). \tag{18a}$$

Der Umstand, daß in diesen Ausdrücken neben der Derivierten f' auch noch f selbst auftritt — allerdings nur mit einem Koeffizienten von der relativen Größenordnung $\frac{\lambda}{H}$ — hat beispielsweise bei einer einfach harmonischen Welle zur Folge, daß die Extremwerte der Dichte an irgendeiner Stelle nicht, wie in einem homogenen Mittel, genau in dem Zeitpunkt eintreten, in welchem das betreffende Luftteilchen die Ruhelage passiert, sondern etwas früher oder später, je nachdem die Welle aufwärts oder abwärts fortschreitet. Praktisch ist diese geringe Phasenverschiebung natürlich ebenso belanglos wie die Dispersion, obwohl sie, im Gegensatz zu dieser, einen Effekt erster Ordnung in $\frac{\lambda}{H}$ bildet.

§ 3. Beliebige Wellenbewegung.

Bei der Behandlung des allgemeinen Falles einer beliebigen dreidimensionalen Wellenbewegung in einer isothermen Atmosphäre dürfen wir uns jetzt wohl etwas kürzer fassen. Bezeichnet man die Ruhekoordinaten eines Luftteilchens mit x, y, z (x-Achse vertikal aufwärts), seine Koordinaten zur Zeit t mit

$$x + \xi(x, y z, t),\ y + \eta(x, y, z, t),\ z + \zeta(x, y, z, t),$$

ferner mit

$$\sigma(x, y, z, t)$$

die relative Dichteänderung in der Umgebung des Teilchens gegenüber dem Ruhezustand, so erhält man, wenn man die Größen ξ, η, ζ und σ als klein ansieht, zu ihrer Bestimmung folgendes Gleichungssystem:

---

1) Das erste und dritte Glied in (12a) ist von der Größenordnung $\frac{\eta}{\lambda^2}$, das Schwereglied von der Ordnung $\frac{\eta}{H\lambda}$. Das hinzugefügte Glied $-\frac{\eta}{4H^2}$ — ist also auch gegen das Schwereglied klein wie λ gegen H, gegen das Hauptglied wie λ^2 gegen H^2.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= -\frac{\partial\sigma}{\partial x} - \frac{\alpha}{\varkappa}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\alpha(\varkappa-1)}{\varkappa}\sigma \\
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= -\frac{\partial\sigma}{\partial y} - \frac{\alpha}{\varkappa}\frac{\partial\xi}{\partial y} \\
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= -\frac{\partial\sigma}{\partial z} - \frac{\alpha}{\varkappa}\frac{\partial\xi}{\partial z} \\
\sigma &= -\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right| \quad (19)$$

Von den gewöhnlichen hydrodynamischen Grundgleichungen in Lagrangescher Form (unter Annahme kleiner Schwingungen) unterscheidet sich dieses System nur durch die mit $\alpha = \frac{\varkappa g}{v^2}$ multiplizierten Terme, diese stellen demnach den Einfluß des Schwerefeldes und der durch dasselbe bedingten ungleichförmigen Dichteverteilung dar[1]).

Zur Vereinfachung der Rechnung wollen wir jetzt von vornherein darauf verzichten, die im Spezialfall des § 2 ausführlich erörterte und als akustisch völlig belanglos erwiesene Dispersion auch hier im allgemeinen Fall wiederzufinden. Darum sollen von Haus aus Größen von der Ordnung $\frac{\lambda^2}{H^2}$, d. i. $\alpha^2\lambda^2$, gegen 1 konsequent vernachlässigt werden. Dabei ist zu beachten, daß wir z. B. $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ als von der Größenordnung $\frac{\xi}{\lambda}$, $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ als von der Ordnung $\frac{\xi}{\tau} = \frac{v\xi}{\lambda}$ (τ = Schwingungsdauer) anzusehen haben und daß diese Überlegung für Wellen von beliebiger Form richtig bleibt, welche nur keine langwelligen Komponenten von der Größenordnung H enthalten.

Wir werden nun nach Analogie mit dem eindimensionalen Spezialfall vermuten, daß sich in diesem Grade der Annäherung auch die Lösungen des Systems (19) von gewöhnlichen Wellenpotentialen nur durch den Faktor $e^{\frac{\alpha x}{2}}$ unterscheiden, mithin die Gestalt haben:

1) Bemerkenswert ist, daß durch die Gleichungen (19) das Helmholtzsche Wirbeltheorem verletzt wird. Differenziert man die erste Gleichung nach y, die zweite nach x, und subtrahiert, so kommt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\right] = -\frac{\alpha v^2(\varkappa-1)}{\varkappa}\frac{\partial\sigma}{\partial y},$$

also im allgemeinen $\neq 0$. Dasselbe gilt für die y-Komponente, während die x-Komponente des Wirbels von der Zeit unabhängig ist. — Diese Verletzung des Wirbeltheorems ist offenbar durch die — vom mathematischen Standpunkt inkonsequente — Verwendung zweier verschiedener Zustandsgleichungen verschuldet. In der Tat verschwinden alle Zeitderivierten der Wirbelkomponenten, wenn man die adiabatische Zustandsgleichung mit der isothermen zur Koinzidenz bringt, indem man $\varkappa = 1$ macht.

$$e^{\frac{\alpha x}{2}} f\left(t - \frac{ax+by+cz}{v}\right), \quad (20)$$

wobei

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad (21)$$

und a, b, c die Richtungskosinus der Fortschreitungsrichtung der durch (20) dargestellten ebenen Welle sind. Um die diversen Funktionen f, oder vielmehr ihre wechselseitige Verknüpfung zu finden, führen wir in (19) die Transformation aus:

$$\xi = e^{\frac{\alpha x}{2}}\mathfrak{x}, \quad \eta = e^{\frac{\alpha x}{2}}\mathfrak{y}, \quad \zeta = e^{\frac{\alpha x}{2}}\mathfrak{z}. \quad (22)$$

Zunächst liefert die letzte der Gleichungen (19):

$$\sigma = e^{\frac{\alpha x}{2}}\left(\mathfrak{f} - \frac{\alpha}{2}\mathfrak{x}\right), \quad (23)$$

wobei wir der Konformität wegen zur Abkürzung gesetzt haben:

$$\mathfrak{f} = -\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\right). \quad (24)$$

Dann erhalten wir aus (19) folgendes mit (19) sehr ähnlich gebaute Gleichungssystem zur Bestimmung der Funktionen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{f}$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial x} - \beta\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} - \beta\mathfrak{f} \\
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial y} - \beta\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} \\
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{z}} - \beta\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z} \\
\mathfrak{f} &= -\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right| \quad (19a)$$

β ist eine Abkürzung für

$$\beta = \frac{\alpha(2-\varkappa)}{2\varkappa}, \quad (25)$$

also, gleich α, von der Größenordnung $\frac{1}{H}$.

Die Lösungen von (19a) sind nun in der Tat gewöhnliche Wellenpotentiale. Die Schwereglieder, die in dem System noch auftreten, verändern nur die linearen Beziehungen zwischen den vier Wellenpotentialen, die man für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{f}$ anzusetzen hat. Man überzeugt sich leicht, daß folgender übersichtliche Ansatz dem System Genüge leistet:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{x} &= ag' - v\beta(1-a^2)g \\
\mathfrak{y} &= bg' + v\beta abg \\
\mathfrak{z} &= cg' + v\beta acg \\
\mathfrak{f} &= \frac{1}{v}g'' \\
a^2 &+ b^2 + c^2 = 1.
\end{aligned}\right| \quad (26)$$

Dabei ist g eine beliebige Funktion des einen Arguments $\left(t - \frac{ax+by+cz}{v}\right)$, die Striche be-

deuten die Ableitungen nach dem Argument. Die Gleichungen (22) und (23) vermitteln den Übergang zu den physikalischen Größen ξ, η, ζ, σ und man sieht, daß sich unsere in (20) und (21) ausgedrückte Vermutung in der Tat bewahrheitet hat.

Der Vektor $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ liefert, abgesehen von der Zunahme der Schwingungsweite mit der Höhe, ein zutreffendes Bild von der Bewegung des Mediums. Er unterscheidet sich von dem Verschiebungsvektor der entsprechenden Lösung in einem homogenen Medium nur durch die kleinen, mit β behafteten Zusatzterme. Diese bewirken, daß sich $\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:\mathfrak{z}$ nicht genau wie $a:b:c$ verhalten. Der Verschiebungsvektor steht also in unserem Falle nicht genau senkrecht auf der Wellenebene. Da gleichwohl $\mathfrak{y}:\mathfrak{z}=b:c$, liegt er jedenfalls in der Vertikalebene durch die Wellennormale, was schon aus Symmetriegründen gefordert werden muß. Die Schwingung findet also in der genannten Vertikalebene statt, aber nicht in der Richtung der Wellennormale. Man überzeugt sich leicht, daß sie im allgemeinen überhaupt nicht geradlinig erfolgt, sondern daß jedes Teilchen in jener Ebene eine Kurve beschreibt. Die Bahnen der verschiedenen Teilchen sind in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ausgedrückt kongruent, in Wahrheit also, mit Rücksicht auf (22), ähnlich.

Wir wollen beispielsweise setzen:

$$g(u)=A\sin\frac{2\pi v}{\lambda}u, \tag{27}$$

d. h. wir betrachten eine rein harmonische Welle von der Wellenlänge λ. Die x, y-Ebene drehen wir parallel zur Wellennormale, so daß

$$c=0, \quad \mathfrak{z}=0$$

wird, und

$$a=\cos\vartheta \quad b=\sin\vartheta$$

gesetzt werden kann. ϑ ist der Winkel der positiven Wellennormale mit der Vertikalen und variiert von 0 bis π. Die ersten beiden Gleichungen (26) liefern dann:

$$\mathfrak{x}=\frac{2\pi vA}{\lambda}\cos\vartheta\cos\omega-vA\beta\sin^2\vartheta\sin\omega \tag{28}$$

$$\mathfrak{y}=\frac{2\pi vA}{\lambda}\sin\vartheta\cos\omega+vA\beta\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\omega.$$

Hier ist zur Kürze ω für

$$\frac{2\pi v}{\lambda}\left(t-\frac{ax+by+cz}{v}\right)$$

geschrieben. Durch Elimination von ω erhält man die Bahnkurve eines beliebigen Teilchens in der Form

$$1=\frac{(\mathfrak{x}\cos\vartheta+\mathfrak{y}\sin\vartheta)^2}{\left(\frac{2\pi vA}{\lambda}\right)^2}+\frac{(\mathfrak{x}\sin\vartheta-\mathfrak{y}\cos\vartheta)^2}{(vA\beta\sin\vartheta)^2}. \tag{29}$$

Die linearen Ausdrücke, deren Quadrate hier im Zähler stehen, sind genau die x- bzw. y-Komponente des Vektors ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$), bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen x-Achse mit der Wellennormale zusammenfällt, während die y-Achse in der Vertikalebene durch die Wellennormale liegt. Die Bahnkurve ist also eine Ellipse mit der großen und kleinen Halbachse

$$\frac{2\pi vA}{\lambda} \text{ bzw. } vA\beta\sin\vartheta. \tag{30}$$

Sie liegt in der genannten Vertikalebene, ihre große Achse fällt mit der Wellennormale zusammen. Für das Achsenverhältnis findet man unter Rücksicht auf (25) und darauf, daß $\frac{1}{a}=H$ ist:

$$\frac{2-\varkappa}{4\pi\varkappa}\cdot\frac{\lambda}{H}\cdot\sin\vartheta. \tag{31}$$

Die Ellipsen sind also äußerst lang gestreckt, beinahe schon in doppelt durchlaufene Gerade ausgeartet. Denn das Verhältnis der kleinen zur großen Achse ist nach (31) von der Größenordnung des Verhältnisses: Wellenlänge dividiert durch die virtuelle Höhe der Atmosphäre, ja sogar noch kleiner, da sich für den Zahlenfaktor der Wert 0,034 ergibt. Den größten Wert hat das Achsenverhältnis für $\vartheta=90^0$, d. i. für horizontale Wellen; mit wachsender (positiver oder negativer) Neigung gegen die Horizontale nimmt es bis zum Wert 0, für vertikale Wellen, ab. — Für den Umlaufsinn der Teilchen in ihren Bahnen ergibt sich aus (28) die Regel, daß er mit dem des Uhrzeigers übereinstimmt für einen Beobachter, der, aufrecht stehend, die Welle von links nach rechts laufen sieht.

Selbstverständlich sind die eben besprochenen minutiösen Besonderheiten der Wellenfortpflanzung praktisch ebenso belanglos wie die im § 2 erwähnte minimale Dispersion und die Phasenverschiebung zwischen Dichte und Bewegung. Für praktische Zwecke können wir in den Ausdrücken (26) die mit β multiplizierten Glieder streichen. Von wirklicher Bedeutung ist einzig und allein die Feststellung, daß auch im allgemeinen Fall alle Verschiebungskomponenten die allgemeine Form (20) haben:

$$\frac{\text{Wellenpotential}}{\text{Quadratwurzel a. d. Dichte}},$$

so daß die Abnahme der Dichte nach oben hinsichtlich der Energieausbreitung genau kompensiert wird durch die Zunahme der Schwingungsweiten, die Ausbreitung der Energie also genau ebenso vor sich geht, wie in einem homogenen Mittel.

§ 4. Einfluß der Gradienten der Temperatur und chemischen Zusammensetzung.

Streng genommen sind unsere Ergebnisse auf die wirkliche Atmosphäre nicht direkt anwendbar, weil erstens auch im Mittel nicht Isothermie herrscht, sondern in den untersten Schichten sogar ein ziemlich bedeutender Temperaturgradient, und weil zweitens die chemische Zusammensetzung der Luft in großen Höhen merklich variiert. Infolge beider Umstände ist die Schallgeschwindigkeit nicht, wie in einer isothermen, chemisch einheitlichen Atmosphäre, konstant, sondern variiert etwas von Schicht zu Schicht. Die strenge Durchführung der Rechnung unter diesen Annahmen dürfte analytisch ziemlich schwierig sein. Es kann aber wohl kaum einem Zweifel unterliegen, daß an Stelle einer strengen Theorie zur Berechnung des Strahlengangs die allgemein gebräuchliche einfache Methode der „geschichteten Medien" treten kann, die ja auch zur Berechnung der astronomischen Refraktion mit Erfolg angewendet wird. In dieser Weise findet man einerseits die von Herrn Kommerell[1]) eingehend studierte „thermophobe"[2]) Krümmung der Schallstrahlen, anderseits in den Höhen, wo der Wasserstoffgehalt sich bemerkbar zu machen beginnt, die eingangs erwähnte Abwärtskrümmung, die Herr v. d. Borne für das Gebiet abnormaler Hörbarkeit verantwortlich macht. Über die energetischen Verhältnisse gibt freilich die Theorie der geschichteten Medien keinen zuverlässigen Aufschluß. Aber es kann nicht zweifelhaft sein, daß auch in diesen Fällen der Energiestrom in einer Strahlröhre, abgesehen von den später zu behandelnden Dämpfungseinflüssen wenigstens annähernd konstant sein wird, wie wir es für eine isotherme, chemisch einheitliche Atmosphäre nachgewiesen haben. Eine geringe Schwächung ist mit der kontinuierlichen Refraktion allerdings notwendig verbunden, aber sie kann nicht annähernd so groß sein, wie die von Herrn Schmidt l. c. aus dem Dichteverhältnis errechnete Schwächung.

§ 5. Die Dämpfung des Schalles durch Wärmeleitung und innere Reibung.

Nachdem wir so den eingangs erwähnten Widerspruch gelöst haben, müssen wir nun allerdings unsererseits einen Umstand hervorheben, welcher dem Vordringen des Schalles in die höchsten Schichten der Atmosphäre ein Ziel setzt und, wie wir sehen werden, die Theorie v. d. Bornes ziemlich unwahrscheinlich macht.

Bekanntlich ist in Luft vom Atmosphärendruck die Dämpfung des Schalles durch Wärmeleitung und innere Reibung fast ganz zu vernachlässigen, außer für ganz hohe Töne nahe der Hörgrenze[1]) oder für sehr große zurückgelegte Wegstrecken. Aus den von Stokes, Kirchhoff und Rayleigh[2]) angegebenen Formeln für die Dämpfungsexponenten, in Verbindung mit experimentell bestätigten Resultaten der kinetischen Gastheorie über das Verhalten der Temperaturleitfähigkeit und der inneren Reibung der Gase bei Änderung der Dichte, geht nun aber hervor, daß mit fortschreitender Verdünnung die Dämpfung zunimmt und sich allmählich für alle Wellenlängen stark bemerkbar machen muß. Auch hierfür fehlt es nicht ganz an experimentellen Belegen. Die Weichheit weit fortgepflanzter Töne oder Geräusche auf hohen Bergen (Fehlen der scharfen, schrillen Töne), ferner die Schwierigkeit der Verständigung bei Hochballonfahrten, die in der verminderten Luftdichte an und für sich keine hinreichende Erklärung findet, dürften in dieser Weise zu deuten sein. Vom gastheoretischen Standpunkt ist die Sache außerordentlich plausibel. Da die Schallgeschwindigkeit von derselben Größenordnung ist wie die Molekulargeschwindigkeiten, legen die Moleküle ihre freien Wegstrecken in derselben Zeit zurück, die der Schall für dieselbe Strecke braucht. Je mehr also bei fortschreitender Verdünnung die Größenordnung der freien Weglänge sich der Wellenlänge nähert, ein umso erheblicherer Austausch von Molekülen wird schon während der Dauer einer einzigen Schwingung stattfinden: einerseits zwischen den Stellen positiver und negativer Dichte- (und Temperatur-)abweichung, anderseits zwischen den Stellen verschiedener und verschieden gerichteter Massengeschwindigkeit

1) V. Kommerell, diese Zeitschr. **17**, 172, 1916; s. a. Reynolds, On the refraction of sound by the atmosphere. Phil. Trans. **166**, 315, 1876.

2) Will sagen: konvex nach der Seite der höheren Temperaturen.

1) Es scheint fast, als wäre dieser Umstand für die phylogenetische Einstellung unserer oberen Hörgrenze (etwa 40000 Schwingung./sec) zum mindesten mitbestimmend gewesen. Denn hier ist die Dämpfung auf Wegstrecken, wie sie biologisch hauptsächlich in Betracht kommen, eben noch geringfügig (für 100 m etwa 4 Proz.). Jenseits der Hörgrenze beginnt sie rapide zu wachsen (15 Proz. bzw. 49 Proz. pro 100 m für die beiden nächsthöheren Oktaven).

2) Stokes berücksichtigt innere Reibung und Wärmestrahlung: Cambridge Transactions **8**, 287, 1845; ebendort **9**, § 49, 1851; Phil. Mag. (4) **1**, 305, 1851; Kirchhoff (Pogg. Ann. Bd. **134**, 1868) hat dann den Effekt der Wärmeleitung berechnet und erkannt, daß er aus gastheoretischen Gründen wesentlich von derselben Größenordnung ist wie der der Reibung; Rayleigh, Theory of sound, 2. Aufl., Bd. 2, S. 24 u. 313 (London 1896) referiert Stokes; Kirchhoff kennt er nicht. Den Leitungseinfluß berechnet er selbständig, erkennt aber nicht den inneren Zusammenhang mit der Reibung.

in der Welle. Hierdurch wird ein in der Wellengleichung nicht vorgesehener Transport einerseits von Wärme, anderseits von Bewegungsgröße bedingt, beide im Sinne eines Ausgleichs der bestehenden Differenzen. Durch beide Umstände — Wärmeleitung und innere Reibung — die, wie man sieht, vom gastheoretischen Standpunkt beinahe ein und dasselbe sind, wird also bei fortschreitender Verdünnung die regelmäßige Wellenausbreitung immer erheblicher gestört und schließlich, wenn die Größenordnung der freien Weglänge die Wellenlänge erreicht hat, gänzlich unmöglich gemacht werden. Auch erkennen wir ohne jede Rechnung, daß die Störung für kurze Wellen größer sein bzw. schon bei höheren Drucken eintreten wird als für lange.

Die Rechnung ergibt, wie gesagt, daß die Störung in einer raschen Zunahme der bei normaler Dichte fast ganz zu vernachlässigenden Dämpfung besteht. Wir entnehmen dem zitierten Handbuch von Rayleigh den Wert des Dämpfungsexponenten für die Energie (d. i. für das Amplitudenquadrat)

$$k = -\left(\frac{4\pi^2(\varkappa-1)}{\varkappa} q + \frac{16\pi^2}{3}\frac{\mu}{\varrho}\right)\frac{z}{\lambda^2 v}. \qquad (32)$$

Hier bedeutet

$\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen,
q die Temperaturleitfähigkeit,
μ den Koeffizienten der inneren Reibung,
ϱ die Luftdichte,
z die vom Schall zurückgelegte Wegstrecke,
λ die Wellenlänge,
v die Schallgeschwindigkeit.

Der Ausdruck (32) ist nur eine Annäherung für nicht zu große Werte von q und $\frac{\mu}{\varrho}$. Er ist brauchbar, solange er für $z = \lambda$ klein ist gegen 1. Für Probleme der atmosphärischen Akustik genügt das, da hier viel größere Wegstrecken in Betracht kommen, auf denen der Schall praktisch völlig erlischt, wenn die Dämpfung auf der Strecke einer Wellenlänge noch geringfügig ist.

Um den gastheoretischen Aufbau des Ausdruckes (32) hervortreten zu lassen, setzen wir für q und $\frac{\mu}{\varrho}$ die bekannten Werte ein

$$q = Ccl, \quad \frac{\mu}{\varrho} = C'cl. \qquad (33)$$

c ist die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat der Gasmoleküle, l ihre mittlere freie Weglänge. Die Zahlenfaktoren C und C' haben wir in beiden Gleichungen unbestimmt gelassen und werden sie weiter unten aus experimentellen Daten bestimmen, um trotz der gastheoretischen Form den engen Anschluß an die Wirklichkeit zu sichern.

Nach Einsetzen der Ausdrücke (33) in (32) beachten wir noch, daß der Quotient $\frac{c}{v}$ den einfachen Wert $\sqrt{\frac{3}{\varkappa}}$ hat[1]). So erhalten wir schließlich

$$k = -D\frac{lz}{\lambda^2}, \qquad (32a)$$

wobei

$$D = \frac{4\pi^2(\varkappa-1)C\sqrt{3}}{\varkappa^{3/2}} + \frac{16\pi^2 C'\sqrt{3}}{3\sqrt{\varkappa}}. \qquad (34)$$

Diese Form läßt sehr anschaulich die von uns vorausgesehene entscheidende Bedeutung des Verhältnisses $\frac{l}{\lambda}$ erkennen.

Zur Berechnung von C und C' aus den Gleichungen (33) benützen wir folgende experimentelle Daten[2]), die sich auf 0^0 C und Atmosphärendruck beziehen und in $[c \cdot g \cdot s \cdot \text{cal.}\ {}^0\text{C}]$ ausgedrückt sind. Es ist für Stickstoff:

Wärmeleitfähigkeit $= 5{,}2 \times 10^{-5}$,
Dichte $= 0{,}0012508$,
Spez. Wärme $= 0{,}174$,
daher $q = 0{,}239$,
ferner $c = 4{,}93 \times 10^4$, $l = 0{,}959 \times 10^{-5}$ [3]).
Man findet $C = 0{,}505$.

Für C' benützen wir die Daten für Luft:

$\mu = 0{,}000177$[4])
$\varrho = 0{,}001293$
$c = 4{,}85 \times 10^4$
$l = 10^{-5}$ [5])

Man findet $C' = 0{,}285$.

Mit diesen Werten von C und C' finden wir aus (34)

$$D = 8{,}36 + 21{,}74 = 30{,}10^{6)},$$

demnach für den Exponenten der Dämpfung:

$$k = -30{,}10\frac{lz}{\lambda^2}, \qquad (32b)$$

1) Aus der geläufigen Druckformel $\left(p = \frac{nmc^2}{3}\right)$ in Verbindung mit Gleichung (9).
2) Entnommen zum größten Teil Dr. A. Lampas Lehrbuch der Physik, Wien, Braumüller 1908.
3) Ebendort aus empirischen Daten berechnet.
4) Ein mittlerer Wert. Lord Rayleigh benützt l. c. den Maxwellschen Wert 0,0001878, H. Lamb (The dynamical theory of sound, London 1910) nimmt $\mu = 0{,}000170$.
5) Sehr annähernd. Für Stickstoff wird $0{,}959 \times 10^{-5}$, für Sauerstoff $1{,}050 \times 10^{-5}$ angegeben.
6) $\varkappa$ wurde für Luft zu 1,4015 angenommen (siehe Lampa l. c.).

l ist umgekehrt proportional mit der Dichte. Um einen Überblick über die Dämpfung der verschiedenen Wellenlängen in verschiedenen Schichten der Atmosphäre zu bekommen, verfahren wir folgendermaßen. Für l am Erdboden setzen wir den oben benützten runden Wert 10^{-5} cm. Die Zunahme mit der Höhe berechnen wir nach der einfachen Barometerformel, also

$$l = 10^{-5} e^{\alpha x} \text{cm}, \qquad (35)$$

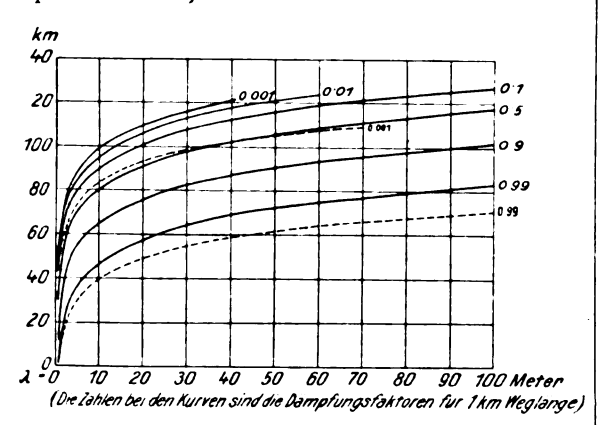
wobei α für eine einheitliche Temperatur der Atmosphäre von 0^0 C den Wert hat:

$$\alpha = 1{,}2516 \times 10^{-6} \text{cm}^{-1}.$$

Nehmen wir noch in (32b) $z = 10^5 \text{cm} = 1$ km, so ergibt sich aus (32b) und (35) für jene Höhe x, in welcher Wellen von der Länge λ bei Zurücklegung einer Wegstrecke von 1 km eine Herabsetzung ihrer Intensität auf einen ganz bestimmten Bruchteil e^k erfahren, der Wert:

$$x = \frac{1}{\alpha}\left(2\, ln\, \lambda + ln \frac{-ln\, e^k}{30{,}10}\right). \qquad (36)$$

Indem man hier für e^k der Reihe nach die Werte einsetzt: 0,99, 0,9, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001, erhält man die (stark ausgezogene) Kurvenschar nachstehender Figur (Koordinaten x und λ), die ein übersichtliches Bild der Dämpfungsverhältnisse in verschiedenen Schichten der Atmosphäre liefert[1]).



(Die Zahlen bei den Kurven sind die Dämpfungsfaktoren für 1 km Weglänge)

Das enge Zusammenrücken der Kurven nach oben zu zeigt, daß die Dämpfung, sobald sie überhaupt beginnt sich bemerkbar zu machen, mit der Höhe rapide wächst. Für kurze Wellen (unter 10 m, das musikalisch am meisten verwendete Gebiet) beginnt schon in verhältnismäßig tiefen Schichten sehr starke, und zwar ausgesprochen selektive Absorption zugunsten der längeren Wellen. Bei langen Wellen fällt die Wellenlänge nicht mehr so stark ins Gewicht. Unter keinen Umständen werden die längsten Wellen, die noch eigentlichen Tönen entsprechen (bis etwa $\lambda = 30$ m) viel über 80 km hinaus vordringen können.

Diese Resultate gelten (entsprechend den für α und l benützten Werten) für eine isotherme Atmosphäre von 0^0 C. In Wirklichkeit sinkt die Temperatur schon in geringen Höhen unter diesen Wert, die Dichte nimmt also mit der Höhe rascher ab, als wir vorausgesetzt haben. Die beiden feinpunktierten Linien zeigen die Lage der äußersten Kurven ($e^k = 0{,}99$ bzw. 0,001) bei -45^0 C, ein Wert, welcher der Mitteltemperatur dieser Atmosphärenschichten nahe kommen dürfte[1]). In Wirklichkeit sind also die Bedingungen für das Vordringen von Schallwellen in große Höhen noch ungünstiger.

Nach diesen Ergebnissen scheint mir die Möglichkeit, daß Schallstrahlen noch mit endlicher Intensität von der Grenze der Wasserstoffschicht zurückkehren, ziemlich gering, wenn wir nicht den Beginn dieser Schicht noch tiefer ansetzen dürfen, als er gegenwärtig vermutet wird (d. i. in 70—100 km über dem Erdboden). Denn es ist zu bedenken, daß zur Erklärung der äußeren Hörbarkeitsgebiete die Möglichkeit der Rückkehr unbedingt für solche Wellenlängen bestehen muß, die noch hörbaren Tönen entsprechen; und ferner, daß die in Betracht kommenden Schallstrahlen einen ziemlich schrägen Verlauf haben und nur ganz allmählich umgebogen werden, so daß sie viel größere Wegstrecken in großer Höhe zurücklegen, als etwa ein senkrecht bis zu der gleichen Höhe aufsteigender Strahl.

Unter allen Umständen würde meines Erachtens eine harmonische Analyse[2]) ein und derselben Explosionswelle im inneren und äußeren Hörbarkeitsgebiet von hervorragendem Interesse sein. Wegen des ausgesprochen selektiven Charakters der Absorption, der sich mit der Höhe rasch verschiebt, ließe sich aus den Intensitätsverhältnissen der in beiden Fällen noch vorhandenen Wellenarten ein direkter und sogar ziemlich scharfer Schluß auf die Höhe der Schicht ziehen, in welcher die Umkehr erfolgt ist.

1) Als ein Vorteil dieser Darstellungsweise muß hervorgehoben werden, daß Änderungen der numerischen Konstante (30,10) um einige Prozente auf den Verlauf der Kurven fast ohne Einfluß sind.

1) -45^0 ist eher zu hoch gegriffen. S. darüber R. Emden, Münchn. Ber. Jahrg. 1913, S. 55, und F. M. Exner, Meteorolog. Zeitschr. **32**, 318, 1915.

2) Etwa mittels hochempfindlicher Druckvariometer von der Art, wie sie Herr W. Schmidt zur Klanganalyse des Donners verwendet hat. S. Wien. Ber. **121** (2a), 2045, 1912; ebenda **123** (2a), 1914; Meteorolog. Zeitschr. **31**, 487, 1914.

(Eingegangen 31. Juli 1917.)

Zur Theorie der Elektrodynamik.

Von R. Malmström.

Eine Schwierigkeit besteht für jede Theorie der elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern darin, daß sie sowohl den Versuch von Fizeau als denjenigen von Michelson erklären muß. Aus jenem folgt, daß die ponderable Materie bei ihrer Bewegung den Äther nicht mit sich führt, und hierdurch wird man zur Annahme eines absolut unbeweglichen Äthers gedrängt. Wenn es aber einen solchen gibt, so muß es bloß eine Frage der Genauigkeit sein, eine Bewegung relativ zum Äther zu konstatieren. Dieser Forderung genügt der Versuch von Michelson, und aus dessen negativem Resultat folgt also wiederum, entweder, daß es eine Bewegung relativ zum Äther nicht gibt, oder daß eine solche nicht nachgewiesen werden kann. Für das letztere entschloß sich Lorentz, indem er annahm, daß jeder Körper bei der Bewegung seine Dimension in der Bewegungsrichtung ändert. Einstein erreicht dasselbe durch Einführung eines neuen Zeitbegriffs. Da der Zeitbegriff mit anderen Grundbegriffen der Physik in Zusammenhang steht, so ist es wohl möglich auf diese Weise ein in sich konsequentes System der Physik aufzubauen. Nur müssen alle mit dem Zeitbegriff zusammenhängenden Grundbegriffe entsprechend abgeändert werden.

Um dem vorzubeugen, hat W. Ritz[1]) eine Theorie aufgestellt, in der die zwischen den Elektronen wirkenden Kräfte nur von den Relativgeschwindigkeiten abhängen. Er denkt sich von jedem Elektron gleichsam materielle Partikelchen mit der Lichtgeschwindigkeit und nach den Gesetzen der Relativbewegung ausströmen und setzt die Kraft in jedem Punkte der Dichtigkeit dieser Partikelchen proportional. Da er aber nur Wirkungen zwischen den Elektronen annimmt, so wird der Versuch von Fizeau nicht erklärt, und da die Partikelchen nach dem Verlassen des Elektrons sich ganz selbständig nach dem Trägheitsgesetz weiter bewegen, so ist die Theorie für die Optik nicht verwendbar. Dagegen werden alle pondero- und elektromotorischen Kräfte zwischen geschlossenen elektrischen Strömen sowie die Versuche von Rowland, Röntgen und Eichenwald richtig wiedergegeben.

Es scheint aber außer den von Lorentz und Einstein gewählten Wegen noch einen dritten zu geben, um den scheinbaren Widerspruch zwischen den Versuchen von Fizeau und Michelson zu beseitigen, und zwar ohne daß man, wie in der Relativitätstheorie, vielen Naturgesetzen, die bis jetzt als streng gültig angesehen wurden, eine nur approximative Gültigkeit zuschreiben muß. Stellen wir uns auf den Boden der Lorentzschen Elektronentheorie, so haben wir anzunehmen, daß alle elektromagnetischen Vorgänge auf Wirkungen von Elektronen zurückzuführen sind. Die beiden Tatsachen, die erklärt werden sollen, sind dann folgende: 1. wenn sich ponderable Materie in dem Felde von (schwingenden) Elektronen bewegt, so führt sie nicht das ganze Feld mit sich (der Äther bleibt in Ruhe); 2. wenn sich eine Lichtquelle (schwingendes Elektron) bewegt, so erfolgt die Lichtfortpflanzung so, als ob die Lichtquelle (das Elektron) den Äther mit sich führte. Diese beiden sich scheinbar widersprechenden Tatsachen kann man offenbar in Einklang bringen, wenn man annimmt, daß es nicht nur einen Äther gibt, sondern daß jedes Elektron einen Äther hat, den es bei seiner Bewegung mit sich führt. Da der Äther im elektromagnetischen Sinne ein polarisierbarer Körper ohne Masse ist, so liegt hierin durchaus nichts Absurdes.

In einer entsprechenden mechanischen Theorie dagegen müßte die Masse des Äthers endlich und somit die Dichte umgekehrt proportional der vierten Potenz des Abstandes vom Elektron sein. Ein solcher Äther würde der atomistischen Auffassung besser entsprechen.

Eine auf dieser Grundlage aufgebaute Theorie muß die Bedingungen erfüllen, daß erstens die Ausstrahlung nur von der Beschleunigung, und daß zweitens die gegenseitige Wirkung zweier Elektronen nur von ihrer relativen Bewegung abhängt. Der ersten Bedingung genügen wir dadurch, daß wir in dem Lorentzschen Ausdruck für die Feldstärke eines Elektrons das die Absolutgeschwindigkeit enthaltende Glied fortlassen und den übrigen Gliedern eine unserer Grundvorstellung entsprechende Form geben, der zweiten Bedingung, indem wir das von Riemann[1]) aufgestellte Grundgesetz zu Hilfe nehmen. Wir können uns also etwa folgendermaßen ausdrücken.

Wenn sich ein Elektron bewegt, so ist die Feldstärke in dem Äther des Elektrons definiert durch die Formel

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\frac{e}{r} + \frac{e}{r}\,\frac{\left[\mathfrak{r}_1\left[\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{a}_{\left(t-\frac{r}{c}\right)}\right]\right]}{c^2}\ ^{2)}$$

oder die x-Komponente

---

1) Rech. crit. sur l'électrodynamique générale. Ann. de Chim. et de Phys. (8) 13, 145—275.

1) Schwere, Elektrizität und Magnetismus, §§ 98, 99 und Enzykl. d. math. Wiss., Bd. V, Art. Reiff-Sommerfeld.

2) Abraham-Föppl, Teil II.

$$\mathfrak{E}_x = \frac{e}{r^2}\cos(r, x) + \frac{e}{r}\frac{[a_r]\cos(r, x) - [a_x]}{c^2}.$$

Hier bedeutet e die Ladung des Elektrons, r den Abstand des Aufpunktes, $\mathfrak{a}$ bzw. $[a_r]$ und $[a_x]$ die Beschleunigung und dessen Komponenten in Richtung von r bzw. x zur Zeit $t - \frac{r}{c}$, $\mathfrak{r}_1$ einen Einheitsvektor und c die Lichtgeschwindigkeit. Diese Formel gilt für ein mit dem Elektron bewegtes Koordinatensystem. Das elektrostatische Feld wird also unverändert mitgeführt[1]) und nur durch die Beschleunigung erfolgt eine Ausstrahlung. Für ein schwingendes Elektron erhält man die elektrische Feldstärke, wie sie die Theorie von Lorentz in der Wellenzone gibt.

Wenn sich nun ein zweites Elektron mit der Ladung e' in dem Felde (Äther) des ersten Elektrons bewegt, so erfährt es eine Kraftwirkung, die erstens ein Glied $e'\mathfrak{E}$ enthält, außerdem aber andere Glieder, die von der Bewegung relativ zum Felde (Äther) abhängen. Wir denken uns ein Koordinatensystem, welches eine gleichförmige geradlinige Translationsbewegung hat. In diesem System seien die Koordinaten der beiden Elektronen xyz und $x'y'z'$, ihre Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$, so daß die Geschwindigkeit des zweiten Elektrons in dem mit dem ersten bewegten Koordinatensystem $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}' - \mathfrak{v}$ oder

$$u^2 = (v_x' - v_x)^2 + (v_y' - v_y)^2 + (v_z' - v_z)^2.$$

Es wird dann die x-Komponente der von der Relativbewegung abhängigen Kraft

$$-\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{ee'}{r}\frac{u^2}{2c^2}\right) + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x'}\left(\frac{ee'}{r}\frac{u^2}{2c^2}\right),$$

und die x-Komponente der ganzen Kraft

$$e'F_x = -\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{ee'}{r}\left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right)\right] + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x'}\left[\frac{ee'}{r}\left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right)\right] + \frac{ee'}{r}\frac{[a_r]\cos(r, x) - [a_x]}{c^2}.$$

Wenn die in Betracht kommenden Abstände klein sind, können wir im letzten Glied die Beschleunigung für den Augenblick einführen. Es ist aber

$$a_r = \frac{a_x(x' - x) + a_y(y' - y) + a_z(z' - z)}{r},$$

$$-\frac{\partial a_r}{\partial x'} = \frac{a_r\cos(r, x) - a_x}{r}\ ^{2)},$$

so daß wir als Kraftgesetz schreiben können

$$e'F_x = -\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{ee'}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{ee'a_r}{c^2}\right] + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x'}\left[\frac{ee'}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{ee'a_r}{c^2}\right].$$

Dieses Gesetz unterscheidet sich von dem Riemannschen nur durch das Glied

$$\frac{ee'}{r}\frac{a_r\cos(r, x) - a_x}{c^2}.$$

Da Riemanns Gesetz die ponderomotorischen Kräfte und die Induktionsgesetze für geschlossene Ströme richtig wiedergibt, so ist das auch mit dem unsrigen der Fall, da ja das Linienintegral des hinzugekommenen Gliedes längs einer geschlossenen Kurve gleich Null ist, und dieses Glied nur für die Induktion in Betracht kommt. Ebenso steht die Theorie im Einklang mit den Versuchen von Rowland, Röntgen und Eichenwald.

Gegen das Riemannsche Gesetz hat Clausius[1]) den Einwand erhoben, daß aus demselben eine ponderomotorische Wirkung eines konstanten elektrischen Stromes auf ruhende Ladungen folgt. Um die Sache zu untersuchen, betrachten wir die Wirkung, die ein Element ds eines geschlossenen Stromes auf ein relativ zum Stromleiter ruhendes elektrisches Teilchen ausübt. In dem Kraftgesetz fallen erstens die von der Beschleunigung abhängigen Glieder fort, zweitens das Glied

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x'}\frac{ee'}{c^2 r}\left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right) = \frac{ee'}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{v_x' - v_x}{r} = -\frac{ee'}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_x}{r}\right),$$

weil wir

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{ds}{dt} \quad \text{und} \quad v_x = \frac{d_x}{ds}\frac{ds}{dt},$$

und folglich das Glied

$$= -\frac{ee'}{c^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{r}\right)$$

schreiben können und dieses über den geschlossenen Stromkreis integriert den Wert Null ergibt. Schließlich verschwindet das elektrostatische Glied, wenn wir zunächst den Leiter als ungeladen ansehen. Es bleibt also das Glied

$$-\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{ee'}{r}\frac{u^2}{2c^2}\right]$$

übrig. Die Geschwindigkeit u ist hier gleich der Geschwindigkeit der strömenden Elektrizität

1) Von einer unendlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit kann infolge der Grundannahme nicht die Rede sein, da ja dieses Glied eine bleibende, von der Zeit unabhängige Erregung des vom Elektron mitgeführten Äthers darstellt.

2) Ritz, loc. cit.

1) Die mechanische Behandlung der Elektrizität, Abschnitt IX, § 3, S. 232.



relativ zum Leiter. Bezeichnen wir die Dichte der positiven und die gleich große der negativen strömenden Elektrizität mit ϱ, die Geschwindigkeiten mit v_1 und v_2 und ein Volumelement im Stromleiter mit dS, so haben wir eu^2 durch

$$\varrho\,(v_1^2 - v_2^2)\,dS$$

zu ersetzen. Die von dem Stromelement ausgeübte Kraft hat demnach das Potential

$$\frac{\varrho\,(v_1^2 - v_2^2)\,dS}{2\,rc^2}.$$

Eine solche Kraft wird auch auf die in jedem Leiter befindliche Elektrizität ausgeübt, und hieraus folgt, daß alle Leiter in der Nähe eines konstanten elektrischen Stromes geladen werden. Bezeichnen wir also das Potential der ruhenden Elektrizität mit φ, das oben angegebene der strömenden Elektrizität mit ψ, so muß in jedem Leiter

$$\varphi + \psi = \mathrm{const}$$

sein. Dies gilt aber auch für den stromführenden Leiter selbst, und in diesem entsteht demnach nicht nur eine Flächen-, sondern auch eine räumliche Ladung mit der Dichte

$$\varrho' = -\varrho\,\frac{v_1^2 - v_2^2}{2\,c^2},$$

und diese Ladung hebt die Wirkung des Stromes auf ruhende Ladungen auf. Sie entspricht genau der „Kompensationsladung", die nach der Theorie von Lorentz in jedem stromführenden Leiter entsteht, wenn er sich relativ zum Äther bewegt, also z. B. die Erdbewegung mitmacht. Nur ist diese Ladung bedeutend stärker als die nach der Riemannschen Theorie entstehende, da sie proportional der Stromstärke und Geschwindigkeit der Erde, während die Riemannsche Kompensationsladung proportional $\varrho\,(v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = i\,(v_1 + v_2)$, d. h. der Stromstärke und Geschwindigkeit der strömenden Elektrizität ist. Der Einwand muß somit als widerlegt angesehen werden.

Die hier versuchsweise skizzierte Theorie steht nicht in Einklang mit den Versuchen über β-Strahlen. Hieraus folgt aber nicht, daß auch die grundlegende Hypothese sofort zu verwerfen ist. Man wird zunächst nur die mathematische Formulierung zu verändern versuchen, indem man etwa das Riemannsche Potential als den Anfang einer Reihenentwicklung betrachtet, oder nach Ritz sogar das Hamiltonsche Prinzip ganz aufgibt. Hierdurch wird man wohl ohne Annahme einer veränderlichen Masse auskommen können, da ja, wie schon in dem Riemannschen Potential, die elektrische, arbeitsleistende Kraft von der Geschwindigkeit abhängen wird, während dies in der Lorentzschen Theorie bloß mit der magnetischen, senkrecht zur Bewegung wirkenden Kraft der Fall ist. Der Zweck dieser Mitteilung war eben nur der, diese Grundhypothese, daß jedes Elektron einen Äther hat, den es bei seiner Bewegung mitführt, zur Beurteilung vorzulegen.

Zusammenfassung.

1. Es wird die Hypothese aufgestellt, daß jedes Elektron einen Äther hat, den es bei seiner Bewegung mitführt. Hierdurch kann der scheinbare Widerspruch zwischen den Versuchsresultaten von Fizeau und Michelson aufgehoben werden.
2. Für die Feldstärke im Äther eines Elektrons wird versuchsweise durch Kombination der Elementargesetze von Riemann und Lorentz ein Ausdruck erhalten, welcher alle elektromagnetischen Erscheinungen mit Ausnahme der β-Strahlung richtig wiedergibt. Um auch diese letztere zu erklären, müßte die Theorie noch erweitert werden.

(Eingegangen 3. August 1917.)

Die Ätherhypothese.

Von G. Helm.

Während das Relativitätsprinzip den Äther beseitigt, entzieht es der Naturbetrachtung mancherlei Anschauungsbehelfe, durch die sich die Ätherhypothese wertvoll erwiesen hat. Es lohnt sich deshalb, ihre seit Jahrhunderten ausgebildeten und angewöhnten Überlieferungen einer Durchprüfung zu unterziehen, um festzustellen, inwieweit die Vorzüge erhalten bleiben können, die der Anschauung von der Kinematik des Kontinuums dargeboten werden, ob z. B. unbequemere Vorstellungen, wie etwa die Maxwellschen Ätherspannungen, aufgegeben werden können: Die Theorie soll ja nicht die Erfahrungen nur wiedergeben, sie soll es vielmehr auf die einfachste Weise.

Dabei wird sich freilich eine Auffassung nötig erweisen, die kaum weniger befremdend erscheint, als das Relativitätsprinzip; erschwert dieses zunächst das Denken, indem es die angewöhnten Vorstellungen über Raum und Zeit erweitert, so erfordert die folgestreng durchgeführte Ätherhypothese[1]) die überkommenen Ansichten über die Substanz der materiellen Körper preiszugeben, nämlich die Körper als Phasen des Äthers anzusehen, aus derselben

1) Vgl. Helm, Das Relativitätsprinzip in der Ätherhypothese. Diese Ztschr. 13, 157, 1912.



Substanz aufgebaut wie er, — etwa nach Art der Wolken und Nebel in der Atmosphäre oder der mannigfach leuchtenden Teile in einer Flamme.

Andererseits wird sich zeigen, daß die streng durchgeführte Ätherhypothese zur mathematisch strengsten Grundlegung des Atomismus führt, indem sie ihn mit Hilfe der singulären Stellen gewisser Funktionen und Vektorverteilungen aufbaut.

Vor allem aber soll unsere Untersuchung zu der Frage beitragen, über welche Anschauungen die Mikrophysik noch frei verfügen kann und wie weit sie durch die Forderungen der Mechanik und durch die Fernwirkungstheorien des Äthers bereits gebunden ist.

1. An der alten Grundlage der Äthertheorie halten wir fest: Den unbegrenzten Raum erfüllt in allen seinen Teilen ein Mittel, dessen Punkte nur sehr kleiner Verschiebungen $\mathfrak{A}$ aus ihrer Gleichgewichtslage fähig sind. Sie sollen sich nach Art der Teile eines elastisch-festen Körpers bewegen können, doch so, daß Längsschwingungen ausgeschlossen sind und durch Verwindungen Spannungen hervorgerufen werden, also so, daß für die Komponenten $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ des Verschiebungsvektors $\mathfrak{A}$ die Differentialgleichungen gelten

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta \mathfrak{A}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0, \tag{1}$$

wobei v die Lichtgeschwindigkeit der Leere bedeutet.

2. In Sonderstellen aber, in denen die Funktionen $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ der Koordinaten x, y, z und der Zeit t nicht differentiierbar sind, verlieren diese Differentialgleichungen ihren Sinn, und in all den einzelnen begrenzten Raumteilen, die als materielle Körper bezeichnet werden, kommen solche singuläre Stellen vor, die Kernpunkte heißen sollen und die Funktionen $\mathfrak{A}$ mathematisch charakterisieren.

Die Schwierigkeiten, die das Auftreten dieser Singularitäten mit sich bringt, können nun, wie es von jeher üblich ist, dadurch beseitigt werden, daß man die Raumteile, in denen Kerne vorkommen, stetig mit Substanz erfüllt denkt, also eine Substanz fingiert, die wegen der aus der Potentialtheorie bekannten Eigenschaften der Integrale, von denen die Gleichungen (1) befriedigt werden, das Feld überall stetig erscheinen läßt, ohne es, wenigstens in hinreichender Entfernung, merklich zu ändern. Ein solches Kollektiv, ein solcher statistischer Inbegriff eines Äthervolumens mit seinen singulären Punkten, der sich verhält, als ob ein Raum stetig erfüllt wäre, soll als scheinbare Substanz bezeichnet werden. In einer solchen scheinbaren Substanz sind dann auch $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ differentiierbar, aber div $\mathfrak{A}$ ist nicht mehr Null, wie es im Äther nach den Gleichungen (1) der Fall ist, die scheinbare Substanz stellt sich als Veränderung, als Phase des Äthers dar. —

Die Funktionen $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ enthalten die Koordinaten X, Y, Z der Kernpunkte außer den Koordinaten x, y, z des Bezugspunktes und der Zeit t. Sie genügen den Gleichungen (1) auch dann, wenn X, Y, Z selbst Funktionen der Zeit sind, falls nur die Geschwindigkeiten X', Y', Z' klein gegen v bleiben. Die Kernpunkte mit ihren Vektorfeldern kann man sich daher als in ungeordneten Verschiebungen begriffen vorstellen.

Und wenn man die singulären Punkte eines kleinen Raumgebietes zusammen mit dem Äther dieses Gebietes als ein einheitliches Ganzes, also als eine scheinbare Substanz auffaßt, etwa als ein Atom, dann wird man diesem Gebilde eine schnell und ungeordnet wechselnde Geschwindigkeit beizulegen haben, um den Bewegungen der Felder aller in ihm zusammengefaßten Kerne Rechnung zu tragen. Als solche aus Äther und singulären Stellen gebildete Systeme, als solche scheinbare Substanzen erscheinen uns die Atome, Molekeln, Ionen, wie die Bohrschen Kerne, die Elektronen, Magnetomen und Oszillatoren der Molekularphysik, aber auch die Volumelemente der Körper in der Kontinuitätsphysik. Als Ort eines solchen Gebildes hat man die augenblickliche Mittellage der Kerne anzusehen, die in ihm zusammengefaßt sind, als Temperatur die Streuung der Kerne um ihre Mittellage.

3. Wir sind gewöhnt, die Kerne oder vielmehr die aus ihnen aufgebauten scheinbaren Substanzen, die Kernsysteme, als Ursachen der Vektorverteilungen $\mathfrak{A}$ anzusehen, aber theoretisch begründet ist es nicht, die Beziehung lediglich einseitig aufzufassen. Die Kerne sind vielmehr mit den Vektorfunktionen $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ verknüpft, als deren singuläre Punkte diese Funktionen bestimmend, ebenso wie durch sie bestimmt. Indessen, bequem ist es, die Beeinflussung einer Vektorverteilung durch eine andere auf gegenseitige Beeinflussung ihrer Kerne zurückzuführen, und jedenfalls genügt es für unsere Zwecke, uns einen solchen Einfluß nach Art der allgemeinsten Vorstellungen über Strahlung zu denken.

Wo immer wir also, um die Erscheinungen zu beschreiben, veranlaßt sind, die an sich einheitliche Vektorverteilung $\mathfrak{A}$ in Teilgebiete zu zerfällen, die aufeinander wirken, wollen wir uns vorstellen, daß Energie von dem einen Gebiete



dem andern zugestrahlt wird, und daß die Kerne jedes Gebietes einen Energiebetrag absorbieren, der proportional dem von ihnen emittierten Betrage ist, nämlich dem zur Aufrechterhaltung jener besonderen Kollektivanordnung, jener besonderen Konstellation der Kerne erforderlichen Betrage, die dieses Raumgebiet physikalisch kennzeichnet. So wird immer die für ein Raumgebiet verfügbare Energie als ein Produkt erscheinen aus einem Intensitätsfaktor, der proportional der Einstrahlung ist, und einem Extensitätsfaktor, proportional der Emissions- und der Absorptionsfähigkeit dieses Raumgebietes. Diese Auffassung wird sich wenigstens genügend erweisen, um das von der gewöhnlichen Mechanik und von den Maxwell-Hertzschen Gleichungen umfaßte Erscheinungsgebiet ausreichend zu beschreiben.

4. Wer sich den Aufbau der scheinbaren Substanzen aus singulären Punkten, aus mathematischen Punkten, klar macht, wird die Bewegung der Körper nicht mehr nach Art der Verschiebung durch eine Flüssigkeit auffassen, und die Frage, wie sichtbare Bewegung der Körper zustande kommt, wird nun einfach dahin beantwortet: im gewöhnlichen Sinne kommt sie überhaupt nicht zustande. Nicht eine Substanz wandert, wo wir Bewegung wahrnehmen, sondern die durchschnittliche Anordnung der singulären Punkte im Äther, eigentlich der Vektorverteilungen um sie, verschiebt sich, indem andere Raumpunkte singulär werden, — ein Feld durchwandert den Raum oder sein Repräsentant, der Kernpunkt. Die Anordnung der neuen Kernpunktlagen ist zwar der der verlassenen nicht kongruent, aber doch so nahe kongruent, wie sie sein würde, wenn keine sichtbare Bewegung stattgefunden hätte, sondern bloß der Wechsel jener Zustände, deren kollektive Gesamtheit wir nur zu beobachten vermögen.

Und wenn man die Kernsysteme, mit dem Äther, in dem sie eingesprengt sind, vereinigt, als homogene Phase des Äthers, etwa als Verflüssigungsstelle im sonst vergleichsweise fest gedachten Äther, ansieht, muß man sagen: Nicht Stoffliches wandert, wo wir Bewegung wahrnehmen, sondern die Phase, der Zustand des Äthers verschiebt sich, indem dieser Zustand auf Nachbargebiete übergeht. Geht er gleichförmig über, so wird an der Vorderseite ebensoviel Äther verflüssigt, wie an der Hinterseite flüssiger fest wird. Zur gleichförmigen Bewegung bedarf es also keines Energieaufwandes, wenn man festsetzt, daß der Energieaufwand für die Umordnung eines Kernsystems dem für die rückgängige Umordnung entgegengesetzt gleich ist, wie bei den gewöhnlichen Aggregatsänderungen.

Sichtbare Bewegung tritt ein, wenn von den wechselnden Richtungen, nach denen in ungeordneter Folge jeder Kernpunkt und jeder Körperteil sich bewegt, eine bestimmte infolge der besonderen Beschaffenheit des Feldes bevorzugt wird. So erscheint die sichtbare Bewegung als ein mittlerer Zustand, als ein Kollektivergebnis aller Elementarbewegungen, die nach **2.** jedem Körperteil zukommen.

Wir setzen die Energie, die zur Übertragung der Volumeinheit eines Kernsystems durch den Raum mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ nötig ist, gleich $\frac{1}{2} m V^2$, indem wir eine für das physikalische Verhalten dieser Volumeinheit kennzeichnende Konstante m einführen; dann ist auch $\mathfrak{V}$ eine das System in seinem augenblicklichen Zustand kennzeichnende, mit ihm den Raum durchwandernde Konstante.

Diese Festsetzungen bedeuten grundsätzliche Abweichungen von den bisherigen mißglückten Versuchen, die Ätherverschiebungen $\mathfrak{A}$ selbst oder die aus ihnen hervorgehenden Spannungen im Äther als unmittelbaren Antrieb für die Bewegungen der Körper anzusehen. Nicht dualistisch wollen wir die Körper als das Angetriebene betrachten neben dem Äther, der sie antreibt, sondern in den Körpern Ätherzustände sehen, die im Raume fortzuwandern vermögen; nicht die Übertragung der Bewegung einer Flüssigkeit auf einen in ihr treibenden festen Körper oder die Übertragung der Spannungen zwischen sich berührenden elastisch-festen Körpern wollen wir zum Anhaltspunkt und Leitgedanken wählen, sondern die einfachsten Vorstellungen über Absorption und Emission strahlender Energie, durch die etwa ein Niederschlagsgebiet in feuchter Luft fortschreitet. Die Spannungen im Äther sind für die Bewegungen der Ätherteile um ihre Gleichgewichtslagen maßgebend, nicht für die Verlegung der Vektorfelder oder der sie repräsentierenden singulären Stellen, demnach nicht für die sichtbare Bewegung der Körper, die vielmehr durch besondere energetische Festsetzungen zu regeln ist. Diese besonderen Festsetzungen sind der Erfahrung gemäß zu wählen, in mathematischer Hinsicht entsprechen sie den Integrationskonstanten und Grenzbedingungen.

5. Wir erhalten die Erscheinungen der allgemeinen Gravitation als die Lösung, die unsern Differentialgleichungen (1) genügt, wenn die Veränderungen der Funktionswerte $\mathfrak{A}$ oder auch die Veränderungen der Lage ihrer singulären Stellen mit einer gegen v geringen Geschwindigkeit erfolgen. Der Vektor

$$\mathfrak{A} = \operatorname{grad} \frac{\varkappa m}{r}, \qquad (2)$$

wo $\varkappa$ die allgemeine Gravitationskonstante, ist dann die Ätherverschiebung im Abstande r von der Volumeinheit. Dabei erscheint wieder die unter **4.** eingeführte stoffliche Konstante der Emission und Absorption, die von Beschaffenheit und Anzahl der in der Volumeinheit vorhandenen Kerne abhängige Massendichte.

Faßt man den Volumteil, in dem sich die Kerne befinden, als homogen auf, als scheinbare Substanz, so bleiben $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ überall endlich und stetig, während div $\mathfrak{A}$ in dieser scheinbaren Substanz den Wert $-4\pi m\varkappa$ annimmt.

Solch ein Feld $\mathfrak{A}$ kann nie verlöschen, es kann sich nur — mittels Transversalwellen — durch den Raum hindurch verlegen.

Wie die Kerne und Kernsysteme den Raum durchwandern, während sich die Verschiebungen $\mathfrak{A}$ im Äther ausbilden, kann nur durch besondere Angabe der in diesem Durchwandern sich bekundenden Energie festgestellt werden. Der Gedanke, daß die Zahl m für Emission wie Absorption der Energie der Volumeinheit maßgebend ist, indem sie das Bestreben mißt, die dort bestehende Anordnung der Kerne aufrecht zu erhalten, führt dazu, als gesamte, von der Gravitation im Äther angesammelte Energie des unbegrenzten Raumes, dessen körperliche Elemente mit dk, dk' bezeichnet werden,

$$\frac{1}{8\pi\varkappa}\int \mathfrak{A}^2\, dk = \frac{\varkappa}{2}\int\!\!\int \frac{m}{r}\, m'\, dk\, dk' \qquad (3\text{a})$$

anzusehen, so daß als potentielle Energie der sichtbaren Bewegungen zur Verfügung steht

$$-\frac{\varkappa}{2}\int\!\!\int \frac{m}{r}\, m'\, dk\, dk'. \qquad (3\text{b})$$

6. Weiter sind nun die Vorgänge zu betrachten, bei denen sich die Ätherverschiebungen $\mathfrak{A}$ mit großer, gegenüber der Lichtgeschwindigkeit v nicht zu vernachlässigenden Geschwindigkeit bewegen.

Wenn ein Volumteil seinen durchschnittlichen Besitzstand an Kernen mit benachbarten Volumteilen ausgleicht, erscheint er im Zustande der Durchströmung; und auch wenn er ihn aufrecht erhält, kann doch der Volumteil Andrang oder Abdrang von Kernen zeigen, Zustände, die durch vorangegangene Strömungen veranlaßt sind oder zu späteren Strömungen führen würden, wenn die benachbarten Volumteile Strömungsausgleich gestatten. Diese Strömungs- und Drangzustände bilden den Gegenstand der elektrischen Vorgänge.

Übrigens kann hier dahingestellt bleiben, ob dieselben Kerne, die bei langsamen Veränderungen die Gravitationserscheinungen bedingen, bei hinreichend schnellen Änderungen zu den elektrischen Vorgängen führen, oder ob es zweckmäßiger ist, zwei Arten von Kernen zu unterscheiden, neben den Gravitationskernen noch die Elektrokerne, die sich gegen jene verschieben.

Die durchschnittliche Verschiebung der schnell, explosionsartig bewegten Kerne gegen die ihre Lage langsam ändernden möge als dielektrische Verschiebung $\mathfrak{d}$ bezeichnet werden, so lange sie nicht zu Übergängen in das Bereich makroskopisch anderer Kernsysteme führt; ist letzteres der Fall, so sagen wir, daß Strömung $\mathfrak{i}$ vorliegt, und setzen, die Gesamtströmung $\mathfrak{j}$ einführend,

$$4\pi\mathfrak{j} = 4\pi\mathfrak{i} + \mathfrak{d}', \quad \operatorname{div}\mathfrak{j} = 0. \qquad (4)$$

Dann werden die Gleichungen (1) in allen strömungsfreien Gebieten durch den Ansatz befriedigt

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c}\int \mathfrak{j}\frac{dk}{r}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0, \qquad (5\text{a})$$

da er gleichwertig ist mit der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} = v^2\cdot\Delta\mathfrak{A} + 4\pi\frac{c}{\varepsilon}\mathfrak{j}, \qquad (5\text{b})$$

wobei die Maxwellschen Konstanten so eingeführt sind, daß

$$v^2 = c^2 : \varepsilon\mu. \qquad (6)$$

Unter dem Integralzeichen sind hier selbstverständlich, um $\mathfrak{A}$ im Bezugspunkte zur Bezugszeit anzugeben, die Werte für $\mathfrak{j}$ und r einzuführen, die dem Zustande des Volumelements dk um $r:v$ Zeiteinheiten früher entsprechen.

Jedes durchströmte Gebiet aber verhält sich nun als eine scheinbare Substanz, in der statt der Gleichungen (1) eben die Gleichungen (5b) gelten.

Selbstverständlich wird man sich gegenwärtig zu halten haben, daß das „Strömen von Kernen" nur eine bequeme Fassung für die Verlegung der Vektorfelder $\mathfrak{A}$ ist, deren singuläre Stellen jene Kerne sind.

Auch erscheint es an dieser Stelle angebracht, darauf hinzuweisen, daß die Differentialgleichungen (1) Longitudinalwellen ausschließen. Das Feld der radial nach einem Kerne K gerichteten Ätherverschiebungen kann also nicht etwa durch Radialwellen von K aus verlöschen, sondern seine Vektoren $\mathfrak{A}$ verschieben sich parallel, wenn K nach K' rückt, so daß ein beliebiges Volumelement des Äthers statt von $\mathfrak{A}$ nunmehr von $\mathfrak{A}'$ ergriffen wird, also eine durch $-\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ bestimmte Verwindung erfährt. Von der Linie

KK' aus schreiten Transversalwellen fort, die diese Verwindungen bewirken, wenn sich das Feld in der Richtung KK' entlädt.

7. Im elektrostatischen Falle, $\mathfrak{i} = 0$, bestimmt die Funktion

$$\varphi = \int \frac{e\,dk}{\varepsilon r}, \quad 4\pi e = \operatorname{div} \mathfrak{d} \qquad (7a)$$

den Verdichtungszustand der Kerne, ihren An- oder Abdrang im Volumelement des Bezugspunktes. Sie erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta\varphi + 4\pi \frac{v^2}{\varepsilon} \cdot e, \qquad (7b)$$

gibt also Veranlassung zur Konstruktion scheinbarer Substanzen oder Ätherphasen an allen Stellen, wo e nicht Null ist.

Das elektrostatische Potential φ stellt das jeweilige Ergebnis der ganzen Vorgeschichte des Volumelements dar, auf das es sich bezieht. Denn die Lagen der Kerne in jedem Volumelement sind durch die voraufgegangenen Transversalverschiebungen $\mathfrak{A}$ des Äthers zustande gekommen, mit denen sie durch die Gleichungen (4) und (5) verknüpft sind.

Der Vektor

$$\mathfrak{E}_0 = -\operatorname{grad} \varphi \qquad (8a)$$

entspricht mathematisch den Gravitationsverschiebungen $\mathfrak{A}$ nach Gleichung (2), nur mißt er nicht Verschiebungen des Äthers, sondern Verdichtungszustände der singulären Punkte in ihm oder der scheinbaren Substanz, die aus ihnen gebildet ist. Diese Ätherverschiebungen sind vom Betrag

$$\mathfrak{d} = \varepsilon\, \mathfrak{E}_0 = -\operatorname{grad} \varepsilon\varphi. \qquad (8b)$$

Da wegen $\operatorname{div} \mathfrak{j} = 0$ noch

$$\operatorname{div} \mathfrak{i} = -e'$$

ist, so bleibt die Gesamtsumme aller e im unbegrenzten Raume unveränderlich; man wählt sie gleich Null und denkt sich die Volumelemente mit positiven e-Werten behaftet, wenn sie Andrang, mit negativen, wenn sie Abdrang der Kerne zeigen. So gelangt man zu der Vorstellung, daß negative Kerne über alle Teile des Raumes zerstreut sind, während die positiven den ponderablen Kernansammlungen anhaften.

Die für sichtbare Bewegungen und Wärmeentwicklungen verfügbare elektrostatische Energie setzen wir

$$\frac{1}{8\pi} \int \varepsilon\, \mathfrak{E}_0{}^2 \cdot dk = \frac{1}{2} \int\!\!\int \frac{e e'}{\varepsilon r}\, dk\, dk'. \qquad (9)$$

Die kinetische Energie, die im Gravitationsfalle durch die Ätherverschiebungen unmittelbar nach Gleichung (2) bestimmt ist, erscheint hier erst vermittelt durch diese in den Ätherverschiebungen der Kerne aufgespeicherte potentielle Energie.

Wie die elektrostatische Fernwirkung auf Grund des Ansatzes (9) zustande kommt, kann man sich in folgender Weise veranschaulichen (vgl. Helm, Elektrodynamik, S. 150): Wenn in einem Andrangsfelde um den Punkt A sich eine Andrangsstelle befindet, so wird in letzterer an der A zugewendeten Seite der Andrang geschwächt, an der Abseite aber wird er verstärkt. Die Flächen gleichen Andrangs nach B haben also nicht mehr B zum Mittelpunkt, sind vielmehr nach jener Abseite verschoben, entsprechend einer von A ausgeübten Abstoßung. Diese Störung veranschaulicht die potentielle Energie, mit der das Volumelement bei B seine Ordnung wieder herzustellen bestrebt ist.

8. Ist $\mathfrak{i}$ nicht Null, im allgemeinen elektromagnetischen Felde also, so hat man außer den Verdichtungs- noch die Verwindungsstellen der Kernsysteme zu beachten und die Verwindungen des Äthers, deren singuläre Punkte jene sind. In den Verwindungsstellen der Kernsysteme ist die magnetische Erregung durch vorangegangene Ätherverwindungen ebenso aufgespeichert, wie in den Verdichtungsstellen die elektrische.

Man setze, die magnetische Feldstärke $\mathfrak{M}$ einführend,

$$\mu \cdot \mathfrak{M} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} \qquad (10)$$

als Maß der Verwindung des Äthers gegen die ponderablen Kerne, die ja als geometrische Punkte nicht an der Verwindung teilnehmen.

Da diese Punkte an der Ätherverschiebung $\mathfrak{A}$ teilnehmen und eben dadurch zu elektrostatischen Verdichtungen führen, wird als elektrische Feldstärke, d. h. als Maß der augenblicklichen elektrischen Verdichtung, die Relativverschiebung des Äthers gegen die Gravitationskerne

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - \frac{1}{c} \mathfrak{A}' \qquad (11)$$

eingeführt. Mit diesen Ansätzen gelangt man unter Berücksichtigung der Gleichung (4) zu dem Hertzschen Gleichungssysteme

$$\varepsilon \mathfrak{E}' + 4\pi\lambda \mathfrak{E} = c \operatorname{rot} \mathfrak{M}, \quad \mu \mathfrak{M}' = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}, \qquad (12)$$

wenn man noch die durch

$$\mathfrak{i} = \lambda \mathfrak{E} \qquad (13a)$$

bestimmte Leitfähigkeit der scheinbaren Substanz einführt, in der man sich, Äther und Kerne kollektiv zusammenfassend, die elektrische Strömung stattfindend denkt. Entsprechend ist

$$\mathfrak{d} = \varepsilon \mathfrak{E}_0. \qquad (13b)$$

Die Konstante c erscheint hierbei wie eine Übertragungskonstante der Geschwindigkeit zwischen dem Äther und den Kernsystemen, ebenso wie ε und μ die Übertragung der Verdichtung und Verwindung bestimmen.

Die gesamte elektromagnetische Energie wird mit Rücksicht auf (10) und (11)

$$\frac{1}{8\pi}\int(\varepsilon\mathfrak{E}^2+\mu\mathfrak{M}^2)dk. \qquad (14)$$

Sind nämlich die Vorgänge nicht rein elektrostatisch, so tritt kinetische Energie des Äthers und dadurch der singulären Stellen in ihm auf, im Volumelement dk der Betrag

$$\frac{1}{2c^2}\mathfrak{A}'^2 dk, \qquad (15a)$$

der außer der magnetischen zur elektrostatischen Energie (9)

$$\frac{1}{8\pi}\varepsilon\mathfrak{E}_0{}^2 dk \qquad (15b)$$

hinzutreten muß, um die gesamte elektrische Energie zu liefern. Zwar fordern diese Gleichungen auch noch das Auftreten des Energiebetrags

$$\frac{\varepsilon}{4\pi c}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathfrak{A}_x'+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathfrak{A}_y'+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathfrak{A}_z'\right)dk, \qquad (15c)$$

doch ist dieser Null, weil dauernd $\operatorname{div}\mathfrak{A}=0$ ist. —

Offen bleibt, ob es auch singuläre Stellen, Magnetokerne, gibt, in denen von Natur der $\operatorname{rot}\mathfrak{A}$ einen vorgeschriebenen Wert hat, ebenso wie es zweckmäßig sein kann, Stellen einzuführen, in denen von Natur Unterschiede des Potentials φ in unveränderlichem Betrage aufrecht erhalten werden. —

Die Äthertheorie liefert also die Ausgangspunkte sowohl zur Lorentzschen wie zur Maxwellschen Auffassung der Elektrik, zur letzteren, indem sie den Durchschnittszustand der Kerngruppen als scheinbarer Substanzen gleichsam in einer Überschlagsdarstellung erfaßt.

Die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ aber stehen sich nicht dualistisch gegenüber, sie erscheinen jetzt als zwei Seiten ein und desselben Vorgangs: Die Transversalwelle, die den Gleichungen (1) zufolge den Äther durchzieht, bedingt gleichzeitig Relativverschiebungen $\mathfrak{E}$ und Verwindungen $\mathfrak{M}$ in jedem Volumteil, den sie erreicht, — und im Felde eines elektrischen Stromes bestehen Ätherverschiebungen, die wegen ihrer Abnahme nach außen zugleich Verwindungen bedingen.

Das Ergebnis der vorstehenden Darlegungen läßt sich dahin zusammenfassen: Die folgestreng durchgeführte Äthertheorie ist eine gesicherte Grundlage für mikrophysikalische Theorien, da sie die Erscheinungen der Fernewirkungen und der Mechanik zutreffend zu beschreiben vermag. Sie entwickelt in dem Ätherkontinuum mit seiner vollkommenen Ordnung stetiger Vektorfunktionen einen Kollektivatomismus, indem sie auf dem mathematisch reinsten Atombegriff, dem des singulären Punktes jener Funktionen, eine vollkommene Unordnung aufbaut, die zu scheinbaren Substanzen und Vorgängen von scheinbarer Stetigkeit führt. Auf die Anschauungsmittel der Kinematik des Kontinuums werden die elektromagnetischen Vorgänge und damit die Strahlung zurückgeführt.

(Eingegangen 13. August 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Röntgenspektroskopie.

Von Ernst Wagner.

(Fortsetzung.)

Theorie der Röntgenspektren.

§ 1. Die Moseleysche Darstellung der Serienfrequenzen nach der Bohrschen Spektraltheorie.

Nach den großen Erfolgen, die Bohr mit seinem Atommodell bei der Erklärung der Serienspektren vom Wasserstoff und Helium erzielt hat (vgl. den zusammenfassenden Bericht von E. Riecke, diese Zeitschr. **16**, 222, 1915), hat sich auch die Theorie der Röntgenspektren ganz an die Bohrschen Quantenvorstellungen angeschlossen.

Das Rutherford-Bohrsche Atom gleicht, wie bekannt, einem Planetensystem mit einem Zentralkörper. Dieser, der positiv geladene Kern, enthält die wesentliche Masse (Atomgewicht); er ist sehr wenig ausgedehnt im Vergleich zu den Bahndimensionen, in denen die konstitutionellen Elektronen kreisen. Der wachsende Aufbau der Atome ist nach v. d. Broek[1]) gegeben durch den Zuwachs der Kernladung um je eine positive Elementarladung und den Eintritt jeweils eines neuen Elektrons, so daß die Gesamtladung

1) v. d. Broek, diese Zeitschr. **14**, 32, 1913.

des Atoms null bleibt. H soll eins, He zwei ... usw., Ur 92 Elektronen bzw. Kernladungen enthalten entsprechend der Ordnungszahl N des Elementes im periodischen System. Mit wachsender Kernladung bilden sich vom Kern nach außen immer neue mit Elektronen besetzte Ringe allmählich voll aus, derart, daß die zuerst gebildeten inneren Ringe dabei unverändert[1]) bleiben. Dieser periodischen Neuausbildung von Elektronenringen an den äußeren Teilen des Atoms entspricht das periodische Verhalten der physikalisch-chemischen Eigenschaften der Elemente, da und insoweit diese von der Oberflächenwirkung der Atome stammen. Diejenigen physikalischen Äußerungen dagegen, die von den innersten unverändert bleibenden Ringanordnungen beherrscht werden, werden eine, wie vorauszusehen, einfache, nicht periodische Funktion der Kernladung sein müssen.

Dies letztere Verhalten zeigen nun genau nach den Moseleyschen Messungen die Quadratwurzeln der Röntgenfrequenzen $\sqrt{\nu}$ der Elemente, die immer um den gleichen Betrag sprunghaft wachsen, wenn man von einem Element zum nächsten übergeht: hier offenbart sich schlagend der sprunghafte Zuwachs der Kernladung um immer den gleichen Wert der Elektronenladung. So liefern die Moseleyschen Messungen eine unmittelbare Bestätigung der v. d. Broekschen Hypothese nd lassen uns den Entstehungsort der Röntgenfrequenzen in den innersten Ringanordnungen des Atoms suchen.

Soweit führen qualitative Betrachtungen. Die Bohrsche Spektraltheorie lieferte vor allem überraschende quantitative Beziehungen, die sehr genau vom Experiment bestätigt wurden. Wir erörtern in Kürze ihre Grundlagen und prüfen ihre Anwendbarkeit auf die Röntgenspektren.

Bohr geht vom H-Atom aus. Hier kreist ein einziges Elektron um den einfach geladenen Kern. Die Multiplizität der Serienlinien wird ermöglicht durch die Annahme einer Schar statischer Kreisbahnen, in denen das Elektron, strahlungsfrei und darum stabil, im übrigen nach dem Coulombschen Gesetz verläuft. Die Schar diskreter Bahnen definiert folgender Quantenansatz (für unbeweglichen Kern):

$$\mu \omega r^2 = n \cdot \frac{h}{2\pi}. \quad \text{(I)}$$

ω = Winkelgeschwindigkeit,
r = Bahnhalbmesser,
μ = Elektronenmasse,
$h = 6{,}5 \cdot 10^{-27}$ (Plancksche Konstante),
$n = 1, 2, 3 \dots$

Ausstrahlung von der Frequenz ν soll nur erfolgen, wenn durch äußere Störung das Elektron von irgendeiner m ten Bahn größerer Energie in irgendeine n te Bahn kleinerer Energie überspringt. Die Energiedifferenz $W_m - W_n$ des kreisenden Elektrons in diesen Bahnen soll die Frequenz nach der Planckschen Gleichung regulieren:

$$W_m - W_n = h \cdot \nu_{m,n}. \quad \text{(II)}$$

Nimmt man die Kernladung bei schwereren Atomen als die N-fache der Elementarladung e an, so folgt unter Vernachlässigung der $(N-1)$ Elektronen für diesen „Fall der Wasserstoffähnlichkeit" aus (I) und (II) nach Bohr:

$$\nu = \nu_0 \cdot N^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \quad (1)$$

Hier bedeutet

$$\nu_0 = \frac{2\pi^2 \cdot e^4 \cdot \mu}{h^3} = 109740 \text{ cm}^{-1}$$

die Rydbergsche Fundamentalfrequenz.

e = Elementarladung.

Die Gleichung (1) liefert gerade die Moseleysche Beziehung (2) und (3) in richtigen absoluten Werten zwischen den Röntgenfrequenzen der Hauptlinien K_α und L_α der K- und L-Serie und der Ordnungszahl N der Elemente, wenn man die einfachsten Quantenzahlen wählt:

$$\nu_{K\alpha} = \nu_0 \cdot (N-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) \quad (2)$$

$$\nu_{L\alpha} = \nu_0 \cdot (N-7{,}4)^2 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right). \quad (3)$$

Gemäß den Quantenzahlen kommt die K_α-Frequenz durch den Übergang des Elektrons von der zweiten zur ersten Bahn, die L_α-Frequenz von der dritten zur zweiten Bahn zustande. Statt der wirklichen Kernladung $N \cdot e$ tritt eine verminderte „wirksame" Kernladung $(N-b) \cdot e$ auf, die nach Moseley von dem in der Bohrschen Theorie nicht berücksichtigten Einfluß derjenigen Elektronen herrührt, die im Atominnern auf Ringen nahe dem Kern umlaufen und dessen Ladung teilweise abschirmen. Moseley denkt sich mehrere Elektronen in den Bohrschen Stabilitätsbahnen umlaufend und läßt die ganze Ringanordnung beim Strahlungsvorgang springen. Die Rechnung (vgl. Riecke l. c.) ergibt dann wieder die Bohrsche Frequenzgleichung (1), in der die Kernladung $(N-\sigma) \cdot e$ statt $N \cdot e$ auftritt. Aus $\sigma = 1$ schließt Moseley auf vier Elektronen im K-Ring der Atome.

1) Unverändert bezüglich der Zahl der sie besetzenden Elektronen, nicht bezüglich der Durchmesser und Energien der Ringe.

§ 2. **Beziehungen zwischen den Frequenzen verschiedener Serien (Kombinationsprinzip). Die Dublett-Struktur der L-Serie.**

Auf empirischer Grundlage haben sich Beziehungen zwischen den beobachteten Frequenzen verschiedener Serien beim gleichen Element ergeben, die als die Additionssätze der Frequenzen bezeichnet werden und nach Bohr dem Kombinationsprinzip der Serien von Ritz entsprechen.

Verf.[1]) hat, ohne Heranziehung spezieller Modellvorstellungen, in Verfolgung der Einsteinschen[2]) Quantenerklärung der Stokesschen Fluoreszenzregel eine Beziehung zwischen der Frequenz der Absorptionsbandkante der K-Serie und den Frequenzen der Hauptemissionen der verschiedenen Serien angegeben. Nach Einstein sind die Energiequanten ε der Strahlung, die beim Fluoreszenzvorgang ins Spiel kommen, proportional ihrer Frequenz: $\varepsilon = h \cdot \nu$. Das Absorptionsquantum ε_A muß als der primäre Vorgang größer sein als das Emissionsquantum ε_ε; also muß gelten:

$$\nu_A > \nu_\varepsilon$$

in Übereinstimmung mit dem Stokesschen Gesetz.

Wenden wir dies auf die Frequenz der Absorptionsbandkante der K-Serie an, indem wir — wie stets im folgenden — die Frequenz (d. i. die Wellenzahl) $\frac{1}{\lambda_{K_A}}$ kurz mit K_A bezeichnen und die Emission durch die stärkste Linie der K-Serie approximieren, deren Frequenz wir $K_\alpha = \frac{1}{\lambda_{K_\alpha}}$ schreiben, so besteht die Ungleichung in Übereinstimmung mit den Messungen:

$$K_A > K_\alpha .$$

Nach den Messungen gehen ca. 90 Proz. des Absorptionsquantums in das Emissionsquantum derselben Serie über. Fragt man nun, welche Frequenz X kann aus dem nicht in Emissionsenergie verausgabten Rest $K_A - K_\alpha$ quantengemäß noch emittiert werden, so folgt: X nahe gleich L_α, der Frequenz der Hauptlinie der nächst weicheren Serie. Wir haben also angenähert folgenden Additionssatz der Frequenzen:

$$K_A = K_\alpha + L_\alpha . \tag{4}$$

Dieser Satz ist im Falle, daß noch weichere Serien existieren, wie unterdessen festgestellt wurde, sinngemäß wie folgt zu einer Reihe mit rasch abnehmenden Beträgen zu erweitern:

$$K_A = K_\alpha + L_\alpha + M_\alpha + \ldots . \tag{5}$$

1) Sitz.-Ber. bayr. Ak. d. Wiss. S. 338, 1914.
2) Ann. d. Phys. **17**, 132, 1905.

Satz (4) wird erfahrungsgemäß um so besser bestätigt, je kleiner N, d. h. je einfacher der Atombau ist. Dies ist in Übereinstimmung mit der Vorstellung vom wachsenden Ringaufbau der Atome, wonach mit wachsendem N immer neue Ringe $M, N \ldots$ ins Spiel kommen. Eine exakte Prüfung der ungeschlossenen Beziehung (5) ist offenbar nicht möglich.

W. Kossel[1]) gelang es auf Grund des Bohrschen Modells insbesondere der Gleichung II, ein Schema für Additionssätze aufzustellen zwischen den Frequenzen der verschiedenen Serien, von denen einige sich gut bewährt haben, andere freilich kaum angenähert gelten.

Der Vorgang der Fluoreszenz im Bohrschen Atom gewinnt nach ihm folgende anschauliche Beschreibung: Wir bezeichnen (im Sinne Moseleys) vom Kern nach außen gehend den 1, 2, 3 ... mit Elektronen besetzten Bohrschen Ring als den K, L, M...-Ring (vgl. Fig. 22.) Ein Absorptionsakt im K-Ring bedeutet die Entfernung eines Elektrons aus dem K-Ring an die Atomoberfläche. Die hierbei zu leistende Arbeit ist nach der Quantenbedingung II proportional der Frequenz K_A der Absorptionsbandkante zu setzen, wenn das Elektron mit der Geschwindigkeit Null die Oberfläche erreicht. Wird das im K-Ring fehlende Elektron durch eines aus dem nächsten, d. i. dem L-Ring, ersetzt, so wird die K_α-Frequenz emittiert, entsprechend der Energiedifferenz des Elektrons in beiden Bahnen. Wird das jetzt im L-Ring fehlende Elektron aus dem M-Ring ersetzt, so entsteht die L_α-Linie in entsprechender Weise usw. So wird die in einem Zug am K-Ring verausgabte Absorptionsenergie sukzessive in den einzelnen Emissionsakten der aufeinanderfolgenden Serien in immer kleineren Beträgen restlos wieder zurückerstattet[2]); dies liefert folgende (auf II fußende) Energie- bzw. Frequenzbilanz:

$$K_A = K_\alpha + L_\alpha + M_\alpha + \ldots \tag{5}$$

in Übereinstimmung mit (5). Wir bemerken nebenher, daß die K-Absorption den Zustand einer L-Absorption zur Folge hat, d. i. der Moment, wo das fehlende K-Elektron soeben aus dem L-Ring ersetzt ist. Eine K-Emission hat also eine L-, M- usw. Emission zur unmittelbaren Folge. — Analog zu (5) folgt für eine reine L-Absorption:

$$L_A = L_\alpha + M_\alpha + N_\alpha + \ldots \tag{6}$$

Aus (6) und (5) gewinnen wir die geschlossene prüfbare Beziehung:

1) W. Kossel, Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 953, 1914.
2) C. G. Barkla teilt (Nature **95**, 7, 1915) ganz ähnliche Betrachtungen mit wie die Kosselschen, ohne sich des Bohrschen Modells zu bedienen und ohne bestimmte Frequenzbeziehungen zu gewinnen.



$$K_A = L_A + K_\alpha . \quad (7)$$

Kossel betrachtet speziell den Fall eines Überganges des Elektrons aus dem dritten Ring direkt in den ersten und fragt, ob dieser Energiestufe eine berechenbare Frequenz entspricht, die wirklich in der K-Serie beobachtet wird?

Nach II folgt sogleich für eine solche Frequenz K_x die Summe der Frequenzen in den einzelnen Zwischenstufen: $K_\alpha + L_\alpha = K_x$.

Tatsächlich stellt K_β in guter Annäherung diese Frequenz dar:

$$K_\beta = K_\alpha + L_\alpha , \quad (8)$$

wie folgende Tabelle an einigen Beispielen lehrt.

Tabelle IX.

N	Element	K_α	L_α	K_{β} ber.	K_{β} beob.
30	*Zn*	69,8	8,1	77,9	77,3
41	*Nb*	133,5	17,5	151,0	150,0
46	*Pd*	170,5	23,0	193,5	192
47	*Ag*	178,2	24,1	202,3	198
58	*Ce*	282,0	39,0	321,0	319,0
74	*Wo*	493,0	68,1	561,1	565,0

Die Zahlen bedeuten die Frequenzen in willkürlichen Einheiten.

Die Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Werte ist zu gut, um als zufällig gelten zu können; vielmehr muß der Ursprung der β-Linie in der angenommenen Weise gesucht werden. Dennoch besteht eine systematische Unstimmigkeit in dem Sinne, daß die Frequenz beim Übergang zwischen entfernteren Bahnen kleiner ausfällt als die Summe der Frequenzen in den Zwischenstufen.

Analog wäre der Ursprung der K-γ-Frequenz in dem Übergang des Elektrons vom vierten[1]) (N)-Ring zum K-Ring zu suchen:

$$K_\gamma = K_\alpha + L_\alpha + M_\alpha = K_\beta + M_\alpha . \quad (9)$$

Zusammenfassend können wir über die Struktur der Serien, speziell der K-Serie, sagen, daß sie, ganz dem Kossel-Bohrschen Schema entsprechend, sich als eine nach der kurzwelligen Seite hin sich häufende Liniengruppe α, β, γ darstellt, deren Grenze (nahe bei γ) die Absorptionsbandkante bildet.

Die Entstehung der verschiedenen K-Frequenzen als Folgeerscheinung des einzigen K-Absorptionsaktes liefert ein sehr befriedigendes Bild des Fluoreszenzvorganges unter Wahrung der Stokesschen Regel und ist in bester Übereinstimmung mit den oben erörterten Versuchsergebnissen, daß alle K-Serienfrequenzen α, β, γ das gleiche Anregungs- bzw. Auslösungspotential V_K haben, das ist jenes Potential, das quantengemäß der Frequenz der Absorptionsbandkante entspricht.

1) Die Anzahl der Serienlinien α, β, γ entspricht der Anzahl der außer dem K-Ring noch befindlichen Ringe: das gäbe nur vier Ringe selbst bei den schweren Atomen. Möglicherweise bleiben aber schwächere Linien unbeobachtet oder ist γ eine noch auflösbare Gruppe. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhange jedenfalls die oben mitgeteilte Tatsache, daß die K-γ-Linie bei Elementen mit $N < 20$ verschwindet und daß bei noch kleinerem N auch K_β verschwindet. Dies deutet Wagner als Folge des wachsenden Atomaufbaues aus einer zunehmenden Zahl von Elektronenringen. In ähnlicher Weise könnte nach Swinne (diese Zeitschr. 17, 481, 1916) die chemische Bindung eines Elements von kleinem N (z. B. *Na*) einen Einfluß auf die peripheren Ringe ausüben, der sich im Ausbleiben entsprechender Röntgenfrequenzen geltend machen würde.

Die Dublettstruktur der L-Serie.

Die L-Serie zeigt zwei (aus dem einfachen Bohrschen Modell nicht erklärbare) sich übergreifende, nahe benachbarte Absorptionsgebiete A_1 und A_2 (vgl. Fig. 17), die ihren Ursprung einem Doppel„ring" L_1 und L_2 verdanken. Wendet man auf jeden Ring die soeben am K-Ring erläuterten Überlegungen an unter Berücksichtigung der von uns gegebenen Linienzuordnung, so erhält man folgende Frequenzgleichungen:

$$L_\gamma - L_\alpha = M_\alpha = K_\gamma - K_\beta \text{ für } A_1 \quad (10)$$

$$L_\delta - L_\beta = M_\alpha \qquad \text{ für } A_2 . \quad (11)$$

Aus $L_\gamma - L_\alpha$ berechnet man bedeutend (13 Proz.) kleinere Werte als M_α; auch finden sich keine anderen passenderen L-Frequenzen. Hier versagt das Kombinationsprinzip vollständig, während z. B. den weiteren Additionssatz aus (8) und (10)

$$K_\gamma = K_\alpha + L_\gamma ,$$

die Erfahrung wiederum gut bestätigt.

Die einfachen Additionssätze gewährleisten daher keineswegs eine gesicherte Serienknüpfung.

Folgende einfache Konsequenz der L-Doppelringnatur hat sich dagegen vorzüglich bestätigt:

$$L_{A2} - L_{A1} = L_\delta - L_\gamma = L_\beta - L_{\alpha'} = \Delta L . \quad (12)$$

Entsprechend dem konstanten Energieunterschied beim Übergang des Elektrons von den äußeren M, N ... usw. Ringen zum L_1- bzw. L_2-Ring erscheint hiernach die L-Serie als eine Dublettserie mit konstantem Schwingungszahlenunterschied. Diese Konsequenz des Modells bewährt sich in voller Schärfe, wie Wagner und besonders Sommerfeld an dem ausgedehnten Frimanschen Material nachwies. Wir nehmen voraus, daß nach der Sommerfeldschen Feinstrukturtheorie (vgl. unten) der schwache Begleiter α' von α begründeterweise das Dublett bildet.

Nach Sommerfeld findet sich dasselbe Dublett ΔL noch weitere zweimal an schwächeren Linien in der L-Serie wieder:

$$\Delta L = L_\eta - L_\varepsilon = L_\vartheta - L_\zeta,$$

so daß folgende fünf Dubletts für die Doppelnatur des L-Ringes zeugen:

$$\Delta L = L_{A2} - L_{A1} = L_\eta - L_\varepsilon = L_\beta - L_{\alpha'} = L_\delta - L_\gamma = L_\vartheta - L_\zeta. \quad (13)$$

Folgende Tabelle Sommerfelds enthält die betreffenden Werte für $\frac{\Delta L}{\nu_0}$ unter Hinzufügung der Werte $A_2 - A_1$.

Tabelle X.

	$\Delta L/\nu_0$					$\Delta A/\nu_0$	
	A_2-A_1	$\beta-\alpha'$	$\delta-\gamma$	$\eta-\varepsilon$	$\vartheta-\zeta$	$\varphi-\upsilon$	$\psi-\chi$
92 *U*	282	278,4	276,5		270,3	65,2	
90 *Th*		249,4	250,1		245,6		
88 *Ra*							
84 *Po*							
83 *Bi*		169,0	169,9	168,7	160,5	39,8	42,4
82 *Pb*	160	158,8	155,4	159,3		37,4	33,9
81 *Tl*		151,4	149,1	152,9	147,1	33,5	43,0
80 *Hg*		140,4	142,4				
79 *Au*	133	133,6	132,8	135,9	134,4	33,6	29,4
78 *Pt*	125	124,9	123,6	125,9	126,7	32,0	31,6
77 *Ir*		119,7	117,2		119,7	25,9	40,6
76 *Os*		111,4	111,7			24,3	
74 *W*		97,7	98,0			21,2	
73 *Ta*		92,5	91,0			20,3	
71 *Cp*		81,9	78,4			17,2	
70 *Ad*		76,2	74,8	79,5	101	16,4	
68 *Er*		66,7	64,7			10,6	
67 *Ho*		62,2	62,8			12,6	
66 *Dy*		57,6	58,1			12,0	
65 *Tb*		53,9	53,5		67	11,5	14,2
64 *Gd*		49,4	48,2		51	11,0	
63 *Eu*		46,2	44,8		48	8,8	
62 *Sa*		43,3	44,6				
60 *Nd*		37,3	38,5			7,7	8,0
59 *Pr*		34,8	35,6				
58 *Ce*		32,2	32,1			7,0	
57 *La*		29,5	29,6			6,0	
56 *Ba*		27,6	27,3			5,4	
55 *Cs*		25,2	25,3			5,1	
53 *J*		21,8	21,4			4,1	
52 *Te*		20,2	19,7			3,7	
51 *Sb*		18,2	18,2			3,2	
50 *Sn*		16,7	16,6			3,1	6,5
49 *In*		15,2	15,1		18,3		
48 *Cd*		13,9	14,3			2,5	
47 *Ag*		12,7	12,8			2,3	
46 *Pd*		11,7	11,5			2,3	

Die Existenz des Doppelrings L_1 und L_2 muß ferner zu einem mit dem L-Dublett gleich großen Dublett auch in der K-Serie Veranlassung geben, sofern sowohl vom L_1- wie L_2-Ring Elektronenübergänge zum K-Ring stattfinden. In der Tat fand W. Kossel[1]) das L-Dublett numerisch wieder bei allen untersuchten Elementen in dem Dublett $\alpha\,\alpha'$ der K-Serie:

$$\Delta L = K_\alpha - K_{\alpha'} \quad (14)$$

Charakteristischer- und folgerichtigerweise liegt der schwache Begleiter $K_{\alpha'}$, der dem schwächeren und frequenteren Absorptionsgebiet A_2 zuzuordnen ist, nach kleineren Frequenzen hin, während umgekehrt in der L-Serie alle A_2 zugeordneten schwächeren Linien des Dubletts die höher frequenten sind.

Nach R. Swinne[1]) wiederholt sich dieser Sachverhalt des Wiederauftretens des L-Dubletts in der K-Serie in dem Wiedererscheinen eines M-Dubletts $\Delta M = M_\beta - M_\alpha = M_\delta - M_\gamma$ in dem Dublett $L_\alpha - L_{\alpha'}$ der L-Serie entsprechend der folgenden Gleichung, die von der Erfahrung[2]) gut bestätigt wird:

$$\Delta M = M_\beta - M_\alpha = M_\delta - M_\gamma = L_\alpha - L_{\alpha'} \quad (15)$$

(δ und γ entsprechen bei Siegbahn δ_2 und γ_2).

Bemerkenswerterweise entdeckte Sommerfeld in der L-Serie noch eine zweite Dublettgruppe mit konstanter Frequenzdifferenz ΔA, für die sich ungefähr ergibt: $\Delta L = 4{,}2\,\Delta A$[3]).

Die A-Gruppe ist aus folgenden Frequenzen aufgebaut (vgl. Tabelle X)

$$\Delta A = L_\varphi - L_\upsilon = L_\psi - L_\chi.$$

In Analogie zum L-Dublett müssen wir zum A-Dublett auch zwei Absorptionsfrequenzen A_{I} und A_{II} erwarten, für welche gilt:

$$\Delta A = L_{A\,\mathrm{II}} - L_{A\,\mathrm{I}} = L_\psi - L_\chi = L_\varphi - L_\upsilon. \quad (16)$$

Wir vermuten, daß A_{I} nahe mit A_2 zusammenfällt und darum nicht beobachtet wird ($A_2 = \vartheta$, $A_{\mathrm{I}} = \chi$), und daß A_{II} die dritte von Broglie beobachtete Kante ist, die wir oben mit A_3 bezeichneten. Dann müßte A_{II} in der Tat unserer bereits oben geäußerten Erwartung gemäß, mit ψ koinzidieren.

Hiernach scheint regelmäßig die letzte Serienlinie mit ihrer Absorptionsgrenze nahe zusammenzufallen:

$$K_\gamma = K_A \qquad L_\chi = L_{A\,\mathrm{I}}$$
$$L_\zeta = L_{A_1} \qquad L_\psi = L_{A\,\mathrm{II}}$$
$$L_\vartheta = L_{A_2}.$$

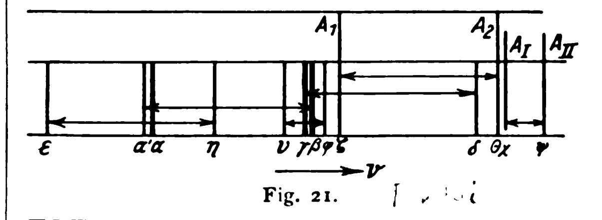


Fig. 21.

1) W. Kossel, Verh. d. D. phys. Ges. **18**, 347, 1916.

1) R. Swinne, diese Zeitschr. **17**, 481, 1916.

2) A. Sommerfeld, Sitz.-Ber. bayr. Ak. S. 145, 1916.

3) Der Faktor 4 bei der zweiquantigen L-Serie dürfte wohl eine einfache theoretische Bedeutung haben.

Für Wismut ist die Lage beider Dublettgruppen im Spektrum auf Fig. 21 dargestellt. Beide Gruppen scheinen durch das ganze System der Elemente in dem sehr feinen Dublett ϑ, χ miteinander fest verknüpft zu sein.

Sämtliche beobachteten Emissions- und Absorptions-Frequenzen der L-Serie sind nach obigem empirisch in den organischen Zusammenhang gebracht, den man auf Grund eines zweifachen Doppel-L-Ringes erwarten muß. In der Sommerfeldschen Feinstrukturtheorie (vgl. unten) wird das größere Dublett ΔL seine überraschende zahlenmäßige Deutung finden, während das kleinere Dublett ΔA vorerst noch einer Erklärung harrt.

(Schluß folgt.)

BESPRECHUNGEN.

Handbuch der Radiologie. Herausgegeben von Erich Marx. gr. 8°. Band IV, enthaltend: W. Wien, Kanalstrahlen. A. Hagenbach, Lichtbogen. O. W. Richardson, Glühelektroden, mit einer Ergänzung des Herausgebers. E. Marx, Flammenleitung. XXIII u. 806 S. mit 422 Figuren und Abbildungen im Text. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1917. Geh. M. 48.—, geb. M. 50.—.

Von dem vorliegenden Handbuch sind bis jetzt erschienen Band II (über radioaktive Substanzen und ihre Strahlungen von Rutherford, Besprechung diese Zeitschrift **15**, 261, 1914) und Band III (enthaltend: Glimmentladung von Gehrcke, Positive Säule von Seeliger und Lichtelektrizität von Hallwachs; Besprechung diese Zeitschrift **17**, 213, 1916). Wie dem Vorwort zu diesem IV. Bande zu entnehmen ist, liegen die Manuskripte zu Band I (Townsend, Ionisation der Gase; Geitel, Radioaktivität der Erde und der Atmosphäre) und auch zu Band V (Bestelmeyer, spezifische Ladung; H. Starke, Absorption und Reflexion der Kathodenstrahlen; E. Marx, Röntgenstrahlen) seit langem bereit und im wesentlichen sogar gesetzt und druckfertig vor. Bedauerlicherweise ist aber das Erscheinen dieser Bände durch die bedeutenden Schwierigkeiten, mit denen zur Zeit solche Verlagsunternehmungen zu kämpfen haben, vorläufig ganz in Frage gestellt. Band I soll erst nach dem Kriege erscheinen. Der Verlag würde sich aber zweifellos gerade jetzt im Kriege mit dem Herausbringen dieser Bände, von denen der erste als theoretisch grundlegender selbstverständlich den Wert der bisher erschienenen erhöhen würde und deren fünfter ebenfalls wichtige Ergänzungen enthält, tatsächlich ein großes Verdienst erwerben, denn wir haben sicher jetzt das größte Interesse daran unsere Wissenschaft — ganz speziell die Physik — auf der Höhe zu halten; und Handbücher wie das vorliegende ersparen dem Forscher Zeit, ein Umstand, dem im Kriege ernste Beachtung geschenkt werden sollte. —

W. Wien behandelt auf etwa 200 Seiten die Kanalstrahlen. Der Abschnitt zeichnet sich, auch in experimenteller Hinsicht, durch eine wohltuende Klarheit der Darstellung aus. Nach einigen einleitenden Kapiteln über die Entstehung der Kanalstrahlen, ihre Beobachtung durch Lichtwirkungen, sowie ihre thermischen, chemischen, ionisierenden und zerstäubenden Erscheinungen werden die Sekundärstrahlen, die lichtelektrischen Kanalstrahlen, und etwas ausführlicher die magnetischen und elektrischen Ablenkungen der Kanalstrahlen behandelt. Dann folgen: Umladung der Strahlen, ihre Theorie, Abhängigkeit vom ruhenden Gase, Absorption und Zerstreuung, Theorie der Kanalstrahlen, Lichtemission, Dopplereffekt, Absolutbetrag der Lichtemission, Erregung des Leuchtens, Geschwindigkeitsabhängigkeit der Lichtemission, elektrische und magnetische Einwirkung auf die Lichtemission, Polarisation und Reflexion und schließlich positive Strahlen an der Anode, sowie elektrische und elektrodynamische Einwirkung auf Spektrallinien. Die Darstellung hat den Vorzug, daß der Autor samt seiner Schule aufs engste mit dem Stoff verwachsen ist und den Gegenstand gewissermaßen als persönliches Erlebnis behandeln kann — daher die Übersichtlichkeit und Betonung der springenden Punkte! Mehr im Sinne eines Handbuches hätte es aber gelegen, die Literatur etwas vollständiger anzugeben. Hinweise auf andere zusammenfassende Bearbeitungen würden manchem Leser von Vorteil sein. Es sei hier nur erinnert an die zahlreichen längeren Publikationen im Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. Zum Beispiel hätte man bei dem kleinen Abschnitt über Zerstäubung durch Kanalstrahlen hinweisen können auf das 1912 erschienene 40 Seiten starke Referat über diesen Gegenstand von Kohlschütter, ferner bei den Untersuchungen von Dechend und Hammer auf deren 1911 im gleichen Jahrbuch publizierte Arbeit über die Kanalstrahlen im elektrischen und magnetischen Felde, ganz zu schweigen von anderen umfangreichen hier interessierenden Aufsätzen (vgl. z. B. Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **3**, 291, 1906 und **4**, 78, 1907: Stand der Forschung über die positiven Strahlen (Kanal- und α-Strahlen, von P. Ewers) und insbesondere den zahlreichen Spektralarbeiten von J. Stark, von denen fast nur die in den Annalen publizierten erwähnt werden. In dieser Hinsicht vorbildlich ist die Lichtelektrizität von Hallwachs im III. Bande. Hätte sich nicht das gleiche System einer übersichtlichen Literaturzusammenstellung bei allen Abteilungen erreichen lassen?

Die Arbeit von Hagenbach über den Lichtbogen (S. 291—435) ist trotz mehrfacher zusammenfassender Bearbeitung des Gegenstandes namentlich deshalb willkommen, weil sie vom Standpunkte des Physikers einen Überblick gibt über ein Gebiet, das in besonderer Weise mit der Technik und Industrie verwachsen ist und doch eine Fülle von Problemen bietet, deren experimentelle wie theoretische Verfolgung in verschiedenster physikalischer Hinsicht erwünscht und aussichtsreich erscheint. — Nach einer historischen Einleitung (Hinweis auf zusammenfassende Darstellungen) gliedert sich das Ganze in die Abschnitte über elektrische, thermische, Strahlungs- und chemische Vorgänge im Lichtbogen. Zunächst wird der Gleichstrombogen behandelt, seine Charakteristiken für Kohle- und Metallelektroden. Eine große Rolle spielt natür-

lich die Ayrtonsche Gleichung. Kapitel II über „Andere Formen des Bogens und Einfluß des Druckes der umgebenden Atmosphäre" bringt unter anderem die von Hagenbach studierten merkwürdigen Bogenformen am Kupferbogen (Fortsetzung dieser Arbeiten für Nickelelektroden siehe W. Frey, Ann. **49**, 1916, erwähnt im Nachtrag.) Kapitel III wendet sich dem Stabilitätsproblem des Bogens zu: Untersuchung von Kaufmann, H. Th. Simon (allerdings sind die Referate der Simonschen Arbeiten nicht besonders gut), Existenzbedingungen der verschiedenen Bogenformen, Betrachtung neuerer Experimente von diesem Gesichtspunkt aus. Dann folgt: Anoden- und Kathodenfall im Bogen, u. a. Sondenmessungen im Metalllichtbogen, Messungen an Metalloxyden. Dem Quecksilberbogen ist selbstverständlich besondere Behandlung zuteil geworden. Temperatureinfluß auf die Charakteristiken, Kathoden- und Anodenfall bei Kohle- und Metallelektroden bilden den Inhalt des V. Kapitels, während das folgende der Ionentheorie des Bogens gewidmet ist. Dann folgen: Transport der Materie im Bogen und elektromotorische Gegenkräfte. Arbeiten von J. Duddell werden diskutiert — Ionentheorie von Anoden- und Kathodenfall.

Die Behandlung des Wechselstrombogens bringt unter anderem die Simonsche Bogentheorie: statische und dynamische Charakteristik, Lichtbogenhysteresis, ferner experimentelle Arbeiten über Wiederzündungszeiten, Diskussion der Simonschen Gleichung des Wechselstrombogens — Einfluß des umgebenden Gases, Hysteresis bei verschiedenen Metallen. Es liegt hier eine große Anzahl von Problemen vor und man befindet sich hier gerade in dem Stadium der Auflösung recht komplizierter Vorgänge in definierten physikalischen Einzelaufgaben. — Kapitel X bringt den Fall ungleicher Elektroden, Gleichrichterwirkung. Sodann: der tönende Lichtbogen — die bekannten Arbeiten von H. Th. Simon und seinen Schülern — Schwingungen erster, zweiter, dritter Art. Von Interesse sind auch die den thermischen Problemen gewidmeten Abschnitte. Auch die Strahlung des Bogens wird ausführlich behandelt. Zum Schluß gibt Hagenbach noch einen Nachtrag (März 1916), in dem auch die Arbeiten von Rukop und Zenneck, Grotrian und die „flüssige Kohle" von Lummer besprochen sind. —

Besondere Beachtung verdient der Artikel über Glühelektroden von Richardson (etwa 150 Seiten). Bei der im Laufe der letzten Jahre stattgehabten regen Forschung — und Diskussion — auf diesem für die Theorie der Materie so überaus wichtigen Gebiete ist eine Darstellung von so berufener Seite sehr willkommen. Die Stoffeinteilung ist folgende: I. Allgemeiner Charakter der Phänomene, II. Emission negativer Ionen durch heiße Körper, die kinetische Energie der emittierten Elektronen; theoretische Betrachtungen, III. Die durch Metalle hervorgerufene positive Ionisation, IV. Ionisation durch heiße Salze. Es folgt ein von Herrn Marx verfaßter Ergänzungsabschnitt in den neueren Versuchen über Elektronenemission heißer Körper. Es kann hier nicht näher auf diesen wertvollen Beitrag eingegangen werden. In gewissem Sinne ist die Abhandlung in Parallele zu stellen mit dem Artikel von Hallwachs über die Lichtelektrizität (Band III). Hier wie dort hat sich die Forschung hindurchgearbeitet durch eine Fülle von Erscheinungen, die den wahren Effekt verschleierten, die eine erbitterte Forschung für und wider zeitigten und schließlich doch dem Instinkt des Entdeckers recht gaben: Lichtelektrische Elektronen an „sauberen" Oberflächen in einem Falle[1]) — rein thermisch emittierte Elektronen im anderen. Es sei hier speziell verwiesen auf S. 591. Der Richardsoneffekt im extremen (Lilienfeldschen!) Vakuum besteht zu Recht. Doch ist nicht zu vergessen, daß auch die Arbeiten (Fredenhagen), die das Gegenteil beweisen sollten, trotz der Widerlegung, die sie erfuhren, wesentlich beigetragen haben zur Vertiefung der Kenntnis des ganzen Gebiets. Bezüglich des ergänzenden Nachtrags sei auch auf die hier zur Sprache gebrachten Probleme der „positiven Elektronen" (Lilienfeld) hingewiesen, sowie auf die glänzende Untersuchung von Germershausen über den Richardsoneffekt an der CaO-Elektrode.

Die Lektüre dieses Richardsonschen Beitrages muß Interessenten warm empfohlen werden. —

Den Schluß des vorliegenden Bandes (Seite 603 bis 782) bildet die von Marx geschriebene „Flammenleitung". Ich darf mich hier auf den Hinweis beschränken, daß es sich hier um die hochinteressante und wertvolle Bearbeitung eines Gebietes handelt, um das der Verfasser grundlegende Verdienste hat. Auch sei aufmerksam gemacht auf die neue Arbeit von Marx über die lichtelektrische Theorie der Flammenleitung (Ann. **50**). —

Möge es Herrn Marx gelingen, die noch fehlenden Bände recht bald herauszubringen! H. Hörig.

1) Allerdings sind hierüber die Ansichten noch geteilt.

Prace matematyczno-fizyczne T. XXV. Warszawa 1913. (Mathematisch-physikalische Abhandlungen Bd. XXV. Warschau 1913.) Witkowski-Festschrift II. Teil.

Der erste Teil dieser Festschrift, welcher neun Abhandlungen umfaßte, ist seinerzeit in dieser Zeitschr. **14**, 909, 1913, besprochen worden. Der damals schon angekündigte II. Teil, dessen Drucklegung infolge der Kriegsereignisse verzögert wurde, erschien erst im Jahre 1915. Er bringt 7 Abhandlungen verschiedenen Inhalts.

Jan Danyer † (im Kriege gefallen) berichtet über seine experimentellen Studien der β-Strahlen radioaktiver Elemente der Ra-Reihe. Die Resultate dieser wichtigen Untersuchung magnetischer Spektren der β-Strahlen sind den deutschen Fachgenossen aus früheren Publikationen des Verfassers (C. R. **153** (1911), **154** (1912); Le Radium **9** (1912), **10** (1913); Journ. de Phys. **3** (1913)) und aus dem Berichte von O. v. Baeyer im Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik (**11**, 66, 1915) genügend bekannt.

Mit dem Problem der Ionisation und Absorption der Rückstoßatome in Gasen beschäftigt sich L. Wertenstein (Warschau) in der Abhandlung „Über den radioaktiven Rückstoß". Der wichtigste Teil der vom Verfasser erzielten experimentellen Forschungsergebnisse auf diesem Gebiete ist seinen früheren Publikationen (seit 1910 im Le Radium) entnommen. Sie führen zum Schluß, daß die Rückstoßatome sich in bezug auf Ionisation und Absorption ähnlich wie α-Teilchen verhalten und dieselben physikalischen Gesetzmäßigkeiten erkennen lassen. Die beobachteten Unterschiede können auf größere Masse und kleinere Geschwindigkeiten der Rückstoßatome zurückgeführt werden.

M. Wolfke (Zürich) gibt in der Abhandlung „Über die Entstehung der optischen Bilder im Mikroskop" eine kurze zusammenfassende Darstellung der grundlegenden Abbéschen Lehre von der Bildentstehung samt den vom Verfasser hinzugefügten Beiträgen. Die letzteren sind dem deutschen Leserkreise aus den Ann. d. Phys. **34** (1911), **37** (1912), **38** (1912), **39** (1912), **40** (1913) bekannt.

In einer längeren (50 S.) Monographie behandelt Jan Kroo (Krakau) „die Prinzipien der statistischen Mechanik". Die systematisch geordnete Darstellung umfaßt in sechs Abschnitten folgenden Inhalt: In der Einleitung wird die Aufgabe der statistischen Mechanik kurz besprochen und eine Übersicht über den zu behandelnden Stoff geboten. Im ersten Abschnitt (betitelt „Die Gesamtheiten der statistischen Mechanik") werden die dynamischen Voraussetzungen und die Grundbegriffe der statistischen Phasengesamtheit, der virtuellen Gesamtheit und des statistischen Gleichgewichts erörtert. Weiter folgen die Abschnitte: Über die Zeitgesamtheit (II), Über die Methode der mikrokanonischen Gesamtheiten (III), Die kanonischen Gesamtheiten (IV), Molekulare Systeme (V), Nichtstationäre Gesamtheiten (VI). Die Abhandlung soll zur Einführung in das Studium des Gegenstandes dienen, kann jedoch wegen gedrängter Darstellungsweise nur von gut vorbereiteten Lesern mit Vorteil benutzt werden.

Der Inhalt der nächstfolgenden Abhandlung von St. Loria (Krakau): Über Refraktion und Dispersion des Lichtes in Gasen ist im wesentlichen in der Monographie des Verfassers „Lichtbrechung in Gasen als physikalisches und chemisches Problem" (Sammlung Vieweg Heft 4) enthalten.

Witold Rybczyński (Lemberg) befaßt sich mit den Theorien der Entstehung der Röntgenstrahlen. Die Abhandlung ist im August 1913 geschrieben worden und spiegelt demnach den damaligen Stand des Problems ab.

Nahezu den vierten Teil des ganzen Bandes umfaßt die Monographie von M. Smoluchowski (Krakau) „Über thermodynamische Fluktuationen und Brownsche Bewegungen". Der Verfasser gibt eine systematisch geordnete Darstellung der Resultate seiner seit dem Jahre 1904 konsequent geführten theoretischen Untersuchungen und ergänzt diese Ausführungen durch einen Vergleich der theoretischen Formeln mit den von verschiedenen Beobachtern gesammelten Ergebnissen experimenteller Forschung. Einen Begriff von dem Inhalt gewinnt man aus der Zusammenstellung der Überschriften der einzelnen Abschnitte: I. Dichteschwankungen. II. Brownsche Bewegungen. III. Verteilung der Teilchen einer Emulsion im Gravitationsfelde. IV. Allgemeine Theorie der Fluktuationen um die Gleichgewichtslage. V. Allgemeine Theorie der Brownschen Bewegungen (Veränderlichkeit der Fluktuationen). VI. Die Gültigkeitsgrenzen der thermodynamischen Grundsätze. Die Monographie eignet sich vorzüglich zur Einführung in diesen modernen Zweig der kinetischen Theorie und beleuchtet in sehr interessanter Weise das Verhältnis der Atomistik zur Thermodynamik. Heute, nachdem der Verfasser durch allzufrühen Tod, in den besten Mannesjahren der Wissenschaft entrissen worden ist († am 5. IX. 1917), wird diese Abhandlung als letztes Autoreferat seiner überaus erfolgreichen Lebensarbeit besonders wichtig bleiben. Sie wird auch sicher jedem Forscher, der die letzten Errungenschaften der theoretischen Atomistik kennen lernen will, als zuverlässiger und anregender Wegweiser unentbehrlich sein.

St. Loria.

W. K. Clifford, Der Sinn der exakten Wissenschaft, in gemeinverständlicher Form dargestellt. Deutsche Übersetzung nach der vierten Auflage des englischen Originals von Dr. H. Kleinpeter. VIII u. 282 S. mit 100 Fig. Leipzig, J. A. Barth. 1913. Geh. M. 6.—, geb. M. 6.75.

Der Inhalt des Buches geht am besten aus seinem früheren Titel hervor, der lautet: „Die ersten Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, erörtert in einer dem Nichtmathematiker verständlichen Weise". Das Buch ist nicht ohne Nutzen für den Mathematiker an Mittelschulen. Für den Physiker haben nur die letzten Abschnitte beschränktes Interesse. Der Titel der vorliegenden deutschen Übersetzung — eine Übertragung des englischen Titels: „The Common Sense of Exact Sciences", — muß als irreführend bezeichnet werden!

Karl Bergwitz.

Hermann v. Helmholtz, Zwei Vorträge über Goethe. 8⁰. 64 S. Feldausgabe. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn. 1917. M. 0.80.

Die Verlagsbuchhandlung von Vieweg leistet einer Anregung von König Folge, indem sie einige Vorträge von Helmholtz in Einzelheften herausgibt und so dem, in heutiger Zeit gesteigerten Bedürfnis des gebildeten Publikums nach gehaltvoller geistiger Nahrung entgegenkommt. Die Vorträge von Helmholtz wirken mit ihrem Gedankenreichtum und ihrer klaren Sprache nicht nur auf den Naturwissenschaftler anregend, und so ist es dankbar zu begrüßen, daß sie in dieser Form jedem, der Interesse daran hat, leicht zugänglich gemacht werden, so daß er nicht erst in großen wissenschaftlichen Werken oder dicken Sammlungen danach zu suchen braucht. Namentlich unseren Feldgrauen wird ja dieses letztere meist unmöglich sein. Das uns vorliegende Heft enthält den Königsberger Vortrag vom Jahre 1853 über „Goethes naturwissenschaftliche Arbeiten", sowie die im Jahre 1892 in Weimar bei der Versammlung der Goethe-Gesellschaft gehaltene Rede über „Goethes Vorahnung kommender naturwissenschaftlicher Ideen". Diese beiden Reden, deren Inhalt sich so vielfach berührt, wird man ja sonst nicht so leicht zusammen zu lesen bekommen, und es muß als sehr glücklich bezeichnet werden, daß sie hier in einem Heft vereinigt sind. Ein Geleitwort von Walter König eröffnet die Sammlung.

V. Pieck.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Wien Dr. Ernst Philippi und Dr. Ernst Späth für Chemie.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität München Dr. Heinrich Wieland zum ord. Professor der organischen Chemie an der Technischen Hochschule München, der a. o. Professor und Observator der Sternwarte an der Universität Bonn Dr. Karl Mönnichmeyer zum ord. Honorarprofessor für Astronomie ebendaselbst, der Privatdozent an der Universität Leipzig Dr. Robert Wenger zum a. o. Professor für Geophysik und Direktor des Geophysikalischen Instituts daselbst.

Verliehen: Dem Privatdozenten der Physik an der Universität Halle Dr. Albert Wigand der Titel Professor.

Gestorben: Der Mathematiker Hans Strindberg in Helsingfors (ein Sohn des schwedischen Dichters August Strindberg), der frühere Privatdozent für physikalische Chemie an der Universität Berlin Dr. Julius Sand (zu Sonthofen im Allgäu), der Direktor der Farbwerke Kalle in Biebrich Dr. Eugen Fischer.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 20. | 15. Oktober 1917.
Redaktionsschluß für No. 22 am 25. Oktober 1917. | 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Notizen zum Studium der Augenbewegungen.

Von Otto Grotrian.

Sinn der Blickbewegung beim Verfolgen von Kurven.

Man betrachte die Zeichnung eines einfachen Kreises, s. Fig. 1, und verfolge bei stillgehaltenem Kopfe die Peripherie desselben mit einem Auge oder beiden. Der Blick kann dabei die Kreislinie sowohl rechts wie links herum durchlaufen. Dabei finden die meisten Personen bei genügender, aber unbefangener Aufmerksamkeit,

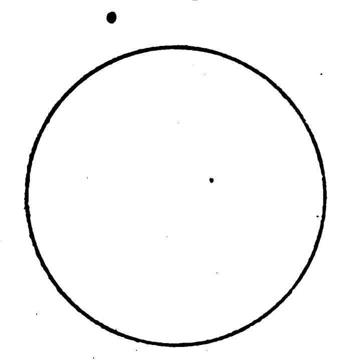


Fig. 1.

daß ihnen das Verfolgen der Kreislinie in einem bestimmten Sinne, sei es links oder rechts herum, bequemer ist als bei entgegengesetzter Blickwanderung. Für verhältnismäßig wenige Menschen ist es gleichgültig, in welchem Sinne ihr Blick die Kreislinie durchläuft.

Mir selbst erscheint es leichter, die Blickwanderung links herum, also gegen die Drehung des Uhrzeigers, auszuführen.

Ist die von den Augen verfolgte Kurve kein Kreis, so ist für mich die bequemere Blickwanderung allgemeiner diejenige, bei welcher die konkave Seite der betreffenden Kurve links liegt. Zur Definition von „links" stelle ich mir dabei vor, daß mein Körper die Kurve entlang schreitet im Sinne der von mir bevorzugten Blickbewegung. Mein linker Arm liegt dann auf der konkaven Seite der Kurve. Durchschreite ich demnach den einfachen Kreis im Sinne links herum, dann liegt dabei der linke Arm auf der inneren, also konkaven Seite der Kreislinie.

Augen mit derartig bevorzugter Blickbewegung kann man als „linksläufig" bezeichnen, während im entgegengesetzten Falle der Ausdruck „rechtsläufig" am Platze ist.

Der Unterschied in der Augenanstrengung bei Links- und Rechtslauf ist nur gering, und die Erkenntnis, ob die Augen links- oder rechtsläufig sind, erfordert bei einem Kreise aufmerksame Beobachtung. Man kann aber die Herbeiführung der richtigen Erkenntnis dadurch erleichtern, daß man nicht einen einzigen Kreis betrachtet, bei welchem der Sinn der Blickbewegung schroff gewechselt werden muß, sondern zwei oder mehrere Kurven, die von gleicher oder nahezu gleicher Größe sind. Dieselben sind miteinander durch einfache Linien derartig zu verbinden, daß beim Verfolgen des gesamten Linienzuges, also der Kurven und ihrer Verbindungen, die nebeneinander liegenden Kurven im entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden. Die verbindenden Linien geben den Augen die nötige Direktive beim Verfolgen der ganzen Figur und wirken beim Übergange von einer zur benachbarten Kurve einem Abschweifen des Blickes auf die übrige Zeichenfläche entgegen. Gelegentlich können die verbindenden Linien auch durch Teile einer geometrischen Gesamtfigur dargestellt werden. Im folgenden mag auf einige genanntem Zweck dienende Zeichnungen hingewiesen werden.

Fig. 2 stellt zwei konzentrische, der Größe nach wenig verschiedene Kreise dar, bei denen die Umfänge nicht vollständig in sich zurücklaufen, sondern an einander nahegelegenen Stellen unterbrochen sind. Die Enden der äußeren Kreislinien sind mit den radial gegenüberliegenden Enden der inneren verbunden. Man durchlaufe mit dem Blick den so in sich geschlossenen Linienzug, etwa den äußeren Kreis links herum. Dann wird der innere rechts herum durchlaufen,

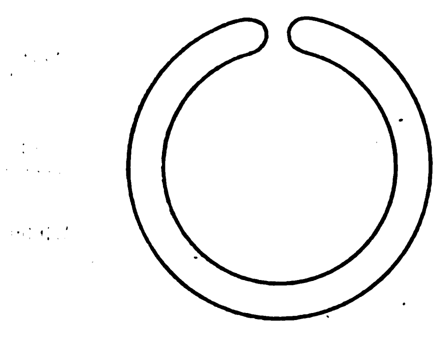


Fig. 2.

und man kann, ohne mit den Augen abzuschweifen, die Blickwanderung beliebig oft wiederholen. Dabei wird man bald zu einem Urteil darüber gelangen, ob die Augen links- oder rechtsläufig sind.

Das gleiche kann durch die Kurve der Fig. 3 erreicht werden. Dieselbe stellt genähert

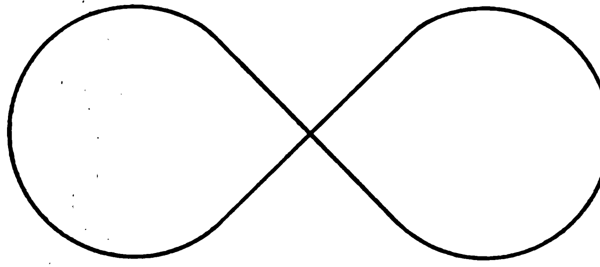


Fig. 3.

eine Lemniskate dar. Man lasse z. B. das Auge von dem Doppelpunkte aus nach links oben wandern und durchlaufe die Doppelschleife, bis man von rechts unten her den Doppelpunkt zum dritten Male erreicht. Bei der Blickwanderung, die beliebig oft ohne Abschweifung des Auges wiederholt werden kann, wird die linke Schleife links, die andere rechts herum durchlaufen. Das Durchlaufen der linken Schleife erscheint dabei meinem Auge bequemer als dasjenige der rechten. Das Umgekehrte findet statt, wenn ich die Blickwanderung vom Doppelpunkte aus nach links unten hin beginne.

Fig. 4 stellt zwei gleiche entgegengesetzt gewundene Spiralen dar, bei denen je ein äußeres Ende mit dem inneren Ende der anderen Spirale durch eine gerade Linie verbunden ist. Läßt man vom Kreuzungspunkte der Geraden aus den Blick nach links oben wandern, so wird nach vollständigem Verfolgen des Linienzuges die linke Spirale im Sinne links herum von außen nach innen, die rechte Spirale ebenfalls von außen nach innen im Sinne rechts herum durchwandert. Ohne den Linienzug zu verlassen, kann der Blick die Wanderung beliebig oft wiederholen. Das Verfolgen der linken Spirale links herum erscheint meinem Auge leichter als die Blickwanderung über die rechte Spirale. Die Form der Doppelspirale besitzt gegenüber derjenigen der Lemniskate den Vorzug, daß das Auge bei jener auf jeder Hälfte der Figur länger zu verweilen hat als bei dieser, wodurch der Einfluß des Umlaufsinnes verstärkt werden muß.

Nebenbei erscheint noch folgendes bemerkenswert. In Fig. 5 ist eine andere Verbindung der Spiralen gezeichnet. Hier sind die äußeren Enden derselben miteinander verbunden, ebenso die inneren. Durchläuft man den ganzen Linienzug, so werden beide Spiralen in gleichem Sinne durchlaufen, aber die eine von außen nach innen, die andere von innen nach außen. Soweit das wenig umfangreiche Beobachtungsmaterial Schlüsse zuläßt, scheint es, daß die Fälle, in denen das leichtere Durchwandern von außen nach innen und andererseits dasjenige von innen nach außen stattfindet, ungefähr gleich häufig vorkommen. Von 18 darüber befragten Personen erklärten je 9, daß die eine

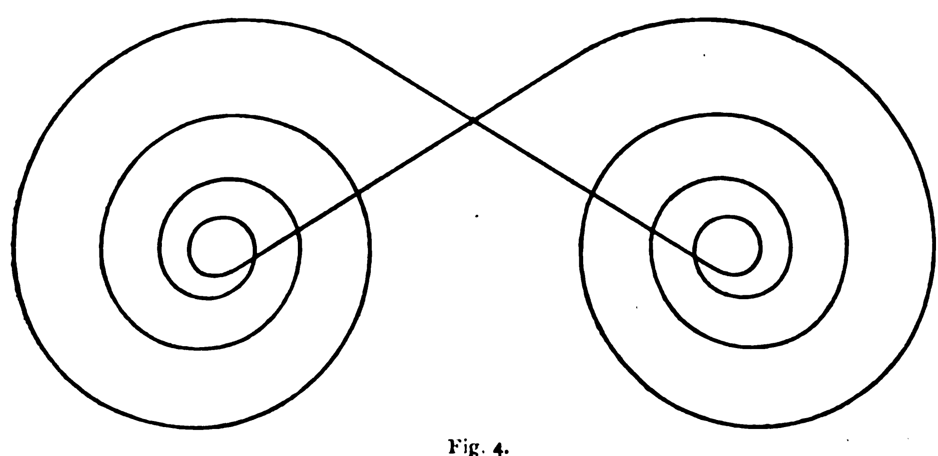


Fig. 4.

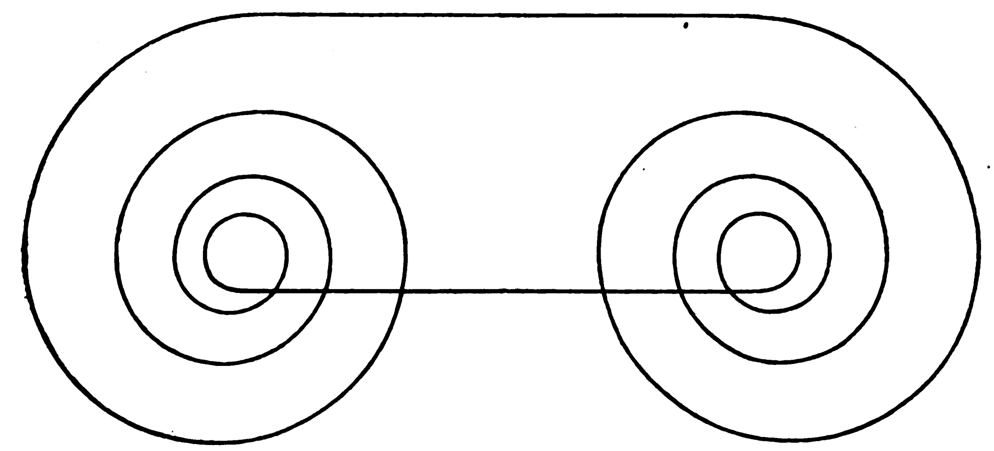


Fig. 5.

oder die andere Wanderung für sie die bequemere sei.

Durchwandert mein linksläufiges Auge die Sinuslinie in Fig. 6 von links nach rechts, dann ist für mich das Umwandern der Wellenberge weniger bequem als dasjenige der Wellentäler. Bei umgekehrter Wanderung von rechts nach links werden von mir die Wellenberge leichter als die Wellentäler umlaufen.

Bei 30 unter Vorlegung der einfachen Kreisfigur befragten Personen ergab sich, daß die Augen bei 9 links-, bei 19 rechtsläufig waren. Von 2 Personen wurde kein bestimmter Sinn der Blickwanderung bevorzugt. Hiernach ist einstweilen anzunehmen, daß rechtsläufige Augen in etwas größerer Zahl anzutreffen sind als linksläufige. Dagegen scheinen Augen ohne bestimmten Wanderungssinn verhältnismäßig selten vorzukommen.

Die Erklärung der beschriebenen Erscheinungen ist meiner Ansicht nach dadurch gegeben, daß vom Auge derjenige Sinn der Blickbewegung als der leichtere empfunden wird, welcher mit der geringeren Anstrengung der Augenmuskeln[1]) verbunden ist. Da die letzteren bei den verschiedenen Individuen nicht identisch sind, wird damit auch erklärlich, daß die Augen verschiedener Personen sich als links- oder rechtsläufig erweisen oder auch keinen bestimmten Wanderungssinn bevorzugen. Die betreffende Eigenschaft dürfte durch Gewohnheit und Beschäftigung zum mindesten stark beeinflußt werden.

Weg der Blickbewegung beim Übergang zwischen zwei Punkten.

Fig. 7 stellt zwei Punkte dar, die durch eine leicht gestrichelte Gerade verbunden sind. Der Punkt links werde durch *l*, derjenige rechts

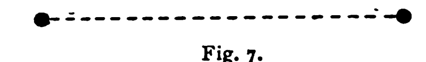


Fig. 7.

durch *r* bezeichnet. Bei horizontaler Lage von *rl* fixiere man *r* kurze Zeit mit beiden Augen und hierauf *l* jedoch ohne die Absicht, einen bestimmten Blickweg zwischen *r* und *l* zu wählen.

Beim Wechsel der Blickrichtung, bei welchem der Kopf nicht bewegt wird, finden die verschiedenen Beobachter, daß entweder ihr Blick

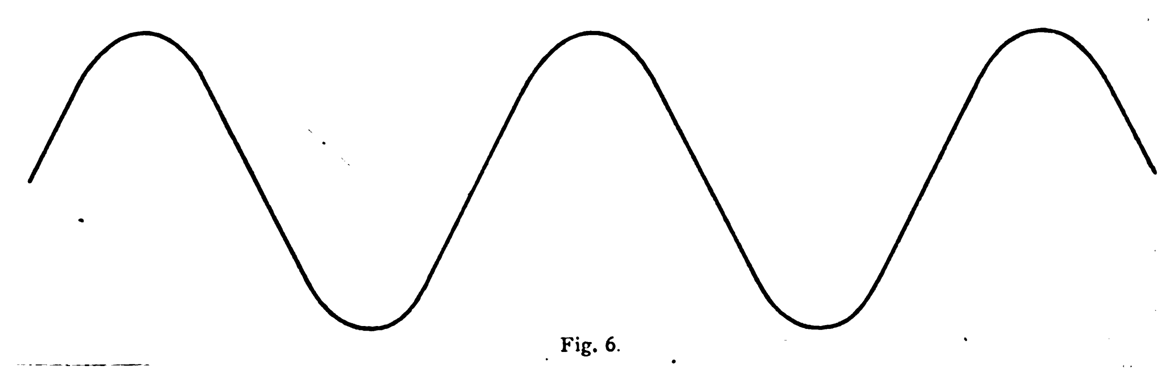


Fig. 6.

1) S. hierzu H. von Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik (2. Aufl.), S. 644 u. 669.

der Geraden rl folgt oder einem flachen Bogen, der über oder unter rl liegt. Machen die Augen den Rückweg von l nach r, dann sind dieselben drei Fälle möglich. Hin- und Rückweg können dabei gleich oder auch voneinander verschieden sein. Für den Gesamtweg $rllr$ ergeben sich daher 9 mögliche Fälle, die in Fig. 8 dargestellt und mit $a \ldots i$ bezeichnet sind.

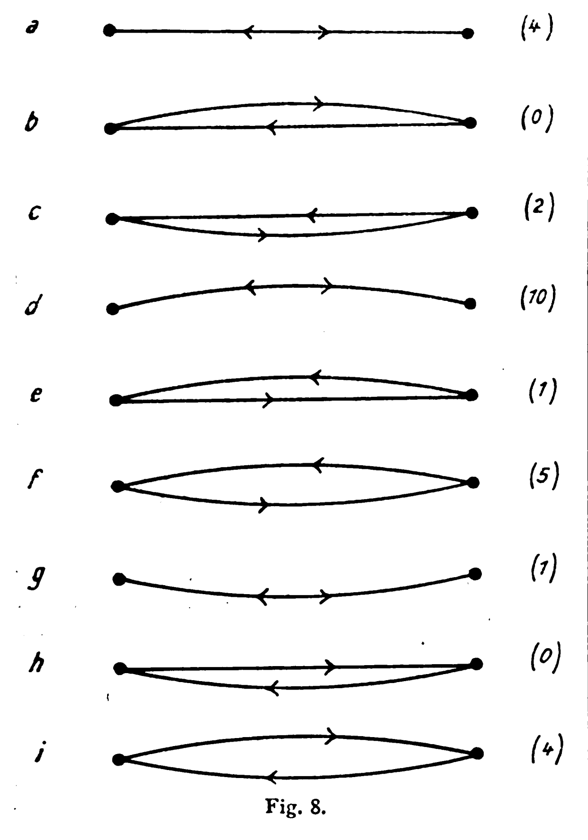


Fig. 8.

Von 27 Personen wurden Blickwege gewählt, deren Zahl in der Figur durch die rechts beigesetzten Ziffern angegeben ist. Zufolge der in nur mäßiger Zahl vorliegenden Beobachtungen würde nach d der Hin- und Rückweg über den oberen Bogen am häufigsten gewählt werden, während nach a, f und i Hin- und Rückweg auf der Geraden, auf oberen und unteren Bogen sowie umgekehrt auf unteren und oberen weniger oft in Frage kommen. Die Fälle c, c und g habe ich verhältnismäßig selten, b und h überhaupt nicht feststellen können. Wahrscheinlich kommen auch Augen für letztere Wege vor.

Zur Erklärung der verschiedenen Blickwege bei verschiedenen Individuen kann auch hier das Prinzip der geringsten Muskelanstrengung (s. oben) angewandt werden.

Die Feststellung des Weges, welchen ungefähr der Blick zwischen rl oder lr wählt, wird nicht unerheblich erleichtert, wenn man die Zeichenfläche um r und l mit willkürlichen Schnörkeln versieht, wie das Fig. 9 zur Darstellung bringt.

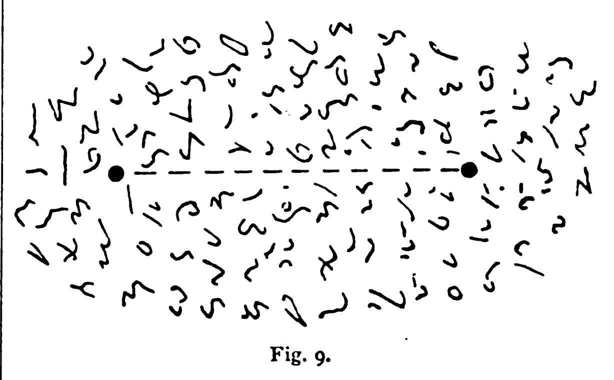


Fig. 9.

Dieselben wirken als flüchtig gestreifte Merksteine in unmittelbarer Nähe des Blickweges.

Aachen, August 1917.

(Eingegangen 13. August 1917.)

Über die zur Erkennung schwacher Doppelbrechung dienenden empfindlichen Farben.

Von Alfred Wenzel.

Die Koenigsbergerschen Methoden zur Erkennung und Messung optischer Anisotropie undurchsichtiger Substanzen beruhen bekanntlich auf der Beobachtung entweder der Savartschen Streifen oder der empfindlichen Farbe in einer Biot-Kleinschen Quarzplatte. Bei anderen Doppelbrechungserscheinungen wird an ihrer Stelle ein Gipsblatt oder eine Quarzplatte vom Rot erster Ordnung, dessen große Empfindlichkeit da hinreichend bekannt ist, wo die Biot-Kleinsche Quarzplatte oft versagt. So gelingt es leicht, die durch Fingerdruck in einem Objektträger hervorgerufene Phasenverschiebung mittels des genannten Gipsblattes nachzuweisen, sowie auch geringe Gangunterschiede an sehr dünnen Schliffen schwach doppelbrechender Mineralien zu erkennen, während hierbei die Biot-Kleinsche Platte nur sehr schwache Andeutungen eines Farbenumschlages wahrnehmen läßt. Andererseits zeigt der Farbton der Quarzplatte hohe Empfindlichkeit bei den im reflektierten Lichte beobachteten anisotropen, undurchsichtigen Medien, wobei das gewöhnliche Gipsblatt wieder versagt. Hierauf hat schon u. a. E. A. Wülfing[1]) hingewiesen, der auch durch eine Untersuchung der Intensitätsverhältnisse der in den empfindlichen Farben enthaltenen Spektralfarbenanteile

1) A. Wülfing, Heidelb. Ber. 1910, 24. Abh.



diesen Unterschied der beiden Hilfsmittel zu erklären versuchte. Nach Wülfing beruht er darauf, daß jede Farbe gegen die Art der Phasendifferenz empfindlich ist, der sie ihr Entstehen verdankt, wobei er darauf hinweist, daß bei der Phasenverschiebung an anisotropen, undurchsichtigen Medien infolge der verschiedenen Amplituden der beiden reflektierten Wellen auch eine Drehung der Polarisationsebene auftritt.

Im folgenden soll die Empfindlichkeit dieser Farben sowie ihr Unterschied nach einer anderen Methode quantitativ untersucht werden.

I. Über die Methode der Farbenberechnung[1]).

Die Erweiterung der Young-Helmholtzschen Theorie der Gesichtsempfindungen durch A. Koenig und C. Dieterici[2]) ermöglichte zunächst eine vergleichende quantitative Untersuchung der Reihen von Interferenzfarben, die an vier Gruppen von Apophylliten im polarisierten Licht auftreten[3]). Ferner wurden nach demselben Verfahren, das in ähnlicher Form zuerst von B. Trolle[4]) angewendet wurde, die Interferenzfarben untersucht, die an einem Quarzkeil mit einer Fläche parallel zur optischen Achse und an einem solchen mit einer Fläche senkrecht zur optischen Achse im parallelstrahligen Licht zwischen gekreuzten Nicols beobachtet werden[5]). Zur Erläuterung der hierbei verwendeten Methode sei hier folgendes angeführt.

A. Koenig und C. Dieterici bestimmten experimentell die Intensitäten r_λ, g_λ, b_λ der Grundempfindungen für mehrere Lichtarten des Spektrums und stellten sie als Funktion der Wellenlänge für normale trichromatische Farbensysteme dar. In der bei obigen Untersuchungen benutzten graphischen Darstellung wurde nach dem Vorbilde von B. Trolle der Maßstab so gewählt, daß

$$\int r_\lambda \cdot d\lambda = \int g_\lambda \cdot d\lambda = \int b_\lambda \cdot d\lambda = 1\,. \qquad (1)$$

Jede Spektralfarbe ruft drei voneinander unabhängige Grundempfindungen r_λ, g_λ, b_λ hervor, von denen der Quotient $(b_\lambda - g_\lambda):(g_\lambda - r_\lambda)$ für jede Wellenlänge λ eine bestimmte Zahl liefert.

Nach A. Koenig kann nun jede Farbe aufgefaßt werden als zusammengesetzt aus Weiß, das durch gleich starke Erregung der drei Grundempfindungen im Auge hervorgerufen wird, und aus einer beigemischten Spektralfarbe $\mathfrak{F}$ oder eine der Purpurfarben, die den grünen Spektralfarben komplementär sind. Die Farbe wird in die darin enthaltenen Mengen Grundrot R, Grundgrün G und Grundblau B zerlegt. Eine Farbe ist also charakterisiert durch die zu Weiß hinzutretende Spektralfarbe, die dieselbe Empfindung wie jene Farbe hervorruft. Das ist der Fall, wenn

$$(B - G):(G - R) = (b_\lambda - g_\lambda):(g_\lambda - r_\lambda) \qquad (2)$$

und die Reihenfolge der Grundempfindungen R, G, B und r_λ, g_λ, b_λ ihrer Größe nach die gleiche ist. Andernfalls ergibt sich aus diesem Quotienten die zur Spektralfarbe von der Wellenlänge λ komplementäre Farbe. Um auch für die im Spektrum nicht vorhandenen Purpurfarben numerische Größen angeben zu können, wurden in vorliegender Abhandlung unter $\mathfrak{F}$ die Wellenlängen der diesen komplementären grünen Spektralfarben gesetzt, die zum Unterschiede von den Wellenlängen der grünen Farben selbst in Klammern geschlossen wurden.

Wird die Farbe nun spektral zerlegt, so sind die Intensitäten R_λ, G_λ, B_λ der Grundempfindungen in den Spektralanteilen durch deren Intensitäten I_λ gegeben durch

$$R_\lambda = r_\lambda \cdot I_\lambda,\quad B_\lambda = b_\lambda \cdot I_\lambda \quad \text{und} \quad G_\lambda = g_\lambda \cdot I_\lambda. \qquad (3)$$

Hieraus ergeben sich:

$$R = \int r_\lambda I_\lambda d\lambda,\quad B = \int b_\lambda I_\lambda d\lambda \quad \text{und} \quad G = \int g_\lambda I_\lambda d\lambda. \qquad (4)$$

Bei Interferenzerscheinungen an vollkommen durchsichtigen Kristallen im polarisierten Licht ist I_λ mittels bekannter kristalloptischer Formeln zu finden, die nur die optischen Konstanten der vorliegenden Kristallart enthalten. Mit Hilfe von I_λ werden dann die Intensitäten R, G, B der Grundempfindungen für jede Interferenzfarbe numerisch berechnet.

Zur vollständigen Charakterisierung einer Farbe gehören aber noch die Angaben über ihren Helligkeitsgrad $\mathfrak{H}$ und den Sättigungsgrad $\mathfrak{S}$.

Nach obigem ergibt sich die Helligkeit $\mathfrak{H}_\lambda$ jedes Spektralanteils von der Intensität I_λ aus: $\mathfrak{H}_\lambda = h_\lambda I_\lambda$ und daraus die Gesamthelligkeit der Farbe

$$\mathfrak{H} = \int h_\lambda I_\lambda d\lambda, \qquad (5)$$

worin h_λ aus den Werten zu entnehmen ist, die A. Koenig[1]) für helles Licht fand, und die so umgerechnet sind, daß

---

1) Th. Liebisch u. A. Wenzel, Berl. Ber. 1917, 1—22.

2) A. Koenig u. C. Dieterici, Berl. Ber. 1886, 805—829; Zeitschr. f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorgane 4, 241—347, 1892.

3) A. Wenzel, Diss., Berlin 1916 und N. Jahrb. f. Min., Beil. Bd. 1917.

4) B. Trolle, diese Zeitschr. 7, 700—710, 1906.

5) Th. Liebisch u. A. Wenzel, a. a. O.

1) A. Koenig, Helmholtz-Festschrift, Hamburg 1891, 309—388; Ges. Abh. 1903, 144—213.

$$h = \sum_{400}^{700} h_\lambda \Delta\lambda = 1. \tag{6}$$

Andererseits läßt sich $\mathfrak{H}$ aus den Werten R, G, B der Grundempfindungen linear zusammensetzen mit Koeffizienten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, die von λ unabhängig sind:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{r}R + \mathfrak{g}G + \mathfrak{b}B. \tag{7}$$

Aus nach (5) für einen Quarzkeil berechneten Werten ergaben sich:

$$\mathfrak{r} = 0{,}822, \quad \mathfrak{g} = 0{,}161 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = 0{,}017.$$

Soll die Helligkeit $\mathfrak{H}$ in Prozenten der Helligkeit des einfallenden Lichtes angegeben werden, so ist:

$$\mathfrak{H} = 82{,}2\,R + 16{,}1\,G + 1{,}7\,B. \tag{8}$$

Die Menge Weiß einer Farbe ist bestimmt durch die dreifache kleinste Grundempfindung, die Gesamtempfindung durch: $R + G + B$ und die reine Farbenempfindung durch: $R + G + B$ — 3fache kleinste Grundempfindung. Daher kann die Sättigung $\mathfrak{S}$ einer Farbe bestimmt werden durch das Verhältnis der reinen Farbenempfindung zur Gesamtempfindung, oder:

$$\mathfrak{S} = \frac{R + G + B - 3\text{fache kleinste Grundempf.}}{R + G + B}. \tag{9}$$

Nach den Formeln (4), (5) und (8) sind die Farbtöne $\mathfrak{F}$, Helligkeiten $\mathfrak{H}$ und Sättigungsgrade $\mathfrak{S}$ der Interferenzfarbenfolgen berechnet, die in einem Quarzkeil vom Keilwinkel $\alpha = 1^0 30'$ mit einer zur optischen Achse parallelen Eintrittsfläche im parallelstrahligen Licht in Diagonalstellung zwischen gekreuzten Nicols sowie unter gleichen Bedingungen an einem Quarzkeil vom Keilwinkel $\beta = 30^0$ mit einer zur optischen Achse senkrechten Eintrittsfläche berechnet und als Funktion des Abstandes von der Keilkante dargestellt[1]).

II. Quarzplatten parallel zur optischen Achse.

In der Interferenzfarbenfolge in einem Quarzkeil mit der Eintrittsfläche parallel zur optischen Achse im parallelstrahligen Licht in Diagonalstellung zwischen gekreuzten Nicols, die der Newtonschen Farbenskala in niederen Ordnungen bekanntlich sehr ähnlich ist, erscheint als empfindlichste Übergangsfarbe jenes Rot, das die erste Ordnung von der zweiten als schmales Band trennt. Die gleichen Farben höherer Ordnung nehmen einen breiteren Streifen ein, sind also nicht so empfindlich gegen einen geringen Wechsel der Dicke oder des Gangunterschiedes, wie das erste.

1) A. a. O., Fig. 5, S. 10 und Fig. 7, S. 15.

Dasselbe ergibt eine Analyse der früher durch Berechnung der Interferenzfarben gewonnenen Ergebnisse[1]). Dieses Rot erster Ordnung erscheint bei einer Dicke von ca. 55 μ. Um die Empfindlichkeit der Reihe von Übergangsfarben vom Rot erster Ordnung zum Blauviolett zweiter Ordnung näher untersuchen zu können, wurden diesen früheren Resultaten die Werte des Farbtons $\mathfrak{F}$, der Helligkeit $\mathfrak{H}$ und des Sättigungsgrades $\mathfrak{S}$ für die Keildicken von $d = 52\,\mu$ bis $d = 62\,\mu$ durch graphische Interpolation entnommen (Tab. I). Diese Werte $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}$ von Tab. I sind in Fig. 1 als Funktion der Keildicke graphisch dargestellt. Dabei ist, wie auch in allen folgenden Tabellen und Figuren, $\mathfrak{F}$ in $\mu\mu$, $\mathfrak{H}$ in Prozent der Helligkeit des einfallenden Lichtes und $\mathfrak{S}$ in Prozent der größtmöglichen Sättigung angegeben.

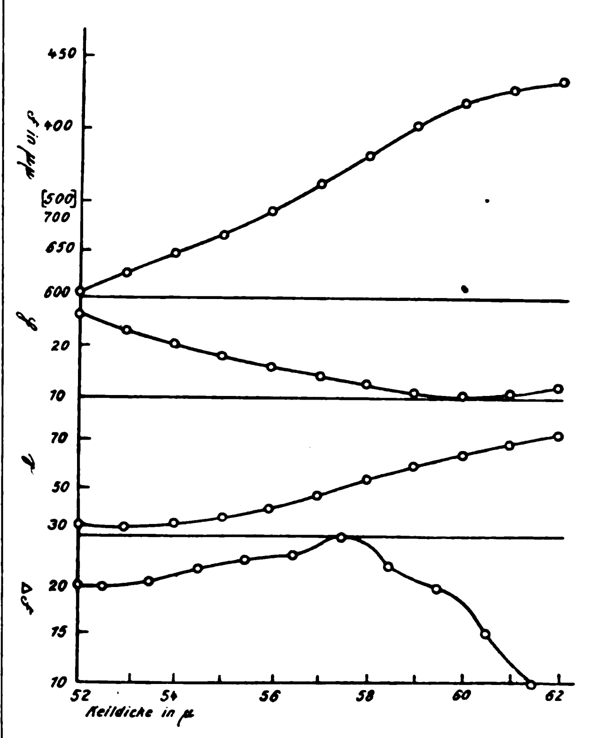


Fig. 1. Interferenzfarben in einem Quarzkeil mit einer Fläche parallel zur optischen Achse im parallelstrahligen Licht in Diagonalstellung zwischen gekreuzten Nicols.

Aus den so erhaltenen Kurven wie auch aus Tab. I ergibt sich, daß die Helligkeit $\mathfrak{H}$ in dem betrachteten Bereich, der die Übergangsfarben vom Rot erster Ordnung ($\mathfrak{F} = 655\,\mu\mu$) über Purpur zum Blauviolett zweiter Ordnung ($\mathfrak{F} = 455\,\mu\mu$) enthält, nur wenig abnimmt, während die Sättigung $\mathfrak{S}$ erheblich zunimmt. Die letztere ist schon an sich geeignet, wahrnehmbare Farben-

1) A. a. O., Fig. 5, S. 10.

Tabelle I.

Empfindliche Farben in einem Quarzkeil mit einer zur optischen Achse parallelen Eintrittsfläche im parallelen Licht zwischen gekreuzten Nicols (vgl. Fig. 1).

Keildicke d in μ	Farbton $\mathfrak{F}$ in $\mu\mu$	$\mathfrak{H}$ in Proz.	$\mathfrak{S}$ in Proz.	$\Delta\mathfrak{F}$ in $\mu\mu$
52	605	26	35	20
53	625	24	34	20
54	645	20	36	22
55	667	18	38	23
56	690	16	42	23
57	(513)	14	48	25
58	(538)	12	56	22
59	410	11	60	20
60	430	10	65	15
61	445	11	70	10
62	455	12	73	

unterschiede bei geringer Änderung der Keildicke hervorzurufen.

Der Farbenumschlag wird aber vor allem bestimmt durch den Wechsel des Farbtons $\mathfrak{F}$. Um ihn genauer verfolgen zu können, wurden noch die Differenzen je zweier aufeinander folgender Werte von $\mathfrak{F}$ gebildet und als $\Delta\mathfrak{F}$ in $\mu\mu$ für je ein μ Dickenzuwachs in die letzte Spalte von Tab. I eingetragen, sowie auch in Fig. 1 als Funktion der Keildicke graphisch dargestellt. Diese Werte $\Delta\mathfrak{F}$ liefern nun ein Maß für die Empfindlichkeit der Interferenzfarben gegen Änderungen des Gangunterschiedes zwischen der ordentlichen und der außerordentlichen Welle im Quarz oder, was auf dasselbe hinausläuft, gegen Dickenänderungen des Quarzkeils. Dabei ist zu bedenken, daß einer Dickenänderung von 1 μ eine Gangunterschiedsänderung von 0,0175 λ_{Na} gleichkommt.

Eine Betrachtung der Fig. 1 zeigt, daß mit wachsender Keildicke anfangs ein dunkelroter Farbton $\mathfrak{F}$ auftritt, der zunächst langsam, dann bei größerer Keildicke schneller in Purpur und darauf in Blauviolett übergeht, wobei schließlich die Stärke des Farbenwechsels wieder abnimmt. Sie kommt in der Darstellung auch durch die Größe des Winkels zum Ausdruck, den die Tangente an der $\mathfrak{F}$-Kurve mit der d-Achse bildet und der durch $\frac{\Delta\mathfrak{F}}{\Delta d}$ bestimmt ist. Wird nun, wie es oben geschehen, $\Delta d = 1$ gewählt, so stellt $\Delta\mathfrak{F}$ allein die Empfindlichkeit der Farbe dar. Sie wird durch die unterste Kurve $\Delta\mathfrak{F}$ veranschaulicht. Sie steigt langsam an, bis sie bei $d = 57-58\,\mu$ ihr Maximum mit $\Delta\mathfrak{F} = 25\,\mu\mu$ erreicht hat und fällt dann schnell auf geringe Beträge.

Hieraus geht hervor, daß Quarzplatten parallel zur optischen Achse von 57,5 μ Dicke zur Erzeugung der empfindlichen Farben am günstigsten sind. Ihre Interferenzfarbe zwischen gekreuzten Nicols ist dann ein dunkles Purpur mittlerer Sättigung, das zu dem Spektralgrün von 513—538 $\mu\mu$ Wellenlänge komplementär ist. E. A. Wülfing hat als günstigste Plattendicke 63,117 μ angegeben, wobei ein Violett II. Ordnung entsteht, das, wie Fig. 1 erwarten läßt, nicht die höchste Empfindlichkeit zeigt.

III. Quarzplatten senkrecht zur optischen Achse.

Betrachtet man die Interferenzfarbenfolgen, die an einem der Cornuschen Doppelprismen eines Quarzspektrographen vom Keilwinkel $\beta = 30^0$ im parallelstrahligen Licht in Diagonalstellung zwischen gekreuzten Nicols auftreten, so erkennt man, daß sich als empfindliche Farbe dieser Reihe am besten auch hier das schmale Band vom Rot I. Ordnung eignet. Weniger zweckmäßig ist das der II. Ordnung, da die Übergänge zu den Nachbarfarben viel breiter sind und es auch erheblich matter als das Rot I. Ordnung ist. Dies ergab sich auch theoretisch gelegentlich der Berechnung dieser Farbenfolge nach der eingangs erwähnten Methode[1]). Hier erscheint das Rot I. Ordnung bei einer Keildicke von 7,5 mm.

Um auch diese Farbe auf ihre Empfindlichkeit gegen geringe Änderung des Gangunterschiedes oder der Keildicke zu untersuchen, wurden den eben erwähnten Ergebnissen früherer Berechnungen[1]) die Werte des Farbtons $\mathfrak{F}$, der Helligkeit $\mathfrak{H}$ und des Sättigungsgrades $\mathfrak{S}$ für mehrere Keildicken von 6,928 mm bis 7,9 mm durch graphische Interpolation entnommen (Tab. II). In Fig. 2 sind diese Werte von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}$ als Funktion der Keildicke d graphisch dargestellt. Tab. II wie auch die Kurven Fig. 2 lassen deutlich erkennen, daß die Helligkeit $\mathfrak{H}$ in dem betrachteten Gebiet sich nur sehr wenig ändert. Der Sättigungsgrad $\mathfrak{S}$ nimmt dabei im ganzen um ca. 20 Proz. ab, am meisten bei 7,3 mm Keildicke. Dieser relativ starke Wechsel des Sättigungsgrades trägt mit dazu bei, geringe Änderungen der Keildicke oder des Gangunterschiedes dem Auge sichtbar zu machen.

Um den Farbenwechsel selbst zu veranschaulichen, wurde auch hier die Differenz $\Delta\mathfrak{F}$ je zweier aufeinanderfolgender $\mathfrak{F}$-Werte gebildet (Tab. II), die auch in Fig. 2 als Funktion der Keildicke d eingetragen ist (unterste Kurve).

Aus Tab. II wie auch aus Fig. 2 geht klar hervor, daß die höchste Empfindlichkeit der

1) A. a. O. Fig. 7, S. 15.



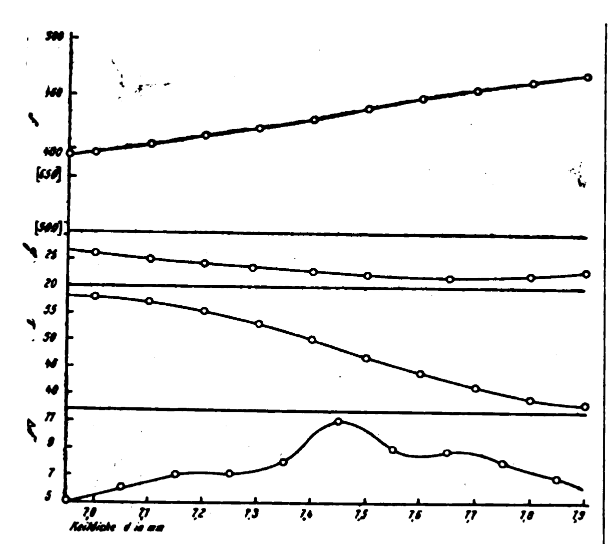


Fig. 2. Interferenzfarben in einem Quarzkeil mit einer Fläche senkrecht zur optischen Achse im parallelstrahligen Licht in Diagonalstellung zwischen gekreuzten Nicols.

Tabelle II.

Empfindliche Farben in einem Quarzkeil mit einer zur optischen Achse senkrechten Eintrittsfläche im parallelen Licht zwischen gekreuzten Nicols (vgl. Fig. 2).

Keildicke d in mm	Farbton $\mathfrak{F}$ in $\mu\mu$	$\mathfrak{H}$ in Proz.	$\mathfrak{S}$ in Proz.	$\Delta\mathfrak{F}$ in $\mu\mu$
6,928	(565)	27	59	
7,0	(570)	26	58	5
7,1	406	25	57	6
7,2	413	24	55	7
7,3	420	24	53	7
7,4	428	23	50	8
7,5	439	23	47	11
7,6	448	22	44	9
7,7	457	22	42	9
7,8	465	22	40	8
7,9	472	23	38	7

blauvioletten Interferenzfarbe bei 7,5 mm Keildicke zukommt, wie das in der Praxis bei den Soleilschen Quarzplatten dieser Dicke beobachtet wird.

Der Empfindlichkeitsgrad dieser Farbe gegen Änderung des Gangunterschiedes und der Nicolstellungen ergibt sich aus folgenden Angaben. Da einer Drehung des Analysators um 1^0 aus der Kreuzstellung zum Polarisator für Natriumlicht eine Dickenänderung von 0,042 mm oder umgekehrt 0,1 mm Dickenänderung einer Drehung des Analysators um $2{,}4^0$ gleichkommt, während die gleiche Dickenänderung einer Gangunterschiedsänderung von $0{,}0133\ \lambda_N$ entspricht, so ergibt sich, daß diese Farbe einen geringeren Grad der Empfindlichkeit gegen Änderungen des Gangunterschiedes hat als das Rot I. Ordnung in achsenparallelen Quarzplatten, da dessen Empfindlichkeit $\Delta\mathfrak{F}$ mehr als doppelt so groß wie $\Delta\mathfrak{F}$ von Blauviolett II. Ordnung im Quarz senkrecht zur Achse ist. Empfindlicher dagegen ist das Blauviolett in den basischen Quarzplatten gegen geringe Nicoldrehungen. Diese Empfindlichkeit wird bekanntlich noch dadurch erhöht, daß man zwei oder mehr Platten gleicher Dicke von Rechts- und Linksquarz nebeneinander beobachtet, bei denen eine Drehung des Analysators eine Farbenänderung in entgegengesetzter Richtung bewirkt (Quarzplattenkombination von Soleil, Biot und Klein).

Zur Erkennung geringer Phasendifferenzen sind demnach achsenparallele Quarzplatten besser geeignet als die basischen.

Ist dagegen das Licht zu untersuchen, das an undurchsichtigen anisotropen Mineralien reflektiert ist, so ist zu bedenken[1]), daß bei dieser Reflexion nicht nur eine Phasenverschiebung wie bei jedem doppelbrechenden Medium, sondern auch ein Intensitätsunterschied in den beiden reflektierten Wellen hervorgerufen wird, deren Vereinigung zu einer Schwingung eine Drehung der Polarisationsebene zu der des einfallenden Lichtes zur Folge hat. Wie sich aus den obigen Daten ergibt, schlägt das Blauviolett II. Ordnung bei geringer Drehung der Polarisationsebene oder des Analysators in Purpur oder Blau um[2]).

Dies kann als Erklärung für den Unterschied und die verschiedenartige Verwendbarkeit der empfindlichen Farben in achsenparallelen und in basischen Quarzplatten dienen.

Eine basische Quarzplatte von 3,75 mm Dicke zwischen parallelen Nicols muß die gleiche Farbenerscheinung von gleicher Empfindlichkeit wie die von 7,5 mm Dicke zwischen gekreuzten Nicols zeigen, da die Interferenzerscheinung in einer Platte von der Dicke d zwischen gekreuzten Nicols zu der in einer Platte der halben Dicke zwischen parallelen Nicols komplementär ist.

IV. Gipsspaltungsplatten.

Eine vielseitige Verwendung als empfindliche Farbe findet bekanntlich auch das Rot I. Ordnung von Gipsspaltungsplatten, die sich in Diagonalstellung zwischen gekreuzten Nicols im parallelstrahligen Licht befinden. Eine Analyse der in einem Gipskeil auftretenden Interferenzfarben nach der im ersten Abschnitt mitgeteilten Methode liegt bisher noch nicht vor.

In einem Gipskeil mit der Eintrittsfläche parallel zur Hauptspaltungsebene erscheint zwischen gekreuzten Nicols im parallelstrahligen

1) Hierauf weist auch schon E. A. Wülfing im Anschluß an Koenigsberger und Pockels hin. A. a. O.

2) Diese Erscheinungen werden den Gegenstand einer späteren Untersuchung bilden.

Licht bekanntlich eine Farbenfolge, die der Newtonschen Skala sehr ähnelt, da die für die Beobachtungsrichtung in Betracht kommende Dispersion der Doppelbrechung $n_1 - n_3$ nur gering ist. In Tab. III sind Werte $n_1 - n_3$ für die Lichtarten einiger Fraunhoferscher Linien zusammengestellt, die sich aus den Messungen der Abstände je zweier Interferenzstreifen in einem Gipskeil im polarisierten Licht von W. König[1]) ergeben. Sie sind in Fig. 3 als Funktion der Wellenlänge λ dargestellt.

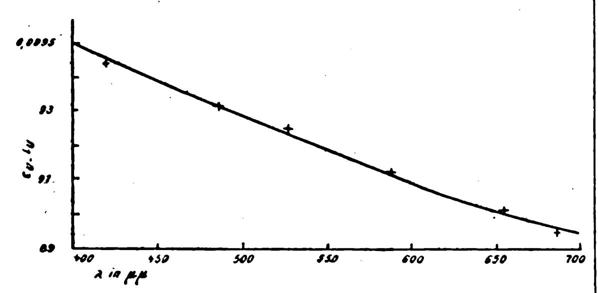


Fig. 3. Dispersion der Doppelbrechung $n_1 - n_3$ im Gips.

Tabelle III.

Dispersion der Doppelbrechung im Gips $n_1 - n_3$ und Keildicken d_0 der Kurve vom Gangunterschied $\Gamma = p \cdot \lambda$ ($p = 1$).
(vgl. Fig. 3 und 4).

Spektrallinie	λ in $\mu\mu$	$n_1 - n_3$	d_0 in μ
A	760,4	0,00886	85,9
a	718,6	895	80,3
B	687,0	896	76,7
C	656,3	903	72,7
D	589,4	913	64,5
E	527,0	926	57,0
F	486,1	932	52,2
G	430,7	945	45,6
H_1	396,6	950	41,8

Mit Hilfe dieser Werte wurden dann die Keildicken d_0 berechnet, für die

$$d_0 = \frac{\lambda}{n_1 - n_3}.$$

Sie sind in Tab. III angegeben. In Fig. 4 sind die Werte $d = p \cdot d_0$ ($p = 1, 2, 3 \cdots p$) als Funktion der Wellenlänge dargestellt. Die so erhaltenen Kurven gleichen Gangunterschiedes $\Gamma = p \cdot \lambda$ weichen nur im violetten Gebiet des Spektrums wenig von geraden Linien, den Müllerschen Linien im Spektrum der Newtonschen Farben, ab, doch ist die Neigung derselben gegen die d-Achse etwas größer als die der Fig. 4. Daher weichen die Interferenzfarben in einem Gipskeil nur wenig von den

1) W. König, Wied. Ann. 69, 1, 1899.

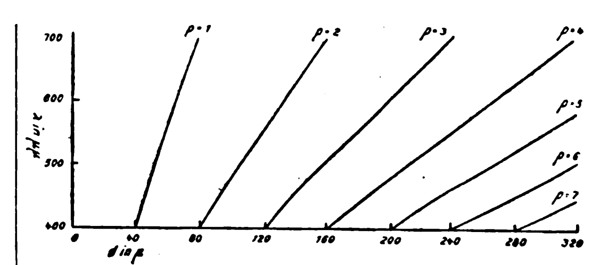


Fig. 4. Kurven gleichen Gangunterschiedes $\Gamma = p \cdot \lambda$ im Spektrum der Interferenzfarben in einem Gipskeil mit der Eintrittsfläche parallel zur Hauptspaltungsrichtung im parallelstrahligen Licht zwischen gekreuzten Nicols.

Newtonschen Farben ab. Bei einer Keildicke von ungefähr $d = 60\,\mu$ fehlen im Spektrum die gelben Lichtarten; folglich liegt hier der Übergang von der ersten zur zweiten Ordnung, der, wie die Beobachtung zeigt, durch einen schmalen Purpurstreifen gebildet wird. Das bei ca. $120\,\mu$ Keildicke auftretende Rot II. Ordnung sowie alle folgenden nehmen einen breiteren Raum ein, weshalb sie als empfindliche Farben weniger geeignet sind.

Die Interferenzfarben in einem Gipskeil im parallelstrahligen Licht in Diagonalstellung zwischen gekreuzten Nicols hat L. Pilgrim[1]) nach der Methode von Lord Rayleigh[2]) mit Hilfe der drei Maxwellschen Farbenkomponenten sowie auch nach den Formeln von E. Lommel[3]) berechnet. Seinen Resultaten sind die in Tab. IV wiedergegebenen Werte durch graphische Interpolation entnommen. Sie sind in Fig. 5 als Funktion der Keildicke graphisch dargestellt. Die Zusammenstellung der von Pilgrim berechneten und von Rollet beobachteten Farben ist nach dem Vorbilde von L. Pilgrim (vgl. dessen Tab. XIII S. 46) in Tab. IV eingetragen. Sie zeigt die gute Übereinstimmung zwischen den theoretischen Werten und den in natura beobachteten Farben.

Nach den $\mathfrak{F}$-Kurven in Fig. 5 liegt das Rot I. Ordnung bei einer Keildicke von $55\,\mu$. Da die Helligkeit $\mathfrak{H}$ an dieser Stelle am geringsten, der Sättigungsgrad $\mathfrak{S}$ aber am höchsten ist, haben wir hier die intensivste Farbe vor uns. Aus dem steilen Übergang der $\mathfrak{F}$-Kurve von den gelben ($d = 45\,\mu$) zu den blauen Farben ($d = 60\,\mu$) folgt ferner, daß schon eine geringe Dickenänderung genügt, um einen merklichen Farbenwechsel hervorzurufen. Das bei $d = 110\,\mu$ auftretende Rot II. Ordnung ist zwar auch dunkler ($\mathfrak{H}$) und gesättigter ($\mathfrak{S}$) als die umgebenden Farben, doch ist seine Helligkeit größer

1) L. Pilgrim, Beilage z. Programm der Realanstalt in Cannstatt, 1901.
2) Lord Rayleigh, Phil. Transactions Edinb. R. S. 1886, 157.
3) E. Lommel, Wied. Ann. 43, 473, 1891.

Tabelle IV.

Interferenzfarben in einem Gipskeil mit einer zur Spaltungsfläche parallelen Eintrittsfläche im parallelstrahligen Licht zwischen gekreuzten Nicols (vgl. Fig. 5).

Ordnung	Dicke d in μ	Farbton $\mathfrak{F}$ in $\mu\mu$	$\mathfrak{H}$ in Proz.	$\mathfrak{S}$ in Proz.	Farben berechnet	Farben beobachtet
I	10	504	38	0,5	bläulich Schwarz	Schwarz
	20	540	85	1	sehr hell Gelbgrün	Weiß
	30	567	96	8	Gelb	Hellgelb
	40	583	62	55	Gelb	Orange-gelb
	50	604	8	85	Fleischrot	Rot
II	60	460	14	73	Blau	Indigo
	70	480	51	54	Cyanblau	hell Himmelblau
	80	540	80	28	Gelbgrün	Hellgrün
	90	578	76	46	Gelb	Gelb
	100	608	46	62	Rotorange	Rot
III	110	400	27	68	Purpur-violett	Purpur
	120	476	34	60	Cyanblau	Blau
	130	501	54	42	Blaugrün	Grün
	140	558	66	55	Gelbgrün	Grün
	150	596	62	53	Orange	falbes Gelb
IV	160	(505)	47	48	Purpur	matt Purpur
	170	460	39	35	Blauviolett	Graublau
	180	506	42	25	bläul. Grün	Meergrün
	190	526	53	34	bläul. Grün	(Grau)-Grün
	200	583	58	14	Grüngelb	(Grau)-Grün

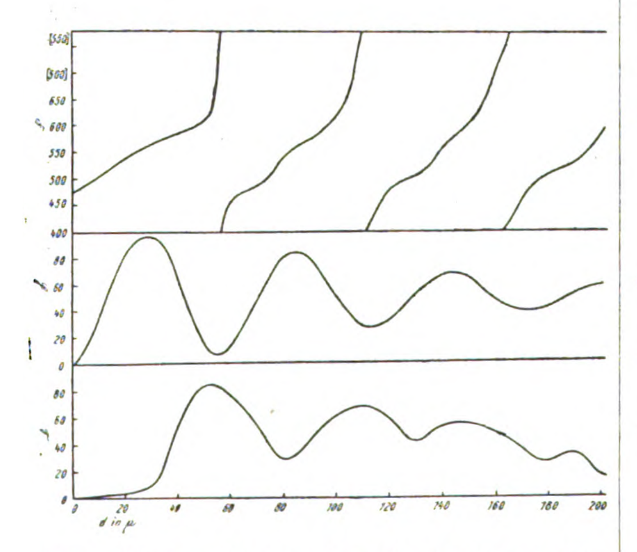


Fig. 5. Interferenzfarben in einem Gipskeil im parallelstrahligen Licht in Diagonalstellung zwischen gekreuzten Nicols I.

und sein Sättigungsgrad erheblich geringer als $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}$ vom Rot I. Ordnung. Zudem ist auch der Übergang der Farben von Gelb ($d = 90\,\mu$) zu Blau ($d = 120\,\mu$) ein langsamerer, wie auch die Neigung der $\mathfrak{F}$-Kurven zur d-Achse zeigt. Aus diesen Gründen ist es, wie aus der Praxis bekannt, weit weniger empfindlich gegen Gangunterschiedsänderungen wie das Rot I. Ordnung. Dasselbe trifft in erhöhtem Maße für das Rot III. Ordnung bei $d = 165\,\mu$ zu, wie eine Betrachtung der Fig. 5 erkennen läßt.

Die Empfindlichkeit des Rot I. Ordnung im Gips soll nun ebenso wie die der gleichen Farben im Quarz näher untersucht werden. Zu diesem Zwecke wurden aus Fig. 5 durch gra-

Tabelle V.

Empfindliche Farben an einem Gipskeil mit einer Fläche parallel zur Spaltungsfläche im polarisierten Licht zwischen gekreuzten Nicols (vgl. Fig. 6).

Keildicke d in μ	Farbton $\mathfrak{F}$ in $\mu\mu$	$\mathfrak{H}$ in Proz.	$\mathfrak{S}$ in Proz.	$\Delta\mathfrak{F}$ in $\mu\mu$
50	605	11	84	
				5
51	610	9	84	
				15
52	625	7	83,5	
				20
53	645	6	83	
				25
54	670	6	82	
				30
55	700	7	81	
				40
56	(540)	8	80	
				40
57	410	9	78	
				30
58	440	10	77	
				15
59	455	12	75	
				5
60	460	14	74	

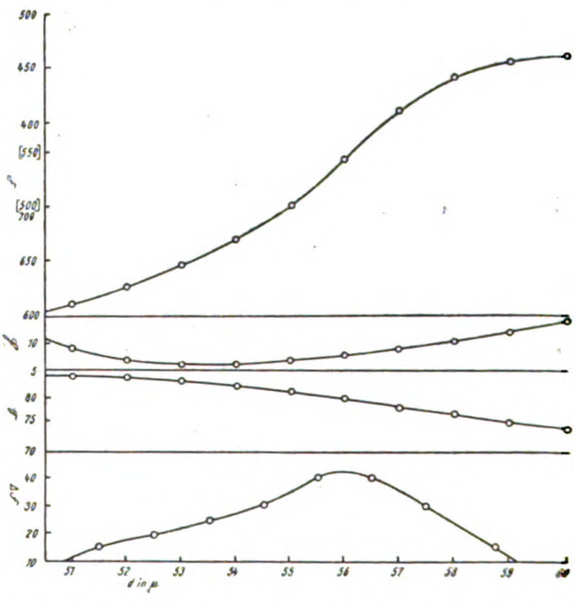


Fig. 6. Interferenzfarben in einem Gipskeil im parallelstrahligen Licht in Diagonalstellung zwischen gekreuzten Nicols II.

phische Interpolation Werte des Farbtons $\mathfrak{F}$, der Helligkeit $\mathfrak{H}$ und des Sättigungsgrades $\mathfrak{S}$ für die Keildicken von 50—60 μ entnommen. Nach Tab. V wurden sie in Fig. 6 als Funktion der Keildicke d graphisch dargestellt. In dem betrachteten Gebiet ändert sich die Helligkeit $\mathfrak{H}$ ebensowenig wie ihr Sättigungsgrad $\mathfrak{S}$. Die $\mathfrak{F}$-Kurve dagegen steigt mit zunehmender Keildicke an. Am steilsten ist sie zwischen 55 μ und 57 μ Keildicke. Dort liegt also offenbar die größte Empfindlichkeit der Interferenzfarben. Um auch ihren Verlauf veranschaulichen zu können, ist wiederum die Differenz $\Delta\mathfrak{F}$ aus je zwei aufeinanderfolgenden $\mathfrak{F}$-Werten gebildet worden. Sie sind in Fig. 6 ebenfalls als Funktion der Keildicke eingetragen. Aus dieser Kurve ergibt sich, was auch aus der $\mathfrak{F}$-Kurve indirekt zu ersehen ist, daß die Schnelligkeit des Farbenwechsels mit zunehmender Keildicke d anfangs zunimmt, bei 56 μ ihren höchsten Wert erreicht und dann wieder abnimmt. Jene Purpurfarbe, die dem Spektralgrün von der Wellenlänge $\lambda = 540\,\mu\mu$ komplementär ist, ist demnach diejenige, die die höchste Empfindlichkeit gegen geringe Dicken oder Gangunterschiedsänderungen aufweist. Der Grad dieser Empfindlichkeit geht aus dem Umstande hervor, daß ein μ Dickenänderung einer Gangunterschiedsänderung von 0,0175 λ_{Na} entspricht.

Zusammenfassung.

Aus obigen Ausführungen ergibt sich somit folgendes.

Wie die spektrale Zerlegung der Interferenzfarben in einem Gipskeil zeigt (Fig. 4) und auch die der Quarzfarben[1]) erkennen lassen, treten die empfindlichsten Farben stets da auf, wo die hellsten Farben des Spektrums ausgelöscht sind. So fehlen in dem empfindlichsten Rot I. Ordnung im Gips und im achsenparallelen Quarz die Lichtarten zwischen den Fraunhoferschen Linien E und D und in dem Blauviolett II. Ordnung in den basischen Quarzplatten das Licht der D-Linien.

Die gegen geringe Gangunterschiedsänderungen empfindlichste Farbe liefert ein Gipsblättchen von 56 μ Dicke im parallelstrahligen Licht in Diagonalstellung zwischen gekreuzten Nicols. Als Interferenzfarbe erscheint ein Purpur, das bis auf den Sättigungsgrad $\mathfrak{S}$ zu dem Spektralgrün von 540 $\mu\mu$ Wellenlänge komplementär ist. Etwas geringer ist die Empfindlichkeit der Interferenzfarbe in einer Quarzplatte, die parallel zur optischen Achse geschnitten ist. Bei einer Dicke von 57,5 μ ist nahezu die gleiche Purpurfarbe zu beobachten wie im Gips, doch ist sie beim Quarz heller und weniger gesättigt. Die Ursache dieses Unterschiedes ist in der zwar geringen Abweichung der Dispersion der Doppelbrechung $\varepsilon - \omega$ im Quarz von der $n_1 - n_3$ im Gips zu suchen.

Ein Vergleich der Empfindlichkeit dieser beiden Interferenzfarben ist ohne Bedenken zulässig, da der Unterschied beider Farbtöne kaum merklich ist (ca. 15 $\mu\mu$). Anders liegt es mit der empfindlichen Farbe im senkrecht zur optischen Achse geschnittenen Quarz. Hier liegt der für $d = 7{,}5$ mm Plattendicke berechnete Farbton $\mathfrak{F}$ im violetten Teil des Spektrums (ca. 439 $\mu\mu$). Ein Vergleich dieser Farben mit den oben erwähnten scheint nicht statthaft zu sein. Zwar ist die Empfindlichkeit unseres Auges in der Wahrnehmung der Farbenunterschiede bei geringen Wellenlängenänderungen der Spektralfarben bekannt und damit auch die Tatsache, daß das Auge im Violett gegen geringe Farbenänderungen unempfindlicher ist als beispielsweise im gelben Teile des Spektrums. Ob sich aber für die Purpurfarben die gleiche Empfindlichkeit wie für die violetten annehmen läßt, ist wohl nicht quantitativ bestimmt.

Die Verschiedenheit der Interferenzfarben im Quarz in den beiden ausgezeichneten Richtungen ist eine Folge des Unterschiedes der Dispersion der Doppelbrechung $\varepsilon - \omega$ von der Dispersion des Drehungsvermögens ϱ (vgl. hierüber Berl. Ber. 1917, bes. S. 18ff.).

Brandenburg (Havel), im August 1917.

(Eingegangen 8. August 1917.)

1) A. a. O. Fig. 3, S. 8 und Fig. 6, S. 14.

Über eine neue Sekundärstrahlung der Kanalstrahlen[1]).

Von M. Wolfke.

Einleitung.

Vor einigen Jahren haben Chadwick und Russell[2]) die wichtige Tatsache entdeckt, daß α-Strahlen imstande sind die charakteristische γ-Strahlung schwerer Elemente zu erregen.

Ob auch die Kanalstrahlen diese Fähigkeit besitzen, war bis heute nicht bekannt. Diese Frage ist aber von großem Interesse. Wenn sich nämlich herausstellt, daß die Kanalstrahlen die Röntgenspektra zu erregen vermögen, ist uns dadurch die Möglichkeit gegeben, den Ein-

1) Vorgetragen in der Jahresversammlung der Schweiz. Naturforsch. Ges. in Zürich, am 11. Sept. 1917.

2) J. Chadwick, Phil. Mag. (6) **24**, 594, 1912; **25**, 193, 1913; J. Chadwick u. A. S. Russell, Proc. Roy. Soc. (A) **88**, 217, 1913; A. S. Russell u. J. Chadwick, Phil. Mag. (6) **27**, 112, 1914.

fluß der Natur der erregenden Teilchen auf den Erregungsvorgang näher zu untersuchen, da wir bei den Kanalstrahlen sowohl die chemische Natur, als auch den Ladungszustand der Teilchen in weiten Grenzen variieren können. Eine solche Untersuchung würde uns einige wichtige Aufschlüsse über den Mechanismus der Erregung und der Emission der Röntgenspektra geben.

Von diesem Standpunkte aus habe ich mir die Aufgabe gestellt, die Frage zu prüfen, **ob die Kanalstrahlen imstande sind, die charakteristische Röntgenstrahlung zu erregen.**

J. J. Thomson[1]) beobachtete, daß die Kanalstrahlen beim Aufprallen auf ein Platinblec eine äußerst weiche Strahlung erzeugen. Daß es sich dabei nicht um die charakteristische Strahlung von Platin handeln kann, ist ohne weiteres klar, da die erzeugte Strahlung so weich war, daß sie durch dünnste Schichten von Kollodium, Aluminium usw. vollständig absorbiert wurde. Diese Erscheinung dürfte die Bremsstrahlung der Kanalionen gewesen sein; man kommt durch eine einfache Rechnung tatsächlich zu einer so weichen Strahlung, wenn man die sehr plausible Annahme macht, daß die Größenordnung der Atomkräfte, die bei der Bremsung eines Ions wirksam sind, die gleiche ist, wie diejenige bei der Bremsung eines Elektrons.

Die Tatsache, daß Thomson bei seinem Versuch die charakteristische Strahlung von Platin nicht erhalten hat, spricht durchaus noch nicht gegen die Möglichkeit, diese Strahlung durch Kanalteilchen zu erregen, und zwar aus folgendem Grunde:

Die Einsteinsche Quantenbeziehung zwischen der Energie des auffallenden Elektrons und der erregten Frequenz wurde neuerdings durch die Versuche an der Coolidgeröhre mit großer Sicherheit bestätigt[2]), und zwar gibt diese Beziehung nicht die erregte Frequenz selbst, sondern die untere Grenze für die zur Erregung der Strahlung notwendige Energie in der Form

$$\varepsilon > h\nu$$

an. Dabei hat sich bei der charakteristischen Strahlung ergeben, daß die Linien der K-Serie alle gleichzeitig erst dann erregt werden, wenn die obige Beziehung für die höchste Frequenz der Serie erfüllt ist. Die Einsteinsche Quantenbeziehung gilt jedoch nicht nur für die Emission der Röntgenspektra, sondern besitzt eine allgemeinere Bedeutung[1]). Es ist deshalb mehr als wahrscheinlich, daß sie auch bei der ev. Erregung der Röntgenspektra durch Kanalstrahlen ihre Gültigkeit beibehält. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich als untere Grenze für die zur Erregung der L-Serie von Platin notwendige Geschwindigkeit eines Wasserstoffions der Wert ca. $1{,}7 \cdot 10^8$ cm/sec, da die kleinste Wellenlänge von Platin $L\gamma_4 = 0{,}9 \cdot 10^{-8}$ cm ist[2]). Thomson schätzt die Geschwindigkeit seiner Kanalstrahlen auf ca. $2 \cdot 10^8$ cm/sec. Auf diese Weise ist es sehr gut möglich, daß der zur Erregung der L-Serie von Platin notwendige Schwellenwert der kinetischen Energie in diesem Falle noch nicht erreicht wurde, vor allem, da wir darüber nichts wissen, um wieviel die kinetische Energie eines Kanalteilchens die Energie $h\nu$ übertreffen muß, um die Erregung zu bewirken.

Obgleich bis jetzt die Erregung der charakteristischen Röntgenstrahlung durch Kanalstrahlen noch nie beobachtet worden ist, so sehen wir aus dem Obigen, daß keine Tatsachen vorliegen, die einer solchen Erscheinung im voraus widersprechen würden.

Versuchsmethode und Anordnung.

Um die oben genannte Frage zu entscheiden, habe ich eine analoge Methode angewandt, wie sie Chadwick[3]) bei der Entdeckung der Erregung der γ-Strahlen durch α-Strahlen benutzte.

Ein breites Kanalstrahlenbündel fällt auf eine Öffnung, die in zwei Hälften geteilt ist, welche mit Folienstücken aus einem schweren Metall, z. B. Zinn oder Blei, und einem leichten Metall, z. B. Aluminium, bedeckt sind. Auf der einen Hälfte liegt die Folie des schweren Metalls voran, hinter der sich die Aluminiumfolie befindet, auf der anderen Hälfte liegen gleiche Folien, aber in umgekehrter Reihenfolge. Hinter den Folien befindet sich eine photographische Röntgenplatte.

Auf diese Weise trifft der Kanalstrahl auf der einen Hälfte der Öffnung die Folie des schweren Metalls und auf der anderen Hälfte eine Aluminiumfolie. Die charakteristische Strahlung des schweren Metalls ist intensiver und härter, als die des Aluminiums und gelangt nur wenig geschwächt zur photographischen Platte. Die schwache und leicht absorbierbare Strahlung

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6) **28**, 620, 1914.
2) W. Duane u. F. L. Hunt, Phys. Rev. **6**, 166, 1915; E. Rutherford, J. Barnes u. H. Richardson, Phil. Mag. (6) **30**, 339, 1915; D. L. Webster, Proc. Amer. Nat. Acad. **2**, 90, 1916.

1) Vgl. z. B. beim Photoeffekt R. A. Millikan, Phys. Rev. 1916 u. diese Zeitschr. **17**, 217, 1916.
2) M. Siegbahn, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**, 296, 1916. Vgl. Tab. VI, S. 328.
3) J. Chadwick, Phil. Mag. (6) **25**, 193, 1913.

von Aluminium wird dagegen stark durch die dahinterliegende Schicht des schweren Metalls absorbiert. Wenn also die Kanalstrahlen die charakteristische Röntgenstrahlung des schweren Metalls erregen, so wird die Schwärzung der photographischen Platte auf der Hälfte, wo sie das schwere Metall treffen, stärker sein, als auf der anderen Hälfte, wo sie auf Aluminium auffallen. Dieser Schwärzungskontrast der beiden Hälften wird umso ausgeprägter sein, je stärker die charakteristische Strahlung erregt wird.

Das zu diesen Versuchen benutzte Kanalrohr ist in Fig. 1 dargestellt.

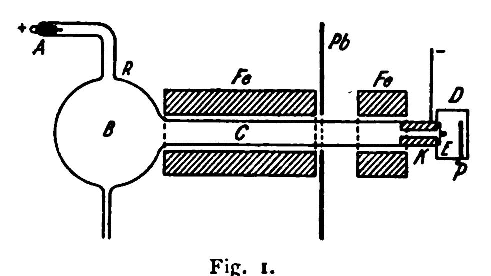


Fig. 1.

Die Anode A ist an die Kugel B (170 mm Durchmesser) angesetzt. Die im Rohr C (44 mm Durchmesser und 400 mm lang) erzeugten Kanalstrahlen passieren den in Eisen gebohrten Kanal K (10 mm Durchmesser und 60 mm lang) und gelangen in die Messingkamera D, wo sie die Kassette P mit den Folien und der Röntgenplatte treffen. Die photographische Platte („Agfa"-Röntgenplatte, zugeschnitten auf 45 mm × 60 mm) befindet sich in einer lichtdichten Kassette, deren vordere Seite aus zwei übereinanderliegenden Messingplatten (1 mm dick) besteht, welche aufeinandertreffende kreisrunde Öffnungen von dem Durchmesser des Kanals K (10 mm) besitzen. Diese Öffnungen sind durch Messingstäbchen in zwei Hälften geteilt; die oben erwähnten Folien werden zwischen die Messingplatten und Stäbchen eingepreßt (vgl. Fig. 2), wobei sie die Gelatineschicht der photo-

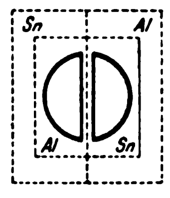


Fig. 2.

graphischen Platte nicht berühren. Zwischen dem Kanalende und der Kassette P ist ein Abstand von 32 mm. Der Kanal kann von außen elektromagnetisch durch das Vorschieben einer 1 mm starken Aluminiumplatte E geschlossen werden. Die Kugel B befindet sich zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten, der ermöglicht, die aus dem Rohr C kommenden Kathodenstrahlen nach oben in die Gegend von R abzulenken, wodurch die dort entstehenden Röntgenstrahlen verhindert werden, direkt durch den Kanal K in die Kamera D zu gelangen. Die Abschirmung dieser Röntgenstrahlen wird außer durch den Bleischirm Pb noch durch die durchbohrten Eisenblöcke Fe, Fe, die das Rohr C umgeben, um den Entladungsvorgang vor der Streuung der Magnetfelder zu schützen, bewerkstelligt. Die Kamera D befindet sich zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten, durch den man in der Kassette eine Feldstärke bis ca. 140 Gauß herstellen kann.

Zur Erzeugung der Kanalstrahlen wurde ein starkes Induktorium mit Wehneltunterbrecher, oder eine 11 Platten-Influenzmaschine benutzt. Bei Anwendung des Induktoriums habe ich in Serie mit dem Kanalrohr ein Vakuumventilrohr und zwei Funkenstrecken (Spitze gegen Platte) als Gleichrichter benutzt. Auch die Influenzmaschine wurde mit einem Vakuumventilrohr in Serie geschaltet, um gegen ev. Polwechsel gesichert zu sein. Das Entladungspotential wurde annähernd durch eine zum Kanalrohr parallel geschaltete Funkenstrecke zwischen zwei gleichen Kugeln von 15,5 mm Radius gemessen. Zur Herstellung des Vakuums habe ich eine Quecksilber-Gaedepumpe mit einer Kapselpumpe als Vorvakuum benutzt. Der Druck wurde mit einem Mac-Leodschen Manometer gemessen.

Diskussion der Fehlerquellen.

Da es sich hier darum handelt, die Existenz eines neuen Effektes zu beweisen, so wollen wir im folgenden alle möglichen Fehlerquellen, die diesen Effekt vortäuschen könnten, sehr genau untersuchen.

Gegen Lichtstrahlen und ultraviolette Strahlen, die durch den Kanal in die Kamera eindringen konnten, war die photographische Platte durch die von allen Seiten lichtdichte Kassette vollkommen geschützt.

Die benutzten Folienstücke waren immer sorgfältig untersucht. Ihre Dicke war zusammen größer als 0,02 mm, so daß die Kanalstrahlen zu der photographischen Platte nicht gelangen konnten.

Direkte Röntgenstrahlen waren, wie oben erwähnt, abgeschirmt. Die zerstreuten Röntgenstrahlen konnten, wie ein Versuch gezeigt hat, nur eine schwache und gleichmäßige Schwär-

zung auf beiden Hälften der mit Folien bedeckten Öffnung hervorrufen, so daß sie auf keinen Fall den erwarteten Effekt vortäuschen konnten.

Die einzigen Strahlen, die einen Kontrast in der Schwärzung der beiden Hälften der Öffnung erzeugen würden, sind die Elektronenstrahlen, da sie selbst imstande sind, die charakteristische Röntgenstrahlung zu erregen.

Es wurde darum eine große Sorgfalt darauf verwandt, diese Fehlerquelle vollständig auszuschließen, wie aus folgendem zu ersehen ist.

Bei den Aufnahmen mit dem Induktorium war nicht ausgeschlossen, daß im Falle einer ev. unvollständigen Gleichrichterwirkung langsame Striktionskathodenstrahlen aus dem Rohr C (Fig. 1) in die Kamera einzudringen vermochten. Deshalb wurde bei diesen Aufnahmen ein Magnetfeld von ca. 140 Gauß in der Kamera D hinter dem Kanal erzeugt. Eine einfache Rechnung zeigt, daß dieses Feld genügt, um Kathodenstrahlen bis zu einer Geschwindigkeit von 50,000 Volt Gefälle von der mit Folien bedeckten Öffnung in der Kassette abzulenken.

Bei Verwendung der Influenzmaschine war eine Umkehrung der Stromrichtung ausgeschlossen.

Die Wirkung der durch die Röntgenstrahlen im Rohr erzeugten sekundären Kathodenstrahlen, die teilweise durch den Kathodenfall abgehalten und teilweise durch das hinter dem Kanal liegende Magnetfeld abgelenkt werden, ist vollständig zu vernachlässigen, wenn man sich vergegenwärtigt, daß ihre Energie auf jeden Fall geringer sein wird, als die Energie der sie auslösenden Röntgenstrahlung[1]), und, daß sie an den Folien nur eine, im Verhältnis zu ihrer eigenen Intensität ca. $1000 \times$ schwächere[2]), Röntgenstrahlung erzeugen können.

Die durch die Kanalstrahlen im Kanal selbst erzeugten sekundären Elektronenstrahlen wurden durch das Magnetfeld hinter dem Kanal in der Kamera von der Kassette abgehalten. Dieses Magnetfeld hatte bei den Aufnahmen mit Influenzmaschine mehr als 20 Gauß und bei denen mit Induktorium 140 Gauß. Eine leichte Rechnung zeigt, daß die schnellsten Sekundärstrahlen, deren Geschwindigkeit nach Füchtbauer[3]) $3{,}5 \cdot 10^8$ cm/sec beträgt, im Magnetfeld von 20 Gauß einen Kreis von ca. 10 mm Radius beschreiben, also bei dem Abstand 32 mm zwischen Kanalende und Kassette die letztere nicht zu erreichen vermögen.

Um den Einfluß des ev. Unterschiedes in der Dicke der Folien auf den beiden Hälften der Öffnung zu eliminieren, habe ich zu jeder Aufnahme eine Kontrollaufnahme mit den gleichen Folien in umgekehrter Reihenfolge ihrer Lage gemacht.

Damit hoffe ich alle in Betracht kommenden Fehlerquellen berücksichtigt zu haben.

Versuchsergebnisse.

Vor allem wurde die Intensitätsverteilung im Kanalstrahlbündel durch eine direkte Aufnahme der Kanalstrahlen auf eine Diapositivplatte untersucht. Die Intensität der Kanalstrahlen war so groß, daß schon nach drei Sekunden Exposition ein Solarisationsfleck von 11 mm Durchmesser mit Umkehrung[1]) in der Mitte entstand. Um eine zu starke Erwärmung der Folien durch diese starken Kanalstrahlen zu verhindern, wurde stets kurze Zeit mit Unterbrechungen exponiert.

Ich habe zwei Metalle: Zinn und Blei untersucht. Die Folien hatten folgende Dicken: Zinn — 0,016 mm, Blei — 0,028 mm und die benutzte Aluminiumfolie — 0,007 mm.

Es hat sich herausgestellt, daß beide Metalle unter der Wirkung der Kanalstrahlen eine ziemlich intensive, durchdringende Strahlung emittieren, die vermutlich ihre charakteristische Röntgenstrahlung ist.

Zinn. Bei Versuchen mit Zinn gaben alle Aufnahmen ohne Ausnahme einen sehr starken Kontrast, d. h. eine starke Schwärzung auf der Hälfte, wo die Kanalstrahlen die Zinnfolie trafen nebst einer nur schwachen Schwärzung auf der anderen Seite (vgl. Fig. 3), was mit dem erwarteten Effekt im Einklang steht.

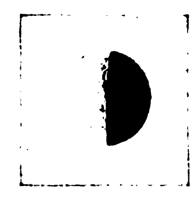


Fig. 3.

Hiervon wurden mehrere Aufnahmen, sowohl mit Induktorium, als auch mit Influenzmaschine ausgeführt. Die Expositionszeiten wurden zwischen 2,5′ bis 22′, das Potential zwischen 25 mm

1) Vgl. W. Wien, Ann. d. Phys. (4) **18**, 1003, 1905 und neuerdings E. Hoepner, Ann. d. Phys. (4) **46**, 577, 1915.

2) Vgl. W. Wien, Ann. d. Phys. (4) **18**, 991, 1905 und neuerdings R. T. Beatty, Proc. Roy. Soc. (A) **89**, 314, 1914; E. Rutherford u. J. Barnes, Phil. Mag. (6) **30**, 361, 1915.

3) Ch. Füchtbauer, diese Zeitschr. **7**, 748, 1906 und neuerdings H. Bärwald, Ann. d. Phys. (4) **41**, 643, 1913.

1) Vgl. M. Wolfke, Verh. d. D. Phys. Ges. **19**, 111, 1917.

bis 40 mm Funkenstrecke und der Druck zwischen 0,0007 mm *Hg* bis 0,0037 mm *Hg* variiert.

Die hier reproduzierte Aufnahme (Fig. 3) habe ich bei Verwendung der Influenzmaschine mit 22′ Expositionszeit, 25 mm bis 30 mm Funkenstrecke und bei 0,0037 mm *Hg* Druck erhalten[1]).

Blei. Die Aufnahmen mit Bleifolien bei kleineren Entladungspotentialen von 25 mm bis 40 mm Funkenstrecke haben nur eine schwache auf beiden Hälften gleichmäßige Schwärzung ergeben. Nur eine Aufnahme bei einer Entladungsspannung von 45 mm Funkenstrecke zeigte in der Schwärzung der beiden Hälften einen deutlichen und starken Kontrast. Dabei trat die starke Schwärzung auf der Hälfte ein, wo die Kanalstrahlen die Bleifolie trafen und nur in der nächsten Umgebung des Punktes, wo das Maximum der Intensität der Kanalstrahlen liegen mußte.

Diese letzte Aufnahme spricht dafür, daß auch bei dieser Erscheinung ein Schwellenwert für die zur Erregung notwendige Energie vorhanden sein muß.

Die Einsteinsche Quantenbeziehung gestattet uns eine Vermutung über die erregten Wellenlängen auszusprechen. Wir berechnen die Entladungsspannungen, die nach Quantenbedingung als untere Grenze zur Erregung der *K*-Serie und *L*-Serie von Zinn und Blei notwendig sind, indem wir annehmen, daß die Hälfte des Entladungspotentials zur Beschleunigung der Kanalteilchen ausgenutzt wurde[2]).

Es ergeben sich folgende Werte:

Für $K\beta_1$ von Zinn ($\lambda = 0{,}432 \cdot 10^{-8}$ cm) mehr als 57 K.-V,

für $L\gamma_4$ von Zinn ($\lambda = 2{,}831 \cdot 10^{-8}$ cm) ca. 8,7 K.-V. und

für $L\gamma_4$ von Blei ($\lambda = 0{,}792 \cdot 10^{-8}$ cm) ca. 31 K.-V.[3]).

Das bei den Versuchen benutzte größte Entladungspotential war 45 mm Funkenstrecke, bei 15,5 mm Radius der Kugeln, was nach den Messungen von C. Müller[4]) einer Spannung kleiner als 50 K.-V. entspricht. Von diesem Standpunkt aus konnte in unserem Falle die *K*-Serie nicht erregt werden und es ist wahrscheinlich, daß die durch die Kanalstrahlen hier erregten Wellenlängen zu der *L*-Serie der beiden Elemente gehören.

Ich behalte mir die genaue Untersuchung der Wellenlängen und der Eigenschaften dieser neuen Strahlung vor und werde demnächst darüber berichten.

Zusammenfassung.

1. Es wurde zum erstenmal die Erregung einer durchdringenden Strahlung durch die auffallenden Kanalstrahlen beobachtet. Dieser Effekt wurde bei Zinn und bei Blei photographisch festgestellt und dürfte die charakteristische Röntgenstrahlung dieser Elemente sein.

2. Bei Blei wurde ein Schwellenwert für die zur Erregung notwendige Entladungsspannung beobachtet.

3. Auf Grund der Einsteinschen Quantenbedingung ist wahrscheinlich, daß es sich bei dem neuen Effekt um die Erregung der Linien der *L*-Serie der beiden Elemente handelt.

Zürich, Phys. Inst. d. Eidg. Techn. Hochschule, August 1917.

(Eingegangen 31. August 1917.)

Die Atomanordnung von Wolfram.

Von P. Debye.

Vor einiger Zeit erhielt ich einige Proben Wolframpulver mit der Bitte, dieselben nach der von Scherrer und mir angegebenen Methode auf ihre eventuelle kristallinische Struktur zu untersuchen. Die Aufgabe schien mir deshalb interessant, weil das Wolfram mit dem Atomgewicht 184 und einer Dichte von etwa 19 die bei unseren Versuchen benutzte, verhältnismäßig langwellige, monochromatische Röntgenstrahlung außerordentlich stark absorbiert. Infolgedessen kommt für die Erzeugung der zu photographierenden Interferenzen nur eine Oberflächenschicht des Präparats in Betracht, deren Dicke auf einige Tausendstel mm geschätzt werden kann, so daß es fraglich erschien, ob die Interferenzlinien in genügender Stärke entstehen würden. Diese Befürchtung hat sich indessen als grundlos erwiesen. Die Expositionen wurden in dankenswerter Weise ausgeführt von Frl. Dr. E. Becker mit teilweiser Unterstützung von Frl. Clausen, und zwar mit Platinstrahlung. Auf den erhaltenen Aufnahmen sind die Interferenzlinien bis zu einem Ablenkungswinkel ϑ von nahezu 180^0 zu verfolgen, gemessen gegen die Fortschreitungsrichtung des Primärstrahls. Auch hier treten, wie in unseren früheren Diagrammen, also ohne weiteres, Reflexionen auf bei annähernd senkrechter Inzidenz auf die zugehörigen Kristallflächen. Von einer Reproduktion der Diagramme

1) Die Platte wurde mit Rodinal 1/25 ohne Verstärker entwickelt.

2) Vgl. W. Wien, Ann. d. Phys. (4) **33**, 925, 1910; T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4) **50**, 369, 1916.

3) Vgl. M. Siegbahn, l. c. Tab. V, S. 325 u. Tab. VI, S. 317 u. 328.

4) C. Müller, Ann. d. Phys. (4) **28**, 585, 1909.



nehme ich Abstand, weil dieselben in ihrem allgemeinen Aussehen ja nicht von den nunmehr schon verschiedentlich von uns reproduzierten Aufnahmen abweichen. Trotzdem es anfänglich beabsichtigt war, die Aufnahmen lediglich zu verwenden um festzustellen, ob alle Präparate kristallinisch waren und ob Unterschiede zwischen den verschiedenen Proben vorhanden waren, und deshalb weniger Sorgfalt auf die Justierung verwendet wurde, zeigte sich, daß die Diagramme vollständig ausreichen, um die Struktur des Wolframs zu bestimmen. Im folgenden möchte ich deshalb über die Messungen und das anschließende Resultat berichten. Vorweg genommen lautet dasselbe:

Wolfram kristallisiert kubisch; der Elementarbereich ist ein raumzentrierter Würfel mit einer Kantenlänge von $3{,}18 \cdot 10^{-8}$ cm[1]).

Messungen und Struktur.

Die folgende Zusammenstellung enthält das Resultat der Messungen:

$\sin\frac{\vartheta}{2} =$					
	0,260.	**0,302**	0,343	**0,421**	0,436
	m-s	st	ss	m	sss
	0,490	**0,512**	0,560	**0,590**	0,625
	sss	st	sss	m	sss
	0,658	**0,720**	0,745	**0,777**	0,790
	st	m-s	sss	st	sss
	0,829	**0,877**	0,900	**0,923**	**0,970**
	s	st	s	st	st

Die Größe ϑ bedeutet dabei den Ablenkungswinkel, gemessen gegen die Fortpflanzungsrichtung des Primärstrahls. Im Anfang der Zahlenreihe ist die Genauigkeit nur 2 bis 3 Proz., die höheren Zahlen dagegen sind auf weniger als 1 Proz. genau. Die Steigerung der Genauigkeit mit zunehmendem Winkel ist durch die Methode bedingt, da erstens zur Bestimmung von ϑ die Durchmesser der Ringe auf dem kreisförmig angeordneten Film gemessen werden und die größeren Durchmesser bei der endlichen Breite der Interferenzlinien natürlich prozentual genauer zu messen sind. Zweitens wirkt der Umstand, daß mit Annäherung von ϑ an 180^0, also von $\frac{\vartheta}{2}$ an 90^0, die Größen $\sin\frac{\vartheta}{2}$ immer langsamer anwachsen, in derselben Richtung.

1) Es ist von Interesse zu bemerken:
a) daß bisher bei den untersuchten, kubisch kristallisierenden Metallen (*Cu, Ag, Au*) nur das flächenzentrierte Gitter beobachtet wurde,
b) daß in Anlehnung an die Bemerkungen von P. Pfeiffer (Z. f. anorg. u. allgem. Chem. 92, S. 377 u. 97, S. 161) Wolfram sich durch sein raumzentriertes Gitter als koordinativ achtwertig erweist im Wernerschen Sinne.

Unterhalb der Zahlen sind Bezeichnungen angegeben, welche eine Schätzung der Intensität darstellen: st = stark, m = mittel, s = schwach, ss = sehr schwach, sss = äußerst schwach.

Neben den angegebenen Zahlen muß nun, um ein völlig bestimmtes Bild der Substanz entwerfen zu können, noch bekannt sein

a) die Wellenlänge λ der benutzten Strahlung; dieselbe war im vorliegenden Falle Platin-L-Strahlung mit $\lambda_\alpha = 1{,}316 \cdot 10^{-8}$ cm und $\lambda_\beta = 1{,}121 \cdot 10^{-8}$ cm,

b) die Dichte ϱ der Substanz; zwei Bestimmungen ergaben $\varrho = 18{,}73$ bzw. $\varrho = 18{,}66$, ich rechne mit $\varrho = 18{,}7$.

Nachdem das Auftreten von scharfen Interferenzlinien gezeigt hat, daß wir mit einer mikrokristallinischen Substanz zu tun haben, handelt es sich nun um die Aufgabe, allein aus den angegebenen Zahlen

1. das Kristallsystem und damit die Form des Elementarbereiches,
2. die Atomstruktur jenes Bereiches

zu bestimmen.

1. Das Kristallsystem.

Im allgemeinen (triklinen) Falle muß sich $\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ darstellen lassen durch die folgende Formel:

$$4\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda^2}{I^2}\{h_1^2(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) + h_2^2(\mathfrak{B}\mathfrak{B}) + h_3^2(\mathfrak{C}\mathfrak{C}) + 2h_2h_3(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) + 2h_3h_1(\mathfrak{C}\mathfrak{A}) + 2h_1h_2(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\}, \tag{1}$$

dabei sind h_1, h_2, h_3 drei ganze Zahlen (die Indizes der reflektierenden Ebene); I ist der Rauminhalt des Elementarparallelopipeds, so daß, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die drei Vektoren desselben bedeuten,

$$I = (\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}])$$

ist; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ schließlich sind die Vektoren des zum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$-Gitter polaren Gitters, wonach also

$$\mathfrak{A} = [\mathfrak{b}\mathfrak{c}], \quad \mathfrak{B} = [\mathfrak{c}\mathfrak{a}], \quad \mathfrak{C} = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}].$$

Zunächst muß man nun die 6 Zahlenkoeffizienten $k_{11} \ldots k_{12}$ bestimmen, mit deren Hilfe es möglich ist, die beobachteten, zu einer Wellenlänge gehörigen Werte von $\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ darzustellen nach der Formel

$$4\sin^2\frac{\vartheta}{2} = k_{11}h_1^2 + k_{22}h_2^2 + k_{33}h_3^2 + 2k_{23}h_2h_3 + 2k_{31}h_3h_1 + 2k_{12}h_1h_2 \tag{2}$$

unter Benutzung von drei beliebigen, für jede Linie verschiedenen, ganzen Zahlen h_1, h_2, h_3. Der Vergleich von (2) mit (1) liefert dann eine

Bestimmung der drei Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ des Elementarparallelopipeds (nach Größe und gegenseitiger Orientierung). Die allgemeinen Formeln, welche dabei zu benutzen sind, haben wir in unserer Notiz über die Kohlenstoffmodifikationen angegeben[1]).

Man fängt am besten damit an, daß man zunächst die Interferenzen der β-Linie ausscheidet. Unter Beachtung der Intensitätsangaben gelingt das leicht, wenn man bedenkt, daß, wenn eine α-Linie z. B. einen Wert

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = g$$

erzeugt hat, durch Reflexion an derselben Kristallebene die β-Linie einen Wert

$$\sin\frac{\vartheta'}{2} = \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha} g$$

erzeugt. Wendet man diese Bemerkung auf die vorliegenden Werte von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ an, so scheiden die Zahlen in gewöhnlichem Druck aus, und es bleiben die 11 fettgedrucken Zahlen, als durch die α-Linie bedingt, übrig. Nun folgt sinngemäß die Bestimmung der Koeffizienten $k_{11} \ldots k_{12}$.

Auch wenn nichts über das Kristallsystem bekannt ist, wie im vorliegenden Falle, kann man sich diese Bestimmung oft sehr erleichtern. Dazu dient die folgende Bemerkung.

Angenommen, es gäbe eine Linie, welche zu

$$h_1 = p, \quad h_2 = q, \quad h_3 = r$$

gehört, dann wird man im allgemeinen noch 23 andere Linien erwarten können, welche mit denselben positiv oder negativ genommenen Zahlen p, q, r durch die quadratische Form (2) zusammenhängen; denn aus den Zahlen p, q, r; $-p, q, r$; $p, -q, r$ und $p, q, -r$ lassen sich im ganzen 4×6 Kombinationen bilden. Jede dieser Kombinationen liefert nach (2) einen anderen Wert von $\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ und damit eine neue Interferenzlinie. Ein trikliner Kristall liefert also im allgemeinen ein äußerst linienreiches Bild. Je größer die Symmetrie des Kristalls wird, um so weniger Interferenzlinien erzeugt das Kristallpulver. So wird z. B. bei einem kubischen Gitter

$$|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = |\mathfrak{c}| = a \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{c}\mathfrak{a}) = 0,$$

somit

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{C}) = a^4$$

und

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{A}) = 0.$$

1) Diese Zeitschr. **18**, 294, 1917.

Da weiterhin $I = a^3$ ist, so wird nach (1)

$$4\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda^2}{a^2}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2), \tag{3}$$

d. h. aus dem allgemeinen Falle (2) folgt der kubische, wenn

$$k_{11} = k_{22} = k_{33} = \frac{\lambda^2}{a^2}, \; k_{23} = k_{31} = k_{12} = 0$$

gesetzt wird. Dem entspricht es, daß die obengenannten 24 Kombinationen nunmehr nur eine einzige Interferenzlinie erzeugen, während sie im triklinen Falle deren 24 zustande brachten. Der größere oder geringere Linienreichtum einer Aufnahme gibt also, wenn man einigermaßen geübt ist, schon einen Anhalt über das zu erwartende System.

Im vorliegenden Falle nun ist die Zahl (11) der Linien verhältnismäßig klein, man wird also zunächst versuchen, ob ein kubischer Elementarbereich den beobachteten Werten von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ angepaßt werden kann. Wenn das aber zutrifft, dann müssen nach (3) die Quadrate von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ sich wie ganze Zahlen verhalten. Am bequemsten prüft man diese Vermutung mit Hilfe des Rechenschiebers, indem man nacheinander die Verhältnisse $\left(\frac{421}{302}\right)^2$, $\left(\frac{512}{421}\right)^2$, usw. einstellt und zusieht, ob und welche ganze Zahlen einander dann auf Zunge und Rahmen des Rechenschiebers gegenüberstehen[1]). Im vorliegenden Falle findet man so ohne weiteres, daß die Quadrate der fett gedruckten Zahlen sich verhalten wie

$$1:2:3:4:5:6:7:8:9:10:11,$$

natürlich unter Beachtung der möglichen Beobachtungsfehler.

Damit ist dargetan, daß Wolfram einen kubischen Elementarbereich besitzt.

2. Struktur und Größe des Elementarbereichs.

Nach (3) ist erforderlich, daß die ganzen Zahlen, welche $\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ der betreffenden Linien charakterisieren, sich darstellen lassen als Summe der Quadrate dreier anderer ganzen Zahlen,

1) Man kann auch die betreffenden Verhältnisse in Kettenbrüche entwickeln, die Näherungsbrüche geben dann die ganzzahligen Verhältnisse. Wie mir Herr Toeplitz mitteilt, besteht von diesem Verfahren eine Verallgemeinerung von Jacobi für die allgemeinere quadratische Form, dessen Ausarbeitung für die Kristalluntersuchungen von besonderem Interesse sein dürfte.



nämlich der Indizes h_1, h_2, h_3. Es muß also nun die Prüfung dieser Forderung folgen.

Dazu ordne ich zunächst alle möglichen Kombinationen dreier ganzer Zahlen h_1, h_2, h_3 nach der Größe ihrer Quadratsumme

$$Q = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2.$$

Bis zur Quadratsumme 22 erhält man die folgende Tabelle.

Tabelle I.

h_1, h_2, h_3	Q	h_1, h_2, h_3	Q	h_1, h_2, h_3	Q
001	1	212	9	**004**	16
101	2	003		104	17
111	3	**103**	10	223	
002	4	113	11	**114**	18
102	5	**222**	12	**303**	
112	6	203	13	313	19
202	8	**213**	14	**204**	20
				214	21
				323	22

Ein Blick auf diese Tabelle zeigt, daß die oben gefundenen Zahlen 1 bis 11 als Quadratsummen der Indizes unmöglich sind. Die Zahl 7 nämlich, welche in der obigen Proportion vorkommt und welche zu einer starken Linie mit $\sin\frac{\vartheta}{2} = 0{,}777$ gehört, läßt sich nicht durch die Summe dreier Quadrate von ganzen Zahlen darstellen: sie fehlt in der Tabelle I.

Nun sind wir aber nicht daran gebunden, die Zahlen 1 bis 11 selbst als Quadratsumme der Indizes anzusehen, es kann vielmehr irgendein ganzzahliges Vielfaches dieser Zahlen die Rolle der fraglichen Quadratsumme übernehmen. Das nächste Vielfache wären die Zahlen

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22;

als Quadratsummen sind diese Zahlen nach der Tabelle ohne weiteres möglich. Aber auch andere Vielfache lassen sich finden, deren Einzelzahlen gleich gut als Quadratsumme dreier ganzen Zahlen darstellbar sind. Wir müssen also jetzt eine Auswahl treffen.

Das geschieht unter Benutzung des für die Dichte des Wolframs gefundenen Wertes.

Tatsächlich bedingt nämlich nach (3) die Wahl von bestimmten Quadratsummen einen bestimmten Wert a für die Kantenlänge des Elementarkubus, da

$$\lambda = 1{,}316 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

bekannt ist und $\sin\frac{\vartheta}{2}$ beobachtet wurde. Ist aber hiernach a bekannt und ist m die wirkliche Masse eines Wolframatoms, dann wird die Dichte ϱ der Substanz gleich

$$\varrho = z\frac{m}{a^3}, \tag{4}$$

wenn z Atome im Elementarbereich vorhanden sind. Liest man (4) in der Form

$$z = \frac{\varrho a^3}{m}, \tag{4'}$$

dann muß also die Forderung gestellt werden, daß mit dem aus den angenommenen Quadratsummen folgenden Werte von a aus (4') die Zahl z sich als ganze Zahl ergibt.

Nehmen wir zur Ausführung dieser Rechnung z. B. die neunte, mit $\sin\frac{\vartheta}{2} = 0{,}877$ beobachtete starke Linie, und prüfen wir, ob der zugehörige Wert der Quadratsumme $Q = 18$ unserer Forderung genügt.

Durch Einsetzen der angegebenen Werte folgt zunächst aus (3)

$$a^2 = \frac{\lambda^2}{4}\frac{Q}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = 10{,}14 \cdot 10^{-16}.$$

Andererseits ist $\varrho = 18{,}7$ und $m = 300 \cdot 10^{-24}$, wenn die Masse eines Wasserstoffatoms zu $1{,}64 \cdot 10^{-24}$ g und das Atomgewicht von Wolfram zu 184 (auf $O = 16$ bezogen) angenommen wird. Aus (4') folgt also

$$z = \frac{18{,}7 \cdot 10{,}14\sqrt{10{,}14}}{300} = 2{,}01.$$

Die oben für die Quadratsummen an zweiter Stelle angenommenen Werte 2, 4, ... 22 passen also ohne weiteres und fordern $z = 2$ Atome im Elementarbereich mit der Kantenlänge $a = 3{,}18 \cdot 10^{-8}$ cm.

Zuletzt kommt nun noch die Frage nach der Lagerung dieser zwei Atome im Elementarbereich.

Die nunmehr getroffene Wahl der Werte 2 .... 22 für die Quadratsummen erfordert einen Grund dafür, warum die Interferenzlinien mit den nach der allgemeinen Tabelle zunächst gleich gut möglichen Quadratsummen 1, 3, 5, 9, ... nicht auftreten. Nach Tabelle I, in der die zu den beobachteten Linien gehörigen Indizes fett gedruckt sind, haben die übrigen Indizes die gemeinsame Eigenschaft, daß ihre jeweilige Summe ungerade ist. Die zwei Atome müssen also so gelagert werden, daß Reflexionen an Ebenen mit Indizes, deren Summe ungerade ist, sich durch Interferenz aufheben. Das ist aber der Fall, wenn der Elementarkubus raumzentriert ist, so daß das erste Atom im Eckpunkt und das zweite im Mittelpunkt jenes Kubus zu liegen kommt. In diesem Falle wird nämlich der Strukturfaktor

$$S = 1 + e^{i\pi(h_1+h_2+h_3)}, \tag{5}$$

da die Koordinaten der beiden Atome die Werte

$$0, 0, 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$$

haben. Nach (5) ist für Indizeskombinationen, deren Summe ungerade ist, der Strukturfaktor Null; sie liefern also keine Interferenzlinie.

Alle sonst möglichen, zu λ_α gehörigen Interferenzlinien sind nach Ausweis der Tabelle I im Vergleich mit den am Anfang von § 1 angegebenen Werten von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ beobachtet.

Sehen wir die fehlenden Linien mit ungerader Indizessumme als wirkliche Linien mit der Intensität Null an, dann liegt es nahe, auch die endliche Intensität der beobachteten Linien mit den zugehörigen Werten des Strukturfaktors in Zusammenhang zu bringen. Abgesehen von dem mehr äußerlichen Einfluß der Absorption im zerstreuenden Präparat kann die Intensität einer Interferenzlinie als Produkt der folgenden Faktoren dargestellt werden:

a) der Zerstreuungsfaktor, der die Fähigkeit des Atoms mißt, Sekundärstrahlung zu erzeugen,

b) der Interferenzfaktor, gleich dem Quadrat des absoluten Betrages des Strukturfaktors,

c) der Lorentzsche Faktor, proportional dem reziproken Werte der in (2) auftretenden quadratischen Form,

d) der Temperaturfaktor, der die Schwächung der Interferenzen infolge der Wärmebewegung mißt, und schließlich bei der hier angewandten Methoden noch

e) die Zahl der Netzebenen, welche in einer Interferenzlinie zusammenwirken.

Berücksichtigen wir hier nur a), b), c) und e), und dabei a) nur so, daß wir nach der einfachen Thomsonschen Formel auf die Elektroneninterferenzen[1]) gar nicht achten, dann wird bis auf einen Proportionalitätsfaktor die Intensität I gleich

$$I = \frac{1 + \cos^2\vartheta}{2} \cdot 2\{1 + \cos\pi(h_1 + h_2 + h_3)\} \cdot \frac{1}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \cdot n, \tag{6}$$

wobei n die Zahl der reflektierenden Netzebenen bedeutet.

In der folgenden Tabelle II enthält nun die erste Reihe die Indizes einer der zusammenwirkenden reflektierenden Ebenen, die zweite die Zahl n, die dritte die nach (6) berechnete Intensität und die vierte die geschätzte Intensität nach der Zusammenstellung am Anfang des Paragraphen, alles für die durch λ_α erzeugten 11 Interferenzen.

Tabelle II.

$h_1 h_2 h_3$	n	I		$\sin\frac{\vartheta}{2}$ beob.	$\sin\frac{\vartheta}{2}$ ber.	$\sin\frac{\vartheta}{2}$ beob.	$\sin\frac{\vartheta}{2}$ ber.
011	12	20	st	0,302	0,293	0,260	0,250
002	6	4,2	m	0,421	0,414	0,343	0.353
112	24	9,8	st	0,512	0,507	0.436	0.433
022	12	3,3	m	0,590	0,585	0,490	0,500
013	24	4,9	st	0,058	0,654	0,560	0,558
222	8	1,3	m-s	0,720	0,716	0,625	0,611
123	48	7,2	st	0,777	0,775	—	0,660
004	6	0,86	s	0,829	0,828	—	0,707
{114, 033	{24, 12	5,2	st	0,877	0,877	0,745	0,749
024	24	3,6	st	0,923	0,925	0.790	0,789
233	24	3,9	st	0,970	0,970	—	0,827

Man sieht, wie die Schätzung der Stärke ganz parallel läuft mit den berechneten Werten von I, insbesondere kommt sehr schön die Schwäche der Reflexion vierter Ordnung an den Hexaederebenen ($h_1 = 0$, $h_2 = 0$, $h_3 = 4$) zum Ausdruck. In dieser Übereinstimmung kann man eine nachträgliche Bestätigung des angenommenen Strukturfaktors und damit eine erneute Rechtfertigung des raumzentrierten Würfels erblicken.

Als fünfte Reihe sind der Tabelle die beobachteten Werte von $\sin\frac{\vartheta}{2}$, als sechste die berechneten hinzugefügt. Die Berechnung geschah nach (3) unter Benutzung der oben gefundenen Kantenlänge $a = 3{,}18 \cdot 10^{-8}$ cm, d. h. nach der Formel:

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = 0{,}207\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}.$$

In den zwei letzten Vertikalreihen schließlich sind die beobachteten bzw. berechneten Werte von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ eingetragen für die durch die β-Linie erzeugten Interferenzen. Die Berechnung geschah nach der Formel

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{1{,}121}{1{,}316}\, 0{,}207\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}.$$

Die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Werten für $\sin\frac{\vartheta}{2}$ liegen durchweg innerhalb der Fehlergrenze[1]).

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 46, 809, 1915.

1) Die besonders für kleine Winkel auftretende systematische Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung läßt sich übrigens im wesentlichen zurückführen auf den Einfluß der Dicke des zerstreuenden Stäbchens. Da nur dessen Ränder strahlen, werden besonders die kleinen Winkel etwas zu groß gemessen.

Sogar dafür, daß einige von den sehr schwachen, zu λ_β gehörigen Interferenzen nicht beobachtet sind, lassen sich gute Gründe anführen. Die Linie 0,660 fällt auf die von λ_α herrührende 0,658; die Linie 0,707 sollte die λ_β-Interferenz von 0,829 sein, oben wurde aber schon darauf aufmerksam gemacht, daß diese Interferenz auch theoretisch schon in der α-Linie, als Reflexion vierter Ordnung, schwach ausgebildet ist, es ist also verständlich, daß die λ_β-Interferenz nicht mehr kommt. Die Linie 0,827 fällt wieder zusammen mit der λ_α-Interferenz 0,829. Schließlich erklärt sich noch die nicht in Tabelle II aufgenommene Linie 0,900 der Zusammenstellung am Anfang als die λ_β-Interferenz, entstanden bei der Reflexion an $h_1 = 0$, $h_2 = 1$, $h_3 = 5$, denn unter dieser Annahme berechnet sich sin $\frac{\vartheta}{2} = 0{,}900$, sogar genau übereinstimmend mit dem beobachteten Werte. Die zugehörige λ_α-Interferenz würde sin $\frac{\vartheta}{2} = 1{,}055$ erfordern, ist also nicht mehr reell.

Zusammenfassend scheint mir die in der Einleitung angegebene Struktur des Wolframs durch die obigen Zahlen sehr gut begründet zu sein. Man sieht, wie die Methode verhältnismäßig leicht zu erschöpfenden Angaben führt, sogar in Fällen wie der vorliegende, wo von vornherein gar nichts über die Struktur des Präparats bekannt ist.

Göttingen, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 3. August 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Röntgenspektroskopie.

Von Ernst Wagner.

(Schluß.)

§ 3. Sommerfelds[1]) Weiterführung der Bohrschen Theorie.

Die Feinstruktur des Spektrums.

Bohr hatte seine Betrachtungen auf kreisförmige Elektronenbahnen beschränkt, die durch Ansatz I quantengemäß diskret definiert waren. Sommerfeld stellte in einer grundlegenden Untersuchung den allgemeinen Quantenansatz für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden auf, nach dem für jeden Freiheitsgrad (Koordinate q) das „Phasenintegral" ein vielfaches (n) des Wirkungsquantums h sein soll. Wenn der zu q gehörige Impuls

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \quad (T = \text{lebendige Kraft})$$

ist, lautet der Ansatz:

$$\int p \cdot dq = n \cdot h.$$

Die Integration ist über den Veränderlichkeitsbereich von q zu erstrecken.

Im Falle der Keplerschen Bewegung eines Elektrons (Masse μ) um einen positiv geladenen Kern sind zwei Freiheitsgrade zu berücksichtigen. Die erste Quantenbedingung bezieht sich auf die azimutale Koordinate $q = \varphi$ in der Keplerschen Bahn, zu welcher als Impuls die Flächenkonstante $p = \mu \cdot r^2 \dot{\varphi}$ gehört (r = Radiusvektor).

Die „azimutale Quantenbedingung" lautet:

$$p \int_0^{2\pi} d\varphi = nh \tag{17}$$

Sie ist bei Kreisbahnen mit dem Bohrschen Ansatz I identisch. Die zweite, „radiale Quantenbedingung" bezieht sich auf $q = r$ und lautet:

$$\int \mu \dot{r}\, dr = n' \cdot h. \tag{18}$$

Es zeigt sich, daß (17) und (18) zusammen konfokale Ellipsenbahnen mit diskreten Werten der Exzentrizität ε definieren, darunter die Kreisbahn mit $n' = 0$:

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{n^2}{(n+n')^2}.$$

Für die Energiewerte der verschiedenen Bahnen ergibt sich das überraschend einfache Resultat:

$$W_{n,n'} = -\frac{\nu_0 h}{(n+n')^2}. \tag{19}$$

Hiernach ist die Energie der verschiedenen Kreis- und Ellipsenbahnen nur abhängig von der Summe $(n+n')$ der Quantenzahlen und unabhängig von der Kombination wie die Quantenzahlen einzeln auf die zwei Freiheitsgrade verteilt sind. Die Summe $(n+n')$ ist aber in $(n+n')$-facher Weise aus den zwei Einzelwerten n und n' zusammenzusetzen, wenn „Pendelbahnen" mit dem azimutalen Quantum $n = 0$ nach Sommerfeld ausgeschlossen werden. Wir haben also $(n+n')$ Kreis- und Ellipsenbahnen von genau der gleichen Energie.

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51, 1 u. 125, 1916.

Nach der Bohrschen Frequenzgleichung II erhält man hiernach, wenn man das Elektron von einer Anfangsbahn mit den Quantenzahlen m, m' zu einer Endbahn mit n, n' übergehen läßt, die Sommerfeldsche verallgemeinerte Serienformel für Wasserstoff:

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{1}{(n+n')^2} - \frac{1}{(m+m')^2} \right) . \tag{20}$$

Durch die Zulassung von zwei Freiheitsgraden (d. i. von Ellipsenbahnen) wird also die Mannigfaltigkeit der Erzeugungsmöglichkeit einer jeden Serienlinie zwar sehr vergrößert, aber die entstehenden Frequenzen bleiben in allen den vermehrten Kombinationen die gleichen.

Sommerfeld konnte nun zeigen, daß bei Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse mit der Geschwindigkeit (nach dem Relativitätsprinzip) die Energie der verschiedenen Bahnen, die bei gegebener Quantensumme $(n+n') = \text{const.}$ zu verschiedenen Einzelwerten n und n' gehören, nicht mehr völlig gleich wird, sondern jeweils in charakteristischer Weise ein wenig auseinander fällt. Infolge der Frequenzbedingung II muß somit die soeben betrachtete Mannigfaltigkeit der Entstehungsart, die in erster Annäherung zu derselben Serienfrequenz führte, in Wirklichkeit Veranlassung geben zu einer ebenso großen Mannigfaltigkeit von Frequenzwerten, die sich wenig voneinander unterscheiden, d. h. zu einer Feinstruktur der Serienlinien.

Die geschlossene Frequenzdarstellung lautet im Falle der Kernladung $E = N \cdot e$:

$$\nu = \frac{\mu_0 c^2}{h} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 N^2}{\left(n' + n\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha N}{n}\right)^2}\right)^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 N^2}{\left(m' + m\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha N}{m}\right)^2}\right)^2}}} \right\} \tag{21}$$

Hier bedeuten μ_0 = Ruhemasse des Elektrons,

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{h \cdot c} = 7{,}29 \cdot 10^{-3}$$

(Konstante der Feinstruktur); $c = 3 \cdot 10^{10}$.

Die Analogie zur einfachen Seriendarstellung (20) tritt besser in Verfolgung der Näherungsformel für die Energie $W_{n,n'}$ einer Bahn mit den Quantenzahlen n und n' hervor:

$$W_{n,n'} = -\frac{\nu_0 h}{(n+n')^2} \cdot N^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 N^2}{(n+n')^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{n'}{n} \right) \right\} \tag{22}$$

Bezeichnet man die geschweifte Klammer, die den Relativitätseinfluß mißt, mit f_n bzw. f_m, je nachdem sie die Quantenzahlen n, n' oder m, m' enthält, so folgt als Frequenz:

$$\nu = \nu_0 N^2 \left\{ \frac{1}{(n+n')^2} \cdot f_n - \frac{1}{(m+m')^2} \cdot f_m \right\} \tag{23}$$

Ebenso wie die Bohrsche Spektralformel ist auch die Sommerfeldsche Feinstrukturgleichung lediglich aus universellen Naturkonstanten und ganzen Zahlen aufgebaut, was ihr ein ganz besonderes theoretisches Gepräge verleiht.

Die qualitativ zu erwartenden Multiplizitäten der Linien können wir leicht überblicken, wenn wir die verschiedenen Bahnen nach ihrem Energiewert als Kreise mit verschiedenen Radien schematisch darstellen (vgl. Fig. 22).

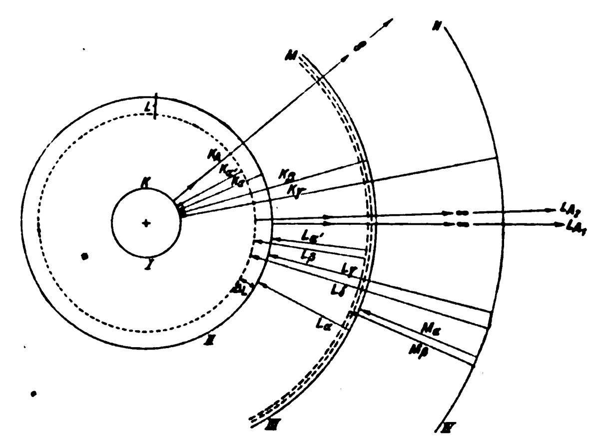


Fig. 22.

Unter den gleichquantigen Bahnen $(n+n')$ = const. sind die Ellipsenbahnen punktiert gezeichnet; die Bahnen mit den größeren Exzentrizitäten haben nach (22) die absolut gerechnet größere, also algebraisch gerechnet kleinere Energie.

Der innersten Bahn I (K-Ring) entspricht die Quantensumme $(n+n') = 1$.

Sie muß einfach und eine Kreisbahn sein, da nur die eine Zerlegung möglich ist:

$$n = 1 \qquad n' = 0.$$

Der zweiten Bahn II (L-Ring) entspricht $(n+n') = 2$. Bei dieser zweiquantigen Anordnung liegen zwei Möglichkeiten vor:

$n = 2 \quad n' = 0$ Kreisbahn
$n = 1 \quad n' = 1$ Ellipse.

Die dritte Bahngruppe III (M-Ring) ist dreiquantig: $(n+n') = 3$.

Hier sind drei Bahnen möglich, entsprechend der Zerlegung:

$n = 3 \quad n' = 0$ Kreis
$n = 2 \quad n' = 1$ } Ellipsen.
$n = 1 \quad n' = 2$ } usw.

Die einfachste Frequenzserie, die sich aus diesen Bahnen herleitet, wird nach der Frequenzformel (20) mit den Werten $(n+n') = 1$ und $(m+m') = 2, 3, 4 \ldots$ gebildet.

Ihr entspricht die ultraviolette H-Serie bzw. bei N-fach geladenem Kern die K-Serie. Diese Serie muß nach dem Ringschema Fig. 22 folgende Feinstruktur zeigen:

Es entsteht als Feinstruktur beim Übergang des Elektrons zum einfachen (K)-Ring I vom
zweifachen Ring II (L) ein Dublett
dreifachen Ring III (M) ein Triplett
vierfachen Ring IV (N) ein Quartett.
usw.

Die nächst komplizierte Serie mit
$(n+n') = 2$ und $(m+m') = 3, 4, 5 \ldots$
ist die Balmerserie des Wasserstoffs bzw. die L-Serie.

Sie läßt folgende Feinstruktur erwarten:

Die Übergänge des Elektrons von den äußeren Ringanordnungen III, IV, V usw. zum zweifachen Ring II ergeben Dubletts aller Serienlinien von konstantem Schwingungszahlenunterschied. Diese Dublettlinien bilden ihrerseits eine Gruppe von engerer Feinstruktur, die nach Maßgabe ihrer Herkunft vom III, IV usw. Ring aus 3, 4 usw. feinen Linien besteht. So lassen sich die immer reicheren Multiplizitäten der höheren Serienlinien leicht herleiten. Sommerfeld gibt eine statistisch begründete[1]), im Funkenspektrum empirisch zutreffende Regel an, wonach die Intensität der Linien durch die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Bahnen bzw. Bahnübergänge des Elektrons bestimmt erscheint (Kreisbahn ist wahrscheinlicher als die Ellipse) und durch das Verhältnis der Quantenzahlen m, n reguliert wird, die beim Elektronenübergang in Frage kommen. In Ergänzung dazu postuliert er gewisse „Quantenungleichungen", durch die einige Linien geschwächt oder ganz unterdrückt werden sollen[2]).

Auf ihrem eigentlichen Anwendungsgebiet, dem H- und He-Serienspektrum, hat bekanntlich die Sommerfeldsche Feinstrukturlehre eine ausgezeichnete Bestätigung gefunden durch Paschen nicht nur qualitativ in den Multiplizitäten der Linien, sondern vor allem in den quantitativen Beziehungen. — Die Theorie liefert für den charakteristischen Wert der Feinstruktur, d. i. die Schwingungszahlendifferenz $\Delta\nu$, die aus der Energiedifferenz $W_{1,1} - W_{2,0}$ der zweiquantigen Ellipse gegenüber dem Kreis hervorgeht, in erster Annäherung nach (22):

$$\Delta\nu = -\frac{W_{1,1} - W_{2,0}}{h} = \frac{\nu_0 \cdot \alpha^2}{2^4} \cdot \left(\frac{E}{e}\right)^4 \quad (24)$$

Für Wasserstoff ($E = e$) ist der theoretische Wert $\Delta\nu_H = 0{,}363$ in guter Übereinstimmung mit der Messung der feinen Dubletts in der Balmerserie. Für ionisiertes Helium ($E = 2e$) erscheint $\Delta\nu$ gegenüber $\Delta\nu_H$ 16-fach vergrößert. Paschen entnimmt aus seinen Messungen an der Feinstruktur der Heliumlinien als genauesten Wert

$$\Delta\nu_H = 0{,}365 \pm 0{,}005.$$

Es mag noch erwähnt sein, daß die Größen aller möglichen Feinstrukturen $\Delta\nu$ bei beliebigen Serien und Elementen im Verhältnis einfacher rationaler Zahlen stehen, sofern sie wasserstoffähnlichen Ursprung haben.

Auf dem Gebiete der Röntgenserien bewährt sich die in der Moseleyschen Darstellung der Hauptserienlinien K_α und L_α betonte Wasserstoffähnlichkeit überraschenderweise auch in der Feinstruktur der K- bzw. L-Serie. So zeigt sich die K-Serie als eine einfache Serie ohne Feinstruktur und mit nur einer Absorptionsbandkante entsprechend dem Werte $(n+n') = 1$. So ist die L-Serie eine Dublettserie, wenn wir das größere L-Dublett allein heranziehen, entsprechend $(n+n^1) = 2$. Allerdings scheint das weitgetrennte L-Dublett ΔL zunächst nicht als „Fein"-Struktur gelten zu können im Vergleich zu dem minutiösen H-Dublett in der Balmer-Serie. Indessen liefert gerade das Sommerfeldsche Feinstrukturgesetz (24) durch seine Beziehung auf den Faktor $\left(\frac{E}{e}\right)^4$ den völlig bündigen Nachweis für die Richtigkeit einer solchen Auffassung von der Wasserstoffähnlichkeit des L-Dubletts.

Nehmen wir unter Vorwegnahme späterer Ergebnisse statt der Kernladung der Elemente $e \cdot N = E$ die effektive Kernladung $(N - 3{,}5) \cdot e$, so lautet das Sommerfeldsche Gesetz (24)

$$\Delta\nu = \Delta\nu_H \cdot (N - 3{,}5)^4. \quad (25)$$

In der folgenden Tabelle von Sommerfeld sind die aus den gemessenen $\Delta\nu$ auf Grund von (25) berechneten $\Delta\nu_H$ zusammengestellt (zum Teil aus den K-Dubletts α, α', die den L-Dubletts gleichen).

In Anbetracht des gewaltigen Bereiches der $\Delta\nu$ von $8 \cdot 10^4$ bis $3 \cdot 10^7$ ist die Konstanz von $\Delta\nu_H$ vorzüglich zu nennen. Der geringe Gang von $\Delta\nu_H$ mit N wird völlig erklärt durch Heranziehung der folgenden genaueren Formel, die auch die höheren Glieder des

1) A. Sommerfeld, Sitz-Ber. d. bayr. Ak. 1917.

2) Aus solchen Intensitätsgründen ist im L-Dublett $L\beta - L\alpha'$ die schwächere α'-Linie statt der stärkeren α-Linie zu wählen.

Tabelle XI.

	$\Delta\nu$	$\Delta\nu_H$
	K-Dubletts.	
24 *Cr*	0,77 . 10^5	0,43
29 *Cu*	1,68 . 10^5	0,40
30 *Zn*	1,94 . 10^5	0,39
35 *Br*	4,64 . 10^5	0,47
40 *Zr*	8,00 . 10^5	0,45
45 *Rh*	1,05 . 10^6	0,35
47 *Ag*	1,57 . 10^6	0,44
	L-Dubletts.	
47 *Ag*	1,39 . 10^6	0,389
50 *Sn*	1,83 . 10^6	0,391
55 *Cs*	2,76 . 10^6	0,393
60 *Nd*	4,08 . 10^6	0,400
63 *Eu*	5,21 . 10^6	0,415
68 *Er*	7,31 . 10^6	0,421
71 *Ad*	8,98 . 10^6	0,432
73 *Ta*	1,014 . 10^7	0,435
76 *Os*	1,222 . 10^7	0,443
78 *Pt*	1,370 . 10^7	0,445
80 *Hg*	1,465 . 10^7	0,451
82 *Pb*	1,742 . 10^7	0,459
83 *Bi*	1,853 . 10^7	0,464
90 *Th*	2,735 . 10^7	0,489
92 *U*	3,053 . 10^7	0,498

Relativitätseinflusses auf die Elektronenmasse berücksichtigt:

$$\Delta\nu = (N-3,5)^4 \cdot \Delta\nu_H \left(1 + \frac{5}{2}\alpha^2 \frac{(N-3,5)^2}{2^2} + \frac{53}{8}\alpha^4 \frac{(N-3,5)^4}{2^4}\right). \quad (26)$$

Infolge der hohen Kernladung, die mit der vierten Potenz eingeht, erscheint also die Feinstruktur $\Delta\nu$ in den *L*-Dubletts der Röntgenserien ungeheuer vergrößert (bei Uran ($N=92$) $70 \cdot 10^6$ mal $\Delta\nu_H$); dies ist in der Massenzunahme des Elektrons begründet, die sich bei den großen Bahngeschwindigkeiten um den hochgeladenen Kern stark geltend macht.

Das zweite *L*-Dublett ΔA erweist seine Herkunft als echtes Feinstrukturdublett dadurch, daß es in der Beziehung (25) die allgemeine Abhängigkeit zwischen ΔA und N erfüllt. Die theoretische Herleitung seiner absoluten Größe fehlt indessen noch.

Isolierung des *L*- und *K*-Terms.

Die theoretisch vollkommene Bewältigung der Dublettstruktur der *L*-Serie ermöglichte es Sommerfeld, daran anschließend den sogenannten „*L*-Term" der Serienformel aus den Dublett-Beobachtungen wie folgt abzuleiten.

Die Schwingungszahlen gehen nach der Serienformel stets aus der Differenz zweier Terme hervor; z. B. $\nu_{K\alpha}$ und $\nu_{L\alpha}$ in der Moseleyschen Darstellung aus der Differenz der zwei Terme K und L bzw. L und M:

$$\nu_{K\alpha} = \nu_0 (N-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \nu_0 (K-L)$$

$$\nu_{L\alpha} = \nu_0 (N-7,4)^2 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \nu_0 (L-M).$$

Die Terme $K, L \ldots$ sind reine Zahlen. $\nu_0 \cdot K$ z. B. stellt die Grenzfrequenz der *K*-Serie dar; $h\nu_0 K$ bedeutet die Energie der *K*-Bahn.

Während Moseley beiden Termen derselben Frequenzformel die gleiche effektive Kernladung zuschreibt, ordnet Sommerfeld jedem Term (jeder Bahn) eine eigene effektive Kernladung zu, dem *K*-Term die Kernladung: $(N-k)\cdot e$, dem *L*-Term $(N-l)\,e$. Indem er vorläufig die Quantensummen ebenfalls als unbestimmte Größen a und b einführt, erhält er (ohne die Relativitätskorrektionen):

$$\nu_{K\alpha} = \nu_0 \left\{\frac{(N-k)^2}{a^2} - \frac{(N-l)^2}{b^2}\right\} = \nu_0 (K-L)$$

$$\nu_{L\alpha} = \nu_0 \left\{\frac{(N-l)^2}{b^2} - M\right\} = \nu_0 (L-M).$$

Der *L*-Term $L = \frac{(N-l)^2}{b^2}$ wird nun unmittelbar nach Sommerfeld aus den Werten ΔL des *L*-Dubletts nach der Feinstrukturformel (26) gewonnen, wenn dort die unbekannten Werte l und b an Stelle von 3,5 und 2 gesetzt werden. Aus der Reihe der gemessenen $\Delta\nu$ findet Sommerfeld $\frac{N-l}{b}$ in Abhängigkeit von N als eine genaue Gerade, aus deren Neigung der genaue ganzzahlige Wert 2,000 für die Quantensumme b folgt.

Hiermit ist die Wasserstoffähnlichkeit des *L*-Terms empirisch bewiesen. Für l ergab sich der Wert 3,5, also eine nicht ganze Zahl für die effektive Kernladung, ein Resultat, das eine Schwierigkeit im Rahmen der Theorie bedeutet.

Die streng lineare Darstellung von $\frac{N-l}{b}$ in Abhängigkeit von N wird wesentlich erreicht durch Berücksichtigung auch der höheren Glieder des Relativitätseinflusses der Elektronenmasse in der Formel (26). Es ist von Interesse, daß nach einer Untersuchung von K. Glitscher[1]) das Abrahamsche Elektron zwar auch jene lineare Darstellung liefert, aber statt der Ganzzahligkeit für $b=2,000$ den Wert 1,892 ergibt und überhaupt die gemessene Größe der Feinstruktur mit den zuverlässigsten Werten für ν_0, h, c nicht wiederzugeben vermag.

Nach der Isolierung des *L*-Terms ergibt sich weiter der *K*-Term K nach Sommerfeld aus

1) Ann. d. Phys. **52**, 608, 1917.

den beobachteten K_α-Frequenzen auf Grund der Kombinationsformel:

$$\nu_{K\alpha} = \nu_0 (K - L). \qquad (27)$$

Die genaue, den hier besonders ins Gewicht fallenden Relativitätseinfluß berücksichtigende Abhängigkeit des K-Terms von $\frac{N-k}{a}$ lautet:

$$K = \nu_0 \frac{(N-k)^2}{a^2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{4} \left(\frac{N-k}{a} \right)^2 + \frac{a^4}{8} \left(\frac{N-k}{a} \right)^4 + \frac{5}{64} a^6 \left(\frac{N-k}{a} \right)^6 \right\}. \qquad (28)$$

Aus (27) und (28) findet Sommerfeld $\left(\frac{N-k}{a}\right)$ in Abhängigkeit von N wiederum als eine scharfe Gerade. a erweist sich wiederum genau ganzzahlig $= 1{,}000$;

k wird $= 1{,}64$.

Der K- und L-Term und der Ursprung der K_α-Frequenzen erscheinen hiernach als streng wasserstoffähnlich; freilich unter Annahme von zwei verschiedenen und nicht ganzzahligen wirksamen Kernladungen.

Gegenüber der Moseleyschen nur roh angenäherten Darstellung (2) der K_α-Frequenzen mit der einen empirischen Konstanten 1 im Werte $(N-1) \cdot e$ der effektiven Kernladung erhält somit Sommerfeld die innerhalb der Meßfehler genaue Formel:

$$\frac{\nu_{K\alpha}}{\nu_0} = \frac{f_1 \cdot (N-1{,}6)^2}{1^2} - \frac{f_2 \cdot (N-3{,}5)^2}{2^2}. \qquad (29)$$

Diese enthält eine neue empirische Konstante 1,6 außer der schon vorher eingeführten 3,5 neben den Funktionen f_1 und f_2, in die nur universelle Größen, dann die Quantenzahlen und die Kernladungen eingehen und welche den Relativitätseinfluß messen (vgl. [23]).

Die Darstellung der höheren Terme $M, N, O \ldots$ in analoger Weise wie die des K-Terms aus schon bekannten Termen und passend zu wählenden Frequenzen der höheren Serienglieder ergab nach Sommerfeld:

1. daß keine Wasserstoffähnlichkeit für jene Terme besteht;

2. daß zwischen den Termen die Beziehungen, die man nach dem Kombinationsprinzip erwarten kann, nicht strenge gelten.

So fällt der M_L-Term nach der Formel $\nu_{L\alpha} = \nu_0 (L - M_L)$ nicht völlig mit dem M_K-Term nach $\nu_{K\beta} = \nu_0 (K - M_K)$ zusammen, indem man erhält:

$$M_L = \left(\frac{N - 1{,}7}{2{,}84} \right)^2$$

und

$$M_K = \left(\frac{N - 1{,}4}{2{,}78} \right)^2.$$

Diese Inkongruenz ist gleichbedeutend damit, daß die Kosselsche Frequenzgleichung

$$L_\alpha = K_\beta - K_\alpha$$

nicht streng erfüllt wird, wie oben erörtert.

Analog ergeben sich für den N-Term verschiedene Werte, je nachdem er aus K_γ und dem K-Term nach der Formel $\nu_{K\gamma} = \nu_0 (K - N_K)$ oder aus L_γ und dem L-Term nach der Formel $\nu_{L\gamma} = \nu_0 (L - N_L)$ hervorgeht, indem folgt:

$$N_K = \left(\frac{N + 0{,}7}{3{,}09} \right)^2$$

und

$$N_L = \left(\frac{N + 1{,}2}{3{,}25} \right)^2.$$

Entbehrt so die Darstellung der höheren Terme der theoretischen Grundlage, so mag sie zu empirischen Interpolationszwecken immerhin von Nutzen sein.

Versagen der Wasserstoffähnlichkeit der Spektren infolge des Einflusses der äußeren Elektronen im Atom.

Die Bohr-Sommerfeldsche Spektraltheorie bezieht sich zunächst auf das H-Spektrum und H-ähnliche Spektren: die Anwesenheit von mehr als dem einen strahlenden Elektron im Potentialfeld der effektiven Kernladung bleibt unberücksichtigt. Die Röntgenspektren scheinen zum Teil aufs genaueste H-ähnlich: so die Existenz und Größe der Feinstruktur (das L-Dublett), ferner der L- und K-Term und deren Folge, die K_α-Frequenz. Dagegen erwiesen sich die höheren Terme beträchtlich H-unähnlich; ferner zeigt sich insbesondere, daß der K- und L-Term einer bedeutend größeren Frequenz entspricht als die wirklich beobachteten Frequenzen K_A bzw. L_A der Absorptionsbandkanten der betreffenden Serien sind. Wir sollten erwarten, daß mit letzteren als den Seriengrenzen die Terme K und L der Serienformel zusammenfallen. Gehen wir auf die Energiebedeutung von Term und Absorptionsgrenze zurück, so zeigt sich:

Der Term bedeutet die Energie, ein Elektron von der betreffenden Bahn im ungestörten Coulombschen Potentialfeld der effektiven Kernladung bis zur Unendlichkeit (Atomoberfläche) zu schaffen; die wirkliche Ablösearbeit aber wird gemessen durch die Energie, welche der Frequenz der Absorptionskante entspricht. Darin, daß letztere sich kleiner als der Term erweist, zeigt sich nach Kossel[1]) und Sommer-

---

1) W. Kossel, Ber. d. D. Phys. Ges. 18, 354, 1916.



feld[1]) der Einfluß der übrigen Elektronen im Atom.

Denkt man sich nämlich diese als Elektronenwolke vereinfachterweise auf einer peripheren Kugelschale vom Radius R im Atom angeordnet, so wird durch sie das Coulombsche Feld der Kernladung nach außen ihrer Ladung gemäß abgeschirmt, nach innen aber ungestört gelassen. Demzufolge wird einerseits die wirkliche Ablösearbeit des Elektrons, die durch die Absorptionsgrenzen ν_A gegeben wird, in Übereinstimmung mit der Erfahrung verkleinert; andererseits wird innerhalb der Wolke ungestörte H-Ähnlichkeit weiter bestehen. Hier sind die K- und L-Bahnen zu suchen, und zwar sowohl die L_1- wie die L_2-Bahn mit ihrer H-ähnlichen Feinstruktur. Hiermit in Übereinstimmung berechnet Sommerfeld aus dem Unterschied zwischen Term und Absorptionsgrenze für den Radius der Elektronenschale einen Wert, der letztere zwischen die L- und M-Bahn verlegt.

Außerhalb der Wolke in größerer Entfernung von dem Atom wird wiederum H-Ähnlichkeit bestehen bei kleiner effektiver Kernladung; das ist das optische Gebiet, dessen Frequenzen durch die Bohrschen Ansätze bezeichnenderweise gerade in den höchsten Seriennummern gut dargestellt werden, deren Entstehung am weitesten von der Wolke entfernt liegt.

Finden Elektronenübergänge zwischen Bahnen durch die Wolke hindurch statt, so müssen Abweichungen von der H-Ähnlichkeit stattfinden ($M, N, \ldots$ Serie und die höheren Seriennummern der K- und L-Serie), die die einfache Theorie ohne spezielle Annahmen nicht meistern kann.

R. Swinne[2]) hat eine ausführliche Prüfung der Sommerfeldschen Theorie an den vorliegenden Messungen mitgeteilt, die im wesentlichen zu ähnlichen Resultaten gelangt wie Sommerfeld selbst; insbesondere findet er als effektive Kernladung des K- bzw. L-Terms ebenfalls $(N - 1{,}6) \cdot e$ bzw. $(N - 3{,}6) \cdot e$.

Bezüglich einzelner Fragen der Linienzuordnung und der auch von R. Swinne betonten noch ungeklärten Gültigkeitsgrenzen des Kombinationsprinzips vergleiche man die Sommerfeldsche Besprechung Bayr. Ak. 1916, S. 151.

1) A. Sommerfeld. Ann. d. Phys. 51, 162, 1916.

2) R. Swinne, diese Zeitschr. 17, 481, 1916. Von Swinne rühren ferner noch interessante Betrachtungen über den möglichen Ursprung der γ-Strahlenspektren bei den instabilen Elementen. Sie beziehen sich auf die Frage, ob charakteristische Spektralserien zu erwarten sind durch den sprungweisen Übergang vom Zustand des ursprünglich vorhandenen Elements zu demjenigen des neu entstandenen.

§ 4. Der Ursprung der K_α-Frequenz nach Debye.

In einer jüngst in dieser Zeitschr. (18, 276, 1917) unter dem Titel: „Der erste Elektronenring der Atome" mitgeteilten Untersuchung kommt Debye auf Grund ganz bestimmter Vorstellungen innerhalb des Bohrschen Gedankenkreises zu einer ebenso exakten, d. h. innerhalb der Meßfehler gültigen Darstellung der K_α-Frequenzen der Elemente, wie sie die Sommerfeldsche war (29). Vor der letzteren hat jene den prinzipiellen Vorzug, den letzten empirischen Rest zu vermeiden, der in den zwei effektiven Kernladungswerten 1,6 und 3,5 der Frequenzformel (29) noch steckte und ν als strenge Folge der einfachen Grundannahmen abzuleiten. Diese lauten nach Debye: „Der dem Kern benachbarte K-Ring enthält drei Elektronen in gleichen Winkelabständen, die mit je einem Wirkungsquantum behaftet um den Kern mit der Ladung $N \cdot e$ auf einem Kreise rotieren (Zustand I). Aus diesem Kreise kann ein Elektron entfernt werden und mit zwei Quanten versehen allein auf eine kreisähnliche Bahn gebracht werden, während die zwei übrig gebliebenen Elektronen nun dem Kern näher rücken und in 180° Winkelabstand einen neuen Kreis um den Kern beschreiben (Zustand II). Der Übergang der drei Elektronen von der zweiten Anordnung in die erste erzeugt die K_α-Linie."

Die Durchführung der Rechnung geschieht ganz auf Bohrscher Grundlage, indem die Differenz der Gesamtenergien $W_{\rm I} - W_{\rm II}$ des Elektronensystems in den zwei Quantenzuständen nach der Frequenzbedingung H die gesuchte Frequenz ν ergibt:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{3}{4} N^2 + B_p \cdot N + C_p \cdot$$

B_p und C_p sind leicht zu berechnende Zahlen, die von der vorerst unbestimmt gelassenen Anzahl p der Elektronen im K-Ring abhängen. Die Bestimmung von p muß aus dem Vergleich der theoretischen Formel mit den beobachteten Werten von ν nach Siegbahn u. a. gewonnen werden. Das Verfahren Debyes ist folgendes: Bildet man

$$\left(\frac{\nu}{\nu_0} - \frac{3}{4} N^2\right) = \Delta = B_p \cdot N + C_p ,$$

so stellt sich Δ in linearer Abhängigkeit von N

dar. Die aus den beobachteten Werten $\nu_{\text{beob.}}$ hervorgehenden Werte $\Delta_{\text{beob.}}$ für die ersten Elemente von $N = 11$ bis ca. 25 liegen nun genau auf der Linie, die $p = 3$ Elektronen entspricht.

Die Formel wird in diesem Falle:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{3}{4} N^2 - 1{,}464\, N - 0{,}125$$

in guter Übereinstimmung mit der Sommerfeldschen Formel (29), die für kleine N ($f_1 = f_2 = 1$) wie folgt geschrieben werden kann:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{3}{4} N^2 - 1{,}45\, N - 0{,}50.$$

Für $N > 25$ treten schnell wachsende Abweichungen der theoretischen Werte von den beobachteten hervor; indessen führt hier, wie bei Sommerfeld, die Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse durch Debye zu einer vollkommenen Darstellung der K_α-Frequenzen mit bei beiden Autoren gleich gutem Anschluß an die Beobachtungen.

Inwieweit die weiteren Sommerfeldschen Resultate (insbesondere die Darstellung des L-Dubletts und der zugehörigen effektiven Kernladungen) sich mit denen von Debye vereinigen lassen, müssen künftige Untersuchungen lehren.

(Eingegangen 20. Juni 1917.)

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Chemiker Dr. H. E. Fierz zum ord. Professor für technische Chemie an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, der a. o. Professor an der Universität Breslau Dr. Clemens Schaefer zum ord. Professor der theoretischen Physik an derselben Universität.

Verliehen: Dem ord. Professor der anorganischen Naturwissenschaften (Bodenkunde, Physik, Klimalehre) an der Forstakademie Hannov. Münden Dr. R. Hornberger der Titel Geh. Regierungsrat.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1917/18.

Universität Basel.

Hagenbach: Experimentalphysik II: Optik, Wärme und Elektrizität, 6; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, ganztägig, für Anfänger (mit Veillon und Zickendraht), 8; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 g. — **Veillon**: Thermodynamik, 2. — **Matthies**: Theorie des elektromagnetischen Feldes, 4, Übungen, 1 g; Mathematisch-physikalisches Seminar, für Anfänger, 2 g. — **Zickendraht**: Angewandte Physik I: Schwingungslehre mit Anwendungen, 1, V: Wechselstrom mit Demonstrationen, 2, Praktikum, 2. —

Rupe: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Vollpraktikum: Organische Chemie, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Fichter und Bernoulli), 1. — **Fichter**: Analytische Chemie, 2; Experimentalchemie der seltenen Metalle, 1; Chemie der Kolloide, 1 g; Analytisches Halbpraktikum für Anfänger, 9, für Mediziner: Übungen in der qualitativen Analyse; Chemisches Vollpraktikum: Anorganische und elektrochemische Übungen und Arbeiten, tägl. — **Kreis**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Übungen in der Untersuchung von Lebensmitteln, 4; Arbeiten im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. — **Bernoulli**: Physikalische Chemie II: Elektrolyse, Reaktionskinetik, Photochemie, 2; Geschichte der Chemie seit Lavoisier, 1; Physikalisch-chemische Übungen und Arbeiten a) tägl., b) 4. —

Hecke: Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 1; Zahlentheorie, 4; Seminar (mit Spieß), 1. — **Spieß**: Analytische Geometrie, für Anfänger, 3; Die Grundbegriffe der Mathematik, für Vorgerückte, 4; Geschichte der Mathematik seit dem Mittelalter, 1. — **Flatt**: Pädagogisches Seminar, mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung I, 3; Projektive Geometrie, 2. — **Knapp**: Astrophysik, 2; Astronomische oder allgemeine Chronologie, 1; Populäre Astronomie: Monde, 1; Astronomische Übungen für Anfänger, 2, für Vorgerücktere, 3. —

Universität Berlin.

Rubens: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5, Mathematische Ergänzung, 1 g; Physikalisches Kolloquium, 1½ g; Arbeiten im Physikalischen Laboratorium, für Geübtere (mit Wehnelt), tägl. — **Planck**: Theorie der Wärme, 4; Mathematisch-physikalische Übungen, 1 g. — **Wehnelt**: Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Praktikum, 1 g; Praktische Übungen für Anfänger (mit Blasius) II: Elektrizität und Magnetismus, 7; Physikalisches Praktikum für Pharmazeuten, 3; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das physikalische Arbeiten, 3. — **Hellmann**: Allgemeine Meteorologie, 2; Meteorologisches Kolloquium, 1 g. — **Einstein**: Statistische Mechanik und Quantentheorie, 2. — **Warburg**: Über elektrisches Leitungsvermögen von Metallen, Elektrolyten und Gasen, 2. — **Schmidt**: Erdmagnetismus, 2; Ausgleichungsrechnung, mit Übungen, 1 g. — **Neesen**: Elektrische Schwingungen, drahtlose Telegraphie, 2. — **Blasius**: Praktische Übungen für Anfänger (mit Wehnelt) I: Mechanik, Schall, Wärme und Licht, 7; Übungen im Anschluß an das Praktikum, 1 g. — **E. Meyer**: Moderne Maschinentechnik, 2; Technische Exkursionen, 14tägig, 1 Nachmittag g. — **Born**: Dynamik der Kristallgitter, 3; Entwicklung der physikalischen Anschauungen, 1 g. — **Weinstein**: Elektromagnetische Theorie des Lichtes, 4; Vektoranalysis der physikalischen Größen, 2; Geschichte der Physik im Altertum und Mittelalter, 1 g. — **Krigar-Menzel**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4. — **Less**: Praktische Witterungskunde, 2. — **Byk**: Mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 2. — **Henning**: Einführung in die Theorie des Schalles, 1. — **Reiche**: Moderne Probleme der Atomdynamik auf quantentheoretischer Grundlage, 3. — **Seeliger**: Hydrodynamik, 2. — **Scheffer**: Angewandte wissenschaftliche Photographie, 1; Grundlagen der Mikroskopie, 1 g. —

Fischer: Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium (mit Gabriel, Traube, Leuchs, Stähler, Schoeller und Schrauth), tägl.; Kursus für Mediziner und Zahnärzte, 3. — **Nernst**: Physikalische Chemie, 4; Praktische Übungen und Arbeiten im physikalisch-chemischen Laboratorium: a) anorganisch-chemisches Praktikum (mit Marckwald), tägl., b) Physiko-chemische Übun-



gen, 7, c) Physiko-chemische Arbeiten, tägl.; Physikochemisches Kolloquium, 1 *g*. — **Beckmann**: Chemische Untersuchungen im Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie, tägl. *g*. — **Wichelhaus**: Technologie: Organische Stoffe, 3; Anleitung im Technologischen Institut (mit Großmann), tägl.: Übungen im Technologischen Institut (mit Großmann), tägl. — **Thoms**: Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, mit Experimenten, 4; Toxikologische Chemie, mit Experimenten, 1½; Einführung in die chemische Untersuchung von Blut, Harn, Kot, Magensaft usw., 1½; Praktische Übungen in der chemischen Analyse, in der chemischen Prüfung und Wertbestimmung von Arzneimitteln, in der Nahrungsmittelchemie, tägl. — **Traube**: Qualitative chemische Analyse, 1½. — **Stock**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Anorganisch-chemische Arbeiten, tägl. — **Biedermann**: Explosivstoffe, 2 *g*. — **Neuberg**: Arbeiten auf dem Gebiete der Biochemie, tägl.; Organisch-chemische Arbeiten, tägl. — **Pschorr**: Organische Chemie I: Die offenen Kohlenstoffketten, 4; Praktische Arbeiten im Organischen Laboratorium der Technischen Hochschule, tägl. — **Fock**: Einleitung in die Physik und Chemie, 1; Elemente der Kristallographie, 1. — **Rosenheim**: Anorganisch-chemisches Praktikum (mit R. J. Meyer), tägl.; Übungen in der Experimentalchemie, besonders für Lehrer und Lehrerinnen (mit R. J. Meyer), 4; Praktische Übungen in der Gas- und Maßanalyse, 4. — **Jacobson**: Besprechung chemischer Tagesfragen, 1. — **Spiegel**: Organische Chemie, 3. — **Sachs**: Chemie der Farbstoffe, 1. — **Meisenheimer**: Anorganische Experimentalchemie, 4; Anorganisch- und organisch-chemisches Praktikum, tägl. — **R. J. Meyer**: Beziehungen zwischen physikalischen Eigenschaften und chemischer Zusammensetzung, 1 *g*. — **Großmann**: Chemische Industrie und Weltwirtschaft, 1; Besprechung chemisch-technischer und wirtschaftlicher Tagesfragen, für Chemiker, Nationalökonomen und Juristen, mit Exkursionen, 1½. — **Stähler**: Repetitorium der anorganischen Chemie, 2. — **Houben**: Arbeitsmethoden der organischen und anorganischen Chemie, 1. — **Leuchs**: Einführung in die organische Chemie I: Alphatische Verbindungen, 1. — **Pringsheim**: Einführung in die physiologische Chemie, 1½. — **Anselmino**: Sterilisation der Heilmittel, 1. — **Schoeller**: Die metallorganischen Verbindungen, 1. —

Schwarz: Elementargeometrische Herleitung der wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte, 2 *g*; Mathematisches Seminar (mit Schottky), 2 *g*. — **Foerster**: Geschichte der Astronomie, 2 *g*; Zeit- und Ortsbestimmung, 1 *g*; Meteore und Kometen, 1 *g*. — **N. N.**: Zahlentheorie, 4. — **Schottky**: Elliptische Funktionen, 4; Krümmungstheorie der Kurven und Flächen, 4. — **Struve**: Einleitung in die Theorie der Planetenmonde, 3; Übungen an den Instrumenten der Sternwarte, nach Vereinbarung, *g*. — **Cohn**: Bahnbestimmung der Himmelskörper, 4; Übungen, 2 *g*. — **Schmidt**: Funktionentheorie I, 4; Mengenlehre, 4; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **Rothe**: Integralrechnung, 4. — **Knopp**: Algebra, 4; Differential- und Integralrechnung I: Differentialrechnung, 4, Übungen, 14tägig, 2 *g*; Mathematisches Proseminar (mit Schur), 14 tägig, 2 *g*. — **Guthnick**: Photographie der Gestirne, 2. — **v. Bortkiewicz**: Bevölkerungsstatistik und Bevölkerungstheorie, 1½; Mathematische Statistik, für Mathematiker, 1 *g*. — **Schur**: Analytische Geometrie, 4; Ergänzungen zur Differential- und Integralrechnung, 4. — **Marcuse**: Geographische Ortsbestimmung, mit Übungen, 1½; Einführung in die mathematische Geographie und Erdphysik, mit Lichtbildern, 1½; Allgemeine Himmelskunde mit Lichtbildern und gelegentlichen Fernrohrbeobachtungen, 1½. — **Witt**: Wissenschaftliches Rechnen, 2; Übungen am Fernrohr, 6 *g*. — **Schweydar**: Bedeutung der Schwerkraft für die höhere Geodäsie, 2; Die Erde als Himmelskörper, 1. —.

Technische Hochschule Berlin.

Kurlbaum: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Elektrizität, 4, für Architekten, 2; Physikalische Übungen, 16. — **Grunmach**: Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden, 2; Physikalische Maßbestimmungen und Meßinstrumente (Physikalische Übungen), 10. — **Kalischer**: Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik II, 2; Grundzüge der Potentialtheorie und ihre Anwendung in der Elektrizitätslehre, 2; Elektrische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, 1. — **Korn**: Ausgewählte Kapitel der Potentialtheorie, 2. — **Krigar-Menzel**: Allgemeine Mechanik I: Gleichgewicht und Bewegung von Massenpunkten und starren Körpern, 4; Theoretische Akustik, 2. — **Berndt**: Radioaktivität, 1. — **Felgentraeger**: Maß- und Gewichtswesen I, 2; Die Konstruktion der Spiegel- und Linseninstrumente, 2. — **Gehlhoff**: Physikalische Grundlagen der Beleuchtungstechnik, 2. — **Kaßner**: Wetterkunde für Techniker, mit Beispielen aus der Praxis, 1. — **Kock**: Hochspannungserscheinungen und Messungen, 2; Drahtlose Telegraphie und Hochfrequenztechnik, 3. — **Lichtenstein**: Randwertaufgaben der Potentialtheorie I, 2. — **Möller**: Schwingungsprobleme, 2. — **Petzoldt**: Raum, Zeit, Bewegung, Äther, 1 *g*. — **Pirani**: Anwendungen der graphischen Darstellung und des graphischen Rechnens auf physikalische Fragen, 1. — **Orlich**: Theoretische Elektrotechnik II, 2, Übungen, 1, III, 2; Elektrotechnische Meßkunde I und II, 2; Elektrotechnisches Laboratorium I, II und III, 4, für Fortgeschrittene, tägl. — **Wedding**: Grundlagen der Elektrotechnik, 4, Übungen, 1; Elektromaschinenbau I und II (abgekürzte Vorlesung), 2; Beleuchtungstechnisches Laboratorium für Fortgeschrittene, tägl.; Elektrotechnik für Chemiker, 1, für Bergleute, 2, Übungen, 1. — **Franke**: Elektrische Fernmeldetechnik, einschließlich drahtlose Telegraphie, I: Grundlagen, 4, III: Anlagen, 2; Entwerfen von Instrumenten und Apparaten der Meß- und Fernmeldetechnik, Übungen, 2; Laboratorium für Fernmeldetechnik, 6, für Fortgeschrittene, tägl. — **Kloß**: Elektromaschinenbau II, 4, Übungen, 1; Entwerfen elektrischer Maschinen, II, Übungen, 4; Elektrotechnisches Versuchsfeld, 4, für Fortgeschrittene, tägl. — **v. Parseval**: Motorluftschiffe, 2; Flugzeuge, 2; Übungen im Bau von Luftfahrzeugen, 2. — **W. Reichel**: Elektrische Kraftanlagen und Bahnen I, 2, III, 2; Entwerfen elektrischer Kraftanlagen und Bahnen, Übungen, 4. — **Becker**: Flugmotoren und Luftschiffmotoren, 2. — **Benischke**: Allgemeine Wechselstromtechnik, 4; Spezielle Wechselstromtechnik für Hochspannungsanlagen, 1. — **Breslauer**: Berechnung und Prüfung elektrischer Maschinen nach den in der Praxis herrschenden Gepflogenheiten, 2. — **Everling**: Luftfahrtinstrumente, Messungen an und in Luftfahrzeugen, 1. — **Faßbender**: Einführung in die drahtlose Telegraphie, 2. — **Gerstmeyer**: Kommutator-Motoren für Wechselstrom und Drehstrom, 1. — **Rüdenberg**: Elektrische Schaltvorgänge und Wanderwellen, 2. — **Wagner**: Schutz elektrischer Anlagen gegen Überspannungen, 2. — **Zehme**: Elektrische Haupteisenbahnen und Zwischenstadtbahnen, 2. — **Krell**: Schiffselektrotechnik, 2. — **Dietzius**: Luftschiffbau und Luftschiffahrt, 1. — **Schaffran**: Luft- und Wasserpropeller-Versuche, 1. — **Günther**: Anwendung der Photographie zum Messen in der Technik: Photogrammetrie, mit Lichtbildern und Demonstrationen, 2. —

Hofmann: Experimentalchemie, 4; Praktische Arbeiten im anorganischen Laboratorium, tägl.; Ausgewählte Kapitel aus der Chemie (mit Wirth), 2. — **N. N.**: Chemie der Nahrungsmittel mit Berücksichtigung der Nahrungsmittel-Analyse und Bakteriologie, 4; Chemisch-technische Analyse, 2. — **Dolezalek**: Physikalische Chemie einschließlich theoretische Elektrochemie, 4; Kleines physikalisch-chemisches und elektrochemisches Praktikum, 2 halbe Tage; Praktische Arbeiten im physikalisch-chemischen und elektrochemischen Institut, tägl. — **Holde**: Untersuchung von Fetten, Ölen, Wachsen und Seifen, 2. — **Miethe**: Spektralanalyse, 2, mit Übungen; Allgemeine Photographie: Apparatenkunde, Übersicht über die gebräuchlichen photographischen Prozesse, 2; Einführung in die photographische Optik, 1; Astronomische Photographie mit Übungen am photographischen Refraktor

(300 mm), 1, Übungen, 3; Praktische Arbeiten im photochemischen Laboratorium, speziell für Photochemiker, tägl.; Photographische Übungen in den gebräuchlichen Prozessen, 16; Spektrographisches und spektralanalytisches Praktikum für Fortgeschrittenere, 1. — **Pschorr**: Organische Chemie I: Die offenen Kohlenstoff-Ketten, 4; Praktische Arbeiten im organischen Laboratorium, tägl. — **Reisenegger**: Chemische Technologie I: Wärme, Wasser, Anorganische Verbindungen (Chemische Großindustrie), Apparatenkunde, mit Exkursionen, 4; Praktische Arbeiten im technisch-chemischen Institut, tägl. — **Traube**: Einleitung in die physikalische Chemie, 2; Physikalisch-chemische Übungen, 3; Chemie der Kolloide, 1. — **Stavenhagen**: Anorganische Experimentalchemie für Bergleute, 4; Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium der Bergbau-Abteilung, tägl.; Einführung in die Experimentalchemie, 2. — **Wölbling**: Analytische Chemie, für Bergleute, 2; Chemisches Kolloquium für Bergleute, 1. — **Arndt**: Die elektrochemische Industrie, 2. — **Börnstein**: Die Brennmaterialien, ihre Bearbeitung und Verwendung, 2. — **Bucherer**: Einführung in die Praxis des Patentwesens, 1. — **Byk**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 2. — **Endell**: Ausgewählte Kapitel der Mineralchemie nebst technischen Anwendungen, 1. — **v. Girsewald**: Über die Zusammensetzung und die Wertbestimmung der Brennstoffe, 1. — **Grüttner**: Stereochemie anorganischer Verbindungen I, 1. — **Herrmann**: Radioaktive Prozesse, 1. — **Just**: Chemische Reaktionskinetik, 1. — **Lehmann**: Die Farbenphotographie, 1. — **Liebermann**: Theorien der organischen Chemie, 1. — **Loewenherz**: Erläuternde Vorträge zu den Führungen durch das Chemische Museum, anorganischer Teil, 1 *g*; Die Produkte der chemischen Industrie, ausgewählte Kapitel, anorganischer Teil, 1 *g*. — **Schaarschmidt**: Technologie der Teerfarbenstoffe, 2. — **Scheibler**: Über heterozyklische Verbindungen, 1. — **Seegert**: Spektroskopische Untersuchungsmethoden, 1. — **Simonis**: Repetitorium der organischen Chemie. 2. — **Ullmann**: Technik der künstlichen Farbstoffe, 1. — **Voswinckel**: Einführung in die organische Chemie, 2. — **Wirth**: Analytische Chemie, 1. — **Wolffenstein**: Die Chemie der Alkaloide, 2. —

Scheffers: Darstellende Geometrie I, 5, Übungen, 5. — **Dziobek**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2. — **Haentzschel**: Elemente der Differential- und Integralrechnung und der analytischen Geometrie, 4, Übungen, 2 *g*. — **Jolles**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 4; Graphische Statik, 2, Übungen, 2. — **Lampe**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2; Bestimmte Integrale und Differentialgleichungen, 2. — **Rothe**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2; Graphische Methoden der Analysis mit Anwendungen, 2. — **Wallenberg**: Ausgewählte Kapitel der Elementarmathematik, 2; Funktionentheorie I, 2; Potentialtheorie, 2. — **Schuberg**: Elemente der darstellenden Geometrie, 1, Übungen, 3; Maschinenelemente, für Chemiker, 1, mit Übungen im Maschinenzeichnen, 3; Allgemeine Maschinenlehre: Grundlagen der Dampfmaschinen, Dampfkessel, Gasmotoren, Arbeitsmaschinen, für Chemiker, 2, mit Übungen im Maschinenzeichnen 3; Die technischen Einrichtungen chemischer Fabriken I, 1, Übungen, 3. — **Jahnke**: Höhere Mathematik und technische Mechanik I und II, für Bergleute, 6, Übungen, 2. — **Haußmann**: Vermessungskunde I und Meßübungen I, 4, Übungen, 2, III, 2; Planzeichnen zugleich Bearbeitung der Aufnahmen, 2. — **Reißner**: Mechanik und graphische Statik I, 4, Übungen, 2, II, 6, Übungen, 4. — **Wolff**: Niedere Geodäsie im Abriß, 2. — **W. Hartmann**: Kinematische Geometrie und theoretische Kinematik, 2; Maschinengetriebe: Anwendungen der Kinematik, 2. — **E. Meyer**: Mechanik I, 4, Übungen, 2, II, 4, Übungen und Festigkeits-Laboratorium, 2. — **Fuchs**: Partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen, 2. — **Jacobsthal**: Algebra II, 4; Einführung in die Lehre von den Determinanten, 2. —

Universität Bern.

Forster: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Wärme, 6; Theoretische Optik, 1 *g*; Repetitorium der Physik, 2; Physikalisches Praktikum, 8; Kurs der wissenschaftlichen Photographie: Mikrophotographie, Spektrographie, Röntgenphotographie, 2; Arbeiten im physikalischen Institut, nach Verabredung. — **Gruner**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 3, Übungen, 1; Vektoranalysis mit Anwendung auf die Potentialtheorie, 2; Mechanik deformierbarer Körper, 2; Seminar für theoretische Physik, nach Vereinbarung. — **Blattner**: Theorie der Wechselströme, 1; Lösung von Aufgaben aus dem Gebiete der Elektrotechnik, 1. — **Luterbacher**: Dynamik, ausgewählte Kapitel, 2. — **Koestler**: Ausgewählte Kapitel zur mathematischen Behandlung physikalischer Probleme, 1–2; Hochspannungs-Elektrotechnik, 1–2. —

Kohlschütter: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 2 und 6; Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl.; Chemisches Praktikum, 6, für Mediziner, 8. — **Frl. Woker**: Arbeiten im Laboratorium für physikalisch-chemische Biologie, ganz- oder halbtägig; Kurs für die Untersuchung von Körperflüssigkeiten: Harn, Blut, Milch, Magensaft, 4; Die Theorie der Fermentwirkungen, 1; Ausgewählte Kapitel aus dem Gebiete der Katalyse, 1; Die physikalische Chemie der Zelle, 1. — **Ephraim**: Physikalische Chemie, 2; Repetitorium der anorganischen Chemie, für Chemiker, 2; Elektrochemisches Praktikum, 4. — **Mai**: Repetitorium der anorganischen Chemie für Mediziner und Lehramtskandidaten, 2. — **Tambor**: Organische Chemie II, 5; Repetitorium der organischen Chemie I, 1; Organisch-chemisches Vollpraktikum, tägl. — **Abelin**: Chemie der Gärung, 1. — **Schaffer**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel I, 2; Chemische Technologie der Lebensmittelgewerbe, nach Verabredung. —

Graf: Kugelfunktionen I, mit Repetitorium, 4; Besselsche Funktionen II, mit Repetitorium, 4; Integralrechnung, mit Repetitorium (eventl.: Differential- und Integralrechnung), 3; Funktionentheorie I, 2; Differentialgleichungen II, 2; Renten- und Versicherungsrechnung I, 2; Mathematisches Seminar (mit Huber), 1½. — **G. Huber**: Mechanik des Himmels, 2; Theorie der algebraischen Flächen, 3; Fouriersche Reihen und Integrale, mit Anwendungen auf die Physik, 2; Mathematisches Seminar (geometrische Richtung) (mit Graf), 1. — **Ott**: Algebraische Analysis II, 2; Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen, 2; Integralrechnung, 2; Analytische Geometrie II, 2; Mathematische Übungen, 1; Mathematische Übungen und Repetitorium, 1. — **Benteli**: Darstellende Geometrie, Kurven, Strahlenflächen, reguläre Polyeder, 2, Übungen und Repetitorium, 2; Praktische Geometrie I, 1. — **Mauderli**: Unterrichtsfragen aus dem Gebiete der Astronomie und der mathematischen Geographie, 1; Astronomische und topographische Ortsbestimmung für Geologen und Forschungsreisende, 1; Der Bau des Universums im Lichte neuester Forschung, 1–2. — **Th. Huber**: Natürliche Geometrie, 1; Ebene Kurven dritter Ordnung, 1. — **Crelier**: Synthetische Geometrie III; n = Dimensionale Geometrie. — **Berliner**: Höhere Algebra (Fortsetzung), 1–2. — **Moser**: Mathematische Untersuchungen betreffend Witwen- und Waisenkassen, nach Verabredung; Ausgewählte versicherungswissenschaftliche Kapitel, 1–2; Mathematisch-versicherungswissenschaftliches Seminar, 1–2. — **Bohren**: Politische Arithmetik, 2; Methode der kleinsten Quadrate, 2. —

Universität Bonn.

Kayser: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Optik, 5; Laboratorium für Anfänger, 8, für Vorgeschrittene, tägl. — **Eversheim**: Grundzüge der Elektrotechnik (technische Vorlesung), 1 *g*; Angewandte Elektrizitätslehre mit Übungen, 2; Physikalisches Praktikum für Mediziner, 2. — **A. Pflüger**: Mechanik, Elastizität, Hydrodynamik, 5. — **Bucherer**: Mathematische Einführung in die Elektrizitätslehre, 1 *g*. —

Anschütz: Experimentalchemie II: Organische Chemie, 6; Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Chemie, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschrittene sowie für Pharmazeuten und Nahrungsmittelchemiker (mit Benrath, Frerichs und Kippenberger), tägl., für Mediziner (mit Benrath), tägl. außer Sonnabend. — **Rimbach**: Physikalische Chemie I: Atom- und Molekulartheorie, Eigenschaften der Stoffe, Verwandtschaftslehre, 3; Polarimetrie und Refraktometrie und ihre praktisch-chemischen Verwendungen, 1 *g*; Chemisches Rechenseminar: Unterstufe: Stöchiometrische und chemisch-analytische Aufgaben, 14 tägig, 2 *g*, Oberstufe: Physikalisch-chemische Aufgaben, 14 tägig, 2 *g*; Übungen in den wichtigsten physikalisch-chemischen Meßmethoden, 3. — **Benrath**: Metalle und Salze, 1; Spezielle anorganische Chemie: Seltenere Elemente, 1 *g*; Qualitative Analyse, 2; Experimentierübungen für Lehramtskandidaten, 1. — **Frerichs**: Pharmazeutische Chemie I, anorganisch, 3, III: Zyklische Verbindungen, 1 *g*; Arzneimittelprüfung, 1. — **Gewecke**: Einführung in die Chemie, 2; Repetitorium der anorganischen und analytischen Chemie, 2. — **Mannheim**: Sterilisieren von Arzneimitteln, 1; Wasser- und Harnanalyse, 1; Einführung in das chemische Praktikum, für Pharmazeuten, 1. — **Kippenberger**: Chemische Technologie, anorganischer Teil, mit Exkursionen, 2; Einführung in die chemische Großtechnik I: Anorganisch-chemische Betriebe, mit Exkursionen, 1 *g*; Besprechung nahrungsmittel-technischer Gutachten, 1 *g*. — **Laar**: Illustrationsverfahren mit Besichtigungen, 1; Übungen in ausgewählten photographischen Verfahren, tägl. —

Study: Einleitung in die Funktionentheorie, 4; Mathematisches Seminar: Oberstufe: Vortragsübungen, 14 tägig, 2 *g*; Kolloquium über Invariantentheorie, 1 *g*. — **Hahn**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 1 *g*; Algebraische Gleichungen, 4. — **N. N.**: Einleitung in die analytische Geometrie, 4, Übungen, 1 *g*; Darstellende Geometrie, einleitende Vorlesung, mit Übungen, 2. — **Küstner**: Sphärische Astronomie, 3; Fixsternkunde, 1 *g*; Praktische Übungen im astronomischen Beobachten, tägl. —

Technische Hochschule Braunschweig.

Dießelhorst: Experimentalphysik: Elektrizität und Magnetismus, 4, Übungen, 1; Physikalisches Praktikum I u. II, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 14 tägig, 2 *g*. — **Weber**: Potentialtheorie mit Anwendungen auf die Elektrostatik, 2. — **Bergwitz**: Atmosphärische Elektrizität, 1; Radioaktivität, 1. — **Witte**: Theorie des Elektromagnetismus, 4. — **Micheler**: Einführung in die Photographie, 1; Die Photographie in natürlichen Farben, 1; Spezielle Photographie, 2; Photographische Übungen, nach Übereinkunft, für Anfänger und Fortgeschrittene, 3. — **Peukert**: Grundzüge der Elektrotechnik, 2; Allgemeine Elektrotechnik, 4; Elektrotechnische Übungen, 2; Elektrotechnisches Praktikum, 6; Arbeiten im elektrotechnischen Laboratorium, für Fortgeschrittenere, 9. — **N. N.**: Elektromaschinenbau, 4, Konstruktionsübungen, 4, Praktische Übungen, 1; Elektrische Kraftbetriebe, 2, Übungen, 2. —

Meyer: Unorganische Experimentalchemie, 5; Chemie der organischen Faserstoffe, 3; Arbeiten im chemischen Laboratorium, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Freundlich), nach Verabredung, *g*. — **Biehringer**: Analytische Chemie, 2; Grundzüge der Chemie, 3. — **Freundlich**: Physikalische Chemie, 2; Metallurgie, 2; Chemie der Metalle, 1; Arbeiten im Laboratorium für physikalische Chemie und Elektrochemie, tägl. — **Reinke**: Chemische Technologie II_1, 6; Chemisch-technische Analyse I, 2; Arbeiten im Laboratorium für chemische Technologie II und landwirtschaftlich-chemische Gewerbe, tägl.; Chemische Technologie in den deutschen Kolonien mit Berücksichtigung der tropischen und kolonialen Landwirtschaft, 1; Seminaristische Übungen auf dem Gebiete der chemischen Technologie II, monatlich 2 *g*. — **Beckurts**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Gerichtliche Chemie, 1 (im Anschluß: **Nehring**: Der naturwissenschaftliche Sachverständige in der Kriminalistik); Grundzüge der Maßanalyse, 1; Pharmazeutische Chemie, 4; Arbeiten im Laboratorium für pharmazeutische Chemie und Nahrungsmittelchemie und in der Nahrungsmitteluntersuchungsstelle, tägl. — **Troeger**: Analytische Chemie, 2; Chemie der Benzolderivate, 2; Repetitorium der anorganischen und organischen Chemie, 2. — **Emde**: Organische Stoffe mit physiologischer Wirkung (Arzneimittelsynthese), 1. —

Fricke: Analytische Geometrie und Algebra, 4; Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 2, II, 2. — **Timerding**: Darstellende Geometrie, 4, Übungen, 6; Synthetische Geometrie, 2. — **Falckenberg**: Algebraische Analysis, 2. — **N. N.**: Statik starrer und elastisch-fester Körper, 4, Übungen, 2. — **Schlink**: Technische Mechanik II: Dynamik, 3, Übungen und Repetitionen, 2; Die Grundlagen des Fliegens und die verschiedenen Arten von Flugzeugen, 1; Graphische Statik, 2, Übungen, 2; Eisenhochbauten, ihre Berechnung und Konstruktion, 2, Übungen, 4; Statik der Baukonstruktionen I, 3, Übungen, 4. — **N. N.**: Grundzüge der Geodäsie, 1, Übungen, 1; Geodäsie II, 3, Übungen, 1; Höhere Geodäsie, 2; Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2; Planzeichnen, 4. —

Universität Breslau.

Lummer: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schaefer, Waetzmann und Ladenburg), 3, für Geübtere, tägl., für Mediziner (mit Ladenburg), 3, für Pharmazeuten (mit Waetzmann), 3; Physikalisches Kolloquium (mit Schaefer), 2 *g*. — **Schaefer**: Theorie der Optik, 4. — **Ladenburg**: Repetitorium der Physik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 2. — **Riesenfeld**: Photographisches Praktikum, 2; Die Photographie und ihre Technik, 1 *g*. —

Biltz: Organische Experimentalchemie, 6; Chemische Referate für Vorgeschrittenere (mit Meyer und Koenigs), 14 tägig, $1^1/_2$ *g*; Chemisches Praktikum, unorganische Abteilung, ganz- und halbtägig, tägl. außer Sonnabend, organische Abteilung, ganztägig, für Mediziner (mit Meyer), 4, für Landwirte, 4. — **Herz**: Die physikalisch-chemischen Grundlagen der analytischen Chemie, 2; Grundlagen der Maßanalyse, 1; Anwendungen der Maßanalyse, mit besonderer Berücksichtigung des Deutschen Arzneibuches, 1; Besprechungen zur qualitativen Analyse, 1 *g*. — **Gadamer**: Organische Experimentalchemie, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie, 6; Prüfung der Arzneimittel, 1 *g*; Praktisch-chemische Übungen, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie, der forensischen Chemie und Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend; Kleines chemisches Praktikum, 6. —

Sturm: Analytische Geometrie der Ebene, 3. — **Kneser**: Partielle Differentialgleichungen der Physik, 4; Elliptische Funktionen, 2; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 2 *g*. — **N. N.**: Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 2 *g*; Integralrechnung, 4; Algebraisch auflösbare Gleichungen, 2. — **Steinitz**: Projektive (synthetische) Geometrie, 4; Determinanten, 2. — **Wilkens**: Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 3, Übungen, 1 *g*; Astronomisches Seminar, 2 *g*; Übungen an den Instrumenten der Sternwarte, nach Verabredung, *g*; Allgemeine Astronomie, 1 *g*. —

Technische Hochschule Breslau.

Lummer: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrizität, Optik, 5; Physikalisches Praktikum, 3. — **Hilpert**: Elektrotechnik I, 4; Elektromaschinenbau I und II, 2; Übungen im Elektromaschinen- und Apparatebau, 4; Elektrotechnisches Laboratorium II, 4, III, 8; Kolloquium im Elektrotechnischen Institut, 14 tägig, *g*. — **Euler**: Elektrotechnische Meßkunde I und II, 2; Elektrische Kraftanlagen I, 2; Übungen im Bau elektrischer Kraftanlagen und Bahnen, 4. — **Große-Leege**: Fernsprechtechnik, 2. —

Ruff: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 5; Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Eucken, Neumann und Semmler), 14tägig, 2 *g*. — **Neumann**: Anorganisch-chemische Technologie, 4; Chemisch- und elektrochemisch-technisches Praktikum, tägl. — **Semmler**: Organische Technologie, 3; Organisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Eucken**: Physikalische Chemie I und II, 3; Physikalisch-chemisches Praktikum für Fortgeschrittene, tägl.; Übungen in physikalischer Chemie und Elektrochemie, 4. — **Nauß**: Technische Gasanalyse, 1. —

Dehn: Höhere Mathematik III, 2, Übungen, 2; Höhere Mathematik für Chemiker und Hüttenleute, 3, Übungen, 1. — **Hessenberg**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 4; Kinematik, nach Verabredung. — **Mann**: Mechanik: Graphische Statik I, 3, Übungen, 2, III, 3, Übungen, 2; Eisenhochbau einschließlich Eisenbetonbau I, 2, Übungen, 3; Statik der Baukonstruktionen I, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, 2. — **Steinitz**: Höhere Mathematik I, 5, Übungen, 3; Potentialtheorie, 2. — **von dem Borne**: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Luftschiffahrt: Theorie der Luftschiffahrt, 2. —

Technische Hochschule Danzig.

Krüger: Experimentalphysik I, 5; Kleines physikalisches Praktikum, 4; Großes physikalisches Praktikum, tägl. — **Kalähne**: Einführung in das physikalische Praktikum, 1; Theoretische Ergänzungen zur Experimentalphysik, 2; Photographie und photographische Reproduktionsverfahren, 1, Übungen I, für Anfänger, II, für Fortgeschrittene, 3; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten im photophysikalischen Laboratorium, tägl. — **Försterling**: Elektrodynamik, 3. — **Roeßler**: Elektrotechnik II, 4; Elektrotechnisches Laboratorium II, 6, III, 9, IV, für Fortgeschrittene (Elektrotechniker), 11; Projektierung elektrischer Anlagen, 2, Übungen, 4, für Maschinenbauer und Schiffsmaschinenbauer, 2; Berechnung und Entwurf elektrischer Maschinen (mit Roth), 2, Übungen, 4. — **Grix**: Elektrische Hausinstallationen und Beleuchtungstechnik, 1; Elektrische Bahnen, 2, Übungen, 4; Schwachstromtechnik, einschließlich Hochfrequenztechnik, 2. — **Roth**: Elektromaschinenbau, 1, Übungen, 4, für Elektrotechniker, 1; Elektrotechnische Meßkunde, 2. — Apparate- und Schalttafelbau, 2, Übungen, 4. —

v. Wartenberg: Anorganische Experimentalchemie, 4; Praktikum im anorganisch-chemischen und elektrochemischen Laboratorium (mit Jellinek), 49. — **Wohl**: Organische Experimentalchemie I, 4; Praktikum im organisch-chemischen Laboratorium, 49; Praktikum im Laboratorium für landwirtschaftliche Gewerbe, 49. — **N. N.**: Physikalische Chemie I und II, 2; Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 3; Übungen zur Mathematik, 1; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum I und II, 4; Großes physikalisch-chemisches Praktikum, 49. — **Jellinek**: Analytische Chemie II, 2. — **Claasz**: Chemie und Technologie organischer Farbstoffe, 2. — **Glimm**: Spezielle Technologie der Gärungsgewerbe, 2; Chemie und Technologie der Nahrungs- und Genußmittel, 4; Praktikum für Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel sowie Gärungsphysiologie, 49; Kurse für Gärungsgewerbe, nach Verabredung. —

v. Mangoldt: Höhere Mathematik II, 4, Übungen, 1. — **Schilling**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 5. — **Lorenz**: Dynamik starrer Körper, 2, Übungen, 2; Festigkeitslehre und Hydraulik, 4, Übungen, 3. — **Sommer**: Höhere Mathematik I, mit Übungen, 6. — **v. Brunn**: Theorie der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 2. —

Technische Hochschule Darmstadt.

Schering: Allgemeine Physik mit Versuchen: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Geometrische Optik, Wellenlehre des Lichtes, Akustik, 5; Physikalische Übungen (mit Zeißig), 4 Nachmittage; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik (mit Zeißig), nach Verabredung; Mechanische Wärmetheorie, 2; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (mit Zeißig), 1 *g*. — **Zeißig**: Allgemeine Physik mit Versuchen: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Akustik, Optik, 4; Physikalische Meß- und Instrumentenkunde, 1 *g*; Seismometrie und Anwendungen, 1 *g*; Ausgewählte Kapitel aus der allgemeinen Physik, für Pharmazeuten, 1. — **Baerwald**: Allgemeine Elektronik I: Kathodenstrahlen, Kanalstrahlen und verwandte Erscheinungen, 2. — **Meisel**: Theorie der optischen Instrumente I, 2. — **Limmer**: Photographische Übungen für Anfänger und Fortgeschrittene, A, 3, B, 3; Ausgewählte Kapitel aus der Photographie, 2; Die Herstellung von Lichtbildern und Vergrößerungen, Übungen, 2; Photographisches Kolloquium, 1 *g*; Grundlagen der Kinematographie, mit Übungen, 1. — **Wirtz**: Allgemeine Elektrotechnik I: Elemente der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Meßkunde II: Anwendung auf die verschiedenen Gebiete der Elektrotechnik, 2; Übungen im elektrotechnischen Laboratorium (mit Sengel) I: Übungen im Gebrauch der Meßinstrumente und Meßverfahren, II: Messungen an Gleich- und Wechselstrommaschinen, Motoren und Umformern, III: Selbständige Arbeiten für vorgeschrittenere Studierende (mit Sengel und Petersen), nach Verabredung, IV: Ausgewählte Übungen aus Praktikum I und II, 4 halbe Tage; Hochfrequenztechnik: Elektrische Wellen, 2; Radiotelegraphisches Praktikum, nach Verabredung. — **N. N.**: Allgemeine Elektrotechnik II: Gleich- und Wechselstromtechnik, 4. — **Petersen**: Allgemeine Elektrotechnik, Übungen, 2; Übungen im Hochspannungslaboratorium, 2; Grundzüge der Hochspannungstechnik, 1. — **Sengel**: Konstruktion elektrischer Maschinen und Apparate, 3, Übungen, 3; Elektrische Licht- und Kraftanlagen, 2, Übungen, 2; Elektrische Bahnen, 2. — **Goldschmidt**: Elektrischer Antrieb von Werkzeug-, Bergwerks- und Hüttenmaschinen, 2. — **Eberhardt**: Luftschiffahrt, 2; Flugtechnik, 2; Luftschrauben, 2, Übungen, 6. — **Linke**: Aeronautische Meteorologie, 2. — **Schleiermacher**: Aerodynamik in Beziehung zur Luftfahrt, 2 *g*; Rechenapparate und wissenschaftliches Rechnen, 2; Bestimmte Integrale, 2 *g*. —

Wöhler: Anorganische Experimentalchemie: Grundzüge der Chemie, 4; Theoretische Chemie I, 2; Kolloquium über chemische Tagesfragen (mit Martin), 1; Chemisches Praktikum für anorganische und physikalische Chemie (mit Heyl, Martin und Schaeffer), tägl. außer Sonnabend. — **Finger**: Organische Experimentalchemie, 4; Ausgewählte Kapitel aus der Chemie der Alkaloide, 2; Praktikum im Laboratorium für organische Chemie (mit Friedlaender), tägl. außer Sonnabend. — **Martin**: Analytische Chemie II, 2; Einführung zu den Übungen zur theoretischen Chemie, 2; Physikalisch-chemisches Seminar, 2 *g*. — **Heuser**: Organische Experimentalchemie, einschließlich Zellulosechemie und Teerfarbenchemie, 4; Organisch-chemisches Praktikum, nach Verabredung; Papier-Färberei-Praktikum, 4. — **Friedlaender**: Zwischenprodukte der Teerfarbenfabrikation, 1 *g*. — **Heyl**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 2; Bakteriologie und Sterilisationstechnik (mit Schaeffer), 2. — **Dieffenbach**: Elektrochemie, 2; Chemische Technologie, 4; Chemisches, chemisch-technisches und elektrochemisches Praktikum (mit Moldenhauer), tägl. außer Sonnabend. — **Moldenhauer**: Gasanalytische Methoden, 2; Theorien elektrochemischer Prozesse, 2; Elektrochemische Übungen, 4. — **Vaubel**: Theoretische Chemie I: Stereochemie, 1, Übungen, 3; Die physikalischen und chemischen Methoden der quantitativen Bestimmung organischer Verbindungen, 1: Chemie der Fette und Öle und daran anschließend Firnisse und Lacke, 1 *g*. — **Sonne**: Chemische Technologie der Explosivstoffe, mit Vorführungen, 2. — **Weller**: Untersuchen von Nahrungsmitteln, Genußmitteln und Gebrauchsgegenständen, 8, Übungen, 1. —

Graefe: Trigonometrie, mit Übungen, 3; Höhere Mathematik, 3, Übungen, 2; Geschichte der Mathematik,

1; Technische Mechanik, 3, Übungen, 2. — **Horn**: Höhere Mathematik, 6, Übungen, 4, II, 2, Übungen, 1. — **Dingeldey**: Höhere Mathematik, 5, Übungen, 4; Theorie der Determinanten, 2. — **Wiener**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 6; Neuere mathematische Lehren zur Behandlung naturwissenschaftlicher und technischer Aufgaben: Strecken- und Punktrechnung, 2—3; Arbeiten im mathematischen Institut, 3. — **R. Müller**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 6, II, 2. — **Hohenner**: Geodäsie, 4; Höhere Geodäsie, 2; Geodätische Übungen, I, 4; Geodätische Ausarbeitungen, 2; Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2; Praktische Geometrie, 2. — **Assistenten**: Planzeichnen, 4. — **Gasser**: Katastertechnische Berechnungen, 1 *g.* — **Henneberg**: Mechanik II, 6, Übungen (mit Graefe), 2 und 3. — **Blaeß**: Ausgewählte Abschnitte aus der technischen Mechanik, 2 *g*. —

Universität Erlangen.

Wiedemann: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 2; Physikalisches Halb- und Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Reiger**: Theoretische Physik, 4, Übungen, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Hauser), 1 *g*. — **Hauser**: Maschinenkunde für Chemiker und Physiker, 1. —

O. Fischer: Anorganische Experimentalchemie, 5; Praktische Übungen (mit Henrich): a) Analytisch-chemische Übungen, b) Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Mediziner, 4. — **Busch**: Organische Chemie, unter Berücksichtigung ihrer Anwendung in der Pharmazie, 3; Grundlagen der Nahrungsmittelchemie, für Chemiker und Pharmazeuten, 2; Chemisches Praktikum: a) Vollpraktikum, tägl., b) Halbpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Übungen in der Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln, ganz- und halbtägig, tägl. außer Sonnabend. — **Henrich**: Analytische Chemie der Metalle: Experimentalvorlesung zur Ergänzung des analytisch-chemischen Praktikums, 2; Repetitorium der Chemie für Chemiker und Pharmazeuten, besonders für Kriegsteilnehmer, 2. — **Jordis**: Physikalische Chemie I, 2; Elektrochemisches Praktikum, 2; Seminar oder Repetitorium der anorganischen Chemie für Kriegsteilnehmer. —

Noether: Analytische Mechanik, 4, Übungen, 1 *g*; Synthetische Geometrie mit Übungen, 3. — **E. Fischer**: Differential- und Integralrechnung I, 4; Fouriersche Reihen, 2; Invarianten, 2; Seminar-Übungen, 2 *g*. — **Hartwig**: Fixsternkunde, 2; Systematische Einführung in die Einrichtungen der Bamberger Sternwarte, tägl. außer Freitag, *g*; Astronomisches Praktikum auf der Bamberger Sternwarte, tägl. *g*. — **Baldus**: Darstellende Geometrie, 4, Übungen, 2 *g*; Sphärische Trigonometrie, 1; Wahrscheinlichkeitsrechnung für Mathematiker, 1, Übungen, 1; Politische Arithmetik für Juristen, 1, Übungen, 1. —

Universität Frankfurt a. M.

Wachsmuth: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Musikalische Akustik, 1; Physikalisches Kolloquium (mit v. Laue), 14tägig, 2; Physikalische Übungen für Anfänger, 6, für Mediziner, 4, für Fortgeschrittene, tägl.; Wissenschaftliche Arbeiten, tägl.; Handfertigkeitspraktikum (mit Seddig), 4. — **v. Laue**: Relativitätstheorie, 2. — **Déguisne**: Der elektrische Gleichstrom (Experimental-Vorlesung), 2; Elektrische Meßkunde I: Gleichstrom, 1; Elektrische Gleichstrom-Maschinen, 1; Kolloquium über die neuere Literatur der angewandten Physik, 14tägig, 2; Kleines elektrotechnisches Praktikum I, 3, II, 3; Großes elektrotechnisches Praktikum, halb- oder ganztägig; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig; Gasmotorenpraktikum, nach Verabredung. — **Seddig**: Repetitorium der Experimentalphysik, 2; Photographisches Praktikum, 4 und 8. —

Freund: Organische Experimentalchemie mit einer Einleitung in die Grundlehren der anorganischen Chemie, 5; Kolloquium über neue chemische Literatur, 14tägig, $1^1/_2$; Großes chemisches Praktikum und Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten: Organische Abteilung, ganztägig, Anorganische Abteilung, ganz- oder halbtägig (mit Ebler); Kleines chemisches Praktikum für Anfänger: Darstellung chemischer Präparate, Einführung in die qualitative und quantitative Analyse, Nahrungsmittelanalyse, 2 halbe Tage (mit Ebler); Chemisches Praktikum für Angehörige der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät (mit Speyer), 2 halbe Tage. — **Lorenz**: Physikalische Chemie, 4; Geschmolzene Salze, 1; Kolloquium über neuere Arbeiten aus dem Gebiete der physikalischen Chemie, 14tägig, 2; Kleines Praktikum der physikalischen Chemie und Elektrochemie (mit Fraenkel), tägl. außer Sonnabend; Übungen im physikalisch-chemischen Laboratorium (mit Fraenkel), halb- oder ganztägig; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalisch-chemischen Laboratorium, ganztägig. — **Ebler**: Analytische Chemie I: Einführung in die anorganische Chemie und qualitative Analyse, 2; Spektralanalyse und Kolorimetrie, 2; Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1; Praktische Übungen, 4; Spezielle Chemie der seltenen Metalle: Seltene Erden, Uran, Wolfram, Thorium, Molybdän und Vanadin, 2; Kolloquium über anorganische und analytische Chemie, 1. — **Becker**: Angewandte Chemie und Bakteriologie in Industrie, Handel und Gewerbe, Chemisch-technische Warenkunde, Chemie und Industrie der Ersatzstoffe, mit Exkursionen, I, 2, II, 2; Chemisches Praktikum: Übungen in der Untersuchung und Beurteilung von Handelswaren: Chemisch-technische Analyse, 5. — **Fraenkel**: Einführung in die allgemeine Metallurgie, 1. — **Mayer**: Einführung in die anorganische Chemie auf elementarer Grundlage, 1; Chemie der Benzolderivate: Zwischenprodukte der Teerfarbenfabrikation, 2; Praktische Übungen in der Färberei der Textilfasern, 2. — **Speyer**: Synthetische Methoden der organischen Chemie II, 2; Chemie der Alkaloide, 1. — **Tillmans**: Praktikum der Nahrungsmittelchemie; Kursus in der Nahrungsmitteluntersuchung, 2. —

Schoenflies: Mechanik, 4; Determinanten, 2; Mathematisches Seminar (mit Bieberbach und Szász): Schriftliche Arbeiten und Vorträge der Teilnehmer, 2. — **Bieberbach**: Projektive Geometrie, 4, Übungen, 2; Funktionentheorie, 4, Übungen, 2. — **Brendel**: Bahnbestimmung der Himmelskörper, 3; Unsere heutigen Kenntnisse vom Weltall, 1; Einführung in die Versicherungsrechnung, 2, Übungen, 14tägig, 2. — **Szász**: Integralrechnung, 4, Übungen, 1. —

Universität Freiburg i. Br.

Himstedt: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Übungen aus der theoretischen Physik, 1; Physikalisches Kolloquium, 2; Physikalisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Koenigsberger**: Mathematische Physik: Elektrizität und Magnetismus, mit Übungen, 2—3; Quantentheorie, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Gaede**: Anleitung zu selbständigen Arbeiten im technisch-physikalischen Institut, tägl. — **Meyer**: Elektrochemie mit Demonstrationen, 3; Photographie mit praktischen Übungen und Demonstrationen, 2; Radioaktivität, 1; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 2; Selbständige physikalisch-chemische Arbeiten, nach Verabredung. —

Gattermann: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum (mit Riesenfeld, Fromm, Meigen, Skita, Hess und Schwarz), tägl. außer Sonnabend; Übungen im Experimentieren und Vortragen für künftige Lehrer der Chemie II, organisch (mit Riesenfeld, Hess und Schwarz), 2 *g*. — **Kiliani**: Organische Experimentalchemie, 5; Arbeiten und Übungen im chemischen Laboratorium, medizinische Abteilung, tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Autenrieth und Knoop), 6. — **Riesenfeld**: Metallurgie mit Exkursionen, 2; Chemie der selteneren Elemente, 1; Aus Deutschlands chemischer Großindustrie, 1; Elektrochemisches

Praktikum, 4. — **Fromm**: Organische Experimentalchemie, 5; Repetitorium der anorganischen Chemie für Mediziner, 2, Repetition, 1. — **Meigen**: Qualitative Analyse, 2; Übungen im Bestimmen von Mineralien auf chemischem Wege, 2. — **Skita**: Spezielle Kapitel und Methoden der organischen Chemie, für Vorgeschrittenere, 2; Seminar der organischen Chemie, 1; — **Hess**: Geschichte der allgemeinen Chemie, 1: Die Chemie der Alkaloide, 1; Methodik der organischen Chemie für Anfänger und Fortgeschrittenere, 1. — **Autenrieth**: Pharmazeutische Chemie I: Anorganische Chemie, 2; Darstellung und Wertbestimmung offizineller Präparate, 1. — **Knoop**: Physiologische Chemie, 2; Arbeiten und Übungen im physiologisch-chemischen Institut, tägl.; Physiologisches Praktikum, chemischer Teil (mit v. Kries und Mangold), 2; Einleitung in das chemische Praktikum für Mediziner, 1. — **Madelung**: Benzolderivate, 1. — **Schwarz**: Die theoretischen Grundlagen der quantitativen Analyse, 1; Atom und Molekül, 1. —

Heffter: Analytische Geometrie des Raumes, mit Übungen, 5; Mathematisches Seminar: Geometrische Fragen, 2 *g*. — **Stickelberger**: Einführung in die höhere Algebra, 4, Übungen, 1; Analytische Mechanik, 4, Übungen, 1. — **Loewy**: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1; Differentialgleichungen, 4; Interpolation und mechanische Quadratur, 1. — **Seith**: Neuere Geometrie, 2. — **Bolza**: Elliptische Funktionen, 3. —

Universität Gießen.

König: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Elektronentheorie, 1; Physikalisches Praktikum für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 6, für Fortgeschrittene, nach Verabredung, für Chemiker, Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar für Lehramtskandidaten: Übungen in Demonstrationsversuchen und Behandlung einfacher theoretischer Hausaufgaben für II. und I. Stufe (mit Cermak), 14 tägig, 2 *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Fromme), 14 tägig, 2. — **Fromme**: Geometrische und physikalische Optik, 3; Theoretisch-physikalische Übungen, 1; Meteorologie, 1. — **Aßmann**: Aerologie, 1. — **Uller**: Einführung in die mathematische Behandlung physikalischer Probleme, 1. — **Cermak**: Handfertigkeitspraktikum, 3; Elektromagnetische Schwingungen, mit Versuchen, 1. — **Peppler**: Meteorologische Optik, 1. — **Jentzsch**: Beugungstheorie der optischen Instrumente, 1; Ballistik, 1. —

Elbs: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum, tägl.; Chemische Übungen für Landwirte, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner und Veterinärmediziner, 5. — **Schaum**: Anorganische Chemie, 5; Kolloidchemie, 1; Physikalisch-chemische Übungen, 3; Physikalisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Brand**: Chemische Technologie I: Technologie anorganischer Stoffe, mit Exkursionen, 2. — **Feist**: Pharmazeutisch-chemische Präparate, organischer Teil, 3; Untersuchung von Trinkwasser und Harn, 2. — **v. Liebig**: Grundanschauungen der Chemie in ihrer geschichtlichen Entwicklung, 1 *g*. — **Thomae**: Chemie der Fette, Wachse und Harze, 1. —

Engel: Integralrechnung ev. Differential- und Integralrechnung, 4, Übungen, 1; Differentialgeometrie, 4, Seminar, 2. — **Schlesinger**: Enzyklopädie der Elementarmathematik, besonders für Kriegsteilnehmer, 4; Funktionentheorie, 4; Mathematisches Seminar: Über Differentialgleichungen, 2. — **Graßmann**: Analytische Geometrie des Raumes, 2; Lineare Systeme von Kegelschnitten, 2; Analytische Mechanik I, 4; Mathematisches Seminar: Über Kegelschnittsysteme, 14 tägig, 1. —

Universität Göttingen.

Debye: Neuere Fortschritte der Quantentheorie, 2; Experimentalphysik: Optik, für Physiker und Mathematiker, 4; Praktische Übungen im Physikalischen Institut (mit Simon und v. Traubenberg), 4; Wissenschaftliche Arbeiten im Physikalischen Institut, tägl.; Mathematisch-physikalisches Seminar: Vorträge über Struktur der Materie (mit Hilbert), 2 *g*. — **Voigt**: Partielle Differentialgleichungen der Physik, 4; Spektroskopie der Röntgenstrahlen, 2 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, nach Verabredung, *g*; Kolloquium über neuere physikalische Literatur (mit Debye) 2 *g*; Mathematisch-physikalisches Seminar: Spezielle Beispiele für physikalische Anwendungen der partiellen Differentialgleichungen, 2 *g*. — **Wiechert**: Vermessungswesen: Anwendung der Mathematik auf Erdmessung, Landmessung, Geographie, Schiffahrt, Luftschiffahrt, Bergbau, 4; Mathematisch-physikalisches Seminar: Vorträge über geonomische Fragen, 1; Geophysikalisches Praktikum, nach Verabredung, *g*; Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4. — **Simon**: Die Anwendungen der Elektrizitätslehre, mit Demonstrationen, 4; Physik und Technik des elektrischen Lichtbogens, 1 *g*; Elektrotechnisches Praktikum, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Elektrizität, tägl. — **Reich**: Einführung in die Maxwellsche Theorie, 1. — **Pohl**: Experimentalphysik für Naturwissenschaftler und Mediziner, 4. — **Rausch v. Traubenberg**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 3; Einführende physikalische Übungen, besonders für Kriegsteilnehmer, 2. —

Windaus: Allgemeine Chemie I: Anorganische Chemie, 5; Chemisches Kolloquium, 1 *g*; Seminar für Lehramtskandidaten (mit Borsche), 1 *g*; Chemische Übungen (mit Borsche), tägl. außer Sonnabend, Voll- und Halbpraktikum; Chemisches Praktikum für Mediziner, 6. — **Tammann**: Elektrochemie, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger, 4 Wochen; Physikalisch-chemische Arbeiten, ganz- und halbtägig; Kolloquium, 1 *g*. — **Zsigmondy**: Anorganische Kolloide I: Metalle, 1 *g*; Ausgewählte Kapitel aus der anorganischen Chemie, 1; Praktikum der anorganischen und der Kolloidchemie, ganz- und halbtägig. — **Coehn**: Moderne Theorien der Chemie, 1; Photographisches Praktikum: a) für Anfänger, b) für Fortgeschrittene, 3; Photochemische Arbeiten, ganz- und halbtägig. — **Mannich**: Nahrungsmittelchemie, 1; Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 3; Praktische Übungen in pharmazeutischer, toxikologischer und Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend; Kolloquium über pharmazeutische Chemie, 1 *g*; Einführung in die Chemie für Mediziner (im Anschluß an das chemische Praktikum), 2. — **Borsche**: Grundzüge der analytischen Chemie, 2; Chemische Technologie organischer Verbindungen I, 2; Chemie der Kohlehydrate, 1. — **Vogel**: Metallographie, 1; Metallographisches Praktikum, 3. — **Bachmann**: Ausgewählte Kapitel aus der analytischen Chemie: Maßanalyse, optische Analyse und Mikroanalyse, 1. —

Hilbert: Prinzipien der Mathematik, 2; Vorträge über mathematische Prinzipien (mit Frl. Noether), 2 *g*; Elektronentheorie, 2. — **Klein**: Mathematisch-physikalisches Seminar: Vorträge über moderne Entwicklung der Mathematik (Fortsetzung), nach Verabredung *g*. — **Landau**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 1; Funktionentheorie II, 4, Übungen, 1 *g*. — **Runge**: Numerisches Rechnen mit Übungen, 6; Mathematisch-physikalisches Seminar: Fragen der angewandten Mathematik, 2 *g*. — **Carathéodory**: Algebra, 4; Variationsrechnung, 4; Seminar, 1 *g*. — **Hartmann**: Einführung in die Astronomie, 2; Leitung astronomischer und astrophysikalischer Arbeiten für Fortgeschrittene, 12; Astronomisches Seminar, nach Verabredung, *g*. — **Bernstein**: Mathematische Statistik und Versicherungsmathematik, 3; Versicherungsrechnung mit schriftlichen Übungen, 2; Seminar für Versicherungswissenschaft: Vorträge der Mitglieder über ausgewählte Gegenstände der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2 *g*. — **Ambronn**: Sphärische Astronomie, 2; Chronologie und Kalenderwesen, 1; Übungen in astronomischen Beobachten für Anfänger, 6; Anleitung zu selbständigen astronomischen Arbeiten Fortgeschrittener, tägl. —

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 21. | 1. November 1917. | 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 23 am 8. November 1917.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die bei heftigen Explosionen und beim Geschützdonner beobachteten Anomalien der Schallausbreitung.

Von Fr. Nölke.

Die Ansichten der Physiker und Meteorologen über die Ursachen, die eine Fortführung der bei heftigen Detonationen entstehenden Schallwellen bis in sehr große Entfernungen von der Schallquelle bewirken, können in gewisser Weise bereits als geklärt gelten, da sich herausgestellt hat, daß die eigenartige von dem Bornesche Hypothese, nach welcher eine Umbiegung der Schallstrahlen in den unteren Grenzschichten einer die Sauerstoff-Stickstoff-Atmosphäre überlagernden Wasserstoff-Atmosphäre erfolgt, nicht nur gewichtigen physikalischen Bedenken begegnet, sondern auch mit mehreren Beobachtungstatsachen im Widerspruch steht. Pflanzt sich der Schall nicht durch die oberen Gebiete der Atmosphäre fort, so bleibt, da eine Ausbreitung durch den Erdboden ebenfalls nicht in Frage kommt[1]), nur der Weg durch die unteren Atmosphärenschichten übrig. In diesem Falle liegen noch zwei Möglichkeiten vor: Entweder sind es die Wind- oder die Temperaturverhältnisse der Atmosphäre, auf welche die Erklärung sich stützen muß.

Die Annahme, daß das eigenartige Phänomen auf Luftströmungen zurückzuführen sei[1]), hat viele Verteidiger gefunden; mathematisch ist sie von S. Fujiwhara[2]) und R. Emden[3]) begründet worden. Der Verf. hat in zwei früheren Aufsätzen[4]) nachzuweisen versucht, daß die Temperaturverhältnisse der Atmosphäre die Hauptrolle spielen. Da, rein theoretisch betrachtet, beide Annahmen zu einer befriedigenden Erklärung der Erscheinung führen, so läßt sich nur auf Grund einer genauen Bestimmung der in der Atmosphäre vorliegenden wirklichen Verhältnisse entscheiden, welche von ihnen die zutreffende ist.

I.

Leider hat man bei der Beobachtung außerordentlicher Hörweiten des Schalles noch bis vor kurzem versäumt, gleichzeitig die meteorologischen Verhältnisse der Atmosphäre zu erforschen. Fujiwhara, der mehrere vulkanische Explosionskatastrophen behandelt, macht zwar die Bemerkung, daß der Schall sich vorwiegend in der Richtung ausgebreitet habe, in welcher die vulkanischen Aschen niedergefallen seien. In allen anderen Fällen größerer Explosionen, bei denen die Schallausbreitung eine wissenschaft-

---

1) Einer Fortleitung durch den Erdboden bis in sehr große Entfernungen widerstrebt die ungleiche Beschaffenheit der Materialien, welche die äußere Erdschicht aufbauen. Festen Verband aufweisende Gesteine werden zwar den Schall ziemlich weit leiten; sie kommen aber an der Erdoberfläche selten in größerer Ausdehnung vor, fast überall wechseln sie mit lockerem Material ab oder werden von ihm überlagert. Auch die Entstehung der Zone des Schweigens, die Abhängigkeit der Schallausbreitung von der Jahreszeit, die Unregelmäßigkeiten in der Begrenzung des Hörbereichs und andere Tatsachen würden durch die Annahme keine Erklärung finden.

1) Bei der Erklärung sind wieder drei Fälle zu unterscheiden:
1. Weht der Wind aus der Richtung der Schallquelle, so muß die Windgeschwindigkeit mit der Entfernung von der Erdoberfläche zunehmen (gewöhnliche Annahme).
2. Herrscht an der Erdoberfläche Windstille, so muß in größerer Höhe ein von der Schallquelle kommender Wind wehen.
3. Herrscht an der Erdoberfläche Gegenwind, so muß in größerer Höhe entweder die Geschwindigkeit des Windes abnehmen, oder Windstille vorliegen, oder ein entgegengesetzt gerichteter, von der Schallquelle kommender Wind wehen (Annahme von A. Perot; C. R. Nr. 11, 1916).

2) Bulletin of the Centr. Meteorol. Obs. of Japan, vol. II, 1, 1912.

3) Sitz.-Ber. der K. B. Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse; Heft 1, 1916.

4) Diese Zeitschr. **17**, 31, 1916 u. **17**, 283, 1916.

liche Untersuchung erfahren hat, fehlen jedoch genauere Angaben und würden sich auch nachträglich mit Hilfe des auf den meteorologischen Stationen des Hörbereichs erzielten täglichen Beobachtungsmaterials nur sehr unsicher und lückenhaft gewinnen lassen. Es ist daher außerordentlich zu begrüßen, daß E. van Everdingen in einer neueren Arbeit[1]) alle meteorologischen Daten, die bei der Ausbreitung des Geschützdonners an bestimmten Tagen in diesem Kriege vielleicht eine Rolle gespielt haben, zusammengestellt hat, soweit er ihrer habhaft werden konnte. Da die Arbeit den meisten Lesern nur schwer zugänglich sein dürfte, so sei es mir gestattet, die wichtigsten Angaben kurz zusammenzustellen. Van Everdingen bezieht sich auf die Beobachtungen, die auf drei holländischen Stationen, Helder, Flushing und Winterswijk, gemacht worden sind, und berücksichtigt außerdem die Stationen Hamburg, Lindenberg und Friedrichshafen. Im ganzen sind von ihm acht Fälle untersucht worden:

1. 8. Oktober 1914. Bombardement von Antwerpen. Von der Strato-Cumulus-Schicht (2000 m) bis zur Höhe der Cirri (10000 m) ist keine Zunahme des Windes festzustellen, besonders keines SW-Windes. Bis zu 2000 m Höhe wird keine S-Komponente angetroffen und westliche Winde von einiger Bedeutung treten erst bei Helder auf. Die in Flushing beobachtete Bewegung der Cirri steht senkrecht auf der Hauptfortschreitungsrichtung der Schallstrahlen[2]). Hiernach kann die Hörbarkeit des Geschützdonners in großen Entfernungen nicht dem Winde zugeschrieben werden.

Eine kräftige Inversion in 2500 bis 3000 m Höhe, bei der die Temperatur von $3{,}8^0$ bis auf $10{,}8^0$ steigt, wird in Soesterberg beobachtet.

2. 17. Oktober. Seegefecht in der Nordsee. Der Wind nimmt von der Erdoberfläche (NO) bis zur Cirrusschicht (S-Wind) zu. Die Bewegung der Cirri aus Süden ist nicht geeignet, Schallstrahlen aus westlicher Richtung nach unten zu biegen.

3. 18. Oktober. Erste Beschießung deutscher Stellungen an der Yser durch englische Schiffsgeschütze. An der Erdoberfläche weht NO-Wind, der bis zur Höhe der Alto-Cumulus-Schicht (3000 m) an Stärke zunimmt. Dadurch wird die Hörbarkeit des Schalles in NO-Richtung entschieden ungünstig beeinflußt. Der bei wahrscheinlich sehr hohen Alto-Cumulus-Wolken beobachtete OSO-Wind hat auf die Schallbewegung in NO-Richtung keinen Einfluß.

4. 22. Oktober. Schwere Kämpfe in der Linie Ostende-Nieuport-Ypern. SO-Wind an der Erdoberfläche geht in kräftigen S-Wind über, der bis zur Alto-Cumulus-Schicht zunimmt; bis zur Cirrus-Schicht ändert sich dann die Windgeschwindigkeit nur wenig. Die Schallausbreitung in weit entfernte Gebiete wird daher durch den Wind nicht begünstigt.

5. 24. Oktober. Schwere Kämpfe an der Yser. O-Wind über Seeland geht in der Höhe in eine kräftige südliche Strömung über. Die Winde an der Erdoberfläche und in den unteren Schichten der Atmosphäre sind daher der Ausbreitung des Schalles über Holland nicht günstig.

6. 28. Oktober. Schwere Artilleriekämpfe in Flandern. Schon in geringer Höhe über der Erdoberfläche weht SW-Wind, dessen Stärke ein wenig zunimmt. Die Möglichkeit, daß eine Zunahme des Windes gegen die Cirrus-Schicht eine gewisse Rolle spielt, kann nicht geleugnet werden.

7. 1. November. Deutscher Angriff auf Ypern. Der Wind nimmt schnell nach oben hin zu, aber in SO-Richtung, also senkrecht zu der Richtung vom Schlachtfelde nach Holland. In dieser Richtung ist daher kein Einfluß des Windes zu erwarten. Aber vielleicht stammt der gehörte Geschützdonner aus mehr südlichen Gebieten, z. B. den Argonnen.

8. 24. Januar 1915. Seeschlacht in der Nordsee, endigend mit dem Untergange des Blücher. Aus Holland liegen keine meteorologischen Beobachtungen vor. Es ist jedoch möglich, daß eine nördliche Komponente des Windes bei der Fortführung des Schalles mitwirkt. —

Aus den kritischen Bemerkungen, die van Everdingen seinen Angaben anschließt, geht deutlich hervor, daß die Windverhältnisse in den acht beobachteten Fällen im allgemeinen der Schallausbreitung über Holland nicht günstig waren.

Abgesehen von dem ersten Falle, liegen aus Holland über Inversionen keine Beobachtungen vor. Auf den deutschen Stationen wurden zwar an allen acht Beobachtungstagen Inversionen festgestellt, meistens sogar zwei oder noch mehr übereinander; der Temperatursprung war aber in den meisten Fällen kleiner als 5^0. Daher glaubt van Everdingen den Inversionen ebenfalls keine wesentliche Rolle bei der Schallausbreitung zuweisen zu können und die große Erstreckung des Hörbereichs durch die von dem

1) The propagation of sound in the atmosphere; Koninkl. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam; Proceedings, No. 6; vol. XVIII.

2) Ein senkrecht zum Schallstrahl wehender Wind hat keinen Einfluß auf die Richtung des Strahles. Wie sich aus zahlreichen Beobachtungen ergibt, erfolgt eine merkliche Verstärkung der Schallintensität nur in dem in der Windrichtung liegenden, durch den Schallstrahl halbierten vorderen Quadranten (vgl. Winkelmanns Handbuch der Physik. Bd. Akustik).

Bornesche Hypothese erklären zu müssen. Da diese Hypothese jedoch zweifellos nur sehr geringen Anspruch auf Glaubwürdigkeit besitzt, so betrachten wir unsererseits die Tatsache, daß stets Inversionen vorhanden waren, als hinreichenden Grund für die Richtigkeit der Annahme, daß die weite Fortleitung der Schallwellen auf ihre Zurückbiegung an und in diesen Inversionsschichten zurückzuführen sei. Die Schwäche vieler der beobachteten Inversionen liefert keinen Einwand gegen unsere Annahme. Bei der kräftigen Beugung, welche die Schallstrahlen erleiden (vgl. unsere beiden früheren Abhandlungen a. a. O.), sind stets Strahlen vorhanden, die unter so kleinen Winkeln die Inversionsschichten treffen, daß sie zur Umkehr gezwungen werden. Die Gesamtintensität der zur Erdoberfläche zurückkehrenden Strahlen ist allerdings umso geringer, je schwächer die Inversionen sind; aber van Everdingen selbst bestätigt diese Folgerung durch die Angabe, daß in den hierher gehörenden Fällen in größerer Entfernung von der Schallquelle die Schallstärke nicht die bei der Belagerung Antwerpens beobachtete, die durch eine sehr kräftige Inversion veranlaßt wurde, erreichte.

II.

Die wirklich beobachteten Verhältnisse sind in den acht angegebenen Fällen hiernach der Inversionshypothese günstiger als der Luftströmungshypothese. Es gibt jedoch noch zwei andere Gesichtspunkte, die ein Urteil darüber zulassen, welche von den beiden Hypothesen den Vorzug verdient.

1. Es hat sich eine deutliche Abhängigkeit der Schallausbreitung von der Jahreszeit ergeben. In erster Linie ist die kühle Jahreszeit der Erscheinung günstig. Im Sommer hat man vielerorts nichts wahrnehmen können, wo im Winter deutlich Kanonendonner zu hören war. Nun ist es offenbar völlig ausgeschlossen, daß die Windverhältnisse im Sommer der Ausbreitung des Schalles weniger günstig sein könnten als im Winter; in allen Jahreszeiten wechseln die Winde in den niederen und höheren Luftschichten in jeder möglichen Weise. Im Gegensatze hierzu sind aber Inversionen im Winter viel häufiger und ausgeprägter als im Sommer. Die Abhängigkeit der Schallausbreitung von der Jahreszeit gibt daher einen deutlichen Hinweis, welcher Annahme die größere Wahrscheinlichkeit zukommt.

Man hat den Unterschied auch dadurch erklären wollen, daß die Atmosphäre im Sommer akustisch trüber (vgl. hierüber die erste unserer früheren Abhandlungen a. a. O.) sei als im Winter. Dies ist zwar nicht zu bestreiten, soweit es sich um die Tageszeit handelt. Während der Nacht sind aber die atmosphärischen Verhältnisse auch im Sommer ziemlich gleichmäßig und kaum von denen des Winters verschieden. Im Sommer müßte also die Nachtzeit der Ausbreitung des Schalles ebenso günstig sein wie die Zeit des Winters, was aber der Beobachtung widerspricht.

Ebensowenig führt die Annahme zum Ziele, daß, weil im Sommer wegen des stärkeren Temperaturabfalls mit der Höhe die Schallstrahlen sich kräftiger aufwärts krümmen als im Winter, ihre Zurückbiegung nach der Erdoberfläche weniger wahrscheinlich sei; denn schon eine verhältnismäßig geringe Windzunahme mit der Höhe würde genügen, diese Wirkung der Temperaturabnahme zu kompensieren. Nach einer Rechnung Emdens (a. a. O.) liefert bei dem starken Temperaturgradienten von 0,85° auf 100 m bereits eine Windzunahme von 5 m/sec auf 1000 m Höhendifferenz einen geradlinigen Strahl, und selbst der größte bei stabilem Gleichgewichtszustande der Atmosphäre mögliche, d. i. der adiabatische Temperaturgradient, der ziemlich genau 1° auf 100 m Höhendifferenz beträgt, würde bei einer Windzunahme von 6 m/sec auf den Kilometer keine Aufwärtskrümmung der Schallstrahlen mehr bewirken.

2. In manchen Fällen, wo das Hörbarkeitsgebiet durch eine Zone des Schweigens in zwei mehr oder weniger deutlich getrennte Teile geteilt wird, fand sich, daß die Zonengrenzen eine gewisse unveränderliche Lage hatten. Wenn die Gleichungen der Schallstrahlkurven gefunden sind, ist es nun nicht schwer, Zahlenwerte so zu wählen, daß die mit ihrer Hilfe aus den Gleichungen sich ergebenden Entfernungen der Zonengrenzen von der Schallquelle mit den beobachteten Werten übereinstimmen. Emden gibt a. a. O. ein Beispiel dafür. Aber schon kleine Änderungen der angenommenen Zahlenwerte führen zu ganz anderen Endwerten. Wenn bei einer Steigerung der Windgeschwindigkeit um 4 m/sec auf 1000 m Höhendifferenz nach Emdens Rechnung die äußere Zone der Hörbarkeit in 161 km Entfernung von der Schallquelle beginnt, so würde sie in einem andern Falle bei der nicht minder wahrscheinlichen Steigerung von 8 m/sec auf 1 km Höhendifferenz bereits in ungefähr der halben Entfernung ihren Anfang nehmen. — Wenn Inversionen die Zurückbiegung der Schallstrahlen bewirken, so sind die Grenzverschiebungen weniger beträchtlich. Die kräftigen Inversionen des Winters herrschen in bestimmten Höhen vor; sie reichen im allgemeinen nicht über 3000 m hinaus. Liegen sie unter 1500 m, so dürfte eine Zone

des Schweigens überhaupt nicht zur Ausbildung kommen, weil zahlreiche zurückgeworfene Strahlen bereits in Gebiete der Erdoberfläche, wohin auch noch direkte Strahlen gelangen, zurückkommen. Beginnt bei Inversionen in 1500 bis 3000 m Höhe eine Zone des Schweigens sich mehr oder weniger deutlich auszuprägen, so weichen aber die von der Schallquelle gemessenen Entfernungen ihrer Grenzen, da die Höhe der Inversion, ähnlich wie bei der Berechnung der Sichtweite die Entfernung des Beobachters von der Erdoberfläche, nur mit der Quadratwurzel in die Rechnung eingeht, nicht sehr beträchtlich von einem mittleren Werte ab.

Die Annahme, daß bei der Fortleitung des Schalles bis in große Entfernungen von der Schallquelle die Temperaturverhältnisse der Atmosphäre die Hauptrolle spielen, scheint nach allem Gesagten in den meisten Fällen das Richtige zu treffen. Gelegentlich werden aber auch die Windverhältnisse ausschlaggebend sein, besonders im Sommer, wo die Inversionen nur selten scharf ausgeprägt sind. Eigentümlichkeiten der Lage, Form und Größe des Hörbarkeitsbereichs finden leicht dadurch eine Erklärung, daß die Inversionsschicht örtlich begrenzt ist und, ähnlich wie ein das auf ihn fallende Licht reflektierender Spiegel eine Fläche erhellt, deren Größe und Gestalt von seiner eigenen Form, Lage und Größe abhängt, nur einem begrenzten Teile der Erdoberfläche Schallstrahlen zurücksendet. Zu beachten ist jedoch, daß auch in dem Falle, wo sich die Inversionsschicht über das ganze die Schallquelle rings umgebende Gebiet erstreckt, und daher bei Windstille eine ziemlich symmetrische, die Schallquelle kreisförmig umschließende Gestalt des Hörbarkeitsgebietes zu erwarten wäre, ein Wind beträchtliche Störungen hervorzurufen vermag, die darin bestehen, daß sich der auf der Leeseite liegende Teil des Gebietes beträchtlich vergrößert, der auf der Luvseite liegende verkleinert. Ein sicheres Urteil über die Anwendbarkeit der einen oder der anderen oder auch beider Hypothesen läßt sich in allen Fällen nur dann gewinnen, wenn möglichst vollständige Beobachtungen der Strömungs- und der Temperaturverhältnisse der Atmosphäre in dem ganzen die Schallquelle umgebenden Gebiete vorliegen.

Bremen.

(Eingegangen 6. September 1917.)

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

III.

Transformation der Gleichungen des elektromagnetischen Feldes. Einige fundamentale Unterschiede von den Gleichungen der Lorentzschen Theorie.

Bei der Annahme mechanischer Geschwindigkeiten u, v, w von der Form:

$$\left.\begin{aligned}\mu u &= \mu_0\left\{u_0 + u_1 \cos\frac{t}{T}2\pi + u_2 \sin\frac{t}{T}2\pi\right\},\\ \mu v &= \mu_0\left\{v_0 + v_1 \cos\frac{t}{T}2\pi + v_2 \sin\frac{t}{T}2\pi\right\},\\ \mu w &= \mu_0\left\{w_0 + w_1 \cos\frac{t}{T}2\pi + w_2 \sin\frac{t}{T}2\pi\right\}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(μ Dichte, μ_0 sehr kleine konstante Dichte, T sehr kleine Zeitdauer) haben wir aus dem mechanischen Grundprinzip (Abh. I[1]) unter Voraussetzung des „universellen Dralles" (Abh. II[2]) für u_1, v_1, w_1; u_2, v_2 w_2 die Differentialgleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} &= \frac{1}{c}\left\{\frac{\bar{d} u_1}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x}u_1 - \frac{\partial u_0}{\partial y}v_1 - \frac{\partial u_0}{\partial z}w_1\right\} + \frac{1}{c}u_0\theta_1{}^{3)}, \ldots\\ \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} &= -\frac{1}{c}\left\{\frac{\bar{d} u_2}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x}u_2 - \frac{\partial u_0}{\partial y}v_2 - \frac{\partial u_0}{\partial z}w_2\right\}, \ldots\\ \frac{d\theta_1}{dt} &= 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0,\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei c eine sehr große konstante Geschwindigkeit (die Lichtgeschwindigkeit in reinem Äther) ist,

$$\theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}$$

gesetzt wird, und das Zeichen $\frac{\bar{d}}{dt}$ die Operation:

$$\frac{\bar{d} f(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}u_0 + \frac{\partial f}{\partial y}v_0 + \frac{\partial f}{\partial z}w_0$$

bedeutet.

Indem wir

$$\left.\begin{aligned}u_2 &= \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},\\ v_2 &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},\\ w_2 &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

---

1) Diese Zeitschr. 18, 323, 1917.

2) Diese Zeitschr. 18, 341, 1917.

3) θ_1 ist für jedes Elektron eine ganz bestimmte (positive oder negative) Konstante.

setzen, können wir das zweite Tripel der Gleichungen (2) durch die drei folgenden Gleichungen ersetzen:

$$\dot{u}_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\left\{\frac{\overline{dU}}{dt} - u_0 \frac{\partial U}{\partial x} - v_0 \frac{\partial V}{\partial x} - w_0 \frac{\partial W}{\partial x}\right\}, \ldots, \quad (4)$$

unter vorläufigem Ausschluß von sichtbaren Kontraktionen und Dilatationen, also bei der Voraussetzung:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0,$$

wobei

$$\varphi, U, V, W$$

drei mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen vorstellen sollen.

Indem wir die Gleichungen (4) bzw. nach x, y, z differenzieren und addieren, ergibt sich:

$$\theta_1 = -\Delta\varphi - \frac{1}{c}\frac{\overline{d}}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + \frac{1}{c}\left(u_0 \Delta U + v_0 \Delta V + w_0 \Delta W\right) + \frac{1}{c}\left(u_2 \left\{\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z}\right\} + \cdots\right),$$

oder wenn wir

$$\psi = \varphi - \frac{1}{c}\left(u_0 U + v_0 V + w_0 W\right) \quad (5)$$

setzen:

$$\theta_1 = -\Delta\psi - \frac{1}{c}\frac{\overline{d}}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + F', \quad (6)$$

wo

$$F' = -\frac{2}{c}\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial z} + \cdots + \frac{1}{2}\Delta u_0 \cdot U + \cdots\right\} \quad (6')$$

eine Größe ist, die z. B. für Medien mit sichtbar starrer Bewegung fortfällt.

Wenn wir der letzten der Gleichungen (2) durch die Substitution (3) genügen, bleibt uns noch eine willkürliche Festsetzung über

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

frei; indem wir

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\overline{d\psi}}{dt} \quad (7)$$

wählen, geht (6) in

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\overline{d^2\psi}}{dt^2} = -\theta_1 + F' \quad (8)$$

über.

Das erste Tripel der Gleichungen (2) nimmt durch die Substitutionen (3) und (4) die folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) - \Delta U = -\frac{1}{c}\frac{\overline{d}}{dt}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}\left(\frac{\overline{dU}}{dt} - u_0\frac{\partial U}{\partial x} - v_0\frac{\partial V}{\partial x} - w_0\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right\} + \frac{1}{c}u_0\theta_1$$
$$+ \frac{1}{c}\frac{\partial u_0}{\partial x}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}\left(\frac{\overline{dU}}{dt} - u_0\frac{\partial U}{\partial x} - v_0\frac{\partial V}{\partial x} - w_0\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{c}\frac{\partial u_0}{\partial y}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{c}\left(\frac{\overline{dV}}{dt} - u_0\frac{\partial U}{\partial y} - v_0\frac{\partial V}{\partial y} - w_0\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{c}\frac{\partial u_0}{\partial z}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{c}\left(\frac{\overline{dW}}{dt} - u_0\frac{\partial U}{\partial z} - v_0\frac{\partial V}{\partial z} - w_0\frac{\partial W}{\partial z}\right)\right\}, \ldots,$$

oder mit Rücksicht auf (7):

$$\Delta U = -\frac{1}{c}u_0\theta_1 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\overline{d}}{dt}\left(u_0 U + v_0 V + w_0 W\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\overline{d}}{dt}\left(u_0\frac{\partial U}{\partial x} + v_0\frac{\partial V}{\partial x} + w_0\frac{\partial W}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{1}{c^2}\frac{\overline{d^2 U}}{dt^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\overline{dU}}{dt} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\overline{dV}}{dt} + \frac{\partial u_0}{\partial z}\frac{\overline{dW}}{dt}\right)$$
$$+ \frac{1}{c^2}\left\{u_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}\right) + \cdots\right\}, \ldots$$

oder:

$$\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\overline{d^2 U}}{dt^2} = -\frac{1}{c}u_0\theta_1 + \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\frac{\overline{dV}}{dt} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\frac{\overline{dW}}{dt}\right\} + G_x' + H_x', \ldots, \quad (9)$$

wo

$$G_x' = \frac{1}{c^2}\left(U\frac{\partial}{\partial x}\frac{\overline{du_0}}{dt} + V\frac{\partial}{\partial x}\frac{\overline{dv_0}}{dt} + W\frac{\partial}{\partial x}\frac{\overline{dw_0}}{dt}\right), \ldots \quad (10)$$

$$H_x' = \frac{2}{c^2}\left[u_0\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial z}\right\} + \cdots\right], \ldots \quad (11)$$

In allen Fällen, in denen die Größen F', G_x', .. H_x', .. sehr klein sind, — und wir werden sehen, daß dies gerade in den wichtigsten Fällen stattfinden wird, — ergibt sich somit das folgende Resultat:

Durch die Substitutionen:

$$u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{c}\left\{\frac{\overline{d}U}{dt} + \frac{\partial u_0}{\partial x}U + \frac{\partial v_0}{\partial x}V + \frac{\partial w_0}{\partial x}W\right\}, \ldots \quad \text{(I)}$$

$$u_2 = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \ldots \quad \text{(II)}$$[1]

gehen die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes (2) in die folgenden über:

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\overline{d}^2 \psi}{dt^2} = -\theta_1, \quad \text{(III)}$$

$$\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\overline{d}^2 U}{dt^2} = -\frac{1}{c}u_0\,\theta_1 \quad \text{(IV)}$$

$$+\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\frac{\overline{d}V}{dt} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\frac{\overline{d}W}{dt}\right\}, \ldots,$$

wobei ψ, U, V, W mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen sein sollen, θ_1 eine für jedes Elektron bestimmte (positive oder negative) Konstante.

Der formale Unterschied von den Lorentzschen Gleichungen besteht zunächst in dem durchgängigen Auftreten der Operation $\frac{\overline{d}}{dt}$ an Stelle der partiellen Differentiation $\frac{\partial}{\partial t}$, ferner aber noch darin, daß in der Gleichungsgruppe (I) rechts die Glieder

$$-\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x}U + \frac{\partial v_0}{\partial x}V + \frac{\partial w_0}{\partial x}W\right\}, \ldots,$$

in der Gleichungsgruppe (IV) rechts die Glieder

$$\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\frac{\overline{d}V}{dt} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\frac{\overline{d}W}{dt}\right\} \ldots$$

hinzutreten.

Ein weiterer formaler Unterschied wird — wie wir in der folgenden und den späteren Abhandlungen sehen werden, — in den Ausdrücken für die sogenannten ponderomotorischen Kräfte hinzukommen. Diese formalen Unterschiede bedeuten im wesentlichen ein Zurückgehen von den Lorentzschen Gleichungen zu denen von Maxwell-Hertz, unter Vermeidung einiger der Maxwell-Hertzschen Theorie anhaftenden Schwierigkeiten.

[1] Unter Hinzunahme der Bedingung:
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\overline{d}\psi}{dt}. \quad \text{(II')}$$

Was den Unterschied in der Anschaulichkeit anbelangt, so wollen wir hier gar nicht erst nachdrücklich darauf hinweisen, daß durch die vorliegende Theorie ein mechanisches Bild des elektromagnetischen Feldes gewonnen wird, sondern hier den Nachdruck darauf legen, daß gerade durch das Auftreten der sichtbaren Geschwindigkeitskomponenten u_0 v_0 w_0 nicht bloß in den Elektronen, sondern auch in dem Außenmedium eine der größten Schwierigkeiten der Lorentzschen Theorie beseitigt wird, die Schwierigkeit, welche wohl formal durch die Einstein-Minkowskische Relativitätstheorie vermindert erscheint, in dieser Theorie aber für die Anschauung in erhöhtem Maße bestehen bleibt.

Wenn wir die Dimensionen eines sich mit irgendeiner translatorischen Geschwindigkeit bewegenden Elektrons als sehr klein ansehen, so werden selbstverständlich die sichtbaren Geschwindigkeiten u_0 v_0 w_0 im Außenmedium, welche durch die translatorische Bewegung des Elektrons verursacht werden, sehr rasch mit dem Abstande vom Elektron abnehmen, und in einer gewissen Entfernung, die vielleicht schon sehr klein angenommen werden darf, wird es erlaubt sein, in einem sonst ruhenden (d. h. durch keine andere Ursache in sichtbare Bewegung versetzten) Außenmedium die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes (III) und (IV) in der der Lorentzschen entsprechenden Form:

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\theta_1, \quad \text{(III)}$$

$$\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \ldots \quad \text{(IV)}$$

zu schreiben, analog die Gleichungen (I) und (II) in der Form:

$$u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t}, \ldots, \quad \text{(I)}$$

$$u_2 = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \ldots, \quad \text{(II)}$$

bei der Bedingung:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad \text{(II')}$$

In den Elektronen selbst aber sind die ursprünglichen Gleichungen (I)—(IV) mit den Operationszeichen $\frac{\overline{d}}{dt}$ beizubehalten, und hierin liegt der wesentliche Unterschied in der formalen Grundlage. Ein weiterer Unterschied ist noch darin zu sehen, daß von den Oberflächen der Elektronen abklingend eine Zwischenschicht anzunehmen ist, in welcher die translatorischen Geschwindigkeiten des Elektrons stetig in Null übergehen; in Wahrheit wird theoretisch die Null erst in unendlicher Ferne erreicht; mit

Rücksicht auf die kleinen Dimensionen der Elektronen sind aber die Werte schon in sehr kleinen Abständen von den Elektronen so klein, daß sie nicht mehr berücksichtigt werden brauchen und daher von einer dünnen Übergangsschicht gesprochen werden kann.

Die geringe, von der Anschauung durchaus geforderte Komplikation, welche der Theorie keinerlei unüberwindliche Schwierigkeit entgegensetzt, mag man, wie es vorläufig hier geschieht, mit einem Außenmedium rechnen, das auch für die sichtbaren Geschwindigkeitskomponenten u_0, v_0, w_0 inkompressibel ist, oder mag man für das Verhalten gegenüber den sichtbaren Geschwindigkeiten andere Voraussetzungen zugrunde legen, wird in der Optik die Möglichkeit ergeben, die Fizeauschen Experimente bezüglich der Mitführung von Licht in bewegten Medien und die Morley-Michelsonschen Experimente bezüglich der Fortführung des Lichtes auf der bewegten Erde in ein und derselben Theorie zu vereinen, ohne zu so komplizierten Hilfsmitteln, wie der Einstein-Minkowskischen Relativitätstheorie, zu greifen.

Eine kurze Bemerkung möge bei dieser Darlegung der wichtigsten Abweichungen von der Lorentzschen Theorie bereits an dieser Stelle bezüglich der Zusatzglieder

$$\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\frac{d\overline{V}}{dt}-\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}-\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\frac{\overline{d}W}{dt}\right\},\ldots$$

in den Gleichungen (IV) Platz finden: Dieses Glied wird auch von der Maxwellschen Theorie gefordert und ist bereits intuitiv von Faraday bei seinen Bestrebungen erkannt worden, ein Phänomen von der Art des Zeemanschen Phänomens aufzudecken; unter Hinzunahme der Voraussetzung, daß magnetische Teilchen um ihre magnetischen Achsen rasche mechanische Rotationen ausführen. In dieser Richtung wird sich meine Theorie in guter Übereinstimmung mit den Ideen von Faraday und Maxwell befinden.

(Eingegangen 11. September 1917.)

Über den Einfluß von Druck auf die elektrische Leitfähigkeit der reinen Metalle nach einer Theorie von E. Grüneisen. II.

Von Bengt Beckman.

E. Grüneisen[1]) hat für die Veränderung der elektrischen Leitfähigkeit bei allseitigem Druck folgende Relation aufgestellt:

$$a=\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)_T=-\frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_S+\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial p}\right)_S$$
$$-\varkappa_s+\frac{1}{C_p}\frac{\partial v}{\partial T}\left(1+\alpha_T T\right); \qquad (1)$$

σ ist die elektrische Leitfähigkeit, a der Druckkoeffizient, u die Geschwindigkeit der Elektronen, N die Elektronenkonzentration, $\varkappa_s$ die adiabatische Kompressibilität, $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$ der Volumenausdehnungskoeffizient, C_p die Atomwärme, w der Widerstand, $\alpha_T=\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial T}$ der Temperaturkoeffizient des Widerstands bei der absoluten Temperatur T, v das Atomvolumen. Das erste Glied der rechten Seite, $-\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial p}$, das unbekannt ist, wird von Grüneisen vernachlässigt, das zweite wird aus den Beobachtungen von E. Wagner[1]) genommen.

In einer früheren Arbeit[2]) habe ich die Relation an zwölf verschiedenen Metallen geprüft. Das Resultat war folgendes:

Die Grüneisensche Beziehung gibt bei den Metallen, Wismut und Quecksilber ausgenommen, die richtige Größenordnung des Druckkoeffizienten. Mit Ausnahme von Gold, Silber, Aluminium und Kupfer, für welche sie streng gilt, ist die Beziehung als eine erste Annäherung zu betrachten.

Im Jahre 1916 habe ich den Druckkoeffizienten bei vier weiteren Metallen gemessen, bei Thallium, Tantal, Molybdän und Wolfram. Durch die Freundlichkeit des Herrn Dr. G. P. L. Philips habe ich reines Molybdän und Wolfram von N. V. Philips Gloeilampenfabriken in Eindhoven bekommen. Reines Thallium und Tantal habe ich von C. A. F. Kahlbaum, Berlin-Adlershof erhalten. Die Messungen des Druckkoeffizienten sind in derselben Weise ausgeführt wie bei meinen früheren Arbeiten[3]). Das Resultat geht aus den Tabellen I—IV hervor. Die Druckeinheit ist 1 Atm. Die Widerstandsänderung wird durch

$$D=\lg\text{nat}\,\frac{w_1}{w_p} \qquad (2)$$

repräsentiert.

(w_1 = Widerstand bei $p=1$, w_p bei p Atm.)

Für D gilt.

$$D=a'p+b'p^2, \qquad (3)$$

wo a' b' zwei Konstanten sind; $b'p^2$ ist nur ein Korrektionsglied. Unter Annahme von isotropem Material ist

---

1) E. Grüneisen, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 186, 1913.

1) E. Wagner, Ann. d. Phys. (4) **27**, 955, 1908.
2) B. Beckman, diese Zeitschr. **16**, 59, 1915.
3) B. Beckman, Upsala Univ. Årsskrift, 1911. Ark. f. Mat., Astr. och Fys. Bd. 7, Nr. 42, 1912.



$$a = a' + \frac{1}{3}\varkappa \qquad (4)$$

Die Messungen gelten bei 0° C.

Tabelle I.

Thallium von C. A. F. Kahlbaum, Berlin-Adlershof.

p	D	D/p beob.	D/p ber.
628	$84,6 \cdot 10^{-4}$	$134,7 \cdot 10^{-7}$	132,6
788	105,6	133,9	133,0
862	114,6	132,9	133,3
906	120,0	132,4	133,3
942	126,0	133,7	133,5
984	130,2	132,3	133,5
1102	147,0	133,4	133,8
1164	156,1	134,1	134,0
1189	159,7	134,3	134,0
1198	161,0	134,3	134,0
1296	174,6	134,7	134,3

$a' = 131,1 \cdot 10^{-7}$; $b' = 2,45 \cdot 10^{-10}$.

Tabelle II.

Tantal von C. A. F. Kahlbaum, Berlin-Adlershof.

p	D	D/p beob.	D/p ber.
700	$12,04 \cdot 10^{-4}$	$17,20 \cdot 10^{-7}$	$17,21 \cdot 10^{-7}$
846	14,41	17,03	17,13
910	15,63	17,17	17,10
1099	18,76	17,06	17,00
1243	20,78	16,72	16,92
1384	23,30	16,84	16,85
1586	26,62	16,78	16,74
1663	28,16	16,93	16,71
1672	28,00	16,76	16,70
1800	29,56	16,43	16,63
1890	31,38	16,60	16,59

$a' = 17,57 \cdot 10^{-7}$; $b' = -5,2 \cdot 10^{-11}$.

Tabelle III.

Molybdän, von N. V. Philips Gloeilampenfabriken Eindhoven.

p	D	D/p beob.	D/p ber.
676	$9,55 \cdot 10^{-4}$	$14,15 \cdot 10^{-7}$	$13,95 \cdot 10^{-7}$
806	11,40	14,15	13,85
999	13,45	13,45	13,65
1138	15,25	13,40	13,55
1415	18,85	13,30	13,30
1535	20,00	13,00	13,20
1624	21,00	12,90	13,10
1653	21,90	13,25	13,10
1705	22,20	13,05	13,05
1787	23,65	13,25	12,95
1824	23,70	13,00	12,95
1855	24,35	13,15	12,90
1905	25,15	13,20	12,65

$a' = 14,60 \cdot 10^{-7}$; $b' = -9,0 \cdot 10^{-11}$.

Tabelle IV.

Wolfram von N. V. Philips Gloeilampenfabriken, Eindhoven.

p	D	D/p
717	$11,15 \cdot 10^{-4}$	$15,55 \cdot 10^{-7}$
821	13,25	16,10
924	14,5	15,70
984	15,55	15,80
1054	16,90	16,05
1241	19,30	15,55
1444	22,80	15,80
1526	23,35	15,30
1573	24,25	15,40
1619	25,90	16,00
1679	26,15	15,55

$a' = 15,65 \cdot 10^{-7}$.

Bei den vier Metallen wurde der Temperaturkoeffizient des Widerstands und bei Molybdän und Wolfram auch der lineare Ausdehnungskoeffizient zwischen 0° und 100° C gemessen.

Der Einfluß des Druckes auf die Elektronenkonzentration ist bei diesen vier Metallen nicht bekannt. Bei den früher untersuchten Metallen ist das zweite Glied $\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial p}$ nur ein kleiner Bruchteil der rechten Seite der Gleichung (1), bei Platin und Palladium etwa 13 Proz., bei Zink 10 Proz., für die übrigen neun Metalle noch kleiner.

Für Thallium[1]) ist

$$v = 17,2$$
$$\varkappa = 28 \cdot 10^{-13} \text{ C. G. S.}$$
$$C_p = 27,3 \times 10^7$$
$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T} = 84 \cdot 10^{-6}$$
$$\alpha_T = 41 \cdot 10^{-4}$$
$$a_{\text{ber.}} = 84 \cdot 10^{-7}$$
$$a_{\text{beob.}} = 140 \cdot 10^{-7}.$$

Die Relation gibt einen zu niedrigen Wert. Dies ist, wie schon Grüneisen bemerkt hat, der Fall für Metalle mit niedrigerer Schmelztemperatur, z. B. Blei, Kadmium und Zink.

Für Tantal, Molybdän und Wolfram fehlen leider Angaben der Kompressibilität.

Wenn wir die zwei ersten Glieder der rechten Seite in Gleichung (1) vernachlässigen, bekommen wir

$$A = \frac{1}{C_p}\frac{\partial v}{\partial T}(1 + \alpha T) - a' = {}^4/_3 \text{ K.} \qquad (5)$$

Die Tabelle V enthält die Angaben der in (5) eingehenden Größen.

1) Der Druckkoeffizient bezieht sich auf die Druckeinheit 1 Atm. Alle anderen Konstanten sind in C. G. S. ausgedrückt.



Tabelle V.

Metalle	v	C_p	$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$	α_T	$a'_{\text{beob.}}$	Δ
Ta	10,7	$26{,}7 \cdot 10^{-7}$	$23{,}7 \cdot 10^{-6}$	$29{,}7 \cdot 10^{-4}$	$17{,}6 \cdot 10^{-7}$	$-0{,}4 \cdot 10^{-13}$
Mo	9,8	26	16,8	36,9	14,6	$-1{,}9$
W	9,6	26,8	14,1	39,9	15,6	$-5{,}0$

Nach E. Grüneisens Theorie bekommt man also für Tantal, Molybdän und Wolfram einen zu niedrigen Wert des Druckkoeffizienten. Die Differenz Δ ist sogar negativ. Wahrscheinlich kann die verhältnismäßig große Differenz zwischen dem beobachteten und berechneten Wert des Druckkoeffizienten nicht aus der Vernachlässigung des zweiten Gliedes $\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial p}$ erklärt werden.

Upsala, Physikalisches Institut der Universität, September 1917.

(Eingegangen 14. September 1917.)

Die Bestimmung eines Kristallsystems durch Röntgenstrahlen.

Von C. Runge.

Die Methode von Debye und Scherrer[1]) durch die Interferenzen, die an regellos orientierten Kristallteilchen im Röntgenlicht beobachtet werden, auf ein Kristallsystem zu schließen, läuft auf die mathematische Aufgabe hinaus, aus den Werten, die eine definite quadratische Form von drei Veränderlichen für unbekannte ganzzahlige Werte dieser Veränderlichen annimmt, die quadratische Form abzuleiten. Meiner Ansicht nach empfiehlt es sich nicht nur vom physikalischen Standpunkt, sondern ebenso sehr im mathematischen Interesse, die Aufgabe in der Form ins Auge zu fassen, wie sie sich aus der physikalischen Fragestellung ergibt. Es seien $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ drei nicht einer Ebene parallele Vektoren. Aus ihnen werden durch die ganzen Zahlen $n_1\ n_2\ n_3$ die Vektoren

$$\mathfrak{P} = n_1\,\mathfrak{L} + n_2\,\mathfrak{M} + n_3\,\mathfrak{N}$$

abgeleitet, die von einem Punkte aus abgetragen zu den Gitterpunkten eines einfachen Raumgitters führen, das wir als das Raumgitter eines Kristalls betrachten wollen. Die Vektoren $\mathfrak{P}$ haben also die Dimension einer Länge. Durch die vektoriellen Produkte $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \times \mathfrak{L}$, $\mathfrak{L} \times \mathfrak{M}$[1]) und die ganzen Zahlen h, k, l erhalten wir die Vektoren

$$h\,\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} + k\,\mathfrak{N} \times \mathfrak{L} + l\,\mathfrak{L} \times \mathfrak{M},$$

die auf den durch die Gitterpunkte zu legenden Ebenen senkrecht stehen. Dividieren wir sie durch das Parallelepipedon $\mathfrak{L}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}$, so erhalten sie die Dimension einer reziproken Länge. Die Größe jedes dieser Vektoren ist ein ganzes Vielfaches des reziproken Abstandes der parallelen Gitterebenen, auf denen er senkrecht steht. Wir multiplizieren noch mit der halben Wellenlänge $\lambda/2$, um ihnen die Dimension von reinen Zahlen zu geben und bezeichnen die Vektoren

$$\frac{\lambda}{2}\frac{\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}}{\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}},\quad \frac{\lambda}{2}\frac{\mathfrak{N} \times \mathfrak{L}}{\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}},\quad \frac{\lambda}{2}\frac{\mathfrak{L} \times \mathfrak{M}}{\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}}\cdot$$

mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Die Vektoren

$$\mathfrak{Q} = h\,\mathfrak{A} + k\,\mathfrak{B} + l\,\mathfrak{C}$$

stehen dann also senkrecht auf den Gitterebenen und sind dimensionslos. Die Länge jedes Vektors $\mathfrak{Q}$ ist ein ganzes Vielfaches von $\frac{\lambda/2}{d}$, wo d den Abstand der auf $\mathfrak{Q}$ senkrechten Kristallebenen bedeutet. Durch die Beobachtung des vom Kristall reflektierten Lichtes bestimmter Wellenlänge λ, werden uns nun gerade diese Vielfachen von $\frac{\lambda/2}{d}$ geliefert. Sie sind gleich $\sin\vartheta/2$, wenn ϑ den Winkel zwischen der Richtung des einfallenden Lichtes und der Richtung des an den zu $\mathfrak{Q}$ senkrechten Kristallebenen reflektierten Lichtes bedeutet. Mit andern Worten: die beobachteten Werte von $\sin\vartheta/2$ liefern uns die Größen der Vektoren $\mathfrak{Q}$, soweit deren Größe kleiner als 1 ist. Das skalare Produkt von $\mathfrak{Q}$ mit sich selbst ist also gleich $\sin^2\vartheta/2$, d. h. es ist:

$$\mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{Q} = \sin^2\vartheta/2 = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}\,h^2 + \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{B}\,k^2 + \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{C}\,l^2 + 2\,\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}\,kl + 2\,\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}\,lh + 2\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\,hk.$$

Diese quadratische Form, die wir mit $Q(h,k,l)$ bezeichnen wollen, gilt es zu ermitteln. Haben wir die sechs skalaren Produkte von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$

1) Diese Zeitschr. 18, 291—301, 1917.

1) Ich bediene mich im folgenden der Bezeichnungen von Gibbs: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ für das vektorielle, $\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N}$ für das skalare Produkt, $\mathfrak{L}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}$ für das Parallelepipedon oder, wie Graßmann sagt, das „äußere Produkt" der drei Vektoren $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$.

miteinander und mit sich selbst gefunden, so sind damit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ relativ zueinander orientiert. Damit ist dann aber auch das Kristallgitter selbst gefunden. Denn die Beziehung zwischen den Vektoren $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist reziprok. Dieselben Formeln, durch die man $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ableitet, dienen auch dazu, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auszudrücken:

$$\mathfrak{L} = \frac{\lambda}{2} \frac{\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}, \quad \mathfrak{M} = \frac{\lambda}{2} \frac{\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}, \quad \mathfrak{N} = \frac{\lambda}{2} \frac{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}.$$

Bei dem Versuch, die Aufgabe zu lösen, stößt man auf mancherlei Schwierigkeiten, erstens dadurch, daß die Beobachtungen der Natur der Sache nach nur eine beschränkte Genauigkeit besitzen. Denn ganzzahlige Relationen zwischen unvollkommenen Beobachtungen neigen dazu, in nichts zu zerflattern. Zweitens dadurch, daß die Werte von $\sin^2 \vartheta/2$ nicht größer als 1 sein können, mit andern Worten, daß der Abstand d zweier benachbarten Ebenen, des Kristallgitters, um noch Interferenz hervorzurufen, nicht kleiner als $\lambda/2$ werden kann und die Beobachtung daher bei gegebener Wellenlänge des Röntgenlichtes nur eine beschränkte Anzahl von Werten der quadratischen Form Q liefert. Drittens dadurch, daß mehrere kongruente Gitter ineinander geschoben sein können und dadurch auch für solche Indizes h, k, l, deren entsprechender Wert von $\sin^2 \vartheta/2$ kleiner als 1 ist, die Intensität des reflektierten Strahles durch Interferenz verschwinden kann.

Ich will diese Schwierigkeiten zunächst außer Augen lassen und erst bei einem Beispiel besprechen, wie sie zu überwinden sind.

Sei Q_1 der kleinste der beobachteten Werte der quadratischen Form, so nehmen wir $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} = Q_1$ an. Den Vektoren $2\mathfrak{A}$, $3\mathfrak{A}$ usw. müssen dann die Werte $4Q_1$, $9Q_1$ usw. entsprechen, die mit den beobachteten Werten verglichen werden können. Unter den übrigen Werten von Q sei Q_2 der kleinste. Wir setzen dann $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B} = Q_2$ und suchen die beiden Werte von Q, die den Vektoren $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ entsprechen. Nennen wir sie Q'_{12} und Q''_{12}, so muß sein:

$$\begin{aligned} Q'_{12} + Q''_{12} &= (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \\ &= 2\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B} = 2(Q_1 + Q_2). \end{aligned}$$

Unter den beobachteten Werten von Q haben wir also zwei solche zu suchen, die zusammengenommen $2(Q_1 + Q_2)$ geben; wobei nicht ausgeschlossen ist, daß $Q'_{12} = Q''_{12}$. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} &= \frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}{2} - \frac{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})}{2} \\ &= \frac{Q'_{12} - Q''_{12}}{2}. \end{aligned}$$

Somit ist die quadratische Form für $l = 0$

$$Q(h, k, 0) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} h^2 + 2\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} hk + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B} k^2$$

gefunden, d. h. es lassen sich alle Werte von Q berechnen und mit den beobachteten Werten vergleichen, die der Koordinatenebene für $l = 0$ angehören. Unter den übrigen Werten von Q sei wieder Q_3 der kleinste. Wir setzen dann $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{C} = Q_3$ und suchen analog wie oben zwei Werte Q'_{13} und Q''_{13}, deren Summe gleich $2(Q_1 + Q_3)$ ist und deren halbe Differenz uns den Wert von $2\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}$ liefert, und zwei Werte Q'_{23} und Q''_{23}, deren Summe gleich $2(Q_2 + Q_3)$ ist und deren halbe Differenz uns den Wert von $2\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$ liefert. Damit lassen sich dann alle Werte von Q berechnen und mit den Beobachtungen vergleichen. Damit ist das Raumgitter

$$\mathfrak{Q} = h\mathfrak{A} + k\mathfrak{B} + l\mathfrak{C}$$

gefunden und nun wird man auf seine Symmetrien zu achten haben, wieviele Vektoren von gleicher Länge vorkommen und wie sie zueinander liegen. Und danach wird man gegebenenfalls statt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ andere Grundvektoren wählen, bei denen die Symmetrien besser hervortreten.

Die Einzelheiten des Verfahrens mögen an einem Beispiel erläutert werden. Ich wähle die Beobachtungen, die Debye und Scherrer am Graphit mit der α-Linie der Kupfer-K-Strahlung ausgeführt haben.

Beobachtungen[1]):

$\sin \vartheta/2 =$ 0,229; 0,373 (doppelt); 0,451; 0,464; 0,521; 0,616; 0,635; 0,655; 0,683; 0,697; 0,719 (doppelt); 0,766 (doppelt); 0,806; 0,834; 0,889; 0,910 (doppelt); 0,919; 0,934; 0,946; 0,951.

Ehe die Quadrate gebildet werden, kann man die beobachteten Werte zunächst noch verbessern. Wir bilden das Doppelte, Dreifache, Vierfache der Größe des kleinsten Vektors

$$n \cdot 0{,}229 = 0{,}458;\ 0{,}687;\ 0{,}916 \quad (n = 2, 3, 4).$$

Beobachtet sind:

0,451 und 0,464; 0,683 und 0,697;
0,910 (doppelt) und 0,919.

Es würde daher zweifelhaft bleiben, wie man zu identifizieren hätte, wenn für die erste und dritte Linie nicht andere genauere Beobachtungen $\sin \vartheta/2 = 0{,}2265$ und $0{,}4550$ (Genauigkeit etwa 0,2 Proz.) vorlägen. Das Doppelte von 0,2265 ist 0,453 und muß mit dem beobachteten Wert 0,4550 identifiziert werden. Die Hälfte von 0,4550 ist 0,2275 und ist doppelt so genau wie der beobachtete Wert 0,2265. Wir ersetzen ihn daher durch 0,2273. Die Vielfachen davon sind

1) Die kleineren Zahlen haben nach einer gütigen Mitteilung Debyes eine Genauigkeit von etwa 1 Proz., die größeren von etwa 0,5 Proz.

0,455; 0,682; 0,909, deren Werte wir also mit den beobachteten Linien 0,451; 0,683 und der einen Komponente von 0,910 zu identifizieren haben.

Das Doppelte von 0,373 gibt 0,746. Da 0,373 eine nicht getrennte Doppellinie darstellt, so werden wir mit 0,746 die eine Komponente der beobachteten Doppellinie 0,719 und die eine Komponente der beobachteten Doppellinie 0,766 identifizieren. Wenn die Werte 0,719 und 0,766 etwa auf 1 Proz. richtig sind, so werden die halben Werte 0,360 und 0,383 etwa auf vier Einheiten der letzten Stelle richtig sein und anstatt des Mittelwertes 0,373 gesetzt werden können.

Das Doppelte von 0,464 ist 0,928. Wir identifizieren diesen Wert mit 0,934, und da dieser Wert auf etwa $^1/_2$ Proz. genau sein soll, so wird die Hälfte davon 0,467 doppelt so genau sein wie der beobachtete Wert 0,464. Wir werden daher statt dieses beobachteten Wertes 0,466 setzen. Somit werden die verbesserten Beobachtungen:

$$\sin \vartheta/2 = 0{,}2273;\ 0{,}360;\ 0{,}383;\ 0{,}4546;\ 0{,}466,$$

während die übrigen ungeändert bleiben können. Nunmehr bilden wir die Werte $\sin^2 \vartheta/2$ der quadratischen Form $Q(h, k, l)$. Da wir es zunächst noch mit Werten von $\sin^2 \vartheta/2$ zu tun haben, die nur auf etwa 2 Proz. genau sind, so wird es vollkommen ausreichen, sich auf drei Dezimalen zu beschränken. Um ganze Zahlen zu haben, werde ich die Werte von $10^3 Q$ betrachten:

$$10^3 Q = 52;\ 130;\ 147;\ 207;\ 217;\ 271;\ 379;\ 403;\ 429;\ 466;\ 486;\ 517(d);\ 587(d);\ 650;\ 696;\ 790;\ 828(d);\ 845;\ 872;\ 895;\ 904.$$

Mit diesen Werten versuchen wir nun wie oben geschildert zu verfahren.

$$Q_1 = 52 \quad Q_2 = 130 \quad 2(Q_1 + Q_2) = 364.$$

Wird $Q'_{12} = 147$ $Q''_{12} = 217$ gesetzt, so ergibt sich $Q'_{12} + Q''_{12} = 2(Q_1 + Q_2)$ und somit für $l = 0$.

$$Q = 52h^2 + 130k^2 - 35hk.$$

Statt -35 könnte man auch $+35$ schreiben; das würde nur bedeuten, daß man einen der beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ die entgegengesetzte Richtung gäbe. Um die Werte von Q für die andern ganzzahligen Werte von h und k zu überblicken, wird man gut tun, sie an die Gitterpunkte eines ebenen Netzes anzuschreiben, dem man, wenn man will, die wahre den Werten $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} = 52$; $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B} = 130$; $2\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = -35$ entsprechende Form geben kann (Fig. 1). In das Netz werden zunächst die Werte von Q für $k = 0$

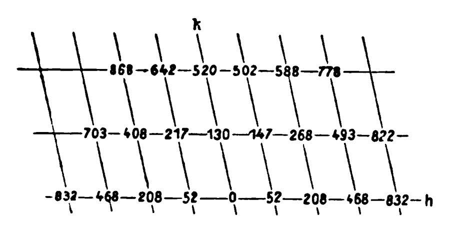


Fig. 1.

und $h = 1, 2, 3, 4$, sowie für $h = 0$ und $k = 1, 2$, ferner die Werte für $h = \pm 1, k = 1$ und $h = \pm 2, k = 2$, eingetragen. Die Werte von Q für die andern Netzpunkte berechnet man dann durch die Bemerkung, daß die Werte auf einer Geraden konstante zweite Differenzen haben. Ich möchte diesem Theorem eine etwas andere Form geben in dem folgenden Satze:

Es seien $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \mathfrak{Q}_4$ vier Vektoren, die von einem Punkte aus abgetragen zu den vier Ecken eines Parallelogramms führen, so daß

$$\mathfrak{Q}_2 - \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_4 - \mathfrak{Q}_3$$

und es seien Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 die Quadrate ihrer Größen; dann ist

$$\begin{aligned} &Q_1 + Q_4 - Q_2 - Q_3 \\ &= \mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_4 \cdot \mathfrak{Q}_4 - \mathfrak{Q}_2 \cdot \mathfrak{Q}_2 - \mathfrak{Q}_3 \cdot \mathfrak{Q}_3 \\ &= 2(\mathfrak{Q}_2 - \mathfrak{Q}_1) \cdot (\mathfrak{Q}_3 - \mathfrak{Q}_1), \end{aligned}$$

d. h. es hängt $Q_1 + Q_4 - Q_2 - Q_3$ nur von den Vektoren $\mathfrak{Q}_2 - \mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_3 - \mathfrak{Q}_1$ also nur von der Gestalt des Parallelogramms ab. Mit andern Worten sind $\mathfrak{Q}'_1\ \mathfrak{Q}'_2\ \mathfrak{Q}'_3\ \mathfrak{Q}'_4$ vier Vektoren, die von einem Punkte aus abgetragen zu den vier Ecken eines dem ersten kongruenten Parallelogramms führen, so daß $\mathfrak{Q}'_2 - \mathfrak{Q}'_1 = \mathfrak{Q}_2 - \mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}'_3 - \mathfrak{Q}'_1 = \mathfrak{Q}_3 - \mathfrak{Q}_1$, so hat

$$Q'_1 + Q'_4 - Q'_2 - Q'_3$$

denselben Wert, wie bei den ersten vier Vektoren. Dabei ist nicht ausgeschlossen, daß die vier Ecken des Parallelogramms in eine Gerade fallen oder dabei noch zwei Ecken zusammenfallen, also $\mathfrak{Q}_2 - \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_4 - \mathfrak{Q}_3$ und $\mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_3$ und dementsprechend $\mathfrak{Q}'_2 - \mathfrak{Q}'_1 = \mathfrak{Q}'_4 - \mathfrak{Q}'_3$ und $\mathfrak{Q}'_2 = \mathfrak{Q}'_3$. In diesem Falle haben wir es nur mit drei Vektoren $\mathfrak{Q}_1\ \mathfrak{Q}_2\ \mathfrak{Q}_4$ zu tun, die von einem Punkte abgetragen nach drei äquidistanten Punkten einer Geraden führen, und dann geht $Q_1 + Q_4 - Q_2 - Q_3$ in die zweite Differenz $(Q_4 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)$ der drei Werte über. Diese zweite Differenz hat mithin für die drei Vektoren $\mathfrak{Q}'_1\ \mathfrak{Q}'_2\ \mathfrak{Q}'_4$ denselben Wert.

Auf jeder Netzgeraden kennen wir nun die zweite Differenz. Sie ist gleich 104 auf den Parallelen zur h-Achse und gleich 260 auf den Parallelen zur k-Achse. Somit können wir die Werte von Q auf der Geraden $k = 1$ und danach auf der Geraden $k = 2$ berechnen. Vergleicht man die berechneten mit den beobach-

teten Werten, so findet man, daß die berechneten tatsächlich beobachtet sind. Man wird gut tun, die Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten von $10^3 Q$ auch in derselben Weise wie die berechneten Werte selbst in ein Netz einzutragen (Fig. 2).

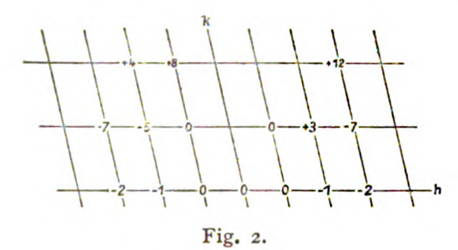


Fig. 2.

Die Stellen sind leer gelassen, deren entsprechende Linien Komponenten nicht getrennter Doppellinien sind. Wenn man an den Koeffizienten der quadratischen Form

$$10^3 Q = 52 h^2 + 130 k^2 - 35 hk$$

Verbesserungen a, b, c anbrächte, so daß sie sich um $ah^2 + bk^2 + chk$ änderte, so könnte man diese Änderung graphisch so darstellen, daß man die Kegelschnitte

$$ah^2 + bk^2 + chk = 0, \pm 1, \pm 2,$$

usw. in das Netz einzeichnete. Das ist ein System von ähnlichen Kurven, deren Maßstab den Wurzeln aus den ganzen Zahlen proportional ist. Wenn es möglich wäre, die Verbesserungen so zu wählen, daß die Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Werten verschwänden, so müßten die hingeschriebenen Zahlen auf den betreffenden Kegelschnitten liegen. Ein Blick auf das Netz zeigt z. B. in unserm Falle, daß man durch passende Verbesserungen der Koeffizienten, die Differenzen nicht zum Verschwinden bringen, wenn auch ein wenig reduzieren kann, was aber einstweilen der Mühe nicht lohnt. Wir fahren daher fort, die Werte von $10^3 Q$ nun für die Ebenen $k = 0$ und $h = 0$ zu berechnen, indem wir die Koeffizienten zunächst unverbessert lassen. Vorher wollen wir aber in einer Tabelle die beobachteten Werte von Q mit den in der Ebene $l = 0$ berechneten zusammenstellen, um überblicken zu können, welche von den beobachteten Werten noch nicht untergebracht sind.

$10^3 Q$			
beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet
52	52	517 (*d*)	502.520
130	130	587 (*d*)	588,—
147	147	650	642
207	208	696	703
217	217	790	778
271	268	828 (*d*)	822,832
379	—	845	—
403	408	872	868
429	—	895	—
466	468	904	—
486	493		

Von den beobachteten Werten sind sechs noch nicht untergebracht, von denen 379 der kleinste ist. Wir setzen daher $10^3 Q_3 = 379$ und suchen zunächst für die Ebene $k = 0$ zwei Werte Q'_{13} und Q''_{13} derart, daß $Q'_{13} + Q''_{13} = 2(Q_1 + Q_3)$

$$10^3 Q_1 = 52$$
$$10^3 Q_3 = 379$$
$$10^3 (Q_1 + Q_3) = 431$$

Wir können mithin $Q'_{13} = Q''_{13}$ annehmen und mit dem beobachteten noch nicht untergebrachten Wert 429 identifizieren. Hiermit erhalten wir für $k = 0$

$$10^3 Q = 52 h^2 + 379 l^2$$

und berechnen die Werte, die wir wieder an die Gitterpunkte eines Netzes schreiben (Fig. 3).

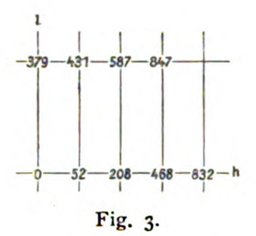


Fig. 3.

Von den berechneten Werten 587 und 847 gehört offenbar der eine zu einer der Komponenten von 587 (*d*), der andere zu dem beobachteten Wert 845, so daß jetzt von allen beobachteten Werten nur 895 und 904 noch nicht untergebracht sind.

Für die Ebene $h = 0$ haben wir zwei Werte Q'_{23} und Q''_{23} zu suchen, deren Summe gleich $2(Q_2 + Q_3)$ ist

$$10^3 Q_2 = 130$$
$$10^3 Q_3 = 379$$
$$10^3 (Q_2 + Q_3) = 509$$
$$2 \cdot 10^3 (Q_2 + Q_3) = 1018$$

Wir versuchen Q'_{23} mit einem der beiden noch nicht untergebrachten Werte zu identifizieren und finden für

$$Q'_{23} = 895 \quad Q''_{23} = 130 : Q'_{23} + Q''_{23} = 1025.$$

Damit hätten wir dann für $h = 0$

$$10^3 Q = 130 k^2 + 379 l^2 + 379 kh.$$

Die berechneten Werte zeichnen wir wieder in den Netzpunkten eines Netzes auf (Fig. 4).

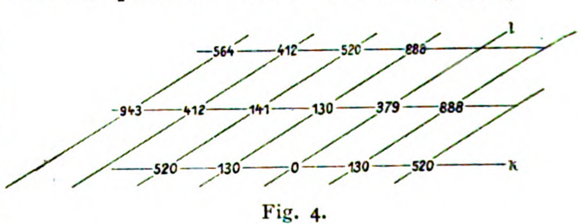


Fig. 4.

Den neu berechneten Wert 141 werden wir mit dem beobachteten Wert 147, 412 mit 403, 520 mit der größeren Komponente von 517 (*d*); 564 mit der kleineren Komponente von 587 (*d*) identifizieren.

Somit haben wir in erster Näherung die quadratische Form:

$$10^3 Q = 52h^2 + 130k^2 + 379l^2 + 379kl - 35hk,$$

die sowohl für $l = 0$, wie $k = 0$, und $h = 0$ mit ausreichender Genauigkeit die beobachteten Werte annimmt. Jetzt sind die Werte von Q aber auch noch außerhalb der Koordinatenebenen zu berechnen und mit den Beobachtungen zu vergleichen. Da die Beobachtungen bis auf 904 alle untergebracht sind, so werden wir zu erwarten haben, daß sich außerhalb der Koordinatenebenen die beobachteten Werte von Q wiederfinden und das wird uns die Symmetrien des Systems enthüllen.

Für $l = +1$ erhalten wir:

$$10^3 Q = 52h^2 + 130k^2 - 35hk + 379(k+1)$$

für $l = +2$:

$$10^3 Q = 52h^2 + 130k^2 - 35hk + 758(k+2).$$

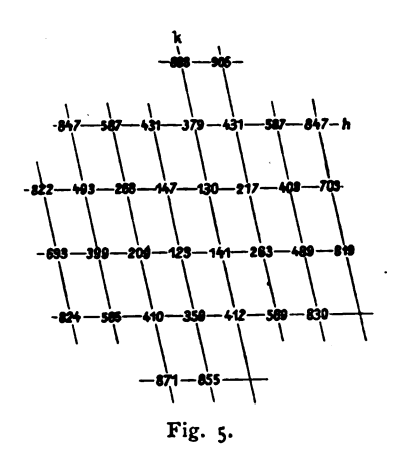


Fig. 5.

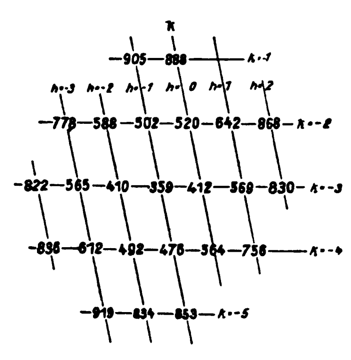


Fig. 6.

Es ergeben sich die vorstehenden Netze Fig. 5 und Fig. 6. Den Wert

$$141 \, (h = 0, \; k = -2, \; l = 1)$$

werden wir mit dem höheren 147, den Wert $123 \, (h = -1, \; k = -2, \; l = 1)$ mit dem höheren 130 und dementsprechend

$$209 \, (h = -2, \; k = -2, \; l = 1)$$

auch mit dem höheren 217 (nicht mit 207) identifizieren. Für $l = -1$ und $l = -2$ brauchen die Werte von Q nicht besonders berechnet zu werden, da Q ungeändert bleibt, wenn h, k, l alle drei ins Entgegengesetzte verwandelt werden.

Die drei Netze $l = 0$, $l = 1$, $l = 2$ lehren uns nun die auftretenden Symmetrien. Um darüber einen Überblick zu gewinnen, bringen wir die Werte von Q nach ihrer Größe in eine Tabelle und setzen die ganzzahligen Werte von h, k, l hinzu, für welche in den drei Netzen der betreffende Wert von Q angenommen wird. Es genügt schon eine geringere Anzahl der Werte von Q zu betrachten, um die Symmetrien zu entdecken. Man beschränkt sich auf die kleineren Werte von Q, weil die gefundene Annäherung für die größeren Werte weniger genau ist.

$10^3 Q$	h	k	l
52	1	0	0
	−1	0	0
130	0	1	0
	0	−1	0
	0	−1	1
	0	1	−1
	−1	−2	1
	1	2	−1
147	1	1	0
	−1	−1	0
	−1	−1	1
	1	1	−1
	0	−2	1
	0	2	−1
207	2	0	0
	−2	0	0
217	−1	1	0
	1	−1	0
	1	−1	1
	−1	1	−1
	−2	−2	1
	2	2	−1
271	2	1	0
	−2	−1	0
	−2	−1	1
	2	1	−1
	1	−2	1
	−1	2	−1

usw.

Es zeigt sich, daß den Werten 52 und 207 nur je ein Vektor des Raumgitters entspricht (abgesehen von dem Vektor entgegengesetzter Richtung), während den andern Werten je drei Vektoren zukommen. Wir wählen daher drei Vektoren, die den kleinsten gemeinsamen Wert $10^3 Q = 130$ besitzen und nicht in einer Ebene liegen als Einheitsvektoren des Raumgitters. Bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ und setzen den Werten von h, k, l bei $10^3 Q = 130$ entsprechend

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{V} = -\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$
$$\mathfrak{W} = -\mathfrak{A} - 2\mathfrak{B} + \mathfrak{C},$$

so ist:

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{U} + \mathfrak{V} - \mathfrak{W}; \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{U}; \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{U} + \mathfrak{V}$$

und somit lassen sich alle Vektoren des Raumgitters auch ganzzahlig durch $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ ausdrücken.

$$\mathfrak{Q} = h\mathfrak{A} + k\mathfrak{B} + l\mathfrak{C}$$
$$= (-h + k + l)\,\mathfrak{U} + (h + l)\,\mathfrak{V} - h\mathfrak{W}.$$

Die dem Wert $10^3\,Q = 147$ entsprechenden Vektoren werden z. B.

$$\mathfrak{V} - \mathfrak{W}, \quad \mathfrak{U} + \mathfrak{W}, \quad -\mathfrak{U} + \mathfrak{V}$$
$$-\mathfrak{V} + \mathfrak{W}, \quad -\mathfrak{U} - \mathfrak{W}, \quad \mathfrak{U} - \mathfrak{V}.$$

Diese Vektoren müssen also gerade so wie $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ selbst untereinander dieselbe Länge haben. Aus der Gleichheit der skalaren Produkte

$$(\mathfrak{V} - \mathfrak{W}) \cdot (\mathfrak{V} - \mathfrak{W}) = (\mathfrak{U} + \mathfrak{W}) \cdot (\mathfrak{U} + \mathfrak{W})$$
$$= (-\mathfrak{U} + \mathfrak{V}) \cdot (-\mathfrak{U} + \mathfrak{V})$$

zugleich mit der Gleichheit der skalaren Produkte

$$\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U} = \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{V} = \mathfrak{W} \cdot \mathfrak{W}$$

ergibt sich unmittelbar

$$-2\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{W} = 2\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{W} = -2\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{V}.$$

Der größeren Gleichförmigkeit wegen nehmen wir für $\mathfrak{V}$ nicht $-\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ sondern $\mathfrak{B} - \mathfrak{C}$, so daß die bisherigen Gleichungen, wenn $\mathfrak{V}$ in $-\mathfrak{V}$ verwandelt wird, für die neue Bezeichnung richtig sind. Dann ist

$$\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U} = \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{V} = \mathfrak{W} \cdot \mathfrak{W},$$
$$2\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{W} = 2\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{W} = 2\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{U}$$

und

$$\mathfrak{Q} = h\mathfrak{A} + k\mathfrak{B} + l\mathfrak{C}$$
$$= (-h + k + l)\,\mathfrak{U} + (-h - l)\,\mathfrak{V} - h\mathfrak{W}.$$

Bezeichnen wir die auf $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ sich beziehenden ganzen Zahlen mit x, y, z, so daß

$$\mathfrak{Q} = x\mathfrak{U} + y\mathfrak{V} + z\mathfrak{W},$$

so wird

$$Q = \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Q} = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U}\,(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$+ 2\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{V}\,(yz + zx + xy).$$

Nach unseren bisherigen Ermittelungen war

$$\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U} = \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{V} = \mathfrak{W} \cdot \mathfrak{W} = 130 \cdot 10^{-3}$$
$$(\mathfrak{V} + \mathfrak{W}) \cdot (\mathfrak{V} + \mathfrak{W}) = \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{V}$$
$$+ \mathfrak{W} \cdot \mathfrak{W} + 2\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{W} = 147 \cdot 10^{-3},$$

also

$$2\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{W} = (147 - 260) \cdot 10^{-3} = -113 \cdot 10^{-3}$$

und demnach

$$10^3 \cdot \sin^2 \vartheta/2 = 10^3 Q = 130\,(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$- 113\,(yz + zx + xy).$$

Nun sind abermals in dieser Form die Werte von Q zu berechnen und mit den Beobachtungen zu vergleichen. Dann hat man die beiden Konstanten so zu verbessern, daß die berechneten Werte sich den beobachteten so gut wie möglich anschließen.

Die Ausgleichungsrechnung ergibt schließlich

$$10^3 \sin^2 \vartheta/2 = 132{,}27\,(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$- 115{,}13\,(yz + zx + xy)$$

mit einem mittleren Fehler der beiden Koeffizienten von 0,29 und 0,27. Dabei sind die Werte von Q, die sich auf Komponenten von ungetrennten Doppellinien beziehen, sowie der kleinste beobachtete Wert von Q für die Ausgleichung weggelassen und die übrigen 15 Werte als gleich genau betrachtet.

Debye und Scherrer geben für $10^3 \sin^2 \vartheta/2$ die quadratische Form an:

$$37{,}24\,(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$$
$$- 20{,}01\,(h_2 h_3 + h_3 h_1 + h_1 h_2),$$

worin sie aber die Veränderlichen $h_1\ h_2\ h_3$ nur solche ganzzahligen Wertsysteme annehmen lassen, für die alle drei Zahlen gerade oder alle drei Zahlen ungerade sind. Setzt man

$$\frac{h_2 + h_3}{2} = x, \quad \frac{h_3 + h_1}{2} = y, \quad \frac{h_1 + h_2}{2} = z,$$

so erhalten somit x, y, z ganzzahlige Werte, die keiner Einschränkung unterworfen sind. Zugleich ist

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 3\,(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$- 2\,(yz + zx + xy)$$
$$h_2 h_3 + h_3 h_1 + h_1 h_2 = -(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$+ 2\,(yz + zx + xy)$$

und damit geht Debyes und Scherrers quadratische Form über in

$$10^3 \sin^2 \vartheta/2 = 131{,}73\,(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$- 114{,}50\,(yz + zx + xy),$$

was mit der oben durch Ausgleichung gefundenen Form hinreichend übereinstimmt[1]).

Mit andern Worten: die drei Einheitsvektoren des Raumgitters, das Debye und Scherrer betrachten, sind nicht unsere Einheitsvektoren $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, durch die alle Vektoren $\mathfrak{Q}$ in der Form

$$\mathfrak{Q} = x\mathfrak{U} + y\mathfrak{V} + z\mathfrak{W}$$

darstellbar sind, sondern ihre Einheitsvektoren sind

$$\frac{\mathfrak{V} + \mathfrak{W}}{2}, \quad \frac{\mathfrak{W} + \mathfrak{U}}{2}, \quad \frac{\mathfrak{U} + \mathfrak{V}}{2}$$

und es wird

$$\mathfrak{Q} = h_1 \frac{\mathfrak{V} + \mathfrak{W}}{2} + h_2 \frac{\mathfrak{W} + \mathfrak{U}}{2} + h_3 \frac{\mathfrak{U} + \mathfrak{V}}{2}.$$

Das Parallelepipedon, durch das äußere Produkt der drei Vektoren berechnet, ist gleich

1) Die Abweichung erklärt sich daraus, daß Debye und Scherrer ihre Form nicht durch die Ausgleichung aller Beobachtungen finden, sondern aus der Beobachtung weniger möglichst genau beobachteten Linien.



dem vierten Teil des von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ gebildeten Parallelepipedons.

Für das Kristallgitter folgt dann das Umgekehrte. Bezeichnen wir die drei Einheitsvektoren

$$\frac{\lambda}{2}\frac{\mathfrak{V}\times\mathfrak{W}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}},\quad \frac{\lambda}{2}\frac{\mathfrak{W}\times\mathfrak{U}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}},\quad \frac{\lambda}{2}\frac{\mathfrak{U}\times\mathfrak{V}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}}$$

unseres Kristallgitters mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ und die drei Einheitsvektoren des Kristallgitters von Debye und Scherrer, die aus

$$\frac{\mathfrak{V}+\mathfrak{W}}{2},\quad \frac{\mathfrak{W}+\mathfrak{U}}{2},\quad \frac{\mathfrak{U}+\mathfrak{V}}{2}$$

genau so abgeleitet werden, wie $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, so erhalten wir bei Durchführung der vektoranalytischen Rechnung

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{Q}+\mathfrak{R}-\mathfrak{P},\quad \mathfrak{M}=\mathfrak{R}+\mathfrak{P}-\mathfrak{Q},$$
$$\mathfrak{N}=\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}-\mathfrak{R}$$

oder

$$\mathfrak{P}=\frac{\mathfrak{M}+\mathfrak{N}}{2},\quad \mathfrak{Q}=\frac{\mathfrak{N}+\mathfrak{L}}{2},\quad \mathfrak{R}=\frac{\mathfrak{L}+\mathfrak{M}}{2}.$$

Die Einheitsvektoren unseres Kristallgitters ergeben sich also aus dem Einheitsparallelepipedon bei Debye und Scherrer[1]), wenn man von der Ecke, wo $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ zusammenstoßen, Linien zieht nach den Mitten der drei an der Ecke zusammenstoßenden Grenzflächen. Die Gitterpunkte unseres Kristallgitters enthalten nicht nur die Gitterpunkte von Debye und Scherrer, sondern außerdem noch die Flächenmitten ihres Gitters. Während bei Debye und Scherrer die Flächenmitten ihres Gitters belegt werden müssen, um die an den Ebenen mit gemischten Indizes reflektierten Strahlen zum Verschwinden zu bringen, haben wir das nicht nötig. Wohl aber muß man nun mit unserem Kristallgitter gerade so verfahren, wie Debye und Scherrer es tun, um auch die beobachteten Intensitäten der Linien zu berechnen, d. h. man muß den „Strukturfaktor"

$$1+\cos(2\pi\gamma(x+y+z))$$

betrachten und die Konstante γ so zu bestimmen suchen, daß sich die beobachteten Intensitäten ergeben[2]). Man gelangt zu dem Wert von γ durch die einfache Bemerkung, daß um den Beobachtungen zu genügen der Strukturfaktor die Intensitäten gerade der Linien verstärken muß, für die $x+y+z$ gleich Null oder durch drei teilbar ist. Das wird erreicht, wenn man γ den Wert $1/3$ gibt.

1) Vgl. Fig. 4b, S. 299.
2) Vgl. Debye und Scherrers Arbeit S. 297.

(Eingegangen 15. September 1917.)

Die charakteristischen Maßzahlen für das Elektron in ihrer Verknüpfung mit den Strahlungskonstanten.

Von Ludwig Flamm.

Jüngst hat Millikan[1]) das Resultat einer sorgfältigen Neubestimmung des Elementarquantums zu

$$e=4{,}774\cdot 10^{-10},\pm 0{,}005$$

elektrostatische Einheiten veröffentlicht. Die Zahl ist also auch in der letzten angegebenen Ziffer mit der früher gegebenen[2]) identisch geblieben. Nur die Genauigkeit des Resultates hat sich vergrößert, da der Fehler damals mit $\pm 0{,}009$ mitgeteilt war. Die daran anschließende Neuberechnung der abgeleiteten Größen führt somit im allgemeinen auch nur auf eine Herabsetzung des angegebenen Fehlers. Eine wesentliche Änderung erfuhr aber der Wert des Planckschen Wirkungsquantums. Millikan benutzt zu seiner Berechnung jetzt nicht mehr die Konstante des Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetzes, deren experimentelle Bestimmung sich doch noch recht schwankend erweist, sondern die Rydbergsche Konstante gemäß der Bohrschen Theorie[3]) der Serienspektra. Bei der großen Genauigkeit, mit welcher sich spektroskopische Messungen durchführen lassen, muß sich auf diesem Wege ein weit sichereres Resultat ergeben.

Der weitere Ausbau der Bohrschen Theorie durch Sommerfeld[4]) in Verbindung mit den Messungen Paschens[5]) brachte auch volle Rechenschaft von der Feinzerlegung der Spektrallinien. Durch eine scharfe Neubestimmung der Rydbergschen Konstanten bei „Bohrs Heliumlinien" sowohl als bei der Balmer-Serie des Wasserstoffes konnte Paschen nach einer neuen Methode die Ermittlung der spezifischen Elektronenladung ausführen. Der so aus rein spektroskopischen Messungen erhaltene Wert dürfte jetzt schon den nach den gebräuchlichen direkten Methoden erhaltenen Zahlen an Genauigkeit keineswegs nachstehen.

Paschens Messungen berücksichtigen auch alle feinen Korrekturen, welche durch Einführung der Relativitätsmechanik in Erweiterung der Theorie hinzugekommen sind. Seine Bestimmung der Rydbergschen Konstante muß somit derzeit als die zuverlässigste allen diesbezüglichen Rechnungen zugrunde gelegt werden.

1) Phil. Mag. (6) **34**, 1, 1917.
2) Diese Zeitschr. **14**, 796, 1913.
3) Phil. Mag. (6) **26**, 1, 476 u. 857, 1913; **27**, 506, 1914; **29**, 332, 1915; **30**, 394, 1915.
4) Münchner Berichte, 425 u. 459, 1915; Ann. d. Phys. (4) **51**, 1 u. 125, 1916.
5) Ann. d. Phys. (4) **50**, 901, 1916.

Dies soll im folgenden bezüglich der Konstantenbestimmung Millikans in § 2 durchgeführt werden und gleichzeitig dabei auch für die spezifische Elektronenladung der aus den Messungen Paschens hervorgehende Wert Verwendung finden. Doch vorher stellt es sich noch als notwendig heraus, die Rechnungen Paschens selbst einer Revision zu unterziehen, wie in § 1 ausgeführt werden soll.

§ 1.

Den Ausgangspunkt für die schon von Bohr erkannten Schlußfolgerungen Paschens bildet die Formel für die Rydbergsche Konstante[1])

$$N_n = \frac{2\pi^2 m e^4}{c h^3 \left(1 + \frac{m}{m_n}\right)},$$

welche nebst dem Elementarquantum e die Elektronenmasse m, das Wirkungsquantum h und die Masse des Atomkernes m_n enthält. Die Konstante c bedeutet die Lichtgeschwindigkeit. Im Grenzfall, bei unendlich großer Masse des Kernes, reduziert sich die Formel zu

$$N_\infty = \frac{2\pi^2 m e^4}{c h^3}. \qquad (1)$$

Bezeichnen wir die Masse des Wasserstoffkernes mit m_1 und die des Heliumkernes mit m_2, so erhält man als Formel für die Rydbergsche Konstante des Wasserstoffs

$$N_1 = \frac{N_\infty}{1 + \frac{m}{m_1}}$$

und für die Rydbergsche Konstante des Heliums

$$N_2 = \frac{N_\infty}{1 + \frac{m}{m_2}}.$$

Es gilt somit die Beziehung

$$N_\infty = N_1\left(1 + \frac{m}{m_1}\right) = N_2\left(1 + \frac{m}{m_2}\right).$$

Man hat für die Masse des Wasserstoffatoms

$$M_1 = m_1 + m$$

und für die Masse des Heliumatoms

$$M_2 = m_2 + 2m.$$

Die Doppelgleichung läßt sich somit umwandeln in

$$N_\infty = N_1 \cdot \frac{\frac{M_1}{m}}{\frac{M_1}{m} - 1} = N_2 \frac{\frac{M_2}{m} - 1}{\frac{M_2}{m} - 2}. \qquad (2)$$

Durch Messung erhält Paschen[2]):

$$N_1 = 109677{,}691 \pm 0{,}06$$
$$N_2 = 109722{,}144 \pm 0{,}04.$$

Es sind also N_1 und N_2 als bekannt vorauszusetzen; die rechte Hälfte der Doppelgleichung liefert somit eine Beziehung zwischen der Masse des Elektrons und den beiden Atommassen, welche sich in die Gestalt bringen läßt

$$\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m}\,\frac{M_2 - M_1 + 2M_1\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)}{M_1 M_2\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)} + \frac{1}{M_1 M_2\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)} = 0.$$

Die allein in Betracht kommende Wurzel dieser quadratischen Gleichung ist

$$\frac{1}{m} = \frac{\frac{M_2 - M_1}{2} + M_1\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{M_2 - M_1}{2}\right)^2 - M_1^2\frac{N_1}{N_2}\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)}}{M_1 M_2\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)}.$$

Aber auch N_∞ läßt sich jetzt durch dieselben Größen ausdrücken; denn gleichfalls aus (2) folgt die Relation

$$N_\infty = N_2\left(1 + \frac{1}{\frac{M_2}{m} - 2}\right).$$

Dies gibt zusammen mit der vorhergehenden Beziehung die Gleichung

$$\frac{N_\infty - N_2}{N_2} = \frac{\frac{M_2 - M_1}{2} + M_1\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{M_2 - M_1}{2}\right)^2 - M_1^2\frac{N_1}{N_2}\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)}}{M_2 - 2M_1}.$$

Aus den oben gegebenen numerischen Werten Paschens folgt

$$N_2 - N_1 = 44{,}453.$$

---

1) Sommerfeld, Ann. d. Phys. (4) 51, 91, 1916.

2) Ann. d. Phys. (4) 50, 935, 1916.

Der Ausdruck

$$1-\frac{N_1}{N_2}=\frac{N_2-N_1}{N_2}$$

stellt somit eine sehr kleine Größe dar, so daß man den in den obigen Formeln auftretenden Wurzelausdruck mit Vorteil in eine Reihe entwickeln wird. Die diesbezügliche Rechnung liefert

$$\sqrt{\left(\frac{M_2-M_1}{2}\right)^2-M_1^2\frac{N_1}{N_2}\left(1-\frac{N_1}{N_2}\right)}=$$
$$=\frac{M_2-M_1}{2}-\frac{M_1^2}{M_2-M_1}\left(1-\frac{N_1}{N_2}\right)+$$
$$+\frac{M_1^2}{M_2-M_1}\frac{M_2(M_2-2M_1)}{(M_2-M_1)^2}\left(1-\frac{N_1}{N_2}\right)^2+\dots$$

Dies soll in die betreffenden Formeln eingesetzt werden, wobei es vollkommen ausreicht, im Resultate mit dem zweiten Glied abzubrechen. Zunächst liefert die letzte der beiden Beziehungen

$$N_\infty-N_2=$$
$$=\frac{M_1(N_2-N_1)}{M_2-M_1}\left[1+\frac{M_1M_2}{(M_2-M_1)^2}\frac{N_2-N_1}{N_2}\right] \quad (3)$$

und für die erste erhält man

$$\frac{1}{m}=\frac{M_2-M_1}{M_1M_2}\frac{N_2}{N_2-N_1}+\frac{M_2-2M_1}{M_2(M_2-M_1)}. \quad (4)$$

Um die erhaltenen Formeln praktisch verwerten zu können, hat man noch statt der Masse der Atome die betreffenden Atomgewichte einzuführen. Dies geschieht bekanntlich mittels der Loschmidtschen Zahl pro Mol, welche im Anschluß an Sommerfeld mit L bezeichnet werden soll; es ist dann das Atomgewicht des Wasserstoffs

$$A_1=LM_1$$

und das Atomgewicht des Heliums

$$A_2=LM_2.$$

Was die numerischen Werte betrifft, so legt Paschen seinen Rechnungen die nach der Internationalen Atomgewichtstabelle bis 1915 geltenden Zahlen zugrunde. Für 1916 wurde aber das Internationale Atomgewicht des Heliums von 3,99 auf 4,00 erhöht. Dies gibt eine nicht unbeträchtliche Änderung der von Paschen gerechneten Zahlen. Für die vorliegenden Rechnungen sollen die Atomgewichte direkt den Originalarbeiten entnommen werden, damit die Genauigkeit der verwendeten Zahlen einerseits nicht durch übertriebene Abrundung verschlechtert sei und um andererseits auch die Größe des mittleren Fehlers daraus zu entnehmen. Für Wasserstoff kommen zwei sehr genaue Atomgewichtsbestimmungen[1]) in Betracht: Morley findet 1,00762, Noyes 1,00787. Wir wählen, wie üblich, das Mittel beider Messungen

$$A_1=1,0077\pm0,00013.$$

Für Helium kommt allein die Atomgewichtsbestimmung aus der Physikalisch-technischen Reichsanstalt von W. Heuse[1]) in Frage, nach welcher sich

$$A_2=4,002\pm0,0017$$

ergab. Man sieht, daß bei Wasserstoff wenigstens die Berücksichtigung der Abweichung der Atommasse von der Kernmasse schon sehr ins Gewicht fällt.

Durch Einführung der Atomgewichte erhält man aus Formel (3).

$$N_\infty=N_2+$$
$$+\frac{A_1(N_2-N_1)}{A_2-A_1}\left[1+\frac{A_1A_2}{(A_2-A_1)^2}\frac{N_2-N_1}{N_2}\right]. \quad (5)$$

Bei Berechnung des Fehlers lassen sich die Ausdrücke noch weiter vereinfachen, indem man das Zusatzglied höherer Ordnung auch noch unterdrückt, so daß im vorliegenden Falle der Faktor in der eckigen Klammer wegbleibt. Man erhält dann durch Differentiation

$$\delta N_\infty=(N_2-N_1)\frac{A_2\delta A_1-A_1\delta A_2}{(A_2-A_1)^2}+$$
$$+\frac{A_2\delta N_2-A_1\delta N_1}{A_2-A_1}.$$

Ferner ist es zur Fehlerabschätzung mehr als ausreichend, $A_1=1$ und $A_2=4$ zu setzen, was weiter gibt

$$\delta N_\infty=(N_2-N_1)\left(\frac{4}{9}\delta A_1-\frac{1}{9}\delta A_2\right)+$$
$$+\frac{4}{3}\delta N_2-\frac{1}{3}\delta N_1.$$

Wie man sieht, trägt günstigerweise der ungenauere Wert A_2 relativ weniger zum Fehler des Resultats bei als das genauer bekannte A_1 und ebenso günstig verhält es sich mit den Größen N_1 und N_2. Die numerische Rechnung liefert demnach für den Fehler

$$\delta N_\infty=\pm0,003\pm0,008\pm0,053\pm0,020=$$
$$=\pm0,057.$$

Der Beitrag, welcher durch die Unsicherheit der Atomgewichte geliefert wird, kommt somit für den Fehler des Resultats in diesem Falle überhaupt kaum in Betracht. Nach Formel (5) läßt sich das Endergebnis der Berechnung schließlich zu

$$N_\infty=109737,11\pm0,06$$

geben. Die erhaltene Zahl erscheint gegenüber der von Paschen[2]) errechneten nur in letzter Dezimalstelle geändert, indem sie sich von 8 auf 1 erniedrigt hat.

Formel (4) liefert nach Einführung der Atomgewichte die Beziehung

1) Landolt-Börnstein-Roth, Physikalisch-chemische Tabellen, 4. Aufl., S. 3, 1912.

1) Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 518, 1913.
2) Ann. d. Phys. (4) **50**, 936, 1916.

$$\frac{1}{Lm} = \frac{A_2 - A_1}{A_1 A_2} \frac{N_2}{N_2 - N_1} + \frac{A_2 - 2A_1}{A_2(A_2 - A_1)}. \quad (6)$$

Der Ausdruck, welcher im Nenner der linken Seite steht, hat eine sehr einfache physikalische Bedeutung; er stellt sozusagen das Atomgewicht der Elektronen bezogen auf $O = 16$ dar. Indem man die Fehlerrechnung analog wie oben durchführt, wobei es sich aber empfiehlt, die vereinfachte Gleichung logarithmisch nach den in Betracht kommenden Größen zu differenzieren, erhält man die Formel

$$\delta \ln \frac{1}{Lm} = \frac{1}{12} \delta A_2 - \frac{4}{3} \delta A_1 - \frac{\delta N_2 - \delta N_1}{N_2 - N_1}. \quad (7)$$

Setzt man in diese Gleichung die numerischen Werte ein, so bekommt man weiter

$$\delta \ln \frac{1}{Lm} = \pm 0{,}00014 \pm 0{,}00017 \pm 0{,}00090 + \pm 0{,}00135 = \pm 0{,}00164.$$

Wie man sieht, liegen hier die Verhältnisse so günstig, daß der Beitrag der beiden Atomgewichte zum Gesamtfehler sogar von der gleichen Größenordnung ist. Ausschlaggebend ist auch hier fast nur die Unsicherheit von N_1 und N_2. Man berechnet schließlich nach Formel (6) als reziprokes Atomgewicht der Elektronen

$$\frac{1}{Lm} = 1832{,}8 \pm 3{,}0.$$

Aus der eben erhaltenen Konstanten leiten sich unmittelbar eine ganze Reihe anderer häufig gebrauchter Zahlen ab, zunächst das Verhältnis der Masse des Wasserstoffatoms zur Elektronenmasse nach der Formel

$$\frac{M_1}{m} = A_1 \cdot \frac{1}{Lm}.$$

Für den Fehler findet man

$$\delta \ln \frac{M_1}{m} = \pm 0{,}00163.$$

Die betreffende Zahl ergibt sich mithin zu

$$\frac{M_1}{m} = 1846{,}9 \pm 3{,}0.$$

Analog ist das Verhältnis der Masse des Heliumatoms zur Elektronenmasse nach der Formel

$$\frac{M_2}{m} = A_2 \cdot \frac{1}{Lm}$$

zu rechnen. Für den Fehler hat man

$$\delta \ln \frac{M_2}{m} = \pm 0{,}00173.$$

Das Resultat der Rechnung schreibt sich

$$\frac{M_2}{m} = 7335 \pm 13.$$

Schließlich erhält man noch als wichtigste Größe die der spezifischen Elektronenladung. Man braucht dazu die Valenzladung, die sogenannte Faradaysche Konstante der Elektrolyse, welche wir im Anschluß an Sommerfeld mit F bezeichnen wollen. Wir nehmen dafür mit Millikan[1]) den Zahlenwert

$$F' = 9649{,}4.$$

Ein Strich bei den Größen, welche elektrische Ladungen bedeuten, soll jeweils andeuten, daß der numerische Wert in elektromagnetischen statt in elektrostatischen Einheiten gemessen sein möge. Mit dem Elementarquantum e besteht die Verknüpfung

$$F = L e.$$

Man findet die spezifische Elektronenladung mithin nach der Formel

$$\frac{e'}{m} = F' \cdot \frac{1}{Lm}.$$

Von einem Fehler der Konstante F' soll abgesehen werden, so daß wir

$$\delta \ln \frac{e'}{m} = \delta \ln \frac{1}{Lm}$$

nehmen. Die numerische Rechnung gibt schließlich

$$\frac{e'}{m} = 1{,}7686 \cdot 10^7, \pm 0{,}0029.$$

Für die gleiche Größe berechnete Paschen[2]) den Wert $1{,}7649 \cdot 10^7$, der sich also nicht unbeträchtlich unterscheidet. Während diese Zahl fast vollständig mit der von G. Neumann[3]) und Cl. Schäfer[4]) aus Ablenkungsmessungen erhaltenen $1{,}765 \cdot 10^7$ übereinstimmt, liegt der oben berechnete richtige Wert sogar etwas höher noch als die gleichfalls aus Ablenkungsversuchen hervorgehende Zahl $1{,}7674 \cdot 10^7$ von K. Wolz (Bucherer)[5]). Sowohl Neumann als auch Wolz schätzen die Genauigkeit ihres Resultats auf $\pm$ 1,5 Promille. Dem aus den Messungen Paschens hervorgehenden Werte kommt ungefähr die gleiche Unsicherheit zu, nämlich $\pm$ 1,6 Promille, wie oben berechnet wurde. Wie wir bereits gesehen haben, rührt der Fehler fast nur von der Ungenauigkeit in der spektroskopischen Messung her, und zwar auch nur von der Unsicherheit, mit welcher die Differenz $N_2 - N_1$ gemessen wird; denn man kann die Formel (7) schreiben

$$\delta \ln \frac{e'}{m} = \frac{1}{12} \delta A_2 - \frac{4}{3} \delta A_1 - \delta \ln (N_2 - N_1). \quad (7')$$

Es genügte also bloß, die Genauigkeit in der Bestimmung der Größe $N_2 - N_1$ zu verbessern, um die Sicherheit des daraus erhaltenen Wertes für die spezifische Elektronenladung noch weiter zu steigern.

1) Phil. Mag. (6) **34**, 13, 1917.
2) Ann. d. Phys. (4) **50**, 936, 1916.
3) Ann. d. Phys. (4) **45**, 529, 1914.
4) Ann. d. Phys. (4) **49**, 934, 1916.
5) Ann. d. Phys. (4) **30**, 273, 1909.

§ 2.

Die Formel (1) des vorigen Paragraphen gestattet nun weiter, auf Grund der bereits berechneten Konstanten zusammen mit dem in der Einleitung schon angeführten Wert des Elementarquantums von Millikan das Plancksche Wirkungsquantum zu berechnen. Für die Lichtgeschwindigkeit soll ebenfalls im Anschluß an Millikan[1]) der Wert

$$c = 2{,}9990 \cdot 10^{10}$$

den Rechnungen zugrunde gelegt werden. Man findet zunächst

$$h^3 = \frac{2\pi^2 e^5}{c\frac{e}{m}N_\infty} = \frac{2\pi^2 e^5}{c^2 \frac{e'}{m} N_\infty}$$

und schließlich

$$h = e\sqrt[3]{\frac{2}{\frac{e'}{m}N_\infty}\left(\frac{\pi e}{c}\right)^2}\,. \tag{8}$$

Für den Fehler des Resultates kommt nur die Unsicherheit von e und e'/m in Betracht. Zunächst und mit größerer Genauigkeit läßt sich das Verhältnis von h zu e berechnen. Hierfür ergibt sich der Fehler aus Gleichung

$$\delta \ln \frac{h}{e} = \frac{2}{3}\frac{\delta e}{e} - \frac{1}{3}\delta \ln \frac{e'}{m}$$

zu

$$\delta \ln \frac{h}{e} = \pm 0{,}00070 \pm 0{,}00055 = \pm 0{,}00089\,.$$

Die numerische Rechnung ergibt somit nach Formal (8) zunächst

$$\frac{h}{e} = 1{,}3710 \cdot 10^{-17}, \pm 0{,}0012.$$

Für h selbst gibt die Fehlerrechnung

$$\delta h = \frac{5}{3}\frac{\delta e}{e} - \frac{1}{3}\delta \ln \frac{e'}{m}$$

und weiter

$$\frac{\delta h}{h} = \pm 0{,}0017 \pm 0{,}0005 = \pm 0{,}0018.$$

Wie man sieht, rührt die Unsicherheit des Wertes für das Plancksche Wirkungsquantum hauptsächlich von der Ungenauigkeit des Elementarquantums her. Das Endergebnis der numerischen Auswertung von Formel (8) ist demnach schließlich

$$h = 6{,}545 \cdot 10^{-27}, \pm 0{,}012.$$

Millikan, der seine Rechnung mit anderen Werten für die spezifische Elektronenladung und die Rydbergsche Konstante durchführt, gibt dafür[2]) den nur ganz unwesentlich abweichenden Zahlenwert $6{,}547 \cdot 10^{-27}, \pm 0{,}011$.

Im Anschluß daran kann sogleich auch der Wert jener Konstanten berechnet werden, welche für die Feinstruktur der Spektrallinien von Wichtigkeit sind. Vor allem spielt die dimensionslose Größe

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{ch}$$

in der Theorie Sommerfelds[1]) eine hervorragende Rolle. Eliminiert man h nach Formel (8), so läßt sich dafür schreiben

$$\alpha = \sqrt[3]{4\frac{e'}{m}N_\infty \frac{\pi e}{c}}\,.$$

Demnach ergibt sich für den Fehler

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha} = \frac{1}{3}\delta \ln \frac{e'}{m} + \frac{1}{3}\frac{\delta e}{e}$$

und weiter numerisch

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha} = \pm 0{,}00055 \pm 0{,}00035 = \pm 0{,}00065.$$

Der für die Konstante sich ergebende Zahlenwert ist schließlich

$$\alpha = 7{,}295 \cdot 10^{-3}, \pm 0{,}005.$$

Als Maßeinheit weitgehende Verwendung findet bei Sommerfeld[2]) ferner die sich ohne weiteres daraus ergebende Größe

$$\Delta\nu = \frac{N_\infty \alpha^2}{2^4},$$

welche die konstante Schwingungszahlendifferenz des Dubletts der Balmerschen Serie mißt. Für den Fehler hat man einfach

$$\frac{\delta\Delta\nu}{\Delta\nu} = 2\frac{\delta\alpha}{\alpha} = \pm 0{,}0013\,.$$

Man findet schließlich durch die numerische Rechnung

$$\Delta\nu = 0{,}3650 \pm 0{,}0005.$$

Diese Zahlenwerte lassen sich, wie man sieht, sehr scharf angeben und könnten vielleicht bei einer Neubestimmung der Differenz $N_2 - N_1$ behufs noch genauerer Ermittlung der spezifischen Elektronenladung gute Dienste leisten.

Schließlich sollen noch die Konstanten der schwarzen Strahlung berechnet werden. Besonders einfach erhält man die Exponentialkonstante des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes[3]) nach der Formel

$$c_2 = \frac{ch}{k}\,.$$

Hierin tritt neu die Entropiekonstante k auf, welche mit der allgemeinen, molaren Gaskonstante R durch die Beziehung

$$k = \frac{R}{L}$$

verknüpft ist. Die Loschmidtsche Zahl läßt sich durch das Verhältnis von Valenzladung zu

1) Diese Zeitschr. **14**, 810, 1913.
2) Phil. Mag. (6) **34**, 15, 1917.

1) Ann. d. Phys. (4) **51**, 51, 1916.
2) Ann. d. Phys. (4) **51**, 68, 1916.
3) Planck, Theorie der Wärmestrahlung, 2. Aufl. S. 163, Leipzig 1913.

Elementarquantum ersetzen, so daß man weiter schreiben kann

$$k = \frac{Re}{cF'} \ .$$

Man erhält also auch hier zunächst genauer das Verhältnis k zu e nach der Formel

$$\frac{k}{e} = \frac{R}{cF'} \ .$$

Den numerischen Wert von R rechnen wir aus der Beziehung

$$P_0 V_0 = R T_0$$

in Anschluß an Millikan[1]) zu

$$R = \frac{1013700 \cdot 22412}{273{,}11},$$

während die Valenzladung in Übereinstimmung mit dem Früheren aus den Daten der Silberelektrolyse als

$$F' = \frac{107{,}88}{0{,}01118}$$

zu nehmen ist. So erhält man als numerisches Resultat

$$\frac{k}{e} = 2{,}8746 \cdot 10^{-7}.$$

Es empfiehlt sich demnach, die Exponentialkonstante des Strahlungsgesetzes nach dem Schema

$$c_2 = c \frac{h}{e} : \frac{k}{e}$$

zu berechnen. Indem wir von einem von k/e herrührenden Fehler absehen können, folgt einfach

$$\frac{\delta c_2}{c_2} = \delta \ln \frac{h}{e} = \pm 0{,}00089.$$

Die numerische Berechnung liefert schließlich

$$c_2 = 1{,}4304 \pm 0{,}0013.$$

Die Dimension dieser Konstante ist Zentimeter-Grad C. Wenn E. Warburg und C. Müller[2]) als Gesamtergebnis des Experiments für diese Größe 14300 Mikron-Grad C setzen, so ist dieser Zahlenwert mit dem obigen Resultat der theoretischen Berechnung in vollster Übereinstimmung.

Für die Konstante des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes bezüglich der Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers pro Flächeneinheit gilt nach Planck[3]) die Formel

$$\sigma = \frac{12\pi k^4}{c^2 h^3}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots\right)$$

1) Diese Zeitschr. **14**, 811, 1913.
2) Ann. d. Phys. (4) **48**, 430, 1915.
3) Theorie der Wärmestrahlung, 2. Aufl., S. 64 u. 165, Leipzig 1913.

Die Summe der eingeklammerten unendlichen Reihe läßt sich nach der schon von Euler herrührenden Entwicklung der Bernoullischen Zahlen[1])

$$B_{2n} = (-)^{n-1} 2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots\right)$$

ermitteln. Für $n = 2$ erhält man nämlich

$$B_4 = -\frac{3}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots\right).$$

Andererseits folgt aus der Rekursionsformel für die Bernoullischen Zahlen

$$B_4 = -\frac{1}{30} \ .$$

Dies liefert also für die betrachtete Reihe die Beziehung

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots\cdot \qquad (9)$$

Die diesbezügliche Formel der Strahlungstheorie läßt sich demnach einfacher schreiben

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} \ . \qquad (10)$$

In Hinblick auf die numerische Auswertung empfiehlt sich zunächst die Umformung

$$\sigma = \frac{2\pi^5 e \left(\frac{k}{e}\right)^4}{15 c^2 \left(\frac{h}{e}\right)^3}$$

und weiter mit Benutzung der Formel (8)

$$\sigma = \left(\pi \frac{k}{e}\right)^4 \frac{\frac{e'}{m} N_\infty}{15\pi e} \ .$$

Die Durchführung der Fehlerrechnung analog wie früher liefert demnach

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} = \delta \ln \frac{e'}{m} - \frac{\delta e}{e}$$

und weiter numerisch

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} = \pm 0{,}0016 \pm 0{,}0010 = \pm 0{,}0019.$$

Als Endresultat der Berechnung erhält man schließlich die Zahl

$$\sigma = 5{,}738 \cdot 10^{-5}, \pm 0{,}011.$$

Der derzeit aus den direkten Messungen hierzulande[2]) gefolgerte Wert $5{,}4 \cdot 10^{-5}$ müßte demnach viel zu niedrig sein. Dagegen zieht Coblentz in seinem zusammenfassenden Bericht[3]) aus allen vorhandenen Experimenten den

1) Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, 2. Aufl., I 1, S. 520, 1910.
2) Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 12. Aufl., 376, 1914.
3) Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **10**, 367, 1913.

Schluß $5,7 \cdot 10^{-5}$ für die Größenordnung des Zahlenwertes der betrachteten Strahlungskonstante, was mit dem Resultat der obigen Berechnung in Übereinstimmung steht.

Millikan[1]) rechnet für die betrachteten Strahlungskonstanten die Werte $c_2 = 1{,}4312 \pm \pm 0{,}0030$ und $\sigma = 5{,}72 \cdot 10^{-5}, \pm 0{,}034$. Während die Zahlen selbst von den oben berechneten kaum beträchtlich abweichen, sind die von Millikan gegebenen Fehler viel zu groß, trotzdem er sie eigentlich kleiner erhalten sollte, da er allein die Unsicherheit des von ihm bestimmten Elementarquantums in Rechnung setzt. Es ist eben unbedingt nötig, in den Formeln immer wieder bis auf die der ganzen Berechnung ursprünglich zugrundeliegenden Konstanten zurückzugehen, wenn man den richtigen Wert für den Fehler erhalten will. Die Genauigkeit, mit welcher die Theorie die betrachteten Größen zu berechnen gestattet, ist demnach ganz außerordentlich groß.

Zusammenfassung.

Unter Zugrundelegung der genauesten Werte für die Atomgewichte von Wasserstoff und Helium und mit Berücksichtigung aller Korrekturen wird eine Neuberechnung der Zahlen für die reduzierte Rydbergsche Konstante und die spezifische Elektronenladung auf Grund der Messungen Paschens unternommen, als deren Resultat sich ergab:

$$N_\infty = 109737{,}11 \pm 0{,}06$$
$$\frac{e}{m} = 1{,}7686 \cdot 10^7, \pm 0{,}0029.$$

Durch Hinzuziehen des neuesten Wertes für das Elementarquantum von Millikan

$$e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}, + 0{,}005$$

werden daraus weiter die Zahlenwerte einer ganzen Reihe anderer wichtiger physikalischer Größen bestimmt. So ergaben sich für das Plancksche Wirkungsquantum h, die fundamentale Konstante α in Sommerfelds Theorie der Spektrallinien, die Schwingungszahlendifferenz $\Delta\nu$ des Dubletts der Balmer-Serie, die Exponentialkonstante c_2 des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes und schließlich die Konstante des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes σ betreffend die Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers pro Flächeneinheit die folgenden Zahlen:

$$h = 6{,}545 \cdot 10^{-27}, \pm 0{,}012$$
$$\alpha = 7{,}295 \cdot 10^{-3}, \pm 0{,}005$$
$$\Delta\nu = 0{,}3650 \pm 0{,}0005$$
$$c_2 = 1{,}4304 \pm 0{,}0013$$
$$\sigma = 5{,}738 \cdot 10^{-5}, \pm 0{,}011.$$

1) Phil. Mag. (6) **34**, 15 u. 16, 1917.

Daneben wird auch gezeigt, daß vermöge der Beziehung

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots$$

die aus Plancks Theorie hervorgehende Formel für σ die Gestalt annimmt:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}.$$

Die Berechnung von Millikan weist für die Fehler der Strahlungskonstanten c_2 und σ viel zu hohe Werte auf.

Wien, Physikalisches Laboratorium der k. k. technischen Hochschule.

(Eingegangen 19. September 1917.)

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Prag der ord. Professor für Physik, Maschinenkunde, und Meteorologie an der Deutschen Landwirtschaftlichen Akademie zu Tetschen-Liebwerd Dr. techn. Heinrich Werth, an der Universität Münster Dr. Wilhelm Gluud für Chemie.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Graz Dr. Anton Skrabal zum ord. Professor der Chemie an derselben Universität, der Lehrer an einer Amsterdamer Höheren Bürgerschule Dr. F. E. C. Scheffer zum Professor der analytischen Chemie nnd der Chemie der Baumaterialien an der Technischen Hochschule in Delft.

Berufen: An die Universität Warschau Professor Dr. Pätzold (bisher in Lemberg) für Chemie an die Technische Hochschule Warschau Dr. Leo Marchlewski (bisher für medizinische Chemie an der Universität Krakau) für organische Chemie.

Verliehen: Dem Dozenten für elektrische Kraftanlagen und Bahnen an der Technischen Hochschule Berlin Direktor des Dynamowerkes der Siemens-Schuckert-Werke Dr. Walter Reichel und dem ord. Honorarprofessor für Chemie an der Technischen Hochschule Berlin und Direktor des Kaiser-Wilhelm-Institutes für Kohlenforschung in Mülheim Dr. Franz Fischer der Titel Geh. Regierungsrat, dem Herausgeber der „Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht", bisherigen Oberlehrer am Askanischen Gymnasium in Berlin Professor Dr. Friedrich Poske der Titel Geh. Studienrat, dem Herausgeber der Zeitschriften „Petroleum" und „Montanistische Rundschau" Ingenieur Robert Schwarz der Titel Kaiserlicher Rat.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Farbenchemie an der Universität Basel Dr. Rudolf Nietzki, der frühere Professor für Entwerfen chemischer Anlagen an der Technischen Hochschule Berlin (Verfasser des Werkes „Der Salpeter und sein Ersatz") Professor Dr. Konrad W. Jurisch.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1917/18.

Technische Hochschule Aachen.

Starke: Experimentalphysik I, 4; Übungen im physikalischen Laboratorium: a) Praktikum für Studierende des Maschinenbaufachs, der Elektrotechnik, des Hüttenfachs und der Chemie, nach Vereinbarung, b) Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl., c) Physikalisches Handfertigkeitspraktikum, 2. — **Seitz**: Mechanische Wärmetheorie, 2; Theoretische Physik, 2; Experimentalphysik, enzyklopädischer Kurs, 2. — **Steubing**: Photographie, 1 und II, 1, Übungen, 3; Drahtlose Telegraphie, 1. — **Hopf**: Relativitäts- und Gravitationstheorie, 1; Mechanik des Schiffes, 1. — **Polis**: Allgemeine Meteorologie, 2; Ausgewählte Kapitel der Meteorologie, 1; Meteorologische Technik, 1, Übungen, 2—4. — **Grotrian**: Physikalische Grundlagen der Elektrotechnik, 5; Theoretische Elektrotechnik, 3; Elektrotechnisches Praktikum: a) für Elektroingenieure, 8, b) für Maschineningenieure, 5. — **N. N.**: Ausgewählte Kapitel der praktischen Elektrotechnik, 1; Einleitung in die Elektrotechnik, 2; Konstruktionslehre der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Konstruktionsübungen, 2. — **Finzi**: Elektrische Zentralanlagen und Leitungen, 2. — **Hamacher**: Praktische Telegraphie und Telephonie, 2. —

Bredt: Organische Experimentalchemie II, 3; Organisches Praktikum, tägl. — **Classen**: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 4; Anorganisches Praktikum für Chemiker, Hüttenleute und Bergleute, tägl. außer Sonnabend; Elektroanalytisches und elektrochemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Rau**: Chemische Technologie I: Allgemeine Feuerungskunde, 2, III, 2; Entwerfen von chemischen Apparaten und Fabrikanlagen, 4; Chemisch-technisches Praktikum, tägl. — **Ruer**: Physikalische Chemie I, 3; Übungen in physikalischer Chemie für Hüttenleute, 3, für Chemiker, 1 Vormittag, für Fortgeschrittene, ganz- und halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Allgemeines hüttenmännisches Praktikum, 3. — **Fischer**: Analytische Chemie, 2; Allgemeine Elektrochemie, 2. — **v. Kapff**: Chemische Technologie der Gespinstfasern: Färberei, Bleicherei usw., 2, Übungen, 2. — **Schumacher**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2. — **Levy**: Alizyklische Verbindungen, 2. — **Lipp**: Chemie der Alkaloide, 2. — **Scheen**: Experimentalchemie, enz. Kursus, 2. —

Blumenthal: Höhere Mathematik II, 3, Übungen, 1. — **Hamel**: Höhere Mathematik I, 6—4, Übungen, 2. **v. Kármán**: Mechanik I, 5, Übungen, 1. — **Kötter**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 4; Graphische Statik, 2, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der graphischen Statik, 1. — **Gasiorowski**: Beleuchtungslehre, 2. — **Trefftz**: Graphische Methoden der mathematischen Analysis, 2. — **Wilski**: Übungen in Markscheiden und Feldmessen, 1 Nachmittag; Abriß der Markscheide- und Feldmeßkunde, 2; Ausgleichungsrechnung, 2, Übungen, 1; Geophysik, 1; Trigonometrische Übungen, 1. — **Wandhoff**: Markscheiden und Feldmessen I, 4; Markscheiderische Zeichen- und Rechenübungen, 2. — **Gast**: Praktische Geometrie I, 3, II, Übungen, 2; Geodätisches Praktikum I, 2; Geodätische Ausarbeitungen, 4; Eisenbahntrassieren, 2; Höhere Geodäsie, 2. —

Technische Hochschule Brünn.

Jaumann: Allgemeine und technische Physik, $3^1/_2$; Theoretische Physik, $1^1/_2$; Physikalisches Praktikum (mit Lohr), 3, für Bauingenieure (mit Szarvassi), 3. — **Szarvassi**: Elektrizitätsleitung in Gasen, 2. — **Lohr**: Elektromagnetische Theorien für bewegte Körper (Fortsetzung), 1. — **Zickler**: Allgemeine Elektrotechnik, 5; Elektrotechnisches Praktikum II, 8. — **N. N.**: Bau elektrischer Maschinen II, 3; Projektierung elektrischer Anlagen, einschließlich elektrischer Arbeitsübertragung, 2; Elektrotechnische Konstruktionsübungen I, 10, II, 2, — **Siegel**: Elemente der Elektrotechnik, 2. — **Filepek**: Telegraphie und Telephonie, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Telegraphie und Telephonie, 2. — **Srnka**: Drahtlose Telegraphie, $1^1/_2$. —

Frenzel: Anorganische Chemie, 6; Analytische Chemie II: Spezielle analytische Methoden, 2; Chemische Übungen Ia, 24, IIa, $19^1/_2$; Elektrochemisches Praktikum, 3; Physikalische Chemie II, 3. — **Hönig**: Organische Chemie II, 4; Ausgewählte Kapitel der Tier- und Pflanzenchemie, $1^1/_2$; Agrikulturchemie, 3; Chemische Übungen aus Agrikultur- und Nahrungsmittelchemie, 11. — **Ulrich**: Chemie der aromatischen Verbindungen, 2; Chemische Technologie organischer Stoffe II 1, 5; Übungen im Laboratorium für chemische Technologie II, insbesondere der Farb- und Faserstoffe, I, 14; Spezielle chemische Technologie der Farbstoffe, 1; Grundzüge der Textilchemie, 1. — **Kurtenacker**: Mikrochemische Analyse, 1, Übungen, 2. — **Gröger**: Enzyklopädie der technischen Chemie, $1^1/_2$ und 3. — **Knöpfer**: Konstitutionsbestimmungen organischer Verbindungen, 2. — **Suida**: Repetitorium der organischen Chemie, 1; Grundzüge der Photochemie, 1. — **Donath**: Chemische Techologie anorganischer Stoffe I, 3, II, 3; Chemische Technologie organischer Stoffe I, 3; Übungen im Laboratorium für chemische Technologie I 1 (mit Margosches), 20. — **Margosches**: Chemische Technologie organischer Stoffe III, 2; Chemische Technologie III: Anleitung zu technisch-chemischen Untersuchungen, 2; Chemische Technologie der organischen Kolloide, 2. —

Tietz: Mathematik Ia, 7, Korrepetitionen, 1. — **Waelsch**: Mathematik Ib, 4, Korrepetitionen, 1, II, 2, 3, Korrepetitionen, 1; Elemente der höheren Mathematik, 4, Korrepetitionen, 1; Elliptische Funktionen, 2; Darstellende Geometrie I und konstruktives Zeichnen, 4, Übungen, 8. — **Benze**: Wahrscheinlichkeitsrechnung I (in elementarer Darstellung), 2; Mathematische Statistik, 2. — **Fanta**: Versicherungsmathematik II, 2, Übungen, 1; — **Tranquillini**: Technisches Zeichnen I: Elemente des Hochbaues, 2, Übungen, 4. — **Löschner**: Technisches Zeichnen II: Plan- und Geländezeichnen, 4; Plan- und Geländezeichnen: Situationszeichnen, 4; Niedere Geodäsie, 5; Vermessungsübungen I, Zimmerübungen, $4^1/_2$; Elemente der niederen Geodäsie, Situationszeichnen, Übungen, 2; Höhere Geodäsie, 3. — **N. N.** Technisches Zeichnen: Maschinenzeichnen, Übungen, 6. — **Leon**: Mechanik IIa: Kinetik starrer Systeme, $3^1/_2$, Übungen, 2, IIb: Hydromechanik, $1^1/_2$; Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, 2. — **Lechner**: Experimentalmechanik: Theorie mechanischer Meßapparate und Versuchsanordnungen, 2; Aeromechanik, $1^1/_2$; Theoretische Ballistik: Mechanik der Geschoßbewegung, 1; Mechanische Rechenübungen, $1^1/_2$. —

Technische Hochschule Dresden.

Hallwachs: Experimentalphysik I, 5; Physikalisches Praktikum I, 6 oder 3, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, für Fortgeschrittene, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, 20; Physikalisches Kolloquium, Referate über neue Arbeiten (mit Helm und Toepler), 14 tägig, 2*g*. — **Toepler**: Theoretische Physik II: Wärme, 4, Übungen, 1*g*. — **Luther**: Photographisches Praktikum, 4 und 8; Selbständige Arbeiten im wissenschaftlich-photographischen Institute, 2 und 4, außerdem ganz- und halbtägig. — **Görges**: Allgemeine Elektrotechnik II, 2; Theorie des Wechselstromes II, 4; Starkstromanlagen II, mit seminaristischen Übungen, 2; Elektrotechnische Übungen für Geübtere, 8; Elektrotechnisches Praktikum für Maschinen-, Elektro-, Betriebs- u. Fabrik-Ingenieure u. Chemiker, 4; Größere elektrotechnische Spezialarbeiten, 20. — **Heubach**: Elektromaschinenbau II, 2, IV, 2. — **Möllering**: Eisenbahnsignalwesen, 2; Telegraphie und Telephonie: Wissenschaftliche Grundlagen, mit Demonstrationen, 2. — **Wagner**: Übungen im Gebiete des Elektromaschinenbaues für Elektroingenieure, 4 oder 8, für Maschinen- und

Betriebsingenieure, 4; Heizer und Maschinistenkursus für Studierende, nach Verabredung. —

F. Foerster: Metallurgie, 2; Chemische Großindustrie, 2; Ausgewählte Kapitel aus der speziellen anorganischen Chemie, 2; Anorganisch-chemisches Praktikum: Qualitative Analyse, 12; Gewichts-, Maß- und Gasanalyse, Präparate, ganztägig, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrochemie und physikalischen Chemie, ganztägig. — **Renk**: Nahrungsmittelchemie, 2; Wohnungshygiene, 1; Übungen im Untersuchen von Nahrungs- und Genußmitteln, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Nahrungsmittelchemiker, tägl. außer Sonnabend. — **Scholl**: Organische Chemie, 5; Organisch-chemisches Praktikum, halb- und ganztägig, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Farbenchemie, 8; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Farbenchemie bzw. Färbereitechnik, tägl. außer Sonnabend. — **König**: Chemie des Steinkohlenteers, 2: Chemie der Textilindustrie: Gewinnung der Spinnfasern und ihre Veredelung, 2. — **v. Walther**: Chemie und Technologie der Riechstoffe, 2. — **Dietz**: Chemische Technologie der Tonwaren, 1. —

Krause: Höhere Mathematik II, 4, Übungen, 2; Höhere Mathematik für die Hochbau- und Chem. Abteilung, 2; Einleitung in die Theorie der komplexen Funktionen, 4; Mathematisches Seminar, 1 *g*; Seminaristische Übungen für Physiker (mit Naetsch), 1 *g*. — **Helm**: Höhere Mathematik IV, 3, Seminaristische Übungen (mit Naetsch), 14 tägig, 2; Die geschichtliche Entwicklung der Elektrodynamik, 2; Ergänzungen und Übungen zur Potentialtheorie, 2 *g*; Physikalisches Kolloquium, 1. — **Ludwig**: Darstellende Geometrie II, 3, Übungen, 4; Perspektive, mit Übungen, 1; Differentialgeometrie der Raumkurven und Flächen, 3; Seminaristische Übungen über höhere Geometrie, 1 *g*. — **Naetsch**: Analytische Geometrie der Flächen zweiten Grades, 3; Elementare Algebra und Analysis, 2; Berührungstransformationen der Ebene und des Raumes, 1. — **Pattenhausen**: Geodäsie I, 2; Übungen, 2, II, 3, Übungen, 2; Höhere Geodäsie II, 2, Seminaristische Übungen, 2; Stadtvermessung, 1; Geodätische Ausarbeitungen für Bauingenieure, 2; Graphische Ausarbeitungen für Verm.-Ingenieure, 2; Skizzieren geodätischer Instrumente, 2; Katastervermessung, Übungen, 2; Planzeichnen I, Übungen, 2. —

Universität Graz.

N. N.: Experimentalphysik I, für Mediziner, zugleich Einführung in die Physik für Lehramtskandidaten, 4; Physikalische Übungen I, für Chemiker und Naturhistoriker, 6 *g*, II, für Mathematiker und Physiker, 6 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend, *g*. — **Streintz**: Elektrochemie, I, 2. — **Rosenberg**: Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 3 *g*. — **Waßmuth**: Neuere Untersuchungen aus dem Gebiete der statistischen Mechanik, 1 *g*. — **Radakovic**: Seminar für theoretische Physik, 2 *g*; Besprechung physikalischer Fragen, 1 *g*. —

N. N.: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 5; Chemische Übungen für Anfänger (mit Skrabal), tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 4, für Vorgeschrittene, tägl. — **Kremann**: Physikalische Chemie V, 2; Physikalisch-chemische Arbeitsmethoden, 3; Physikalisch-chemisches und elektro-chemisches Praktikum, tägl. — **Skrabal**: Pharmazeutische Chemie, 4; Chemische Übungen für Anfänger, tägl. außer Sonnabend; Praktikum aus anorganischer und analytischer Chemie für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend. — **v. Hemmelmayr**: Chemische Fabrikindustrie der anorganischen Stoffe, mit Exkursionen, 2; Experimentierübungen, chemische Schulversuche, für Lehramtskandidaten, 2. —

v. Dantscher: Allgemeine Arithmetik: Einleitung in die Analytik, 5; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **v. Daublebsky**: Grundzüge der analytischen Geometrie, 5; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **Streißler**: Darstellende Geometrie: Orthogonale Projektionsmethode, 3. — **Hillebrand**: Theoretische Astronomie in elementarer Darstellung, 3; Theorie der Figur der Himmelskörper, mit besonderer Berücksichtigung des kosmogonischen Problems, III, 2. —

Technische Hochschule Graz.

v. Ettingshausen: Physik für Ingenieure: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Elemente der mechanischen Wärmetheorie, Magnetismus, Elektrostatik, Galvanismus, Elektromagnetismus, Induktion, 5; Elektrotechnik, $3^1/_2$, Elektrotechnische Übungen: Praktische Messungen, 8; Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2. — **Streintz**: Physik für technische Chemiker: Mechanik, Optik und Wärmelehre, 5, für Geodäten: Mechanik und geometrische Optik, 5. —

Emich: Anorganische Chemie, 7; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten im chemischen Laboratorium, für Vorgeschrittene; Anleitung zur mikrochemischen Analyse, für Vorgeschrittene (mit Donau), nach Verabredung. — **Andreasch**: Qualitative chemische Analyse I, 2, Laboratoriumsunterricht und Übungen I, 14; Chemische Technologie der organischen Stoffe: Technologie der Kohlenhydrate und Gärungsgewerbe, 4; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der Darstellung organisch-chemischer Präparate, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der organischen Chemie und der chemischen Technologie organischer Stoffe, für Vorgeschrittene. — **B. Reinitzer**: Quantitative chemische Analyse I, 1, Seminar, 2; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der quantitativen chemischen Gewichtsanalyse, 20; Chemische Technologie der anorganischen Stoffe: Eisen- und Metallhüttenkunde, 4; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der anorganisch-technisch-chemischen Analyse, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der anorganischen Chemie und der chemischen Technologie anorganischer Stoffe, für Vorgeschrittene, nach Verabredung. — **v. Cordier**: Moderne Theorie der organischen Chemie, 1. — **Kremann**: Ausgewählte Kapitel aus der physikalischen Chemie I, 2. — **Donau**: Kolloidchemie II, 1. — **Fuhrmann**: Photographie: Negativ- und Positivprozeß in Theorie und Praxis, einschließlich Apparatenkunde, 1. — **v. Hemmelmayr**: Enzyklopädie der technischen Chemie, 2. —

Hocevar: Mathematik I: Algebra und Analysis, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 6, Übungen (mit Weitzenböck), 2. — **Weitzenböck**: Elemente der höheren Mathematik, 4; Einführung in die Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung, 1. — **v. Peithner**: Mathematik II: Geometrie, Integralrechnung, Differentialgleichungen, 2, Übungen (mit Weitzenböck), 2. — **Schüßler**: Darstellende Geometrie, 5, Repetitorium, 2, Übungen, 6, Seminarübungen: Unterseminar, 2, Oberseminar, 2; Projektive Geometrie I, 3, Übungen, 3. — **Wittenbauer**: Allgemeine Mechanik, einschließlich der Elemente der graphischen Statik I, 4, Übungen, 3 und 2; Technische Mechanik I: Theorie der Elastizität, Festigkeitslehre, 4. — **Klingatsch**: Niedere Geodäsie, 4; Elemente der niederen Geodäsie, 4; Geodätische Zimmerübungen, $1^1/_2$ und 2; Situations- und Terraindarstellung, 4 und 2; Höhere Geodäsie: Methode der kleinsten Quadrate, Das Präzisions-Nivellement, Landesvermessung, 4; Geodätisches Seminar, 6. —

Universität Greifswald.

Stark: Experimentalphysik II: Elektrodynamik, Atomdynamik, Optik, Thermodynamik, 5; Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler, 6, für Mediziner und Pharmazeuten, 2; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl.; Besprechung neuer physikalischer Arbeiten, 14 tägig, 2 *g*. —

Dimroth: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum: a) anorganische Abteilung, b) organische Abteilung (mit Posner), c) für Pharmazeuten und Nahrungsmittelchemiker (mit Scholtz), tägl. außer Sonnabend, für Mediziner (mit Scholtz), 4, Erläuterungen, $^1/_2$ *g*. — **Scholtz**: Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 3;

Ausmittelung der Gifte, 1; Pharmazeutisches Kolloquium, 1 *g*. — **Posner**: Synthetische Methoden der organischen Chemie, 2; Besprechung neuerer Arbeiten aus dem Gebiete der organischen Chemie, 1 *g*. —

Hausdorff: Funktionentheorie: Funktion von komplexen Veränderlichen, 4; Analytische Geometrie, 3, Übungen, 1 *g*; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **Thaer**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 1 *g*; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 4. —

Universität Halle.

Mie: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Physikalische Übungen für Naturwissenschaftler, 6; Kleines physikalisches Praktikum für Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Erläuterungen zu den physikalischen Übungen, 2 *g*; Leitung selbständiger Arbeiten, tägl. — **Schmidt**: Einleitung in die theoretische Physik, 4; Übergangspraktikum für angewandte Physik, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Wigand**: Über Elektronen und Ionen, 1; Physikalisches Handfertigkeitspraktikum, 1 Nachmittag. —

Tubandt: Allgemeine Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 5; Praktische Übungen im Chemischen Laboratorium (mit Schulze), tägl. außer Sonnabend; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 4; Besprechung neuerer physiko-chemischer und elektrochemischer Arbeiten, 2 *g*. — **Schulze**: Besprechung der Arzneimittelprüfungen, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend. — **Erdmann**: Ausgewählte Kapitel aus der chemischen Technologie, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Mediziner, 4; Praktische Übungen im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. außer Sonnabend. — **Baumert**: Einführung in die gerichtlich-chemische Analyse, 1 *g*; Gerichtliche Chemie, 2; Praktische Übungen im Laboratorium für Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend; Gerichtlich-chemisches Praktikum, 3. —

Wangerin: Integralrechnung, mit Übungen, 4; Analytische Mechanik II, 2; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, für Kriegsteilnehmer, 2 *g*; Übungen des Mathematischen Seminars, 1 *g*. — **Gutzmer**: Theorie der elliptischen Funktionen, 4; Synthetische Geometrie, 3; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, für Kriegsteilnehmer, 2 *g*; Übungen des Mathematischen Seminars, 1 *g*. — **Eberhard**: Numerische Gleichungen, 2; Analytische Geometrie des Raumes, 3; Mathematisches Kolloquium, 1 *g*. — **Grammel**: Darstellende Geometrie, 2, Übungen, 2 *g*; Kreiseltheorie mit Anwendungen, 2. — **Buchholz**: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler: Methode der kleinsten Quadrate, 1; Theorie der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, 2. —

Technische Hochschule Hannover.

Precht: Experimentalphysik, 4; Arbeiten im Laboratorium der Physik, 4. — **Leithäuser**: Grundzüge der Physik, 3; Praktische Physik, 2; Photographie, mit Übungen, 4. — **Kohlrausch**: Grundzüge der Elektrotechnik, 3; Theoretische Elektrotechnik, 4; Elektrotechnisches Laboratorium I, 8, II, 16, III, für Maschinen-Ingenieure, 8; Elektrotechnisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Heim**: Elektrische Anlagen I, 3, Übungen, 2; Entwerfen von elektrischen Maschinen und Transformatoren, 2, Übungen, 2; Elektrische Bahnen, 2; Elektrische Kraftübertragung, 2. — **Beckmann**: Praktische Elektrotechnik für Anfänger, 1; Elektrotechnische Meßkunde I, 2; Die Wicklungen der elektrischen Maschinen, 1 *g*. — **Brückmann**: Turbogeneratoren, 1 *g*; Elektrotechnisches Seminar, 1. —

Seubert: Anorganische Chemie, 4; Arbeiten im Laboratorium der anorganischen Chemie, tägl. außer Sonnabend. — **Eschweiler**: Analytische Chemie, 3. — **Behrend**: Organische Chemie, 3; Arbeiten im Laboratorium der organischen Chemie, tägl. außer Sonnabend. — **Ost**: Grundzüge der chemischen Technologie, 2; Allgemeine chemische Technologie, 4, Übungen, 2; Arbeiten im Laboratorium der technischen Chemie, tägl. außer Sonnabend. — **Bodenstein**: Physikalische Chemie, 3; Elektrochemische Übungen, 4; Arbeiten im elektrochemischen Institut, tägl.; Übungen in der Elektroanalyse, 7. — **Jänecke**: Unsere Kalilager, 1; Die physikalische Chemie der heterogenen Gleichgewichte, 1. — **Laves**: Grundzüge der Nahrungsmittelchemie, 2. —

Kiepert: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2, III, 2; Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Geometrie der Lage, 3. — **Müller**: Höhere Mathematik II A, 6, Übungen, 2; Elliptische Funktionen, 2; Mathematisches Seminar (mit Rodenberg und Salkowski), 2 *g*. — **Salkowski**: Grundzüge der höheren Mathematik, besonders für Architekten und Chemiker, 3, Übungen, 1; Praktische Mathematik, 2, Übungen, 2; Vektoranalysis, 2. — **Rodenberg**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen 6; Darstellende Geometrie II, 3, Übungen, 6. — **Petzold**: Algebraische Analysis und Trigonometrie, 3. — **Prange**: Ausgewählte Kapitel der Elastizitätslehre, 2; Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendung auf Statistik, 2. — **Oertel**: Geodäsie I, 4, Übungen, 2, II, 2, Übungen, 2; Höhere Geodäsie, 2. — **Pröll**: Mechanik I, 3, Übungen, 1, II, 4, Übungen, 1, III, 3, Übungen, 1; Aeromechanik in ihrer Anwendung auf Motorluftschiffe und Flugzeuge, 1. —

Universität Heidelberg.

Lenard: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Physikalisches Praktikum (mit Becker), 6; Physikalisches Seminar und Kolloquium, 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten Fortgeschrittener im physikalischen und radiologischen Institut (mit Becker), tägl. außer Sonnabend. — **Becker**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Die Prinzipe der Mechanik, 1. — **Schmidt**: Photographische Kurse für Anfänger und Vorgeschrittene, 2. —

Curtius: Experimentalchemie II: Organische Verbindungen, 4, Metalle, 2; Chemisches Praktikum für Anfänger und für Geübtere in anorganischer, organischer, physikalischer, analytischer und pharmazeutischer Chemie (mit Jannasch, Trautz, Müller und Schrader), tägl. außer Sonnabend, für Mediziner und Lehramtskandidaten, halbtägig. — **Schrader**: Geschichte der Chemie, 2. — **Krafft**: Anorganische Chemie, 4; Praktisch-chemische Übungen und Arbeiten im Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Chemisches Anfängerpraktikum, 5 oder 3 Halbtage. — **Stollé**: Qualitative Analyse; Pharmazeutische Chemie II, organischer Teil. — **Jannasch**: Gewichtsanalyse, 2; Chemische Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel, 1; Gasanalytisches Praktikum (mit Müller), 4; Analytisches Praktikum zur Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel, 5. — **Knoevenagel**: Chemie der Benzolderivate; Chemie und Technologie der Teerfarbstoffe. — **Trautz**: Physikalische Chemie: Elektrochemie, Thermochemie, Molekulartheorie, chemische Gleichgewichte, 3; Quantentheorie in ihren chemischen Anwendungen und Bau der Atome, 1; Anwendungen der physikalischen Chemie in anderen Naturwissenschaften, Medizin und Technik, 1 *g*; Praktische Einführung in die physikalische und Elektrochemie, 4—6 Wochen. — **Muckermann**: Analytische Methoden offizineller Arzneimittel; Wasser- und Harnanalyse. — **Mohr**: Stereochemie, 1. — **Müller**: Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1, Praktische Übungen, 2. —

Stäckel: Analytische Geometrie des Raumes, 4, Übungen, 1; Höhere Algebra, 3; Mathematisches Oberseminar (mit Perron), 2. — **Perron**: Differentialgleichungen, 4; Mathematisches Unterseminar, 1. — **Koenigsberger**: Differential- und Integralrechnung II, 4; Abelsche Gleichungen und Kreisteilung, 1. — **Koehler**: Determinantentheorie, 2. — **Pfeiffer**: Darstellende Geometrie mit Übungen, 3. — **Wolf**: Ausgewählte Kapitel aus den Elementen der Astronomie: Fixsterne, 2 *g*. —

Universität Innsbruck.

v. Schweidler: Experimentalphysik I, 4; Einführung in die messende Physik, 1; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6, für Mediziner, 3; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. *g.* — **v. Lerch**: Physik für Pharmazeuten, 5. — **Tumlirz**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 5; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar, 2 *g.* — **March**: Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Lichtes, 2. — **Hammerl**: Elektrotechnik II: Über die Eigenschaften der Wechselströme, über Transformatoren, 2 *g.* —

Brunner: Allgemeine Chemie I: Anorganische Chemie, 5; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium für Chemiker und Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend, für Lehramtskandidaten, halbtägig, für Mediziner, 6. — **Hopfgartner**: Photochemie, 2; Über Lösungen II, 2. — **Zehenter**: Chemische Technologie der Metalle, 2 *g.* —

Gmeiner: Differentialrechnung, 3; Arithmetik, 2; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **Zindler**: Vektoranalysis und Ausdehnungslehre, mit Übungen, 6; Mathematisches Seminar für Anfänger: Einführung in die Determinantentheorie, 1 *g.* — **Menger**: Achsonometrie und Linearperspektive, 2 *g*; Zeichenübungen, 1 *g.* —

Universität Jena.

Wien: Experimentalphysik II: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Physikalisches Kolloquium; Physikalisches Praktikum (oder Auerbach mit Pauli): a) für Mathematiker und Physiker, 6, b) für Chemiker, Pharmazeuten und Mediziner, 3; Leitung physikalischer Spezialuntersuchungen (mit Auerbach, Straubel und Pauli). — **Auerbach**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Licht, 4, im Kriegsfalle: Theorie der Wärme, Thermodynamik, 4; Einführung in die theoretische Physik: Begriffe, Prinzipien, Methoden, 3; Ernst Abbes Leben und Wirken, 1; Leitung physikalischer Arbeiten, tägl. — **Straubel**: Abbildungstheorie, 1. — **Ambronn**: Einleitung in die Theorie des Mikroskops, 2; Mikrophotographie und Projektion, 1; Übungen in der Handhabung des Mikroskops und seiner Nebenapparate, 2. — **Schneider**: Die radioaktiven Stoffe, 1. — **Pauli**: Experimentalphysik IV, für Fortgeschrittene: Elektrizität, Magnetismus, Optik, 2. —

Knorr: Allgemeine Experimentalchemie II: Organische Chemie, 4; Analytisch-chemisches Praktikum (mit Wolff): a) Vollpraktikum, 30, b) Halbpraktikum, 15, c) Mediziner-Vollpraktikum, 6, d) Mediziner-Halbpraktikum, 3; Chemisches Praktikum im organischen Laboratorium und Anleitung zu chemischen Spezialuntersuchungen (mit Schneider), 40. — **Wolff**: Analytische Chemie, 3; Elektrolyse und elektrolytisches Praktikum, 2. — **Immendorff**: Agrikulturchemie I: Pflanzenernährungslehre, 3, II: Tierernährungslehre, 2; Kleines chemisches Praktikum, 7; Großes chemisches Praktikum; Grundzüge der organischen Chemie für Landwirte, 1. — **Vongerichten**: Chemische Technologie, anorganischer Teil, 2; Färberei- und Druckereikursus, 4; Technisch-chemisches Praktikum. — **Matthes**: Pharmazeutische Chemie I: Anorganische Chemie, 2; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Untersuchung und Darstellung chemisch-pharmazeutischer Präparate, Ausmittelung der Gifte, 5; Praktische und theoretische Übungen aus dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie, tägl. — **Kappen**: Chemische Technologie der landwirtschaftlichen Nebengewerbe, 1; Die agrikulturchemischen Untersuchungsmethoden, 1. — **Hirsch**: Die Fermente und ihre Wirkungen, 2. —

Haußner: Differential- und Integralrechnung II, mit Übungen, 5; Raumkurven und krumme Flächen, 5; Ausgewählte Fragen der elementaren Geometrie, 3; Mathematisches Seminar: Raumkurven und Elementargeometrie, 1 *g*; Mathematisches Proseminar: Anwendungen der Differentialrechnung, 1. — **Koebe**: Analytische Geometrie des Raumes, 4, Proseminarübungen; Allgemeine Funktionentheorie, 4, Seminarübungen. — **Thomae**: Über besondere geometrische Sätze und Gebilde, 2. — **Knopf**: Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, 3; Mathematische Geographie, 2. — **Winkelmann**: Technische Mechanik I: Grundlagen, Stereomechanik, mit Übungen, 5; Graphische Methoden mit Übungen, 3. —

Technische Hochschule Karlsruhe.

Lehmann: Physik, 4, Ergänzungen, 2; Physikalisches Laboratorium (mit Schachenmeier), 6; Seminar für Experimentalphysik, 2 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im physikalischen Laboratorium, nach Vereinbarung. — **N. N.**: Mathematische Physik, 3, Repetitorium, 2. — **Schachenmeier**: Optik mit besonderer Berücksichtigung der Elektronentheorie, 2. — **Richter**: Elektromaschinenbau I: Grundlagen, Gleichstrommaschinen Transformatoren, 5; Übungen im Konstruieren elektrischer Maschinen und Apparate, 4; Elektrotechnisches Laboratorium II, 6, für Vorgeschrittene, einschließlich Hochspannungs-, Hochfrequenzmessungen und drahtlose Telegraphie (mit Schleiermacher, Schwaiger und Hausrath), 8; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Schleiermacher**: Grundlagen der Elektrotechnik und Meßkunde, 3; Theoretische Elektrizitätslehre, 3; Elektrotechnisches Laboratorium I, 6. — **Schwaiger**: Elektromotorische Betriebe, einschließlich Bahnen, 2; Elektrische Kraftwerke und Schaltanlagen, 2; Schalt- und Regulierapparate, 1; Nichtstationäre elektrische Vorgänge und Hochspannungstechnik, 1; Übungen zu diesen vier Vorlesungen, 2; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Teichmüller**: Allgemeine Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Seminar, 2; Übertragung und Verteilung elektrischer Energie: Leitungen, 2, Übungen, 2; Energieversorgung des Landes, 1; Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Hausrath**: Drahtlose Telegraphie, 2; Schwachstromtechnik, 2; Besichtigung von Schwachstromanlagen, nach Verabredung. — **Thomälen**: Theorie der Wechselströme, 2, Übungen, 2. — **Schmidt**: Photographische Kurse, mit Vorträgen über die Theorie der photographischen Vorgänge, für Anfänger und Vorgeschrittene, 2; Exkursionen. — **Schultheiß**: Meteorologie: Klimatologie, 1. —

Engler: Anorganische Experimentalchemie, 4; Organisch-chemisches Kolloquium (mit Franzen), 1; Spezielle Kapitel der allgemeinen Chemie, 1; Chemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **Bredig**: Physikalische Chemie I, 2; Überblick über die theoretische und technische Elektrochemie, 3; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Kolloquium, für Vorgeschrittene, 2; Physikalisch-chemisches und elektro-chemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Physikalisch-chemischer und elektro-chemischer Einführungskurs. — **Bunte**: Chemische Technologie I: Zuckerfabrikation, Gärungsgewerbe, Brauerei, Brennerei, 2, II: Wasser, Beleuchtungstechnik, 2; Metallurgie, 1; Brennstoffe und industrielle Feuerungen, 1; Übungen in der technischen Analyse (mit Eitner), 4 u. 3, für Vorgerücktere, tägl.; Gaschemische Übungen, 2; Arbeiten im chemisch-technischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Technische Exkursionen. — **Franzen**: Organische Chemie II, 2; Besprechung neuerer Arbeiten auf dem Gebiete der organischen Chemie, 1. — **Askenasy**: Prozesse der elektrochemischen Großindustrie II und Bau und Betrieb der Akkumulatoren, 2. — **Dieckhoff**: Organische pharmazeutische Chemie, 2; Gerichtliche Chemie, 2. — **Eitner**: Methoden der technischen Analyse, 2, Übungen (mit Bunte), 4; Ausgewählte Kapitel der technischen Analyse, 1, Übungen (mit Bunte), 3; Spezielle Technologie der Gasbeleuchtung I, 1, Übungen, 4. — **Koenig**: Analytische Chemie II: Physikalisch-chemische Grundlagen der Analyse, 2. — **Reis**: Photochemie I: Strahlungslehre, 2. — **Rupp**: Chemische und mikroskopische Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln sowie Gebrauchsgegenständen, 2. — **Steinkopf**: Methoden der organischen Chemie, 1; Chemie der heterozyklischen Verbindungen I und II, 1. — **Terres**: Chemie der Gase, 2. — **Ubbelohde**: Industrie der Fette und

Harze, 2; Über Patentwesen, 1. — **N. N.**: Chemie der Faserstoffe und Farbstoffe I: Gespinstfasern, Wäscherei und Bleicherei, Färberei und Druckerei, 2, Übungen, 2. —

Böhm: Höhere Mathematik II, 3; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, 2. — **Mohrmann**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 4; Graphische Statik, 2, Übungen, 2; Konstruktive Übungen der Perspektive. — **Heun**: Mechanik I, 4, Übungen, 2; Mechanisches Seminar, 3 *g*. — **Krazer**: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2. — **Brandt**: Elementare und analytische Geometrie der Ebene und des Raumes I, 2, Übungen, 1. — **Haupt**: Übungen in den Grundlehren der höheren Mathematik, 2; Arithmetik und Algebra, 2, Übungen, 1; Ebene und sphärische Trigonometrie, 2, Übungen, 1. — **Noether**: Elemente der Mechanik, 3, Übungen, 1; Elastizitätstheorie, 2. — **Wellstein**: Projektionslehre, 2, Übungen, 4. — **Näbauer**: Praktische Geometrie, 3; Höhere Geodäsie, 3; Geodätisches Praktikum, 2 und 3; Methode der kleinsten Quadrate, 2. — **N. N.**: Repetitorium der praktischen Geometrie, 2; Plan- und Terrainzeichnen, 2 und 4. — **Stutz**: Katastervermessung: Feldbereinigung, 2, Übungen, 2. —

Universität Kiel.

Dieterici: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger: a) Mathematiker und Naturwissenschaftler, 8, b) Mediziner und Pharmazeuten, 4, für Fortgeschrittene, tägl.; Repetitorium der Physik für Kriegsteilnehmer, 2 *g*. — **Weber**: Elektrodynamik, 4; Photometrie, 1; Theorie physikalischer Messungsapparate, mit Übungen, 1; Anleitung zur Anstellung meteorologischer Beobachtungen im Auslande, 1; Ausgewählte physikalische Messungen und Untersuchungen, tägl. außer Sonnabend. — **Martienssen**: Einführung in die drahtlose Telegraphie, 1. —

Diels: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum, a) Anorganische Abteilung (mit Mumm), tägl. außer Sonnabend, b) Organische Abteilung, tägl. — **Feist**: Allgemeine Warenkunde, 2; Stereochemie, 1 *g*; Organische Experimentalchemie, für Zahnärzte, 2. — **Mumm**: Chemie der Metalle, 3. — **Horrmann**: Pharmazeutische Chemie: Anorganischer Teil, 3; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Stoehr**: Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 1. — **Preuner**: Thermochemie und Thermodynamik, 2. —

Pochhammer: Analytische Geometrie des Raumes, 4; Analytische Mechanik, 4; Übungen im mathematischen Seminar, 1 *g*. — **Harzer**: Geographische Ortsbestimmungen, 3; Differenzenrechnung, 1. — **Kobold**: Theorie der Bahnbestimmung, 2, Übungen, 2 *g*. — **Toeplitz**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 2; Elliptische Funktionen, 4; Übungen für mittlere Semester, 2; Die Verteilung der Primzahlen, 1 *g*. —

Universität Königsberg.

Kaufmann: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität und Optik, 5, Ergänzungen, 1 *g*; Physikalische Übungen, 6; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Seminaristische Übungen zur Geschichte der Experimentalphysik (mit Hoffmann), 2 *g*. — **Volkmann**: Theorie der Wärme, 4, Mathematisch-physikalisches Seminar: Ergänzungen und Erläuterungen, 1 *g*; Mathematisch-physikalisches Laboratorium: Physikalisch-praktische Übungen und Arbeiten für Anfänger und Vorgerückte, 6. — **Hoffmann**: Elektrische Schwingungen und Funkentelegraphie, 1. —

Klinger: Organische Chemie, 4; Chemisches Praktikum für Mediziner, 2 Nachmittage; Chemisches Praktikum (mit Blochmann und Eisenlohr), tägl. außer Sonnabend. — **Rupp**: Pharmazeutische Chemie, 2; Chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-wissenschaftliches Kolloquium, 1. — **Zielstorff**: Anorganische Chemie für Landwirte, 2; Die Ernährung landwirtschaftlicher Nutztiere: Fütterungslehre, 2; Chemisches Praktikum für Anfänger, halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Untersuchung künstlicher Düngemittel, 2; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium, für Geübtere, ganztägig, *g*; Besichtigung industrieller Anlagen, 1 Nachmittag, *g*. — **Blochmann**: Einführung in die quantitative Analyse, 2; Chemische Technologie der Gase, 1 *g*. — **Eisenlohr**: Thermochemie, 1; Methoden der Molekulargewichtsbestimmung, 1 *g*; Die Platinmetalle Rußlands und ihre Wichtigkeit für die allgemeine Chemie, nach Verabredung, *g*. —

Meyer: Analytische Raumgeometrie, mit Übungen, 4; Differentialgeometrie, 4, Übungen, *g*; Mathematische Gesellschaft (mit Blaschke), 1 *g*. — **Battermann**: Theorie der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, 2, Rechnerische Übungen, 1 *g*. — **Blaschke**: Differential- und Integralrechnung II, 4; Potentialtheorie, 4; Seminarübungen, 2 *g*. — **Kaluza**: Versicherungsmathematik, mit Übungen, 2; Einführung in die Relativitätstheorie, 1; Repetitorium der Elementarmathematik, mit Übungen, 3. —

Universität Leipzig.

Wiener: Experimentalphysik II: Licht, Magnetismus, Elektrizität, 5; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Scholl), tägl.; Physikalische Übungen (mit Scholl), 6, für Mediziner und Pharmazeuten, 3; Physikalisches Kolloquium (mit Des Coudres), 2 *g*. — **Des Coudres**: Einleitung in die theoretische Physik, 4; Selbständige Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Fredenhagen), tägl. — **v. Oettingen**: Das Harmonium reiner Stimmung, 1 *g*. — **Scholl**: Allgemeine Experimentalphysik für Zahnärzte, 4. — **Marx**: Vektoranalysis und ihre Anwendung in der Physik, 2. — **Haas**: Einleitung in die Theorie der Elektrizität und der Wärme, 2; Selbständige geschichtlich-physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene, *g*. — **Lilienfeld**: Erzeugung und Anwendung tiefer Temperaturen, 1 *g*. — **Wilke**: Einführung in das Maschinenwesen, 2 *g*. —

Hantzsch: Organische Experimentalchemie, 5; Analytisch- und anorganisch-chemische Übungen für Chemiker, Pharmazeuten, Mathematiker, Naturwissenschaftler und Landwirte, auch für Anfänger (mit Schaefer), tägl.; Organisch-chemische Übungen (mit Reddelien), tägl.; Chemische Übungen für Mediziner und Zahnärzte (mit Schaefer), 6, für Fortgeschrittene (mit Stobbe, Rassow, Schaefer und Reddelien), tägl. — **Le Blanc**: Physikalische Chemie I, 4; Chemische Übungen für Anfänger: Analytische und präparative, anorganische und organische Arbeiten (mit Böttger), tägl.; Physikalisch-chemische Übungen (photochemisch-photographische mit Weigert, elektrochemische und kolloid-chemische mit Böttger), tägl.; Physikalisch-chemischer Einführungskurs, auf Wunsch: Darstellung elektrochemischer Präparate (mit Schall und Böttger), 4 oder 8. — **Paal**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemische Übungen, analytisch-anorganisch und organisch, für Chemiker, Mathematiker, Naturwissenschaftler und Landwirte, auch für Anfänger (mit Deußen, Scheiber, Sieverts und Waentig), tägl.; Arbeiten auf dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie (mit Deußen und Waentig), tägl.; Pharmazeutisch-chemisch-toxikologische Übungen (mit Deußen und Scheiber), tägl.; Chemische Übungen für Mediziner und Zahnärzte (mit Sieverts und Waentig), 6, für Vorgerücktere (mit Heller, Deußen, Scheiber, Sieverts und Waentig), tägl.; Chemisch-technische Übungen (mit Heller), tägl. — **Stobbe**: Spezielle organische Chemie: Die heterozyklischen Verbindungen, mit besonderer Berücksichtigung der Alkaloide und der künstlichen Heilmittel, 1; Wiederholungskursus der organischen Chemie, 1. — **Wagner**: Experimentelle Einführung in die Chemie auf physikalischer Grundlage, insbesondere für Kriegsteilnehmer, 1, Ergänzung, 1 *g*; Chemische Übungen für Lehrer: Schulversuche, Analyse und Präparate, tägl., hierzu: Didaktische Besprechungen (Elektrochemie), 1 *g*. — **Rassow**: Chemische Technologie, organische Betriebe: Zucker, Stärke, Gärungsgewerbe, Fette und Öle, 2; Technologische Ausflüge, *g*; Schieß- und Sprengstoffe, 1 *g*; Chemisch-techno-

logische Übungen, ganz- oder halbtägig. — **Weigert**: Spektroskopie, 1; Photochemische und photographische Übungen, 4; Photochemische Arbeitsmethoden (Ergänzung zu den Übungen), 1 *g*. — **Schall**: Über Elektrochemie in der Technik, 1. — **Böttger**: Wissenschaftliche Grundlagen der analytischen Chemie: Übersicht über das Gesamtgebiet der qualitativen und quantitativen Analyse, 2. — **Heller**: Allgemeine und technische Chemie: Organischer Teil, 2. — **Schaefer**: Ausgewählte Kapitel aus der anorganischen Chemie, mit Versuchen, 2. — **Deußen**: Die wichtigsten physikalischen und chemischen Untersuchungsmethoden des deutschen Arzneibuchs, 1; Übungen im Sterilisieren für Pharmazeuten, nach Verabredung. —

Hölder: Elliptische Funktionen, 4; Bestimmte Integrale und Fouriersche Reihen, 2; Übungen für Vorgeschrittene in Funktionentheorie, 2 *g*. — **Bruns**: Sphärische Astronomie, 4; Praktische Arbeiten in der Sternwarte, *g*. — **Rohn**: Analytische Geometrie des Raumes, 4, Übungen, 1 *g*; Determinanten, 2. — **Herglotz**: Mechanik, 4; Ausgewählte Kapitel der Elementarmathematik, 2; Mathematisches Seminar: Besprechung neuerer Arbeiten, 2 *g*. — **Schnee**: Differential- und Integralrechnung, 4, Übungen, 2 *g*; Zahlentheorie II, 2. —

Universität Marburg.

Richarz: Experimentalphysik: Wärme, Magnetismus und Elektrizität, 5; Übersicht über die Experimentalphysik für Kriegsteilnehmer, 1; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Physikalisches Praktikum (mit Feußner und Schulze), 6; Leitung eigener Untersuchungen, tägl. — **Feußner**: Theoretische Physik: Licht, 4; Theoretisch-physikalisches Seminar, 2 *g*. — **Schulze**: Hydrodynamik und Akustik, 2; Übersicht über die theoretische Physik, für Kriegsteilnehmer, 1 *g*. — **Take**: Theorie der hochfrequenten Wechselströme mit besonderer Anwendung auf drahtlose Telegraphie und Telephonie, mit Demonstrationen auf der Radiostation, 2; Repetitorium der Experimentalphysik I: Wärme und Elektrizität, mit elementar-mathematischen Übungen, 1. — **Wegener**: Allgemeine Meteorologie, 2. —

v. Auwers: Organische Experimentalchemie, für Chemiker und Mediziner, 5; Chemisches Praktikum (mit Fries und Strecker), tägl. außer Sonnabend, für Vorgerücktere, tägl.; Chemische Übungen für Mediziner (mit Strecker), tägl. außer Sonnabend; Praktisch-chemischer Kursus für Mediziner (mit Strecker); Theoretische Einführung mit Demonstrationen, 1/2, Praktikum, 3 1/2; Chemisches Seminar, 14 tägig, 2 *g*. — **Keller**: Organische Chemie, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie und Medizin, 6; Nahrungsmittelchemie II: Herstellung, Zusammensetzung und Untersuchung der wichtigsten Nahrungs- und Genußmittel, 2; Praktische Übungen in der analytischen und forensischen Chemie, sowie in der Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel und selbständige Arbeiten im Laboratorium des Pharmazeutisch-chemischen Instituts (mit Schmidt), tägl.; Übungen im Keimfreimachen von Arznei- und Verbandmitteln, 2; Besprechungen und Übungen über Arzneimittelprüfung, 1 *g*. — **Strecker**: Qualitative Analyse, 2; Konstitution anorganischer Verbindungen, 1; Repetitorium der anorganischen Chemie, 2; Repetitorium der organischen Chemie, 2. — **Fries**: Ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie, 3; Chemie der Terpene, 1; Chemisches Kolloquium, 2 *g*; Chemisches Repetitorium für Mediziner: Anorganische Chemie, 1. — **Schmidt**: Qualitative Analyse, im Anschluß an die praktischen Übungen, *g*. — **Thiel**: Physikalische Chemie II, 3; Theoretische Übungen über ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie, 1 *g*; Physikalisch-chemisches Praktikum, 6; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl.; Photochemisches und photographisches Praktikum, für Anfänger und Fortgeschrittene (mit Stuchtey), 2. —

Hensel: Integralrechnung, 3; Höhere Zahlentheorie, 4; Mathematisches Seminar, 1 *g*. — **v. Dalwigk**: Elementare Algebra, 4; Geodäsie, 2; Kartenprojektionen, für Mathematiker, 1. — **Neumann**: Theorie der Raumkurven und Flächen, 4; Variationsrechnung, 4; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **N. N.**: (eventl.) Potentialtheorie, 4; Massenlehre, 3; Mathematische Übungen für junge Semester, 2. —

Universität München.

Röntgen: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Praktische Übungen im Physikalischen Laboratorium (mit Koch und Wagner), 4. — **Sommerfeld**: Elektrodynamik, Maxwellsche Theorie und Elektronentheorie, 4, Seminarübungen, 2 *g*; Probleme der drahtlosen Telegraphie, 1; Selbständige Arbeiten im Institut für theoretische Physik, tägl.; Röntgenstrahlen und Kristallstruktur, ohne mathematische Ableitung, 1. — **Graetz**: Experimentalphysik I: Einleitung, Wärme, Elektrizität, 5; Physikalisches Praktikum: a) Übungen in physikalischen Messungen, b) Übungen in physikalischen Demonstrationen, 4; Einleitung in die theoretische Physik, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus der Physik, nach Verabredung, *g*. — **Koch**: Der photographische Prozeß mit besonderer Berücksichtigung seiner wissenschaftlichen Anwendungen (allgemeinverständlich), mit Demonstrationen, 1. — **Wagner**: Ausgewählte Kapitel aus der neueren Physik, 1. — **Donle**: Physikalische Maße und Meßmethoden, 2. — **Schmauß**: Allgemeine Meteorologie und Klimatologie, 4. —

Willstätter: Unorganische Experimentalchemie, 5; Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium in den beiden unorganischen Abteilungen (mit Prandtl und Vanino), tägl. außer Sonnabend, in der organischen Abteilung (mit Wieland und Dieckmann), tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Vanino), 4; Arbeiten im Chemischen Laboratorium für fortgeschrittenere Mediziner (mit Wieland), halb- oder ganztägig. — **Paul**: Organische Chemie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung, 5; Nahrungsmittelchemie I, mit Exkursionen, 2; Pharmazeutisch-chemische Präparatenkunde: Anorganische Präparate, 3; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich physikalisch-chemischer, elektrochemischer und nahrungsmittel-chemischer Arbeiten, mit serologisch-chemischen Übungen, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl.; Übungen für praktische Apotheker, nach Vereinbarung. — **Prandtl**: Spezielle unorganische Experimentalchemie II: 4 bis 8. Gruppe des periodischen Systems, 4; Praktikum für Gasanalyse, 4. — **Wieland**: Spezielle organische Chemie II: Benzolderivate, 3. — **Dieckmann**: Stereochemie, 1 *g*. — **Pummerer**: Anorganisch-chemische Technologie, ohne Schwermetalle, mit Exkursionen, 2. — **Meyer**: Elektrochemie, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum, 4. — **Kalb**: Kolloquium über organische Chemie, 1. —

Lindemann: Analytische Mechanik, 4; Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln, 4; Linien- und Kugelgeometrie, 2; Übungen und Vorträge im Mathematischen Seminar, 1 1/2 *g*. — **v. Seeliger**: Theoretische Astronomie, 4. — **Voß**: Einleitung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, 4; Analytische Geometrie der Ebene, 4; Seminar: Eigene Arbeiten und Vorträge, 2 *g*. — **Pringsheim**: Differentialrechnung, 5. — **Brunn**: Elemente der höheren Mathematik, mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der Forstkandidaten, 3. — **Hartogs**: Synthetische Geometrie I, 5. — **Großmann**: Theorie der astronomischen Refraktion, 2. — **Böhm**: Elemente der Versicherungsrechnung, 2; Seminar für Statistik und Versicherungswissenschaft (mit v. Mayr und Zahn), 3. — **Dingler**: Elementarmathematik, mit geschichtlichen und pädagogischen Hinweisen, 4; Einführung in die mathematische Behandlung von Beobachtungsdaten, 2. — **Rosenthal**: Differentialgeometrie der Kurven und Flächen, 5. —

Technische Hochschule München.

Zenneck: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Optik, 6; Physikalisches Praktikum, 4 oder 8;

Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Physik, 12—30. — **Fischer**: Grundzüge der Physik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 3; Apparate und Methoden des physikalischen Unterrichts I: Mechanik, Akustik, Wärme, 3; Praktisch-physikalische Übungen: Aufbau und Handhabung von Apparaten, 4; Elektrizität und Magnetismus in mathematischer Behandlung, 4; Einführung in die wissenschaftlichen Arbeitsmethoden der Physik, 8—30; Elemente der theoretischen Physik: Mechanik, Elastizität, Wärmelehre, 4; Interferenz- und Beugungserscheinungen (experimentell und theoretisch), 1. — **Knoblauch**: Ausgewählte Kapitel der technischen Thermodynamik, 2; Technisch-physikalisches Praktikum, 4; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Physik, nach Verabredung; Heizung und Lüftung, 3. — **Emden**: Meteorologie und Klimatologie, 2; Ausgewählte Kapitel der Geophysik: Ebbe und Flut, Polhöheschwankungen, Erdinneres, 2. — **Dieckmann**: Ausgewählte Kapitel der Telegraphen- und Fernsprechtechnik, 2, Übungen, 3; Radioaktivität, 1; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen aus dem Gebiete der angewandten Physik, nach Verabredung. — **von und zu Aufseß**: Populäre Astrophysik I, 2. — **Schröter**: Mechanische Wärmetheorie, 2, Übungen, 1. — **Heinke**: Einführung in die Elektrotechnik, 4; Elektrische Meßtechnik II, 3; Elektrotechnisches Praktikum I: Meßtechnik und Photometrie, 8, für Vorgeschrittene, nach Verabredung. — **N.N.**: Schwachstromtechnik: Telegraphie, Telephonie und drahtlose Telegraphie, 2. — **Ossanna**: Elektrotechnisches Praktikum II: Messungen an Maschinen, Umformern und Transformatoren, 8 und 2; Theorie und Konstruktion der elektrischen Maschinen I: Gleichstrommaschinen und Umformer, 3, II: Synchrongeneratoren und Sychronmotoren, 3; Wechselstrom-Kommutatormotoren, 2; Entwerfen von elektrischen Maschinen, 4. — **Kadrnoska**: Elektrische Anlagen I: Verwertung elektrischer Arbeit a) Elektrische Kraftbetriebe, 2, b) elektrische Bahnen, 3, II: Erzeugung und Verteilung elektrischer Arbeit, 2, Übungen: Entwerfen elektrischer Anlagen, 4. — **Urban**: Unterrichtskurse in praktischer Photographie, 1, Praktische Übungen, 3. —

Manchot: Unorganische Experimentalchemie, einschließlich der Grundzüge der physikalischen Chemie, 6; Unorganisches und analytisch-chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgerücktere, 10, 20 oder 30; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten im unorganischen Laboratorium, nach Vereinbarung. — **Wieland**: Chemie der aromatischen Verbindungen, 2; Chemisches Praktikum im organischen Laboratorium, 20—30; Spezielle Arbeiten auf dem Gebiete der organischen Chemie, 30. — **Albert**: Chemie und Technologie der Fette und Öle, 1; Chemie der neueren Arzneimittel, 1. — **Rohde**: Die Hauptgruppen der heterozyklischen Verbindungen unter Berücksichtigung der wichtigsten zugehörigen Alkaloide, 3. — **Hofer**: Analytische Chemie der Metalle und Metalloide nebst Gewichts- und Maßanalyse II, 2; Theoretische Elektrochemie, 2; Praktikum im elektrochemischen Laboratorium, 10, 20, oder 30. — **Schultz**: Chemische Technologie I: Metallurgie, Eisenhüttenkunde, Leder, Kautschuk, Guttapercha, 3; Praktikum im chemisch-technischen Laboratorium, 20—30; Spezielle Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Chemie, nach Verabredung; Chemisch-technische Übungen: Chemisch-technische Analyse, Färberei, 4. — **Jacob**: Chemisch-technische Prüfungsmethoden, 1. — **Braß**: Textilfaserstoffe und ihre Veredlung, 1. — **Lintner**: Chemische Technologie des Wassers und der Kohlehydrate, 3; Gärungs-chemisches Praktikum nebst Übungen in der Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln, bis 30; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im gärungs-chemischen Laboratorium, bis 30. —

Faber: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 3. — **v. Dyck**: Höhere Mathematik III, 5, Übungen, 2; Funktionentheorie nach Riemann, 4; Mathematisches Seminar, Kolloquium (mit Finsterwalder, Faber und Liebmann), 2. — **Doehlemann**: Grundzüge der höheren Mathematik I, 4; Darstellende Geometrie I, mit Schattenkonstruktionslehre, 5, Übungen, 6; Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, 4, Übungen, 1. — **Liebmann**: Ebene und sphärische Trigonometrie, 3, Übungen, 1; Synthetische Geometrie der Ebene, 4. — **Finsterwalder**: Differentialgeometrie, mit Vektoren, 3, Graphische Übungen, 1; Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 4. — **Lagally**: Algebraische Kurven, 4. — **Burmester**: Täuschungsarten und Kinematographie mit Demonstrationen, 1. — **Schmidt**: Vermessungskunde I, 4, Praktikum 2 und 4; Landesvermessung, 4. — **Schäfer**: Anleitung zur rechnerischen Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen, 2. — **Föppl**: Technische Mechanik einschließlich der Elemente der graphischen Statik und der analytischen Mechanik II: Graphische Statik, 3, Übungen, 2, III: Festigkeitslehre, 4. —

Universität Münster.

Schmidt: Experimentalphysik: Optik und Elektrizität, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Szivessy), 3 und 6, für Fortgeschrittene (mit Konen), tägl. — **Konen**: Einführung in die theoretische Physik, 4; Elektrische Schwingungen und Optik, 3; Seminar für theoretische Physik, 2 *g*. — **Szivessy**: Physikalische Theorien über die Entstehung des Weltalls: Kosmogenie, 2. —

Schenck: Organische Experimentalchemie, 3; Chemie der Metalle und Legierungen, 2; Chemisches Kolloquium (mit Ley), 1 *g*; Chemisches Praktikum (mit Ley), tägl. außer Sonnabend; Chemische Übungen für Mediziner (mit Kaßner und Ley), 4. — **Ley**: Physikalische Chemie II: Thermochemie und Elektrochemie, 3. — **Ott**: Einführung in die analytische Chemie, 2; Repetitorium der organischen Chemie, 1. — **Kaßner**: Maßanalyse, 1 *g*; Anorganische Chemie mit besonderer Berücksichtigung der Medizin und Pharmazie, 4; Kolloquium über pharmazeutische Präparate und die Gegenstände des deutschen Arzneibuches, 1; Ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie, mit besonderer Berücksichtigung der Analyse technischer Gase, 1; Pharmazeutisch-chemische, maßanalytische und toxikologische Übungen im Laboratorium, Darstellung chemischer Präparate, für Vorgerücktere Anleitung zur Bearbeitung wissenschaftlicher oder technischer Aufgaben, tägl. außer Sonnabend. — **Bömer**: Analyse der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Chemie und Technologie der Gärungsgewerbe, 1 *g*. — **König**: Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Chemie, für Fortgeschrittene (mit Bömer), tägl. *g*. —

v. Lilienthal: Differential- und Integralrechnung II, mit Übungen, 4; Analytische Dynamik mit Übungen, 4; Elemente der Determinantentheorie und der Algebra, 2; Übungen des mathematischen Oberseminars, 2 *g*. — **Killing**: Analytische Geometrie II, 4, Übungen, 1 *g*; Elliptische Funktionen, 2; Zahlentheorie, 2; Übungen des mathematischen Unterseminars, 2 *g*. — **Schewior**: Darstellende Geometrie I, 3, Übungen, 2 *g*; Methoden der Geodäsie, 2. — **Plaßmann**: Zeitrechnung und Kalenderkunde, 2; Ausgewählte Abschnitte der optischen Meteorologie, 1; Übungen im Beobachten und Rechnen, nach Verabredung, *g*; Mathematische Geographie und elementare Astronomie, 2 *g*. —

Akademie Posen.

Spies: Elektrizitätslehre I: a) Der elektrische Spannungsstand, b) Magnetismus, 3. —

Mendelsohn: Mineralogische und chemisch-technische Übungen, 2. —

Könnemann: Die astronomischen Hilfsmittel, ihre Verwendung und Leistung, 1. —

Deutsche Universität Prag.

Lampa: Experimentalphysik I, 5; Physikalisches Praktikum I, 6 bzw. 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, für Vorgeschrittene, tägl. *g*. — **Frank**: Hydro-

dynamik und Aerodynamik, 3; Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 2; Besprechung des physikalischen Lehrstoffes der Mittelschule: Mechanik und Wärmelehre, 1; Besprechung neuerer Arbeiten zur Quantentheorie, 2 *g*. — **Spitaler**: Kosmische Physik, 4; Bearbeitung meteorologischer Beobachtungen, 1. —

Meyer: Anorganische Chemie, für Philosophen, Mediziner und Pharmazeuten, 5; Chemische Übungen, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen, für Vorgeschrittene, tägl. *g*; Übungen in der Ausführung von Vorlesungsexperimenten, für Lehramtskandidaten, 2. — **Rothmund**: Physikalische Chemie I, 4, Mathematische Ergänzungen, 1; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **Wagner**: Die chemischen Wirkungen des Lichtes: Photochemie und Photographie, 1. — **Kirpal**: Pharmazeutische Chemie, 4. — **Hönigschmid**: Analytische Chemie, 3. — **Sigmund**: Biochemie der Alkaloide und Glukoside, 1. — **Fortner**: Chemie der Nahrungsmittel, mit praktischen Übungen in der Untersuchung, 3. —

Pick: Elemente der Infinitesimalrechnung, 4, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **Kowalewski**: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 4, Übungen, 1; Anwendungen der elliptischen Funktionen, 1. — **Funk**: Variationsrechnung, 3. — **Mack**: Kurs über geometrisches Zeichnen und darstellende Geometrie (Fortsetzung), 3. — **Prey**: Grundlagen der Astronomie, 3; Theorie der Finsternisse, 2. — **Scheller**: Astrophysik I, 2. —

Technische Hochschule Prag.

Tuma: Experimentalphysik: Metrologie, Fundamentalsätze der Mechanik, Mechanik physikalischer Körper, Hydrostatik und Hydrodynamik, Aerostatik und Aerodynamik, Wellenlehre, Akustik, Optik, Wärmelehre, Molekulartheorie, 5, für Kulturingenieure und Geodäten, 3; Physikalisches Praktikum, 6. — **Niethammer**: Allgemeine Elektrotechnik: Grundlagen der Elektrotechnik, 2; Elektrische Anlagen, 2; Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2. —

Hönigschmid: Anorganische Chemie, 4; Analytische Chemie, anorganisch-qualitativ, 2; Übungen im anorganisch-chemischen und analytischen Laboratorium I und II, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen für Geübtere, tägl. außer Sonnabend. — **Wenzel**: Organische Chemie, Spezielle Chemie der aromatischen Verbindungen, 2; Analytische Methoden der organischen Chemie, 1; Ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie, 2; Übungen im organisch-chemischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, für Vorgeschrittene, tägl. — **Storch**: Chemie der Metalle und technischen Metallgewinnung: II. und III. Gruppe des periodischen Systems, 2; Die wissenschaftlichen Grundlagen der Maßanalyse, 1; Physikalische Chemie I: Chemische Statik und Dynamik, 2, IV: Elektrochemie, 3; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum, zugleich Physikalische Methoden der Untersuchung von Nahrungsmitteln, 1, Übungen, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, 15. — **Ditz**: Chemische Technologie anorganischer Stoffe I: Chemische Großindustrie, 6; Übungen im anorganisch-technologischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **v. Georgievics**: Chemische Technologie organischer Stoffe I, 5; Übungen im organisch-technologischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **v. Gintl**: Enzyklopädie der technischen Chemie, 2; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel und Untersuchung von Rohstoffen und Gebrauchsgegenständen, 3; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel und Untersuchung von Rohstoffen und Gebrauchsgegenständen, Übungen, 8; Methoden der quantitativen Mineralanalyse, 2; Praktische Metallographie, 2, Übungen, 1 Nachmittag. — **Außerwinkler**: Photographie, 1, Übungen, 4, Photographisches Laboratorium, 4. — **Herzog**: Agrikulturchemie, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen für Vorgeschrittene, tägl. — **Siegmund**: Biochemie der Alkaloide, Glukoside und Gerbstoffe, 1; Ausgewählte Kapitel der Chemie für Kulturingenieure, 2. —

Carda: Mathematik I, 6, Übungen, 2; Elemente der höheren Mathematik, 6, Übungen, 1; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2; Ausgewählte Kapitel der Differential- und Integralrechnung, Funktionen einer komplexen Variabeln, 2. — **N. N.**: Mathematik II, 6, Übungen, 2, für Handelslehrkandidaten, 3; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, 2. — **Rosmanith**: Versicherungsmathematik I, 4, IIa, 2, IIb, 2; Politische Arithmetik, 2. — **Mack**: Darstellende Geometrie, 4, Konstruktive Übungen, 6; Übungen für Vorgeschrittene, 6; Geometrie der Lage, 3. — **Grünwald**: Ausgewählte Abschnitte aus der Bewegungslehre starrer Körper, 2. — **Pöschl**: Allgemeine Mechanik, 3, Übungen, 1, Graphische Übungen, 2; Besondere Probleme aus dem Gesamtgebiete der Mechanik, 2. — **Geßner**: Enzyklopädie der Mechanik, 3. — **Haerpfer**: Elemente der niederen Geodäsie, 3, Übungen, 2; Theorie der Kartenprojektionen, 1. — **Adamczik**: Niedere Geodäsie, $4^1/_2$, Übungen, 2; Höhere Geodäsie, 3, Übungen, 2; Geodätisches Rechnen I, 2, II, 2. —

Universität Rostock.

Heydweiller: Experimentalphysik: Optik, Magnetismus, Elektrizität, 5; Physikalische Übungen a) für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 8, b) für Mediziner und Pharmazeuten, 4; Wissenschaftlich-physikalische Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar (mit Weber), 1. — **Weber**: Einführung in die theoretische Physik, 3, Übungen, 1; Optik, 2; Vektoranalyse, 1. —

Pfeiffer: Spezielle, anorganische Chemie, inkl. Phasenlehre, 5; Stereochemie, 2; Großes chemisches Praktikum, anorganische Abteilung, tägl.; Leitung wissenschaftlicher Arbeiten, tägl.; Kleines chemisches Praktikum, halbtägig; Übungen für Nahrungsmittelchemiker, nach Verabredung, für Mediziner (mit Stoermer), 3. — **Stoermer**: Organische Chemie, 5; Übungen in der organischen Abteilung des chemischen Laboratoriums: a) Großes chemisches Praktikum, b) wissenschaftliche Arbeiten, tägl.; Analytische Chemie, 3. — **Honcamp**: Agrikulturchemie II: Tierernährung, 2; Agrikulturchemisches Praktikum, tägl. — **Kümmell**: Chemische Verwandtschaftslehre: Chemische Statik und Kinetik, Thermochemie, 2. —

Staude: Analytische Geometrie der Ebene, 4; Analytische Mechanik, 4; Mathematisches Seminar, 2. —

Universität Straßburg.

Braun: Experimentalphysik II: Wärme, Akustik, Elektrizität, 5; Physikalische Übungen, 5 oder 10; Übersichtskursus für Mediziner, 3; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — **Cohn**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Ausgewählte Abschnitte der Elektrizitätslehre, nach Verabredung; Physikalische Übungen, 5; Übersichtskursus für Mediziner, 3; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten. — **Rohmann**: Technische Anwendungen der Elektrizität (experimentell), 2. — **Hecker**: Ausgewählte Kapitel aus der Physik des Erdkörpers, 1. —

Thiele: Allgemeine Experimentalchemie, anorganischer Teil, 5; Chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschrittene (mit Wedekind und Straus), tägl. außer Sonnabend. — **Rose**: Chemische Technologie der Metalloide, 3; Die Untersuchung und Reinigung des Wassers, 1 *g*. — **Wedekind**: Analytische Chemie I, 3; Die radioaktiven Stoffe und die Theorie des Atomzerfalls, 1; Kolloquium über neuere chemische Arbeiten (mit Weitz und Ruggli), nach Verabredung, *g*; Physikochemisches Praktikum, 4. — **Straus**: Organische Reaktionen in ihrem Zusammenhang, 4. — **Kreutz**: Zuckerindustrie und Bierbrauerei, 1. — **Ruggli**: Physikalisch-chemische Gesetze in Anwendung auf technische Probleme, 3/4; Repetitorium der organischen Chemie für Anfänger und Lehramtskandidaten, 1; Synthesen der organischen Chemie III, 1. — **Weitz**: Chemie der Komplexverbindungen, 1. — **Oesterle**:

Pharmakognosie, 4; Pharmazeutische Chemie und chemische Toxikologie II, 4; Arbeiten im Laboratorium des pharmazeutischen Instituts, tägl. außer Sonnabend; Pharmakognostisch-mikroskopische Übungen, 3; Pharmakochemisches Kolloquium, nach Verabredung *g*. —

Schur: Theoretische Mechanik, 3; Theorie der Differentialgleichungen, 2; Übungen des mathematischen Seminars, 1 1/2. — **Wellstein**: Algebra, 2. — **Epstein**: Zahlentheorie, 3. — **Bauschinger**: Sphärische Astronomie, 4; Übungen in der Sternwarte, nach Verabredung. — **Wirtz**: Geschichte der griechischen Astronomie, 1. —

Technische Hochschule Stuttgart.

v. Koch: Experimentalphysik, 4; Theoretische Physik (als Einleitung: Mathematische Ergänzung zur Experimentalphysik), 2; Physikalisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Handfertigkeitspraktikum in Physik, 2—3; Physikalisches Kolloquium, 2; Meteorologie, 1. — **Veesenmeyer**: Grundlagen der Elektrotechnik: Konstruktionen und Anlagen, 2, Übungen, 1; Elektrotechnische Konstruktionselemente, 1; Dynamobau I, Seminar, 1, Übungen, 6, II, 2; Elektrotechnische Maschinenkonstruktionen, 8; Elektrische Bahnen und Fahrzeuge, 2; Projektieren elektrischer Anlagen, 4; Übungen in elektrotechnischen Konstruktionen und Anlagen für Maschineningenieure, 4. — **Emde**: Grundlagen der Elektrotechnik: Beschreibung des elektromagnetischen Feldes, 2, Übungen, 1; Wechselstromtechnik I, 2, Übungen, 8, II, 2, Übungen 4. — **Herrmann**: Elektrische Meßinstrumente und Meßmethoden I, 1, Übungen, 8, II, 1, Übungen, 4; Schwachstromtechnik I, 2, Übungen, 4; Übungen in der drahtlosen Telegraphie, 2, 4; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. —

Gutbier: Anorganische Experimentalchemie, 4; Übungen im Laboratorium für anorganische Chemie und anorganisch-chemische Technologie, tägl. außer Sonnabend. — **Küster**: Technische Chemie, 2; Organisch-chemische Großindustrie, 2; Pharmazeutische Chemie, 2; Chemie der Nahrungsmittel, Genußmittel und Gebrauchsgegenstände, 2; Übungen im Laboratorium für organische Chemie, organisch-chemische Technologie und Pharmazie, tägl. außer Sonnabend. — **Grube**: Elektrochemie, 3; Übungen im Laboratorium für physikalische Chemie und Elektrochemie, tägl. außer Sonnabend. — **Kauffmann**: Farbenchemie, 2; Chemie der Benzolderivate, 2; Radioaktivität und Elektronik, 1. — **J. Schmidt**: Analytische Chemie, 2; Einführung in die Stöchiometrie, 1; Chemisches Seminar, 2. — **Bauer**: Stereochemie, 1; Die chemische Untersuchung des Harns, mit Übungen, 2; Spezielle organische Chemie, 2. —

Haller: Ebene und sphärische Trigonometrie, 2, Übungen, 2. — **Stübler**: Niedere Analysis, 4; Elemente der Differential- und Integralrechnung, 3, Übungen, 1. — **Kutta**: Höhere Mathematik II, 5, Übungen, 3, IV, 1, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 2. — **Wölffing**: Höhere Algebra, 3; Bestimmte Integrale, 2 *g*. — **Mehmke**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 4; Graphisches Rechnen, 1, Übungen, 2; Punktrechnung, 3, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 1. — **Kommerell**: Geometrische Transformationen, 2. — **Roth**: Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde, 4. — **Kriemler**: Technische Mechanik, 6, Übungen, 2; Graphische Dynamik, Übungen, 1; Die Theorie des Schiffes, 1. — **Heer**: Plan- und Geländezeichnen, 4; Geodätische Übungen, 4. — **v. Hammer**: Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen, 2; Praktische Geometrie: Vermessungskunde, I, 3, Übungen, 6; Grundzüge der höheren Geodäsie, 2; Barometrische Höhenmessung, 1; Kartenprojektionen für kartographische und geodätische Zwecke, 1, Übungen, 1. —

Universität Tübingen.

Paschen: Experimentalphysik: Akustik, Wärme, Magnetismus, Elektrizität, 5; Physikalische Übungen, für Anfänger, 4, für Fortgeschrittene, halbtägig; Selbständige wissenschaftliche Untersuchungen, ganztägig. —

Wislicenus: Allgemeine Chemie I: Anorganische Chemie, 5, Ergänzungen, 1; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium für Anfänger und Fortgeschrittene, tägl.: a) Analytisch-chemisches Praktikum (mit Bülow und Weinland), b) Chemisch-pharmazeutisches Praktikum (mit Weinland), c) Präparative Arbeiten (mit Kliegl), d) Physikalisch-chemische Übungen (mit Magnus), e) Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten (mit Bülow, Weinland, Kliegl, Magnus). — **Thierfelder**: Organische Chemie für Mediziner, 4; Praktisch-chemische Übungen für Anfänger I: Qualitative Analyse, 6, II: Quantitative Analyse und physiologisch-chemische Übungen, 6; Physiologisch-chemisches Praktikum, 2; Physiologisch-chemische Arbeiten für Geübtere, tägl. — **Bülow**: Analytische Chemie I mit besonderer Berücksichtigung der praktischen Arbeiten im Chemischen Laboratorium, 3; Die Chemie in ihren Beziehungen zum Kriege, 1. — **Weinland**: Chemie der Arzneistoffe, anorganischer Teil, 2; Maßanalyse, 1; Chemie der Nahrungsmittel, 1; Nachweis von Giften für gerichtliche Zwecke, 1; Vergleichung der Elemente an der Hand des periodischen Systems, 1. — **Magnus**: Präparative Elektrochemie, 1. — **Brigl**: Chemische Zusammensetzung einiger Naturfarbstoffe, 1. — **Krais**: Die Stoffe und Waren des Welthandels, ihre Natur, Gewinnung und wirtschaftliche Bedeutung, 2. —

v. Brill: Einführung in die höhere Mathematik, 4; Theorie der algebraischen Kurven, 3; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **Maurer**: Höhere Algebra, 2; Höhere Analysis II, 4; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **König**: Niedere Analysis, 4; Elliptische Funktionen 2; Übungen im mathematischen Seminar, 1. — **Happel**: Darstellende Geometrie II, 2, Übungen, 14tägig, 2; Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen, 2, Übungen, 1. — **Rosenberg**: Populäre Astronomie, 2. —

Universität Wien.

Lecher: Experimentalphysik für Mediziner und Lehramtskandidaten, 5; Demonstrationspraktikum, 1; Physikalische Demonstrationen für Mittelschulen (Physikalisches Praktikum), 6; Anleitung für wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Franz Exner**: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, Chemiker und Naturhistoriker, 6; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. — **Meyer**: Radioaktivität, 3; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (mit Ehrenhaft), 1 *g*. — **Ehrenhaft**: Grundzüge der Mechanik und kinetischen Theorie der Materie, 5; Die Frage der Konstitution der Elektrizität, 1. — **Haschek**: Interferenz- und Beugungserscheinungen, 2. — **Mache**: Theorie der spezifischen Wärme, 1. — **Hess**: Besprechung neuer luftelektrischer Arbeiten, 1. — **Kohlrausch**: Röntgen- und γ-Strahlen, 1. — **Sirk**: Einführung in die kinetische Gastheorie, 2, Übungen, 1. — **Thirring**: Kristallphysik, 3. — **Flamm**: Relativitätstheorie (spezielle und verallgemeinerte), 2. — **Felix Exner**: Allgemeine Meteorologie, 3. — **Defant**: Thermodynamik der Atmosphäre, 1. — **Hinterberger**: Photographisches Praktikum, 12; Praktischer Kurs über Mikrophotographie, 20. —

Wegscheider: Chemische Übungen für Philosophen, tägl. außer Sonnabend; Übungen in der chemischen Analyse für Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend; Arbeiten im I. chemischen Laboratorium für Vorgeschrittene, tägl. — **Schlenk**: Experimentalchemie I: Anorganische Chemie für Philosophen, Mediziner und Pharmazeuten, 5; Chemische Übungen für Anfänger und Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, tägl. außer Sonnabend; Ausgewählte Abschnitte aus der neueren organisch-chemischen Literatur, 1. — **Herzig**: Chemie der Benzolderivate, 5; Übungen aus pharmazeutischer Chemie für Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend. — **Pollak**: Chemische Technologie: Organische Farbstoffe und ihre Anwendung, 3. — **Franke**: Anleitung zur Ausführung chemisch-wissenschaftlicher Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Analytische Chemie, I, 2; Übungen in der Aus-

führung chemischer Schulversuche, 2. — **Schacherl:** Ausgewählte Kapitel der Chemie und Technologie der Nahrungsmittel, 2. — **Vortmann:** Übungen in gerichtlich-chemischer Analyse für Kandidaten der Lebensmittelexpertise, 3 halbe Tage. — **M. Kohn:** Die synthetischen Methoden der organischen Chemie, 1. — **Abel:** Chemische Thermodynamik, 2. — **Zerner:** Kohlehydrate, 1. —

v. Escherich: Differential- und Integralrechnung, 5, Übungen (mit Groß), 1; Proseminar für Mathematik, 1 *g*; Seminar für Mathematik, 2 *g*; Elementarmathematik, 1 *g*. — **Wirtinger:** Funktionentheorie, 5; Elementarmathematik mit Übungen, 1 *g*; Mathematisches Seminar, 2 *g*; Mathematisches Proseminar, 1 *g*. — **Furtwängler:** Algebra, 5; Elementarmathematik, 1 *g*; Proseminar, 1 *g*; Seminar, 2 *g*. — **G. Kohn:** Analytische Geometrie, 4, Übungen, 1 *g*; Differentialgeometrie II, 2. — **Tauber:** Versicherungsmathematik I: Private und öffentliche Versicherung, 4. — **Blaschke:** Die Mathematik der öffentlichen Versicherung, 3; Mathematische Statistik I, 3. — **Hanni:** Eulersche Integrale, 2. — **v. Schrutka:** Vektorenrechnung mit Anwendungen auf Geometrie und Physik, 3. — **Roth:** Nichteuklidische Geometrie, 2. — **Groß:** Kurs am mathematischen Seminar: Darstellende Geometrie, 3 *g*; Invariantentheorie, 3. — **Radon:** Kugelfunktionen, 2. — **v. Hepperger:** Bahnbestimmung von Doppelsternen, 2; Bestimmung des Radiationspunktes und der Bahn eines Sternschnuppenschwarmes, 2. — **Oppenheim:** Mechanik des Himmels, neuere Methoden, 3: Das allgemeine Rotationsproblem in der Astronomie, 2. — **Schram:** Kalendariographie und Zeitrechnung verschiedener Völker, mit Rücksicht auf Historiker, 1. —

Technische Hochschule Wien.

Jäger: Physik für Bauingenieure, 3; Ausgewählte Kapitel der Physik, 2; Optik, für Geodäten, 2. — **Mache:** Physik für Maschinenbauer und technische Chemiker: Wärmelehre, Optik und Akustik, Elektrizitätslehre, 5. — **Flamm:** Die Feinstruktur der Materie, 1. — **Liznar:** Meteorologie und die wichtigsten Lehren der Klimatologie für Ingenieure, 2. — **Reithoffer:** Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2; Elektrische Schwingungen und Wellen, 2. — **Sahulka:** Elektrotechnik, Praktische Übungen I (mit Reithoffer), 4. — **Stehr:** Dynamobau, $5^1/_2$, Konstruktionsübungen, 6. — **R. Moser:** Kommutatormotoren für Ein- und Mehrphasen-Wechselstrom, 2. — **N. N.:** Elektrotechnik: Praktische Übungen II, 4. — **Hochenegg:** Elektrische Arbeitsübertragung, mit besonderer Berücksichtigung der elektrischen Bahnen, 3; Bau und Betrieb elektrischer Anlagen einschließlich Stromverteilung, 2, Übungen, 4. — **Jüllig:** Elektrische Telegraphie und Eisenbahn-Signalwesen, 2. — **Zelisko:** Die Fernsprechtechnik, 2; Die Telegraphentechnik, 1. —

Bamberger: Allgemeine Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 6; Übungen im Laboratorium der allgemeinen Experimentalchemie, tägl. — **Suida:** Allgemeine Experimentalchemie II: Organische Chemie II (Die wichtigsten Kapitel aus der Chemie der aromatischen Verbindungen), 4; Chemische Technologie organischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend. — **Vortmann:** Analytische Chemie, 4, Übungen, tägl. — **L. Moser:** Qualitative chemische Analyse, 2; Repetitorium der anorganischen Experimentalchemie, 2. — **Ulzer:** Technische Analyse organischer Stoffe, 2. — **Weißenberger:** Anorganisch-technische Arbeitsmethoden, 1, Übungen, 2. — **v. Jüptner:** Theoretische und physikalische Chemie II, 2, Übungen, 4; Chemische Technologie anorganischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend; Technische Feuerungen, 5. — **Praetorius:** Physikalisch-chemisches Messen und Rechnen, 1. — **Kossowicz:** Mykologie der Nahrungsmittelgewerbe, 1. — **Böck:** Chemie der synthetischen organischen Arzneimittel, 2. — **Klimont:** Chemie der hydroaromatischen Verbindungen und Terpene, 2. — **Paweck:** Technische Elektrochemie, 3. — **Eder:** Photochemie und angewandte Photographie mit besonderer Berücksichtigung der Zwecke des Technikers, 1; Photographisches Praktikum, 4. — **Abel:** Phasenlehre, 2. — **Strache:** Beleuchtungsindustrie, 2; Übungen im Laboratorium der Versuchsanstalt für Gasbeleuchtung, Brennstoffe und Feuerungsanlagen, 4. — **Oettinger:** Fette, Öle und Wachse, $1^1/_2$. — **Erban:** Chemische Textilindustrie I, 2. — **Ruß:** Neuere Verfahren der anorganisch-chemischen Großindustrie, $1^1/_2$. —

Zsigmondy: Mathematik I, 5, Korrepetitionen, 2. — **Rothe:** Mathematik I, 5; Mathematische Einführung in die analytische Mechanik, 2. — **Czuber:** Mathematik II. 4; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. — **Radon:** Elemente der höheren Mathematik, 4; Enzyklopädie der Mathematik, 3; Einführung in die Funktionentheorie: Analysis der komplexen Veränderlichen, 2. — **Tauber:** Versicherungsmathematik I, 4, II, 2. — **Förster:** Politische Arithmetik, 2. — **Blaschke:** Einführung in die mathematische Statistik, 3; Mathematik der öffentlichen Versicherung, 3. — **Müller:** Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen, 5, Konstruktionsübungen, 6; Zyklographie, 2, Konstruktionsübungen, 2; Seminar für darstellende Geometrie, 2. — **Schmid:** Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen 4, Konstruktionsübungen, 6; Projektive Geometrie I, 3, Konstruktionsübungen, 2. — **Danzer:** Geometrische Konstruktionen, 2. — **Wieghardt:** Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, 6, Übungen, $1^1/_2$. — **Jung:** Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, 5, Übungen, 2. — **Kirsch:** Mechanik II: Elastizitäts- und Festigkeitslehre, 5, Übungen, 2. — **Girtler:** Enzyklopädie der Mechanik, 5. — **Fillunger:** Analytische Mechanik des elastischen festen Körpers, $1^1/_2$. — **Wolf:** Einführung in die theoretische Elastizitätslehre, 2. — **Leon:** Die Kerbfrage in Theorie und Praxis, 1; Ausgewählte Kapitel der Festigkeitslehre und Materialprüfung, $1^1/_2$. — **Pollack:** Elemente der niederen Geodäsie, 4. — **Dolezal:** Niedere Geodäsie, 6, Übungen I: Instrumental- und Vermessungsübungen, 3, Ausgewählte Kapitel der Niederen Geodäsie, $1^1/_2$; Geodätisches Seminar, 2; Photographische Meßkunst: Photogrammetrie, $1^1/_2$, Übungen, 2. — **Dokulil:** Übungen zur Niederen Geodäsie II: Kartierungsübungen, 3, für Geodäten: Zimmerübungen, 5; Trigonometrische Triangulierung und Höhenmessung, 4; 5 Tage; Geodätisches Zeichnen: Situationszeichnen, 4; Technik des Katasterwesens, 2, Übungen, $2^1/_2$. — **Schumann:** Höhere Geodäsie, 2; Ausgewählte Kapitel aus Höherer Geodäsie, 1; Übungen im Beobachten und Rechnen, 3. —

Universität Würzburg.

Wien: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Magnetismus, Elektrostatik, 5; Praktische Übungen, 4 und 8, für Pharmazeuten, Mediziner und Zahnärzte, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. —

N. N.: Experimentalchemie I: Unorganische Chemie, 5; Analytisch-chemisches Praktikum (mit Emmert), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner und Zahnärzte (mit Emmert), 6; Vollpraktikum für präparative Arbeiten, tägl.; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen (mit Emmert und v. Halban), tägl.; Kolloquium (mit Emmert und v. Halban), 14tägig, $1^1/_2$ *g*. — **Heiduschka:** Chemische Technologie II, 4; Pharmazeutische Präparatenkunde I: Anorganische und galenische Präparate, 3; Nahrungsmittelchemie II, mit Exkursionen, 2; Gerichtliche Chemie I: Toxikologische Chemie, 2; Harnanalyse, mit Übungen, 2; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen in allen Richtungen der angewandten Chemie, einschließlich technisch-chemischer, gerichtlich-chemischer und nahrungsmittel-chemischer Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl. außer Sonnabend. — **Pauly:** Benzolchemie, 2; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl. — **Emmert:** Analytische Chemie: Experimentalvorlesung zur Ergänzung des analytisch-chemischen Praktikums, 3. —

Rost: Differentialrechnung mit Einleitung in die

höhere Analysis, 4, Übungen, 2 *g*; Analytische Mechanik I, 4. — **v. Weber**: Analytische Geometrie der Ebene, 4, Übungen, 1 *g*; Funktionentheorie, 4. — **Hilb**: Ausgewählte Kapitel aus der Stereometrie und Trigonometrie, 4. —

Universität Zürich.

Meyer: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Ausgewählte Kapitel der Physik, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3½, für Vorgerücktere, halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Ausführung selbständiger wissenschaftlicher Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, *g*; Die physikalischen Grundlagen der Musik, mit Experimenten, 1. — **Greinacher**: Radiologie I: Die elektrischen Ströme in Gasen, mit Experimenten, 1; Radiologisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Mediziner, 4. — **Ratnowsky**: Theoretische Physik I: Mechanik I, 4, Übungen, 1; Elektronentheorie, 1. — **Wolfke**: Über den inneren Bau der Atome (ohne höhere Mathematik), 1; Einführung in die kinetische Theorie der Gase, 2. —

Werner: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisch-analytisches Praktikum für Chemiker, tägl.; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere: Präparative Arbeiten, Ausführung selbständiger Arbeiten, tägl.; Chemisches Halbpraktikum für Naturwissenschaftler, halbtägig. — **Abeljanz**: Qualitative chemische Analyse, 2; Anleitung zu chemischen Arbeiten im Laboratorium für Mediziner, 1; Chemisches Kolloquium, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Mediziner und Veterinäre, 3 Tage, für Naturwissenschaftler, 3 Tage, für Lehramtskandidaten, 6; Übungen im Untersuchen von Nahrungs- und Genußmitteln, 4. — **Dubsky**: Aromatische Chemie I, 3, III: Speziell Farbstoffe, 1; Heterozyklische Verbindungen, speziell Alkaloide, 2. — **Lifschitz**: Physikalische Chemie III: Phasenregel und Verteilungssatz, 2; Kolloidchemie, 2; Neuere Theorien der organischen Chemie, 1. —

Fueter: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 4, Übungen, 1; Funktionentheorie, 4; Mathematisches Seminar (mit Speiser), 1. — **Speiser**: Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 1; Synthetische Geometrie, 3; Integralbegriff, 1. — **Bernays**: Theorie der trigonometrischen Reihen, 3. — **Wolfer**: Einleitung in die Astronomie, 3, Übungen, 2; Theorie der Finsternisse, 2. —

Technische Hochschule Zürich.

Weiß: Physik, 4, Repetitorium, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schweitzer), 4 und 8; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalischen Institut, 8, 12, 24. — **Schweitzer**: Physik I, 3, Repetitorium, 1; Optik, 2; Experimentalphysik II, 4, Repetitorium, 1. — **Wolfke**: Einführung in die kinetische Theorie der Gase, 2; Über den inneren Bau der Atome, 1. — **Piccard**: Magnetismus, 1 *g*. — **Brentano**: Neuere Strahlungen, speziell Röntgenstrahlen, 1; Einführung in neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre, 1. — **Barbieri**: Photographie I, 2 *g*; Photographisches Praktikum, 2; Militärphotographische Übungen, 3. — **Kuhlmann**: Theoretische Elektrotechnik II, 4, Repetitorium, 1; Elektrotechnisches Laboratorium Ia, 8, IIb, 4 und 8; Theoretische Elektrotechnik IV, 4; Elektrotechnische Konstruktionsübungen: Wechselstrom, 6. — **Tobler**: Elektrische Signalapparate für Eisenbahnen, 2; Schwachstromtechnik I, 1. — **Farny**: Elektrische Maschinen I: Gleichstrom, 3 *g*, Repetitorium, 1; Wechselstrom-Kommutatormotoren, 2 *g*. — **Korda**: Drahtlose Telegraphie und Hochfrequenzmaschinen, 1; Die Elektrizität im Kriege: Kriegselektrotechnik, 1. — **Wyßling**: Elektrische Anlagen I, 3, Übungen, 3. — **Wirz**: Elektrische Tarifapparate: Theorie und Konstruktion der Registrierinstrumente und Zähler für Gleich-, Wechsel- und Drehstrom, 1—2. —

Winterstein: Anorganische Chemie, 3, Repetitorium, 1; Chemie der Alkaloide und ihre Wirkungen, 1; Agrikulturchemisches Praktikum, 3, 16, für Vorgerücktere, tägl.; Anleitung zu den Übungen, 1; Physiologisch-chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **F. P. Treadwell**: Analytische Chemie I, 2, Repetitorium, 1; Gasanalyse, mit Übungen, 1; Chemie, 2, Repetitorium, 1; Analytisches Praktikum, 20, 16, 10, für Vorgerücktere tägl.; Chemisches Praktikum, 24. — **Baur**: Physikalische Chemie II, 2, Repetitorium, 1; Allgemeine Elektrochemie, 2, Repetitorium, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum, 8; Elektrochemisches Praktikum, 4, für Elektrochemiker, 8; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Laboratorium für Vorgerücktere, tägl. — **Boßhard**: Anorganische chemische Technologie I: Wasser, Salze, Säuren, 4, Repetitorium, 1; Chemische Technologie der Wärme und der Brennstoffe, 2, Repetitorium, 1; Metallurgie, 2, Repetitorium, 1; Technisch-chemisches Praktikum, 16, 24, für Vorgerücktere tägl. — **Eder**: Pharmakognosie I, 2; Pharmazeutische Chemie I, 3; Lebensmittelanalyse, 1, Übungen, 3; Technische Mikroskopierübungen II: Genußmittel und Gewürze, 3; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, 12; Pharmakognostisch-mikroskopischer Kurs, 3; Pharmakognostische und pharmazeutisch-chemische Arbeiten für Vorgerücktere, tägl.; Synthetische Arzneimittel, 1. — **Fierz**: Organische Technologie I: Gespinstfasern, Bleicherei, Färberei, 3, Repetitorium, 1, II: Teerprodukte, Fette, Öle, natürliche Kohlenwasserstoffe, 1, Repetitorium, 1; Technisch-chemisches Praktikum, 16, 24; Chemisches Laboratorium für Vorgerücktere, tägl.; Farbenchemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Mißlin**: Technologie der Azofarbstoffe mit Berücksichtigung der Zwischenprodukte, 1 *g*. — **Ott**: Die Leuchtgasindustrie, 1 *g*. — **Ruegger**: Transportmaschinen und Transportanlagen für chemisch-technische Betriebe, 1 *g*. — **Staudinger**: Anorganische Chemie, 6, Repetitorium, 1: Organische Chemie, spezieller Teil I, 2, Repetitorium, 1; Chemisches Praktikum, 24, 10, 16, für Vorgerücktere, tägl. — **W. D. Treadwell**: Ausgewählte Kapitel der neueren Atomistik, 1. — **Wiegner**: Agrikulturchemie: Bodenkunde und allgemeine Düngerlehre, 3; Landwirtschaftlich-chemische Technologie: Zucker- und Spiritusfabrikation, 2; Chemie der Milch und Milchprodukte, 1; Anleitung zu den Übungen im agrikulturchemischen Laboratorium, 1; Agrikultnrchemisches Praktikum, 8, 16, für Vorgerücktere tägl.; Kolloidchemie, 2; Chemie der Futtermittel II, 1. —

Hurwitz: Algebraische Gleichungen, 4; Mathematisches Seminar (mit Weyl), 2. — **Amberg**: Mathematik der Personenversicherung, 2 *g*; Mathematische Probleme der Sozialversicherung, 1 *g*. — **Baeschlin**: Vermessungskunde I und II, 6, Repetitorium, 1, III, 3; Ausgewählte Kapitel aus der Vermessungskunde, 3, Repetitorium, 1, Übungen, 2; Geodätisches Praktikum, 2; Höhere Geodäsie, 3, Repetitorium, 1; Diplomarbeiten. — **Beyel**: Rechenschieber mit Übungen, 1; Darstellende Geometrie, 2; Projektive Geometrie, 1. — **Brandenberger**: Einführung in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht I, 2 *g*. — **Burger**: Graphische Vervielfältigung, 2 *g*. — **Franel**: Höhere Mathematik I, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2, III, 3, Übungen, 1. — **Gonseth**: Birationale Transformationen, 2; Graphisches Rechnen II, 1. — **Großmann**: Darstellende Geometrie, 4, Repetitorium, 1, Übungen, 4; Analytische Geometrie, 2, Übungen, 2. — **Hirsch**: Höhere Mathematik I, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2, III, 3, Übungen, 1. — **Keller**: Mathematik, 4 *g*; Ebene und räumliche kollineare Systeme mit Anwendung auf Kurven und Flächen II. Grades (konstruktiv), 2. — **Kienast**: Besselsche Funktionen, 2. — **Kollros**: Darstellende Geometrie, 4, Repetitorium, 1, Übungen, 4; Geometrie der Lage, 3, Übungen, 1. — **Kraft**: Die Grundkräfte der Welt, 1; Geometrische Analysis, 3; Mechanik der deformierbaren Systems mittelst der geometrischen Analysis, 3. — **Meißner**: Mechanik II, 4, Repetitorium, 1, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Mechanik, 2. — **Polya**: Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, 2 *g*; Mathematische Spiele, 1 *g*. — **Rudio**: Höhere Mathematik, 5, Übungen, 2. — **Weyl**: Ausgewählte Kapitel der Geometrie, 4; Logische Grundlagen der Mathematik, 1. — **Wolfer**: Einleitung in die Astronomie, 3, Übungen, 2; Theorie der Finsternisse, 2. —

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 22. 15. November 1917. 18. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 24 am 22. November 1917.

INHALT:

Zum Andenken an Marian von Smoluchowski.

In Krakau verschied am 5. September d. J. nach kurzem Krankenlager an der Ruhr M. v. Smoluchowski. Wer seine glänzende wissenschaftliche Tätigkeit verfolgt hat, sah in ihm den eigentlichen Erben des Boltzmannschen Geistes der Naturbetrachtung. Mit dem jüngsten Aufschwunge der Atomistik wird sein Name für alle Zeiten verknüpft sein. Aus der Fülle erfolgreicher Arbeit ist er herausgerissen; niemand wird seine geistvolle Art ersetzen können.



M. Smoluchowski

Marian Ritter von Smolan-Smoluchowski wurde am 28. Mai 1872 in Vorder-Brühl bei Wien geboren als Sohn eines hohen Beamten in der Kanzlei des Kaisers Franz Joseph. In Wien besuchte er das Gymnasium und 1890—1894 die Universität, die ihn 1895 promovierte. Seine Lehrer waren Stefan und Exner. Boltzmann hat nur durch seine Schriften auf ihn gewirkt; eine nähere persönliche Berührung hat merkwürdigerweise nie stattgefunden. Enge Freundschaft verband ihn mit Hasenöhrl, der als unmittelbares Opfer des Krieges auf der Hochfläche von Lafraun 1915 gefallen ist; nicht nur wissenschaftliche Interessen, auch gleiche Liebe und Empfindung für Musik und treue Kameradschaft bei Bergtouren und beim Skisport führte beide zusammen.

Die Jahre nach seiner Promotion arbeitete Smoluchowski im Auslande: 1895/6 in Paris unter Lippmann, 1896/7 in Glasgow unter Lord Kelvin, 1897 in Berlin unter Warburg. Von seiner Lehrzeit in Glasgow zeugen einige Arbeiten (5), (6), (7)[1],

1) Die Zahlen weisen auf das nachfolgende Verzeichnis hin.

die er in Gemeinschaft mit Lord Kelvin und Dr. Beattie herausgegeben hat, über die Leitfähigkeit in Gasen, die durch Röntgen- und Uranstrahlen hervorgerufen wird, und über das elektrische Gleichgewicht zwischen Uran und einem bestrahlten Metall. Aus seiner Pariser Zeit stammt eine theoretische Arbeit über Wärmestrahlung im Anschluß an Clausius und eine gleichgerichtete experimentelle Arbeit (3), (4).

Nach der Heimat zurückgekehrt, habilitierte er sich 1898 für Physik in Wien, siedelte aber bald nach Lemberg über, wo er 1900 Extraordinarius, 1903 Ordinarius für theoretische Physik wurde. Mannigfache Ehrenstellungen sowie die Verleihung des Haitinger-Preises der Wiener Akademie legen Zeugnis ab von der Anerkennung, welche die menschlichen und wissenschaftlichen Eigenschaften des jungen Gelehrten allseitig fanden. In der Tat konnte sich schwerlich jemand, der ihm näher treten durfte, dem Zauber seines vornehmen und ästhetisch verfeinerten Wesens entziehen. Von künstlerischem Reiz war auch seine Darstellung in Schrift und Wort; den Teilnehmern an der Naturforscher-Gesellschaft in Münster 1912 und an dem Wolfskehl-Kongresse in Göttingen 1913 sind seine formvollendeten Vorträge in frischem Gedächtnis. 1913 wurde er zum Professor der Experimentalphysik als Nachfolger Witkowskis nach Krakau berufen; er starb als Rektor dieser Universität. Smoluchowski war Mitglied der Krakauer Akademie. Die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften erwog seine Ernennung zum korrespondierenden Mitgliede, gerade als die Nachricht von seinem Tode eintraf.

So haben wir das Bild eines durch äußere Umstände in jeder Weise begünstigten, harmonischen Gelehrtenlebens vor uns, reich an Erfolg und köstlich durch rastlose Arbeit; um so tiefer fühlen wir das jähe Ende dieses Lebens, das der Wissenschaft noch so viel versprach.

Die wissenschaftliche Eigenart Smoluchowskis tritt in völliger Reife bereits hervor in der Arbeit vom Jahre 1904: „Über Unregelmäßigkeiten in der Verteilung von Gasmolekülen und deren Einfluß auf Entropie und Zustandsgleichung" (17), welche ihren würdigen Platz in der Boltzmann-Festschrift gefunden hat. Die Abweichungen vom Mittelwerte, die Schwankungserscheinungen, welche seitdem das Interesse der Physiker in steigendem Maße auf sich gezogen haben, werden hier an dem einfachsten Beispiele, den örtlichen Dichteschwankungen der idealen Gase, vorbildlich behandelt. Durch einfachste Abzählungsmethoden wird gezeigt, daß die Dichte eines Gases nicht überall dieselbe sein kann, daß vielmehr für jedes Teilvolumen Abweichungen vom Durchschnittswerte mit endlicher, durch das Gaußsche Fehlergesetz bestimmter Wahrscheinlichkeit vorkommen. Auch die Entartung dieses Gesetzes für den Fall eines sehr kleinen Teilvolumens, auf welches im Durchschnitt nur noch eine mäßige Zahl von Gasmolekeln entfällt, wird entwickelt — eine Entartung des Wahrscheinlichkeitsgesetzes, die später für die Deutung der Beobachtungen von Svedberg (44) wichtig werden sollte. Was Smoluchowski hier über den Entropiebegriff sagt, über mikroskopische und makroskopische Energie und über die Grenzen des zweiten Hauptsatzes, liest sich wie ein kurzes Programm seiner späteren umfassenden Ausführungen über denselben Gegenstand. Auch weist er bereits den Weg, wie die Dichteschwankungen physikalisch bestätigt werden können durch ihren Einfluß auf die Zustandsgleichung der wirklichen Gase.

Bald darauf fand er einen viel sichereren Weg zur Bestätigung der Dichteschwankungen durch die Opaleszenz der Gase in der Nähe ihres kritischen Punktes. Indem bei dieser Me-

thode die genauen Hilfsmittel der Optik in den Dienst der Atomistik gestellt werden, gelingt es, die Dichteschwankungen dem Auge unmittelbar sichtbar zu machen und quantitativ zu verfolgen. In seiner ursprünglichen Arbeit (20) verbindet Smoluchowski seine Theorie der Dichteschwankungen mit der berühmten Rayleighschen Formel für das Himmelsblau und kann dadurch die Wahrnehmungen früherer Beobachter über dieses Phänomen bereits in allen wesentlichen Zügen erklären. Auch weist er auf das gleiche Phänomen im kritischen Punkte zweier Lösungen hin. Besondere Annahmen über Kapillarwirkungen im kritischen Zustande, wie sie früher vielfach vorgeschlagen waren, erklärt er als überflüssig und grundlos angesichts der Selbstverständlichkeit, mit der die fraglichen Erscheinungen aus der kinetischen Theorie folgen. Später (31), (32) übernimmt er eine von Einstein herrührende Verbesserung seiner Berechnung der optischen Trübungen, welche die Rayleighsche Hilfsrechnung entbehrlich macht. In dieser verbesserten Form gestattet die Theorie den numerischen Vergleich mit Beobachtungen von Kamerlingh-Onnes und Keesom und findet ihre volle Bestätigung. Dichteschwankungen, Opaleszenz und Brownsche Bewegung sind die drei hervorstechenden Leistungen aus Smoluchowskis früherer Zeit. Die Verleihung des obengenannten Haitinger-Preises wurde ausdrücklich mit diesen drei Leistungen begründet.

Das Rätsel der Brownschen Molekularbewegung hat Smoluchowski im Jahre 1906 gelöst (19), unabhängig von und gleichzeitig mit Einstein. Daß Boltzmann, der doch zu alle dem die Grundlagen gelegt hatte, diese sinnfälligste Folgerung seiner kinetischen Prinzipien nicht selbst gezogen hat, ist, wie Einstein gelegentlich gesprächsweise äußerte, eigentlich zu verwundern. Es ist eine tragische Fügung, daß erst im Todesjahre Boltzmanns diejenige Bestätigung der Atomistik reifte, die alle Zweifler und Gegner verstummen machte. Die Smoluchowskische und die Einsteinsche Ableitung haben jede ihre besonderen Vorzüge. Smoluchowski läßt uns tiefer in den Mechanismus der Zusammenstöße hineinschauen; die Abhängigkeit von der Temperatur, der Teilchengröße, der Viskosität des Suspensionsmittels wird zuverlässig abgeleitet; nur der Zahlenkoeffizient bleibt bei der Schwierigkeit der Mittelungen unsicher. Einstein bemächtigt sich mit kühnem Griff sogleich des Endresultates, ohne sich mit den Einzelheiten des Vorganges aufhalten zu müssen; der Zahlenkoeffizient Einsteins, um 27/64 von dem Smoluchowskis verschieden, steht außer Zweifel. Die ganze Theorie ist seitdem, insbesondere durch Perrin, auf das schönste und allseitigste bestätigt worden. Smoluchowski ist auf dieses Thema wiederholt zurückgekommen, sowohl nach der praktischen Seite hin, mit Rücksicht auf die Ehrenhaftschen, Millikanschen und Brillouinschen Messungen (29), (41), (43) und die Gültigkeitsgrenzen des Stokesschen Gesetzes (33) als auch unter dem Gesichtspunkte, den Gegenstand unter allgemeine statistische Prinzipien einzuordnen (36), (47), (51).

Ganz in Boltzmannscher Richtung liegen die älteren Arbeiten Smoluchowskis über Wärmeleitung in verdünnten Gasen (8), (9), (10), (11), (13), (28). Die Erklärung des Temperatursprunges an der Gefäßwand und seine Verknüpfung mit der freien Weglänge sind zu einem gesicherten Besitz der Wissenschaft geworden. An diese Gedankengänge schließt eine größere Experimentaluntersuchung über die Wärmeleitung in pulverförmigen Körpern an (23), (26). Überhaupt liebte es Smoluchowski und hatte dazu die erforderliche Durchbildung und Spann-

kraft, zwischen theoretischer und experimenteller Arbeit abzuwechseln. Eine vielversprechende experimentelle Arbeit aus letzter Zeit liegt als Voranzeige vor (50): Experimentelle Bestätigung der Theorie des Rayleighschen Himmelsblaus, in der insbesondere die Abhängigkeit der Menge und Polarisation des zerstreuten Lichtes vom Brechungsindex des zerstreuenden Gases untersucht wird, und zwar bei völliger Staubfreiheit desselben und unter normaler Temperatur und Dichte. Wenn diese Voranzeige auch noch keine endgültigen Zahlen gibt, so zeigt sie doch, wie ausgedehnt das Opaleszenzphänomen in der Natur auftritt und wie sicher der zu seiner Erklärung ersonnene Gedankenkreis arbeitet.

Ebenfalls teils theoretisch teils experimentell hat er das geologische Problem der Gebirgsfaltung angegriffen (21), (22), dem er wohl durch seine Liebe zum Bergsteigen zugeführt wurde. Er behandelt es, in Analogie mit der Theorie der Knickung, als Gleichgewicht einer schwimmenden elastischen Platte unter dem Einfluß gleichförmig verteilter Randdrucke, wobei die instabile ebene Form in die stabile gefaltete Form übergeht. Im Modellversuche benutzte er Gelatineplatten auf Quecksilber, Goldplättchen auf Wasser usw. Charakteristisch ist es für den konsequenten Atomistiker, daß er alsbald übergeht zu dünnsten Schellackhäutchen, deren veränderliche Dicke er aus den Farben Newtonscher Ringe entnimmt und somit — von den Gebirgsfalten ausgehend — an der Grenze der molekularen Wirkungssphäre endigt, die er dann hypothetisch aus der Faltenwellenlänge berechnet. Auch über die Gletschererosion (24) hat er nachgedacht.

Außer für die theoretische und prinzipielle Gastheorie interessierte sich Smoluchowski auch für die praktische Gastheorie, die Aerodynamik, deren Gegensätzlichkeit gegenüber der Hydrodynamik er in Abhandlungen über die Methode der dynamischen Ähnlichkeit (15), (16) schön herausgearbeitet hat. Die Komplikation der aerodynamischen Differentialgleichungen, in denen die Temperatur als wesentliche Variable mitzuführen ist, steht ihrer Integration im Wege und verspricht nur Ähnlichkeitsbetrachtungen Erfolg, wie sie für dieses Gebiet von Helmholtz erdacht, aber nicht durchweg glücklich gehandhabt worden sind (man vgl. die diesbezügliche nach Ton und Inhalt vortreffliche Kritik bei Smoluchowski). Solche Ähnlichkeitsbetrachtungen werden nun l. c. auf viele aerodynamische Probleme angewandt und zur Erklärung vorhandener Beobachtungen verwertet.

In den beiden letzten Jahren hatte sich Smoluchowski mit größter Energie der Physik der Kolloide zugewandt. Hier konnte er seine statistische Denkweise erfolgreichst betätigen und unter vorsichtiger Anwendung neuer Hypothesen — elektrische Doppelschichten, Zähigkeitswiderstand bei der Koagulation — bis zu den Einzelheiten der Beobachtung fortschreiten. Die weitschichtige Literatur der Kolloidchemie beherrschte er vollkommen; außerdem stand er in engster wissenschaftlicher Verbindung mit Zsigmondy, der seine Messungen den Smoluchowskischen Fragestellungen anpaßte. Seine Arbeiten, die hauptsächlich in die Kriegszeit fielen (40), (44), (48), (49), (52), ließen eine rasche Förderung dieses schwierigen Gebietes hoffen.

Den ganzen Smoluchowski aber haben wir in den zusammenfassenden Vorträgen (34), (37), (51), in denen von hoher Warte aus die Gesamtheit der Molekularphänomene, insbesondere der Schwankungserscheinungen überblickt wird und als letztes Ziel die Gültigkeitsgrenzen des zweiten Hauptsatzes ins Auge gefaßt werden. Das Schulbeispiel für diese Be-

trachtungen ist auch hier die Brownsche Bewegung, welche sich der makroskopischen Betrachtung als Diffusion darstellt. „Es ist ganz falsch, wenn manche Forscher meinen, daß dabei noch ein spezieller, Richtung gebender Einfluß — etwa das osmotische Druckgefälle — tätig sei. Der fiktive Begriff des osmotischen Druckes vertritt die Betrachtung der „verborgenen" Molekularbewegung und ist mit derselben vollkommen äquivalent, darf aber mit ihr nicht verquickt werden. Entweder denke man sich die Substanzteilchen passiv durch den osmotischen Druck getrieben, ohne die Brownsche Bewegung zu berücksichtigen, oder man ziehe die letztere in Rechnung, ohne den fiktiven osmotischen Druck einzuführen". Diese Worte bilden eines von vielen Beispielen dafür, mit welcher Klarheit die verschiedenen Methoden dem statistisch geschulten Auge Smoluchowskis erschienen; daß sie uns heute mehr und mehr selbstverständlich erscheinen, ist nicht zum wenigsten sein Verdienst. Außer der Brownschen Bewegung werden alle erreichbaren Schwankungserscheinungen herangezogen, aus der Radioaktivität, der Kolloidchemie, der Elektrochemie bis hin zu eigens erdachten Mechanismen mit Quarzfaden, Spiegel, Sperrklinke und Ventil, wobei stets auch die Grenze der experimentellen Ausführbarkeit überschlagen wird. Mit Rücksicht auf den zweiten Hauptsatz ist das Ergebnis dieses, daß Arbeit tatsächlich auf Kosten von Wärme niederer Temperatur erhalten werden kann, daß Wärme tatsächlich von selbst von niederer zu höherer Temperatur übergehen kann, daß die scheinbar irreversibeln Prozesse tatsächlich reversibel sind. Freilich wird nutzbare Arbeit nicht fortgesetzt aus Wärme gewonnen und die Zeitdauer der Wiederkehr wächst bei einem sogenannten irreversibeln Prozeß ins Unendliche, je mehr man den Bereich der mittleren Schwankung überschreiten will.

Bekanntlich hat Planck den zweiten Hauptsatz als strenges Naturgesetz trotzalledem retten wollen (in einem Leidener Vortrage), indem er ihn etwas anders faßte. Aber Planck ist im Grunde seines Herzens Thermodynamiker; wenn er auch die Statistik durch seine Quantenreform mehr als jeder andere gefördert hat, so ist sie doch nicht die Grundlage seiner Denkweise. Für Smoluchowski aber war die Statistik Lebensluft; ihm stellt sich daher der zweite Hauptsatz als ein Annäherungsgesetz dar, das die Natur in ihren feinsten Äußerungen überall um ein kleines durchbricht und das nur relativ zu unserem technischen Unvermögen gilt.

A. Sommerfeld.

Verzeichnis der in deutscher, englischer oder französischer Sprache erschienenen Abhandlungen Smoluchowskis.

1893.

1. Über die innere Reibung in nicht wässerigen Lösungen. 5 SS. (Sitzungsberichte der Wien. Akad. **102**.)

1894.

2. Akustische Untersuchungen über die Elastizität weicher Körper. 35 SS. (Sitzungsber. d. Wien. Akad. **103**.)

1896.

3. Recherches sur la dépendance entre le rayonnement d'un corps et la nature du milieu environnant. 3 SS. (Comptes Rendus de l'Acad. Paris **122**.)
4. Recherches sur une loi de Clausius au point de vue d'une théorie générale de la radiation. 16 SS. (Journal de Physique **5**.)

1897.

5. Dr. Beattie and Dr. Smoluchowski: Conductance produced in gases by Röntgen rays, by ultraviolet light, and by uranium, and some consequences thereof. 19 SS. (Philosophical Magazine **43**.)
6. Lord Kelvin, Dr. Beattie, Dr. Smoluchowski: Experiments on the electrical phenomena produced in gases by Röntgen rays, by ultraviolet light and by uranium. 35 SS. (Proceedings Edinbourgh Roy. Soc. **21**.)

1898.

7. Lord Kelvin, Dr. Beattie, Dr. Smoluchowski: On the electrical equilibrium between uranium and an insulated metal in its neighbourhood. 2 SS. (Philosophical Magazine **45**.)

8. Über Wärmeleitung in verdünnten Gasen. 29 SS. (Wied. Annal. d. Physik **64.**)
9. Über den Temperatursprung bei Wärmeleitung in Gasen. 26 SS. (Sitzungsber. d. Wien. Akad. **107.**)
10. On conduction of heat in rarefied gases. 14 SS. (Philosoph. Magazine **46.**)
11. Neuere Untersuchungen über die Wärmeleitung in Gasen. (Österr. Chemiker-Zeitung **2.**)

1899.

12. Etherion, a new gas. 2 SS. (London, Nature **59.**)
13. Weitere Studien über den Temperatursprung bei Wärmeleitung in Gasen. 19 SS. (Sitzungsber. d. Wien. Akad. **108.**)

1901.

14. Über die Atmosphäre der Erde und der Planeten. 6 SS. (Diese Zeitschr. **2**, 307—313.)

1903.

15. Sur les phénomènes aérodynamiques et les effets thermiques qui les accompagnent (Bull. Acad. Crac. **43.**)

1904.

16. On the principles of aerodynamics and their application, by the method of dynamical similarity, to some special problems. 14 SS. (Philos. Magazine **7.**)
17. Über Unregelmäßigkeiten in der Verteilung von Gasmolekülen und deren Einfluß auf Entropie u. Zustandsgleichung. 15 SS. (Boltzmann-Festschrift.)

1905.

18. Zur Theorie der elektrischen Kataphorese und der Oberflächenleitung. 2 SS. (Diese Zeitschr. **6**, 529—531.)

1906.

19. Zur kinetischen Theorie d. Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. 24 SS. (Ann. d. Phys. **21.**)

1908.

20. Molekularkinetische Theorie der Opaleszenz von Gasen im kritischen Zustande, sowie einiger verwandter Erscheinungen. (Ann. d. Phys., **25**, 205—226.)

1909.

21. Über ein gewisses Stabilitätsproblem der Elastizitätslehre u. dessen Beziehung zur Entstehung von Faltengebirgen. (Bull. Acad. Crac. Juni 1909, S. 3—20.)
22. Versuche über Faltungserscheinungen schwimmender, elastischer Platten. (Bull. Acad. Crac. November 1909, S. 727—734)

1910.

23. Sur la conductibilité calorifique des corps pulvérisés. (Bull. Acad. Crac., Mai 1910, p. 129—153.)
24. Sur la théorie mécanique de l'érosion glaciaire. (Comptes Rendus **150**, 1368—1371.)
25. Zur kinetischen Theorie der Transpiration und Diffusion verdünnter Gase. (Ann. d. Phys. **33**, 1559—1570.)
26. Über Wärmeleitung pulverförmiger Körper und ein neues hierauf gegründetes Wärme-Isolierungsverfahren. 7 SS. (II. Internat. Kältekongreß, Wien.)

1911.

27. Bemerkung zur Theorie des absoluten Manometers von Knudsen. (Ann. d. Phys. **34**, 182—184.)
28. Some remarks on conduction of heat through rarefied gases. (Phil. Mag. **21**, 11—14.)
29. Über die Wechselwirkung von Kugeln, die sich in einer zähen Flüssigkeit bewegen. (Bull. Acad. Crac. Januar 1911, S. 28—29.)
30. Zur Theorie der Wärmeleitung in verdünnten Gasen und der dabei auftretenden Druckkräfte. (Bull. Acad. Crac., Juli 1911, S. 432—453.)
31. Beitrag zur Theorie der Opaleszenz von Gasen im kritischen Zustande. (Bull. Acad. Crac., Oktober 1911, S. 493—502.)

1912.

32. On opalescence of gases in the critical state. (Phil. Mag. **23**, 165—173.)
33. On the practical applicability of Stokes Law of resistance and the modifications of it required in certain cases. (International Congress of Mathematics. at Cambridge.)
34. Experimentell nachweisbare, der üblichen Thermodynamik widersprechende Molekularphänomene. (Diese Zeitschr. **13**, 1069—1080.)

1913.

35. Anzahl und Größe der Moleküle und Atome. (Scientia, **13**, 12—29.)
36. Einige Beispiele Brownscher Molekularbewegung unter Einfluß äußerer Kräfte. (Bull. Acad. Crac., S. 418—437.)
37. Göttinger Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und Elektrizität: Gültigkeitsgrenzen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie. Teubner, Leipzig, S. 89—121. (Diese Zeitschr. **14**, 261—262).

1914.

38. Elektrische Endosmose und Strömungsströme. Graetzs Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus. (Barth, Leipzig. II. Band. S. 366—428.)
39. Bemerkungen zu der Arbeit Banlis: Theoretische Behandlung der Erscheinungen in verdünnten Gasen. (Ann. d. Phys. **45**, 623—624.)
40. Studien über Molekularstatistik von Emulsionen und deren Zusammenhang mit der Brownschen Bewegung. (Sitzungsber. d. Wien. Akad. **123**, 2381—2405.)

1915.

41. Über „durchschnittliche maximale Abweichung" bei Brownscher Molekularbewegung und Brillouins Diffusionsversuche. (Sitzungsber. d. Wien. Akad. **124**, 263—276.)
42. Molekulartheoretische Studien über Umkehr thermodynamischer irreversibler Vorgänge und über Wiederkehr abnormaler Zustände. (Sitzungsber. d. Wien. Akad. **124**, 339—368.)
43. Notiz über die Berechnung der Brownschen Molekularbewegung bei der Ehrenhaft-Millikanschen Versuchsanordnung. (Diese Zeitschr. **16**, 318—321.)
44. Über die zeitliche Veränderlichkeit der Grup-

pierung von Emulsionsteilchen und die Reversibilität der Diffusionserscheinungen. (Diese Zeitschr. **16**, 321—327.)
45. Über gewisse Mängel in der Begründung des Entropiesatzes und der Boltzmannschen Grundgleichung in der kinetischen Gastheorie. (Bull. Acad. Crac., S. 164—178.)
46. Zur Theorie der Zustandsgleichungen. (Ann. d. Phys. **48**, 1098—1102.)
47. Über Brownsche Molekularbewegung unter Einwirkung äußerer Kräfte und deren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Diffusionsgleichung. (Ann. d. Phys. **48**, 1103—1112.)

1916.

48. Studien über Kolloidstatistik und den Mechanismus der Diffusion. (Kolloid-Zeitschr. **18**, 48—54.)
49. Theoretische Bemerkungen über die Viskosität der Kolloide. (Kolloid-Zeitschr. **18**, 190—195.)
50. Experimentelle Bestätigung der Theorie Lord Rayleighs, betreffend die Natur des Himmelblaus. (Vorläufige Mitteilung. Bull. Acad. Crac., S. 219—222.)
51. Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. (Diese Zeitschr. **17**, 557—571 und 585—599.)

1917.

52. Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloider Lösungen. (Zeitschrift f. phys. Chemie, **92**, 129—168.)
53. Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit und das Gesetz des Zufalls in der theoret. Physik. (Im Manuskript.)

Etwa 35 Arbeiten in polnischer Sprache, darunter ein zusammenfassender Bericht über Brownsche Bewegung in der Witkowski-Festschrift und ein großes didaktisches Werk „Ratgeber für das Selbststudium" konnten hier wegen der Satzschwierigkeiten nicht aufgeführt werden.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

IV.

Ponderomotorische Wirkungen auf einfach zusammenhängende Körper. Grundlegung der Elektrostatik.

Bei der grundsätzlichen Voraussetzung, daß in dem elektromagnetischen Felde mechanische Geschwindigkeiten u, v, w von der Form

$$\left.\begin{aligned} \mu u &= \mu_0\left(u_0 + u_1\cos\frac{t}{T}2\pi + u_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right),\\ \mu v &= \mu_0\left(v_0 + v_1\cos\frac{t}{T}2\pi + v_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right),\\ \mu w &= \mu_0\left(w_0 + w_1\cos\frac{t}{T}2\pi + w_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right)\end{aligned}\right|\quad(1)$$

vorhanden sind (μ Dichte, μ_0 die konstante mittlere Dichte, T eine sehr kleine Zeitdauer), haben wir aus dem mechanischen Grundprinzip (Abh. I[1])) und der Annahme des universellen Dralles (Abh. II[2])) die Differentialgleichungen abgeleitet, denen

$$u_1,\ v_1,\ w_1;\ u_2,\ v_2,\ w_2$$

genügen müssen und diese Differentialgleichungen in eine für die Anwendungen geeignete Form transformiert (Abh. III[1])).

Nun wenden wir uns der Bestimmung der sichtbaren Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 zu, die wir bisher als in bestimmter Weise gegeben ansahen.

Das mechanische Grundprinzip, unter Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung

$$\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}=0$$

durch den Druckmultiplikator, liefert für inkompressible Medien die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}\sum\Big[\delta x\Big\{\mu\frac{du}{dt}\overline{d\tau}+2\int_\Omega \mu(\xi,\eta,\zeta,t)\Big(u(\xi,\eta,\zeta,t)\\ -u_0(x,y,z,t)\Big)\Big|\,\hat{u}_\nu\, d\omega\Big\}\\ +\ldots-p\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)\overline{d\tau}\Big]=0,\end{aligned}\right|\quad(2)$$

aus der wir früher die Differentialgleichungen des Feldes ableiten konnten. Wir betrachten gesondert ein Element $\overline{d\tau}$, mit der Oberfläche Ω und einem inneren Punkte $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ und den Außenraum a des Elements, wobei für die relativen Verrückungen im Innern des Elements $\overline{d\tau}$ noch Bedingungsgleichungen hinzugefügt werden könnten, und wir schreiben daher die Gleichung des mechanischen Grundprinzips so:

1) Diese Zeitschr. **18**, 323, 1917.
2) Diese Zeitschr. **18**, 341, 1917.

1) Diese Zeitschr. **18**, 504, 1917.

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\mu \frac{du}{dt} d\tau + 2\int_{\Omega} \mu(\xi,\eta,\zeta,t)\right.\\
&\qquad \left.\left\{u(\xi,\eta,\zeta,t) - u_0(x,y,z,t)\right\} \hat{u}\; d\omega\right\} \delta x + \cdot\cdot\\
&+ \int_a \left[\left\{\mu \frac{du}{dt} \overline{d\tau} + 2\int_{\Omega} \mu(\xi,\eta,\zeta,t)\right.\right.\\
&\qquad \left.\left\{u(\xi,\eta,\zeta,t) - u_0(x,y,z,t)\right\} \hat{u}_\nu d\omega\right\} \delta x + \cdot\cdot\\
&+ \left.\left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right)\overline{d\tau}\right]\\
&- \int_{\Omega} p\left\{\cos(\nu x)\delta\xi + \cos(\nu y)\delta\eta + \cos(\nu z)\delta\zeta\right\}\\
&\qquad d\omega = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wobei etwa hinzuzufügende Bedingungen über die relativen Verrückungen im Innern von $\overline{d\tau}$ noch durch Multiplikatoren einzuführen wären. Wenn wir die Dimensionen des Elementes $\overline{d\tau}$ immer kleiner wählen, können wir mit umso größerer Genauigkeit die folgende Gleichung zugrunde legen:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\mu \frac{du}{dt} - 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{u} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{v} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{w}\right)\right.\\
&\left. - 2\mu\hat{u}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z}\right)\right\} \overline{d\tau}\, \delta\overline{x} + \cdot\cdot\\
&+ \int_a \left[\left\{\mu \frac{du}{dt} - 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{u} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{v} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{w}\right)\right\}^{1)}\right.\\
&\qquad \left. \delta x + \cdot\cdot \right] d\tau\\
&+ \int_a \left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta x + \cdot\cdot\right) d\tau\\
&- \int_{\Omega} p \cos(\nu x)\, d\omega\, \delta\overline{x} - \cdot\cdot = 0
\end{aligned}\right\} \quad (3')$$

und erhalten durch Nullsetzung der Faktoren von $\delta\overline{x}$, $\delta\overline{y}$, $\delta\overline{z}$:

$$\left.\begin{aligned}
\mu \frac{du}{dt} = &\frac{\int_{\Omega} p\cos(\nu x)\, d\omega}{\overline{d\tau}}\\
&+ 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{u} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{v} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{w}\right)\\
&+ 2\mu\hat{u}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z}\right), \ldots,
\end{aligned}\right\} \quad (4a)$$

und im Außenraume durch Nullsetzung der Faktoren von δx, δy, δz:

$$\mu_0 \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{u} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{v} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{w}\right), \cdots \quad (4b)$$

1) Im Außenraume setzen wir Inkompressibilität voraus.

Die Gleichungen (4b) sind uns bereits bekannt; die Gleichung (4a) ist insofern etwas allgemeiner, als sie sich auf ein Element $\overline{d\tau}$ bezieht, in dessen Innern die relativen Verrückungen noch irgendwelchen Beschränkungen unterworfen sein können, die wir für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen in dieser Form gar nicht zu kennen brauchen.

Während wir früher aus den Bewegungsgleichungen die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes durch Nullsetzung der Kosinus- und Sinusterme ableiteten, interessiert uns jetzt die Bestimmung der sichtbaren Bewegung. Die Ausdrücke für die scheinbaren Kräfte, welche auf das Element $\overline{d\tau}$ wirken, sind:

$$\begin{aligned}
\overline{d}X_0 &= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \mu \frac{du}{dt}\overline{d\tau}\, dt\\
&= \frac{1}{T}\mu\overline{d\tau}\left\{u(t+T) - u(t)\right\}, \cdots;
\end{aligned} \quad (5)$$

denn das sind die Produkte der Masse des Teilchens mit seinen sichtbaren Beschleunigungen; nach (4a) sind mit Rücksicht darauf, daß

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{u} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{v} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{w}\right) d\tau\, dt\\
&= \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int \mu\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\hat{u} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\hat{v} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{w}\right) d\tau\, dt, \cdot\cdot,
\end{aligned}$$

diese scheinbaren Kräfte durch die folgenden Formeln gegeben:

$$\overline{d}X_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_{\Omega}\left(p\cos(\nu x) - 2\mu_0\hat{u}\,\hat{u}_\nu\right) d\omega\, dt, \cdot\cdot \quad (6)$$

Wir werden diese Formeln auch auf ausgedehnte Körper übertragen können: Wir denken uns in irgendeinem Körper ponderable Materie von wesentlich größerer Dichte als μ, aber in solcher Weise, daß die Zwischenräume, deren Volumen erheblich größer ist, als das Volumen der ponderablen Materie, von unserer Materie mit der Dichte μ erfüllt sind. Wir wollen die Untersuchung hier nicht dadurch komplizieren, daß wir, wie dies in der Theorie der universellen Schwingungen geschieht, die etwaigen Kraftwirkungen zwischen ponderablen Teilchen unter sich (z. B. infolge der universellen Eigenschwingungen) mitanalysieren, wir legen vielmehr den idealen Fall zugrunde, daß die Verrückungen der ponderablen Teilchen den Bedingungen starrer Verrückungen genügen; dann werden die scheinbaren Kräfte, welche auf einen endlich ausgedehnten, sichtbar starren Körper wirken, entsprechend die in Wirkung kommenden

Drehungsmomente, so zu berechnen sein, als ob auf jedes Element die scheinbaren Kräfte (6) wirkten, im besonderen werden die translatorischen Kräfte:

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega \left(p\cos(\nu x) - 2\mu_0 \hat{u}\hat{u}_\nu\right) d\omega\, dt\,,\ldots, \tag{7}$$

wo $d\omega$ ein Element der Oberfläche ω des Körpers mit der inneren Normalen ν vorstellt[1]).

Wir werden in dieser Abhandlung den wichtigen Fall behandeln, in welchem in dem Außenraume beliebig vieler einfach zusammenhängender Körper für die schwingenden Geschwindigkeiten Wirbellosigkeit besteht:

$$\hat{u} = -\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}\,,\quad \hat{v} = -\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}\,,\quad \hat{w} = -\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}\,, \tag{8}$$

im Außenraume, und in welchem die sichtbaren Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 nicht außerordentlich groß sind.

Dann sind die Glieder von p, welche für die Integrale (7) in Betracht kommen:

$$+\mu_0\left\{\frac{d\hat{\psi}}{dt} + \frac{3}{2}\left(\hat{u}^2+\hat{v}^2+\hat{w}^2\right)\right\},$$

denn es ergibt sich durch Differentiation dieses Ausdruckes bzw. nach x, y, z:

$$-\mu_0\left\{\frac{\partial\hat{u}}{\partial t} + \hat{u}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{v}\frac{\partial v}{\partial x} + \hat{w}\frac{\partial w}{\partial x} + u\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right.$$
$$\left. + v\frac{\partial\hat{v}}{\partial x} + w\frac{\partial\hat{w}}{\partial x} - 3\left(\hat{u}\frac{\partial\hat{u}}{\partial x} + \hat{v}\frac{\partial\hat{v}}{\partial x} + \hat{w}\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\right)\right\}$$
$$= -\mu_0\left\{\frac{d\hat{u}}{dt} - 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{u} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{v} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{w}\right)\right\} + N,\ldots,$$

wo wir unter N Größen verstehen, welche deshalb nicht in Betracht kommen, weil sie bei ihrer Berücksichtigung in den Integralen (7) durch die Operation

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}(-)\,dt$$

herausfallen.

Bedenken wir noch, daß bis auf Größen, die aus demselben Grunde nicht in Betracht kommen:

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega \frac{\partial\hat{\psi}}{dt}\cos(\nu x)\,d\omega\,dt$$
$$= -\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega \hat{\psi}\frac{d}{dt}\left[d\omega\cos(\nu x)\right]dt\,,\ldots,$$

und daß ferner die Formeln bestehen:

$$\frac{d}{dt}\left(d\omega\cos(\nu x)\right) = -\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\cos(\nu x) + \frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\cos(\nu y) + \frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\cos(\nu z)\right)_a^{1)} d\omega\,,\ldots,$$

so ergibt sich

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega \mu_0\left[\frac{3}{2}\left(\hat{u}^2+\hat{v}^2+\hat{w}^2\right)\cos(\nu x) - 2\hat{u}\hat{u}_\nu + \hat{\psi}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\cos(\nu x) + \frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\cos(\nu y) + \frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\cos(\nu z)\right)_a\right] d\omega\,dt\,,\ldots \tag{9}$$

Nach dem Stokesschen Satze ist, mit Rücksicht darauf, daß wir es mit einfach zusammenhängenden Körpern zu tun haben:

$$\int_\omega \hat{\psi}\left\{\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}\cos(\nu x) - \frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\cos(\nu y)\right\}d\omega$$
$$= -\int_\omega \hat{v}\left\{\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}\cos(\nu x) - \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}\cos(\nu y)\right\}d\omega\,,\ldots,$$
$$\int_\omega \hat{\psi}\left\{\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}\cos(\nu x) - \frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\cos(\nu z)\right\}d\omega$$
$$= -\int_\omega \hat{w}\left\{\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}\cos(\nu x) - \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}\cos(\nu z)\right\}d\omega;\ldots,$$

und so folgen aus (9) die wichtigen Formeln für X_0, Y_0, Z_0:

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega \mu_0\left\{\frac{1}{2}\left(\hat{u}^2+\hat{v}^2+\hat{w}^2\right)\cos(\nu x) - \hat{u}\hat{u}_\nu\right\}d\omega\,,\ldots \tag{10}$$

Wir können das Resultat aussprechen:

Die infolge des elektromagnetischen Feldes auf einen einfach zusammenhängenden Körper τ ausgeübten sichtbaren Kräfte:

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\tau \mu\frac{du}{dt}\,d\tau\,dt\,,\ldots \tag{I}$$

sind durch die Formeln gegeben:

$$X_0 = \frac{1}{2}\mu_0\int_\omega\left\{\frac{1}{2}\left(u_1^2+v_1^2+w_1^2\right)\cos(\nu x) - u_1 u_{1\nu}\right\}d\omega$$
$$+\frac{1}{2}\mu_0\int_\omega\left\{\frac{1}{2}\left(u_2^2+v_2^2+w_2^2\right)\cos(\nu x) - u_2 u_{2\nu}\right\}d\omega,\ldots, \tag{II}$$

unter der Voraussetzung, daß an der Außenseite der Oberfläche ω des Raumes

1) Man beachte die infolge der Individualitätskorrektur hinzukommenden Glieder

$$-2\mu_0\hat{u}\hat{u}_\nu\,,\ldots$$

1) Der Index a bedeutet, daß die Werte an der äußeren Seite von ω zu wählen sind.

τ für die Schwingungsgeschwindigkeiten Wirbellosigkeit besteht:

$$u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \ldots,$$
$$u_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \ldots,$$

und daß die sichtbaren Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 nicht außerordentlich groß sind (alle gewöhnlichen, irdischen translatorischen Geschwindigkeiten können in diesem Sinne als nicht außerordentlich groß aufgefaßt werden).

Da wir alle Geschwindigkeiten als stetig und differenzierbar voraussetzen wollen, können wir den Formeln (II) auch die folgende Gestalt geben:

$$\left.\begin{aligned} X_0 = \frac{1}{2}\mu_0 \int_\tau \Big(u_1\theta_1 - \Big\{v_1\left[\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right] \\ - w_1\left[\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right]\Big\}\Big) d\tau \\ - \frac{1}{2}\mu_0 \int_\tau \Big(v_2\left[\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right] \\ - w_2\left[\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x}\right]\Big) d\tau, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (II')$$

Jetzt wollen wir für die Grundlegung der Elektrostatik eine große Anzahl ruhender bzw. sich nicht mit außerordentlich großer translatorischer Geschwindigkeit bewegender Elektronen in einem unendlichen Äther annehmen; im ganzen Raume soll

$$\left.\begin{aligned} u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \ldots, \\ u_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

sein, daher im Außenraume der Elektronen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\psi_1 = 0, \\ \Delta\psi_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (12a)$$

im Innenraume:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\psi_1 = -\theta_1, \\ \Delta\psi_2 = -0 \end{aligned}\right\} \quad (12b)$$

somit

$$\left.\begin{aligned} u_2 = v_2 = w_2 = 0, \\ u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x},\ v_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y},\ w_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wo

$$\psi_1 = \frac{1}{4\pi}\Sigma \int_{\tau_i} \theta_1(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\tau}{r}, \quad (14)$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Die scheinbare Kraft, welche nach (II) ein den Raum τ erfüllendes Elektron auf ein den Raum τ' erfüllendes Elektron ausübt, hat unter der Voraussetzung, daß die Zentraldistanz

$$\varrho = \sqrt{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + (\zeta-\zeta')^2}$$

der beiden Teilchen gegen ihre Dimensionen groß ist, die Komponenten:

$$X_0 = -\frac{\partial}{\partial \xi'}\left\{\frac{1}{8\pi\varrho}\int_\tau \theta_1 d\tau \int_{\tau'} \theta_1 d\tau\right\}, \ldots, \quad (15)$$

oder wenn man

$$\left.\begin{aligned} e = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}}\int_\tau \theta_1 d\tau = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}} \\ \int_\tau \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) d\tau, \\ e' = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}}\int_{\tau'} \theta_1 d\tau = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}} \\ \int_{\tau'} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) d\tau \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

setzt, die Komponenten:

$$X_0 = -\frac{\partial}{\partial \xi'}\left(\frac{ee'}{4\pi\varrho}\right).$$

Durch (16) ist die elektrische Masse e eines Elektrons in ganz bestimmter Weise mechanisch definiert, ich wähle absichtlich das in vieler Beziehung sehr bequeme Maßsystem, welches stets von Lorentz verwandt wird[1]).

1) Bei Benutzung des elektrostatischen Maßsystems wäre

$$e = \sqrt{\frac{\mu_0}{8\pi}}\int_\tau \theta_1 d\tau, \quad (16)$$

zu setzen.

(Eingegangen 28. September 1917.)

Temperatur- und Dichteschwankungen.

Von M. v. Laue.

Im 17. Hefte dieser Zeitschrift zeigt Herr Fürth im Anschluß an eine Veröffentlichung von Herrn Frank[1]), wie man, ausgehend von der van der Waalsschen Zustandsgleichung und der Voraussetzung konstanter spezifischer Wärme, aus dem zugehörigen Entropieausdruck nach dem Boltzmannschen Prinzip das Wahrscheinlichkeitsgesetz der freiwilligen Schwankungen der Temperatur und Dichte ermitteln kann. Seine Ergebnisse sind aber von seinen besonderen Annahmen unabhängig und lassen sich, wie wir hier kurz darlegen wollen, sogar mit weniger Rechnung ohne diese ableiten.

Wir denken uns dazu einen beliebigen chemisch einheitlichen Körper auf gegebener Energie U und gegebenem Volumen V gehalten. Im

1) Ph. Frank, „Lotos" Naturw. Zeitschr. **64**, 1916; R. Fürth, diese Zeitschr. **18**, 395, 1917.

Raumelement $d\tau$ sollen $n\,d\tau$ Mole liegen, s, u, $v = 1/n$ sollen Entropie, Energie und Volumen eines Mols sein, S die Gesamtentropie. Der normale, den Werten U und V zugehörige Gleichgewichtszustand maximaler Entropie entspricht den Werten n_0, s_0, u_0 und der Temperatur T_0. ν und t sind die Abweichungen, die n und T von diesen Normalwerten zeigen:

$$n = n_0 + \nu, \quad T = T_0 + t.$$

Für die Abweichungen der Molenergie und -entropie können wir uns im allgemeinen (eine Ausnahme tritt im kritischen Punkt ein) mit den linearen und quadratischen Gliedern dei Reihenentwicklung begnügen:

$$s - s_0 = \frac{\partial s}{\partial n}\nu + \frac{\partial s}{\partial T}t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial n^2}\nu^2 + \frac{\partial^2 s}{\partial T^2}t^2 + 2\frac{\partial^2 s}{\partial n\,\partial T}\nu t\right) + \cdots \tag{1}$$

$$u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial n}\nu + \frac{\partial u}{\partial T}t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n}\nu^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial T}t^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial n\,\partial T}\nu t\right) + \cdots \tag{2}$$

Die Differentialquotienten beziehen sich hier und im folgenden, auch ohne daß wir ihnen den Index o geben, auf den Normalzustand. Für die Gesamtentropie und die Energie sind die Abweichungen:

$$S - S_0 = \int n(s - s_0)\,d\tau = \int (n_0 + \nu)\left(\frac{\partial s}{\partial n}\nu + \frac{\partial s}{\partial T}t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial n^2}\nu^2 + \frac{\partial^2 s}{\partial T^2}t^2 + 2\frac{\partial^2 s}{\partial n\,\partial T}\nu t\right)\right)d\tau$$
$$= \int\left\{n_0\frac{\partial s}{\partial n}\nu + n_0\frac{\partial s}{\partial T}t + \left(\frac{\partial s}{\partial n} + \frac{1}{2}n_0\frac{\partial^2 s}{\partial n^2}\right)\nu^2 + \frac{1}{2}n_0\frac{\partial^2 s}{\partial T^2}t^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial T} + n_0\frac{\partial^2 s}{\partial n\,\partial T}\right)\nu t\right\}d\tau \tag{1'}$$

$$U - U_0 = \int n(u - u_0)\,d\tau = \int (n_0 + \nu)\left(\frac{\partial u}{\partial n}\nu + \frac{\partial u}{\partial T}t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\nu^2 + \frac{\partial^2 n}{\partial T^2}t^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial n\,\partial T}\nu t\right)\right)d\tau$$
$$= \int\left\{n_0\frac{\partial u}{\partial n}\nu + n_0\frac{\partial u}{\partial T}t + \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{2}n_0\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right)\nu^2 + \frac{1}{2}n_0\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}t^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial T} + n_0\frac{\partial^2 u}{\partial n\,\partial T}\right)\nu t\right\}d\tau. \tag{2'}$$

Nach Voraussetzung ist

$$U - U_0 = 0; \tag{3}$$

eine weitere Nebenbedingung ist

$$\int n\,d\tau = \int n_0\,d\tau, \text{ also } \int \nu\,d\tau = 0. \tag{4}$$

Aus der Gleichung

$$ds = \frac{du + p\,dv}{T} = \frac{du - p/n^2\,dn}{T}$$

folgen aber die Beziehungen:

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial T}, \quad \frac{\partial s}{\partial n} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{p}{n^2}\right),$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial T^2} = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial u}{\partial T} + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial T^2},$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial n^2} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{2p}{n^3} - \frac{1}{n^2}\frac{\partial p}{\partial n}\right),$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial n\,\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 n}{\partial n\,\partial T}.$$

Multiplizieren wir also Gleichung (2′) mit $1/T_0$ und subtrahieren wir sie von (1′), so finden wir in Rücksicht auf (3) und (4):

$$S - S_0 = -\int\left(\frac{1}{2n_0 T_0}\frac{\partial p}{\partial n}\nu^2 + \frac{n_0}{2T_0^2}\frac{\partial u}{\partial T}t^2\right)d\tau$$
$$= -\sum\left(\frac{1}{2n_0 T_0}\frac{\partial p}{\partial n}\overline{\nu^2} + \frac{n_0}{2T_0^2}c_v\,\overline{t^2}\right)\Delta\tau. \tag{5}$$

$\overline{\nu^2}$ und $\overline{t^2}$ sind dabei Raummittelwerte für die Teilbereiche $\Delta\tau$.

Aus dem Boltzmannschen Prinzip,

$$W = C \cdot e^{\frac{S - S_0}{k}},$$

ersehen wir hiernach, daß die Schwankungen der Temperatur und Dichte voneinander unabhängig erfolgen. Das Zeitmittel dieser räumlich schon gemittelten Schwankungen ist:

$$\overline{\overline{\nu^2}} = \frac{k n_0 T_0}{\frac{\partial p}{\partial n}\Delta\tau} = -\frac{k T_0}{v_0^3\frac{\partial p}{\partial v}\Delta\tau}, \quad \overline{\overline{t^2}} = \frac{k T_0^2}{n_0 c_v \Delta\tau}\text{[1]}. \tag{6}$$

Zu den schon von Herrn Fürth angeführten Folgerungen aus diesen Formeln fügen wir hier noch eine über Energieschwankung der in $\Delta\tau$ normalerweise enthaltenen Substanzmenge $n_0\,\Delta\tau$ hinzu. Begnügen wir uns in (2) mit den linearen Gliedern, so finden wir:

$$\overline{\overline{(u - u_0)^2}} = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\overline{\overline{\nu^2}} + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)^2\overline{\overline{t^2}}.$$

Nähmen wir nur auf die Temperaturschwankungen Rücksicht, so vereinfachte sich dies wegen (6) zu

$$(n_0\,\Delta\tau)^2\,\overline{\overline{(u - u_0)^2}} = k\,(n_0\,\Delta\tau\,c_v)\,T_0^2,$$

1) Gegen diesen Schluß könnten vielleicht Bedenken entstehen, da die Dichteschwankungen ν an die Bedingung (4) geknüpft sind, also die auf die verschiedenen Volumenelemente $\Delta\tau$ bezüglichen ν nicht unabhängig voneinander sind. Umfaßt das Gesamtvolumen V aber sehr viele Elemente $\Delta\tau$, so können wir mit einem prozentisch verschwindenden Fehler bei der Summation eins davon weglassen; in den übrigen sind dann die ν unabhängig voneinander.

was mit länger bekannten Ergebnissen übereinstimmt[1]), da $n_0 \Delta\tau c_v$ die spezifische Wärme der Substanzmenge $n_0 \Delta\tau$ ist. Ohne diese Beschränkung aber ist in Hinblick auf die Formeln[2])

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\frac{\partial p}{\partial T} - p,$$

und
$$c_p = c_v + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

nach (6) für die Energie der Substanzmenge $n_0 \Delta\tau$ zu setzen:

$$(n_0 \Delta\tau)^2 \overline{(u-u_0)^2} = k n_0 \Delta\tau T_0 \left(c_v T_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T\right) \tag{7}$$
$$= k n_0 \Delta\tau T_0 \left(c_p T_0 - 2p_0 T_0\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - p_0^2\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T\right).$$

Man darf in den Gleichungen (6) und (7) keineswegs $\Delta\tau$ unter alle Grenzen abnehmen lassen und auf ein Unendlichwerden der Schwankungen schließen; $\Delta\tau$ muß nämlich immer noch so groß bleiben, daß es sehr viele Moleküle umfaßt, da man sonst Dichte und Temperatur überhaupt nicht definieren kann. Sonst aber sind diese Schwankungen um so größer, je kleiner man $\Delta\tau$ wählt; und es ist eine völlige Verkennung des Sachverhalts, wenn sich in der Literatur der Wunsch nach einer Berechnung der linearen Dimensionen der Dichteschwankungen findet.

1) Vgl. z. B. A. Einstein, Rapports et discussions de la réunion tenue à Bruxelles, du 30 octobre au 3 novembre 1911 sous les auspices de M. E. Solvay (Paris 1912) S. 421.

2) Vgl. z. B. M. Planck, Thermodynamik, S. 128; ferner Gleichung 80, 82.

(Eingegangen 28. September 1917.)

Spektroskopisches über elektrodenlose Ringentladung durch elektrische Schwingungen.

Von A. Hagenbach und W. Frey.

Durch die folgende Mitteilung wird gezeigt, daß die elektrodenlose Ringentladung[1]) eine wertvolle neue spektroskopische Methode ist, die sich auf viele Substanzen anwenden läßt und die noch an Wert gewinnen wird, wenn man die von Wachsmuth und Winaver[2]) angegebene Methode zur Messung der Leitfähigkeit mit hinzunimmt. Unsere Versuchsbedingungen zur Erzeugung der Ringentladung waren folgende: Mit jedem der Pole eines 75 cm-Klingelfußinduktors waren die inneren Belege je dreier Leydener Flaschen verbunden, während die äußeren geerdet waren. Die inneren Belege wurden über eine Zinkfunkenstrecke durch einen Draht verbunden, der in zwei oder mehr Windungen um eine kugelige Röhre gelegt war. Die Kapazität der Flaschen betrug bei dieser Schaltung 2800 cm. Zum Betrieb diente Gleichstrom von 220 Volt und ein mechanischer Unterbrecher. Die Röhre wurde mit der Gaedeschen Quecksilberpumpe verbunden und mit der Substanz gefüllt, die untersucht werden sollte. Die verwendeten Röhren waren Glaskugeln von 12 oder 14 cm Durchmesser oder eine Quarzröhre von 7 cm. In gewissen Fällen benutzten wir etwa 40 cm lange Glasröhren von 1,5 cm Durchmesser mit vorn leicht aufgeblasenem Ende zur Längsdurchsicht. Letztere wurden auf etwa 20 cm mit einer Wickelung versehen, durch die die elektrischen Schwingungen zirkulierten. Wollte man die Temperatur in meßbarer Weise verändern, so wurde die Röhre in ein mit Paraffinöl gefülltes Becherglas getaucht, um das die Wickelung zur Aufnahme der elektrischen Schwingungen geführt wurde.

Die spektroskopischen Aufnahmen wurden vorläufig im sichtbaren Gebiet vom roten Ende des Spektrums bis zur Wellenlänge 4000 mit einem stark dispergierenden Prisma mit konstanter Ablenkung von 90° ausgeführt. Resultate wurden bis jetzt erzielt mit Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Leuchtgas, Kohlensäure, Kohlenwasserstoffen, Jod, Schwefel, Selen, Tellur, Phosphor, Quecksilber, Zink und Kadmium.

Bevor wir auf die spektroskopischen Ergebnisse eingehen, lassen wir einige allgemeine Beobachtungen folgen.

Bei der Evakuation tritt in Luft zuerst ein lichtschwacher rötlicher Ring auf, der bei einem bestimmten Druck in einen fast weißen viel helleren Ring umschlägt. Bei weiterer Verdünnung wird der Ring diffuser und erfüllt schließlich die ganze Röhre, bis zuletzt bei zu hoher Evakuation die Entladung nicht mehr zustande kommt.

In Luft und einigen andern Gasen beteiligt sich der von der Quecksilberpumpe stammende Quecksilberdampf in unangenehmer Weise an dem Phänomen, indem nach einigem Stromdurchgang das Spektrum nur aus Quecksilberlinien besteht. Dies Vorherrschen von Queck-

1) W. Hittorf, Wied. Ann. **21**, 137, 1884 und J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) **32**, 450, 1891.

2) R. Wachsmuth u. B. Winaver, Ann. d. Phys. **42**, 585, 1913.

silber ist von allen Beobachtern[1]) als lästig empfunden worden und Quecksilberabsorptionsmittel oder tiefe Temperaturen halfen nur ganz ungenügend, wovon wir uns auch überzeugt haben.

Wir haben nun aber feststellen können, daß in Gegenwart von Phosphorpentoxyd das Quecksilber spektroskopisch fast vollkommen verschwindet, jedenfalls soweit geschwächt wird, daß es nur noch mit seinen stärksten Linien schwach auftritt. In einigen Fällen war es vollkommen ausgelöscht, so daß es die spektroskopische Untersuchung der Füllung nicht hinderte.

Aus einer Reihe von Experimenten glauben wir schließen zu dürfen, daß die geringe Menge des vorhandenen Quecksilberdampfes nur dann die Leitung übernimmt, wenn zugleich Wasserstoff, entweder als solcher oder von Wasserdampf oder Kohlenwasserstoffen stammend zugegen ist. Entfernt man also den Wasserdampf durch starkes Trocknen, so beteiligt sich Quecksilber nicht an der Leitung. Das Phosphorpentoxyd braucht nicht in der Entladungsröhre zu sein, es genügt, daß das Gas einige Zeit damit in Berührung gewesen ist. So zeigen z. B. zwei durch eine kurze Röhre verbundene Kugeln, von denen eine mit Phosphorpentoxyd gefüllt ist und die andere nicht, die Erscheinung, daß frisch eingefüllte Luft in der mit P_2O_5 beschickten Röhre keine Quecksilberlinien, während die andere intensiv Hg aufweist. Nach einiger Zeit erlischt aber auch in der zweiten Röhre das Quecksilber und beide Ringentladungen sehen wieder gleich aus (Stickstoffspektrum).

In Zusammenhang mit diesem sonderbaren Verhalten mag folgende Erscheinung stehen. Evakuiert man eine Luftröhre bis zu dem Druck, wo die rote Entladung in die weiße umschlägt, und stellt dann die Pumpe ab, so evakuiert sich die Röhre beim Durchgang des Stromes von selbst in kurzer Zeit so weit, daß keine Entladung mehr durchgeht. Wiederholt man aber den Versuch, indem man einen zwischen Pumpe und Röhre liegenden Hahn nach Unterbrechen der Pumpe schließt, so findet die Selbstevakuation nicht oder sehr viel langsamer statt. Vermutlich spielt auch hier der Quecksilberdampf eine Rolle. Als Verunreinigungen treten neben Quecksilber die Spektren von Wasserstoff und diejenigen Bandenspektren, welche in Gegenwart von Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff auftreten. Siegellack und Hahnfett muß also, will man ganz reine Verhältnisse haben, nach Möglichkeit vermieden werden. Die Messungen des Druckes haben wir nicht durchgeführt, wir haben nur die Druckverhältnisse stets so gewählt, wie es für die betreffende Erscheinung günstig war. Die Detailuntersuchung der Spektren ist noch nicht durchgeführt, hingegen lassen sich einige Ergebnisse kurz angeben.

Stickstoff: Die Erscheinungen sind der in Luft sehr ähnlich. Der schwache rote Ring bei relativ hohem Druck zeigt die erste und zweite Deslandressche Gruppe der Stickstoffbanden. Die photographische Aufnahme enthält trotz längerer Exposition nur die Kanten der blauen Banden. Der weiße Ring des mit glühendem Kupfer und Kalilauge gut gereinigten Stickstoffes gibt das reine Stickstoffbandenspektrum. Im ungereinigten Stickstoff, ebenso wie in Luft treten Kohlenoxydbanden und Swanspektrum als Verunreinigungen auf und verdrängen manchmal das Stickstoffspektrum vollkommen.

Interessant ist, daß Stickstoff selbst als Verunreinigung bei Metalldämpfen als Linienspektrum auftritt, so z. B. bei Quecksilber und Kadmium.

Im Sauerstoff tritt ein Bandenspektrum auf, das sich je nach Druck, Temperatur und Entladung verändert. Quecksilber ist nur mit der roten und einer orange Linie schwach vertreten. Die Füllung verschwindet nicht durch die Entladung. Das Sauerstoffspektrum ist bei Luftfüllung nicht vorhanden.

Wasserstoff in Gegenwart von Phosphorpentoxyd gibt das Serienspektrum, doch ist daneben Quecksilber stark vorhanden. Wird kein neuer Wasserstoff eingefüllt, so ist nach ganz kurzer Zeit nur Quecksilber vorhanden und dann erlischt die Röhre. Der Wasserstoff wird in irgendeiner Weise aufgezehrt.

Kohlensäure leuchtet in einem grauweißen hellen Ring, der sich mit der Verdünnung weiter ausbreitet. Selbstevakuation fehlt. Das Spektrum zeigt Änderungen mit dem Druck, die noch nicht weiter untersucht sind. Das Spektrum ist das des Kohlenoxyds ohne Linienverunreinigung.

Das Leuchtgas wird in der Ringentladung rasch verzehrt wie Wasserstoff und um das Spektrum photographieren zu können, mußten wir durch eine enge Kapillare dauernd Leuchtgas einströmen lassen, wobei der Druck durch die Pumpe reguliert wurde. Andernfalls verschwand das Leuchtgasspektrum zugunsten des Quecksilbers und bald war der Druck der Röhre zu niedrig, als daß eine Entladung durchging. Auch hier sind trotz Gegenwart von Phosphorpentoxyd immer Quecksilberlinien da. Wie schon oben erwähnt, übernimmt immer in Gegenwart von Wasserstoff die kleinste Menge Quecksilberdampf die Leitung. Die photographische

1) J. v. Kowalski, C. R. 158, 625, 1914; R. Wachsmuth, Ann. d. Phys. 39, 611, 1912.

Aufnahme des Leuchtgases zeigt das Spektrum der Kohlenwasserstoffe (Swanbanden) neben dem Linienspektrum des Quecksilbers und des Wasserstoffs.

Das Phosphorlinienspektrum erhielten wir in einer langen Röhre mit weißem Phosphor selbst ohne Erwärmen. In einer Glaskugel stört der Beschlag der Wandung mit rotem Phosphor, der sich reichlich bildet. In der langen Röhre konnte das vordere Ende durch leichtes Erwärmen durchsichtig erhalten werden. Die Entladung ist glänzend weiß.

Selen muß in einer Quarzröhre ziemlich stark erhitzt werden und gibt intensiv das Linienspektrum.

Bei Schwefel ist nur geringe Erwärmung notwendig. Der grüne Ring ist so intensiv, daß es uns gelungen ist den blauen Teil des Spektrums mit einem Konkavgitter von 3 m aufzunehmen. Je nach der Erregung erhielten wir das Linienspektrum rein oder daneben noch die Banden. Um letztere mit dem Gitter zu erhalten, war allerdings eine Expositionszeit von $7^1/_2$ Stunden notwendig.

In einer Quarzröhre ist auch das Tellurlinienspektrum ohne Schwierigkeit durch Erwärmen von Tellur aufzunehmen. Das Spektrum ist sehr linienreich, es enthält auch mehrere Banden.

Bis jetzt war fast einzig das Quecksilber[1]) eingehender untersucht. Es zeigt eine große Mannigfaltigkeit, je nach den Bedingungen. Linienspektrum und Bandenspektrum sind erhältlich, wenn auch letzteres nicht allein. Wir haben durch spektrale Aufnahme festgestellt, daß bei intermittierender oder dauernder Erregung die beiden Linienspektren nicht nur Intensitätsunterschiede, sondern zum Teil ganz verschiedene Linien aufweisen. Vielleicht ist die Temperatur dafür verantwortlich zu machen, indem bei dauernder Erregung sich die Röhre ziemlich erwärmt. Bei großer Energie und passendem Druck wird das Spektrum sehr linienreich.

In einem bestimmten kleinen Druckintervall beobachteten wir ein Nachleuchten[2]) (Phosphoreszenz) des Quecksilberdampfes mit Banden im Grün.

Kadmium muß im Quarzrohr ziemlich stark erhitzt werden und gibt dann ebenfalls ein Linienspektrum mit vielen Linien.

Wie beim Quecksilber ist auch hier das Spektrum viel linienreicher, wie das des kondensierten Funkens in Luft. Zu Beginn der Erregung (niederer Dampfdruck) beobachtet man Banden im Rot und Grün, die nachher vollständig verschwinden.

Zink verhält sich wie Kadmium mit einem sehr linienreichen Spektrum. Soweit es die Beurteilung bei kleiner Dispersion zuläßt, liegen im Violett Banden, doch kann das erst durch eine Aufnahme mit dem Konkavgitter entschieden werden.

Quecksilber, Zink und Kadmium lassen sich bei zu hohem Dampfdruck nicht erregen. Die vielen Variationen der Spektren, welche mit der Änderung der Versuchsbedingungen eintreten, bedürfen eines eingehenden Studiums.

Jod läßt sich sowohl in der kugeligen, wie auch in der langen Röhre erregen, doch bildet sich die Ringentladung wahrscheinlich wegen zu hohen Dampfdruckes in Gegenwart von festem Jod bei Zimmertemperatur nicht schön aus. Die Spektralaufnahme enthält neben einigen Linien einen kontinuierlichen Grund im Blau und Violett, der teilweise in Banden aufgelöst ist. Als spektrale Verunreinigungen finden sich neben Quecksilber Kohlenwasserstoffe und Kohlenoxyd vom Hahnfett herrührend.

Natrium in einer Glaskugel erwärmt, zeigt nur in unmittelbarer Nähe des Metalls die *D*-Linien, während die eigentliche Ringentladung in Quecksilber, Stickstoff oder Kohlenwasserstoff erfolgte.

Wird eine Luftröhre bei optimaler Intensität (weißer Ring) betrieben, so beobachtet man nach Unterbrechung ein intensives Nachleuchten des ganzen Röhreninhaltes in schmutziggelblichem Lichte mit einem Stich ins Grüne. Solange die rote Ringentladung vorhanden ist, fehlt das Nachleuchten vollkommen. Je nach den Druckbedingungen ist Intensität und Dauer der Phosphoreszenz verschieden. Bei fortschreitender Evakuation tritt die Erscheinung plötzlich ein, um rasch maximale Intensität zu gewinnen. Bei weiterem Pumpen nimmt die Stärke langsam ab, um bei einem bestimmten Druck gänzlich aufzuhören. Die Erscheinung tritt in Luft und in Stickstoff auf. In letzterem mit etwas größerer Intensität. Mit der Dauer der Erregung (Funkenzahl) nimmt bei sonst unveränderten Bedingungen die Phosphoreszenz zu, doch hat sie schon nach wenigen Funken (etwa 3) ihr Maximum erreicht, so daß bei weiterer Funkenzahl das Nachleuchten nicht mehr zunimmt.

Die spektroskopische Untersuchung der Ringentladung, wenn das Nachleuchten eintrat, zeigte außer der grünen Quecksilberlinie nur das Stickstoffbandenspektrum. Das Spektrum der Phosphoreszenz weist sechs diffuse Banden

1) J. von Kowalski, C. R. 158, 788, 1914 und diese Zeitschr. 15, 249, 1914.

2) St. London und H. Piwnikiewicz, diese Zeitschr. 14, 381, 1913, beobachteten unter dem Einfluß der Röntgenstrahlen kontinuierliches Lumineszenzspektrum.

auf, von denen die drei stärkeren langwelligen mit einem Handspektroskop gemessen folgende Wellenlängen ergaben

625, 565—575, 495 $\mu\mu$.

Die nächste Bande liegt noch im Grün, zwei weitere sehr lichtschwache sind im Blau.

Eine photographische Aufnahme ist bis jetzt nicht geglückt wegen zu geringer Empfindlichkeit unserer Platten im Rot und Grün. Bei diesen Versuchen wurde der primäre Strom mit einem Metronomen unterbrochen, der während des Stromschlusses den Spalt verschloß.

Das Spektrum des Nachleuchtens ist bei Luft und Stickstoff identisch. Dies steht im Widerspruch mit den Behauptungen von Strutt[1]), nach denen das Nachglühen der Luft kontinuierlich ist, das des (aktiven) Stickstoffs aus drei Banden (Rot, Gelb und Grün) bestehen soll. Zwei Prozent Sauerstoff sollen genügen, um die Phosphoreszenz des Stickstoffs zum Verschwinden zu bringen.

Durch diese vorläufige Mitteilung hoffen wir gezeigt zu haben, in welchen Richtungen die elektrodenlose Ringentladung verdient spektroskopisch studiert zu werden.

1) R. J. Strutt, diese Zeitschr. **15**, 274, 1914.

Basel, September 1917.

(Eingegangen 22. September 1917.)

Über die Röntgenspektren der isotopischen Elemente.

Von Manne Siegbahn und W. Stenström.

Mit Tafel XIV.

Durch die Untersuchungen von Rutherford und Andrade wissen wir, daß die γ-Strahlenspektren von *RaB* und *RaC* eine wesentliche Übereinstimmung[1]) mit den gewöhnlichen Röntgenspektren ihrer Isotopen zeigen. Wie weitgehend diese Übereinstimmung in betreff der numerischen Werte der Wellenlängen ist, läßt sich aus den unter verschiedenen Bedingungen ausgeführten Messungen nicht gut beurteilen, nur scheint es, als ob ein Unterschied, wenn er vorhanden wäre, innerhalb der Grenzen der damals erreichten Genauigkeit lag.

Leichter als ein Vergleich der γ-Strahlenspektren der radioaktiven Stoffe mit den Röntgenspektren ihrer Isotope ist eine ähnliche Untersuchung der Röntgenspektren verschiedener Isotope. Am nächsten sind für eine solche Untersuchung die zwei Isotopen Blei-*RaG* heranzuziehen, da *RaG* einerseits in genügender Reinheit und Menge vorliegt und andererseits ihr Atomgewicht gut bestimmt ist. Bekanntlich ist es O. Hoenigschmid gelungen, unter Verwendung von reinem, kristallisiertem Uranerz von Morogoro in Deutsch-Ostafrika ein *RaG*-Präparat von besonderer Reinheit darzustellen. Dank des freundlichen Entgegenkommens des Herrn Prof. Hoenigschmid waren die Verfasser imstande, das Röntgenspektrum eines solchen Präparates von *RaG* (sein Atomgewicht war nach den Bestimmungen von Hoenigschmid 206,05, während gewöhnliches Blei ein Atomgewicht 207,18 besitzt) mit dem des gewöhnlichen Bleies zu vergleichen.

1) M. Siegbahn, Bericht über die Röntgenspektren usw. Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**, 296, 1916.

Diese Untersuchung bezog sich teils auf die ganze *L*-Reihe teils auch auf die kräftigsten Linien (α und β) der *M*-Reihe. In jedem Falle wurden die zwei Spektren unter ganz identischen Bedingungen auf eine und dieselbe Platte aufgenommen (Tafel XIV, Fig. 1). Durch Bleiblenden im Strahlenwege wurde dafür gesorgt, daß ein mittlerer Streifen an der Platte mit dem Röntgenspektrum des *RaG* beleuchtet wurde, während anschließend daran an dem äußeren Teil der Platte das Bleispektrum photographiert wurde. In keinem Falle konnte eine Verschiebung oder sonstige Änderung der Spektrallinien gefunden werden.

Die Anordnungen zur Erzeugung der *L*-Reihen der Röntgenspektren waren die früher beschriebenen[1]). Bei der *M*-Reihe wurde ein neukonstruiertes Rohr verwandt, dessen Aussehen aus Fig. 2 zu ersehen ist. Die Elektronen wurden von einer Wehneltkathode erzeugt, nachdem

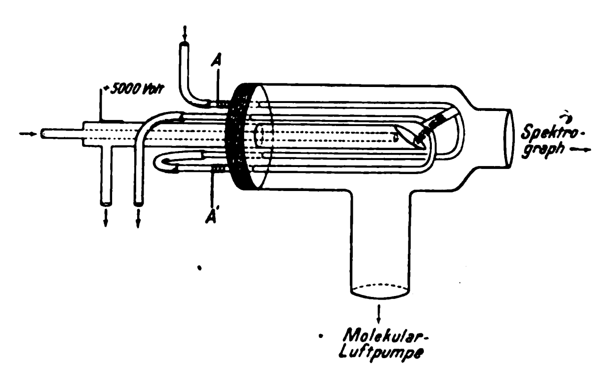


Fig. 2. Versuchsrohr zur Aufnahme der *M*-Reihe.

das Vakuum hinreichend hoch getrieben war, um ein Durchschlagen des Rohres mit 5000 Volt (ohne Heizung der Kathode) zu verhindern. Um das Rohr für Dauerbetrieb geeignet zu machen, waren sowohl Kathodenzuleitungen wie Antikathode mit strömendem Wasser gekühlt. Zum

1) Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**, 329, 1916.

Heizen der Platinblechkathode dienten einige Akkumulatoren, deren einer Pol geerdet war. Die Spannung zur Antikathode (etwa 5000 Volt) wurde mit Hilfe von einem Einankerumformer, Transformator und Gleichrichter (an die Achse des Umformers montiert) erzeugt. Bei den langen Wellen der *M*-Reihe können die Expositionszeiten bei Verwendung eines solchen Rohres gegenüber den gewöhnlichen (nicht gasfreien) Röhren erheblich verkürzt werden. Bei den verhältnismäßig kleinen Spannungen ist das nötige Vakuum auch leicht zu erreichen. Als Nachteil ist das verhältnismäßig schnelle Verdampfen der Oxydschicht an der Antikathode zu verzeichnen. Ein Gesamtbild der ganzen Anordnung ist in Fig. 3, Tafel XIV zu sehen.

Als Endresultat ergibt sich somit, daß die Wellenlängen der Röntgenspektren der Isotopen Blei-*RaG* mit der erreichten Genauigkeit von etwa $0{,}0005 \cdot 10^{-8}$ cm miteinander übereinstimmen. Früher ist bekanntlich gefunden, daß die gewöhnlichen, sichtbaren und ultravioletten Spektren auch identisch sind, so daß bisher bei den Atomschwingungen die durch die verschiedene Masse des Atomkernes bedingte Verschiedenheit unseren Messungen sich entzieht, wie man auch aus theoretischen Betrachtungen zu glauben geneigt war.

Lund, Physikalisches Institut, 29. August 1917.

(Eingegangen 4. September 1917.)

Grundlegung der Kinematik einer physikalischen Welle von elementarer Schwingungsform. III [1]).

Von Karl Uller.

Jede Theorie eines Komplexes von physikalischen Erscheinungen, die sich in Raum und Zeit abspielen, schlägt sich nieder in Feldgleichungen, welche die Änderungen der betreffenden physikalischen Größen in Raum und Zeit miteinander verbinden. Das System der Feldgleichungen gibt stets den allgemeinen Fall der Entstehung von Wellen in ihren Quellgebieten und der gegenseitigen Durchkreuzung dieser Wellen in Gebieten, die für sie quellenfrei sind. Wesentlich an dieser Aussage ist die Einsicht, daß die Welle, einmal entstanden, ein besonderes Gebilde ist, ein Individuum, das nicht durch seinesgleichen aufgehoben oder zerlegt werden kann, wie etwa ein statisches Feld. Deshalb liegen allemal zwei Hauptaufgaben vor: Die Darstellung der Wellenentstehung und die des Wellendaseins. Befassen wir uns zunächst mit der praktisch wichtigeren, der letzteren. Wir haben also dann die Aufgabe, aus den gegebenen Feldgleichungen für quellenfreien Raum das Gleichungssystem der Welle hervorgehen zu lassen. Bisher konnte man diese Aufgabe nicht sehen, weil man die Wesensverschiedenheit zwischen stationären und nichtstationären Störungen ein und derselben Quelle nicht erkannt hatte. Jeder nichtstationäre Vorgang ist ein Ausbreitungsvorgang, der seinen Ursprung in einem bestimmten Quellgebiet hat, ist etwas Besonderes, das wir Welle benennen. Ihrer Eigenart entspricht es, daß es eine ihr eigentümliche Kinematik gibt, deren oberster Satz das Interferenzprinzip ist. Dies besagt, daß Wellen sich nicht zu einer Welle überlagern lassen, womit umgekehrt auch geleugnet wird, daß eine Welle sich in Wellen zerlegen läßt. Wohl gibt es nichtstationäre Felder, die sich überlagern lassen zu einem resultierenden Feld. Wohl sind dann die nichtstationären Störungen aus verschiedenen Quellen solche Teilfelder. Aber das resultierende Feld ist dann nicht die Störung einer fiktiven Quelle, welche die reellen Quellen hinsichtlich der auslaufenden Störungen ersetzen könnte. Welle ist eben noch etwas anderes als ein nichtstationäres Feld, oder was dasselbe besagt, als eine nichtstationäre Störung. Welle ist das nichtstationäre Feld eines bestimmten Quellgebietes. Lassen sich die verschiedenen Felder der verschiedenen Quellen überlagern, so bekommt man zwar ein resultierendes Feld, aber nicht eine resultierende Welle, sondern einen Wellenzustand, d. h. eine Durchkreuzung, eine Interferenz der verschiedenen Wellen. Damit steht nicht in Widerspruch, daß eine Welle rechnerisch in Wellenkomponenten zerlegt gedacht werden darf. Es ist nämlich der isolierte Sonderfall möglich, daß zwei Wellen genau gleiche zeitliche Abhängigkeit und genau gleiche Wellennormalenpaare zeigen, gleich nach Richtung und Größe. Dann aber sind sie durch nichts voneinander zu unterscheiden. Man tut gut, bei wellentheoretischen Betrachtungen stets Wellen von Überlagerungsunfähigkeit ins Auge zu fassen, wie es die hydrodynamischen sind. Der Wesenskern der Welle liegt kurz gefaßt in dem Satze, daß Wellennormalenpaare niemals zusammengelegt oder zerlegt werden können.

Der kinematische Ausdruck des Interferenzprinzips ist nun für Wellen von elementarer Schwingungsform gefunden; im § 5 dieser Grundlegung steht er. Es gilt, ihn in allen Beziehungen, die ein Feld zu erfüllen hat, zur Herrschaft zu bringen. Erst diejenige Gesamtheit von Gleichungen, in denen das Interferenz-

1) II: Diese Zeitschrift 17, 610, 1916.

prinzip wirklich und völlig ausgedrückt ist, bildet das gesuchte Gleichungssystem der betreffenden Welle von elementarer Schwingungsform. In § 5 ist auch schon derjenige Teil dieser Aufgabe erledigt, der die Bedingungen für das Feld des Wellennormalenpaares herauszuschälen hat. Jetzt wollen wir noch die stehengebliebene Restgleichung (13″) für elektromagnetische Wellen auflösen und zum Schluß die Analyse einer Skalarwelle anfügen, wie es die Temperaturwelle ist.

§ 6. **Das Gleichungssystem der elektromagnetischen Welle in gewöhnlichen isotropen Körpern.** Wir schicken einen vektoranalytischen Satz voraus. In demselben Raume seien zwei Vektorfelder $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{w}$. Der letztere sei wirbelfrei, also

$$\operatorname{rot}\mathfrak{w} = 0. \qquad (1)$$

Ferner seien überall beide Felder orthogonal orientiert, also überall

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{w}) = 0, \qquad (2)$$

weshalb auch

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{m}\mathfrak{w}) = 0 = (\mathfrak{m}\nabla)\mathfrak{w} + (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m} + [\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{m}] \qquad (3)$$

ist. Stellen wir jetzt die Forderung auf, daß die Intensitätsverteilung des $\mathfrak{m}$-Feldes mit dem $\mathfrak{w}$-Felde keine Beziehungen eingehe. Zerlegen wir also $\mathfrak{m}$ nach Richtung $\mathfrak{l}$ und Betrag χ, so sollen nach unserer Forderung keine Beziehungen zwischen $\mathfrak{w}$ und χ sowie seinen Ableitungen auftreten. Die Gl. (2) genügt ihr, dagegen nicht ohne weiteres Gl. (3). Multiplizieren wir sie skalar mit $2\mathfrak{w}$, so kommt

$$2(\mathfrak{w}(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m}) = -(\mathfrak{m}\operatorname{grad}\mathfrak{w}^2), \qquad (4)$$

was ebenfalls unsere Forderung wegen (2) befriedigt, da

$$(\mathfrak{w}\nabla)\chi\mathfrak{l} = \chi(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{l} + (\mathfrak{w}\operatorname{grad}\chi)\mathfrak{l}$$

ist. Gleicherweise befriedigt ist Gl. (3) in der Komponente bezüglich der Richtung von $\mathfrak{m}$, nämlich in

$$(\mathfrak{w}\operatorname{grad}\mathfrak{m}^2) - 2([\mathfrak{m}\mathfrak{w}]\operatorname{rot}\mathfrak{m}) = -2(\mathfrak{m}(\mathfrak{m}\;\;)\mathfrak{w}). \qquad (5)$$

Multiplizieren wir dagegen Gl. (3) skalar mit $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$, so kommt

$$(\operatorname{rot}\mathfrak{m}, (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m}) = -(\operatorname{rot}\mathfrak{m}, (\mathfrak{m}\;\;)\mathfrak{w}). \qquad (6)$$

Die Projektion von $(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m}$ auf die Richtung von $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$ muß also frei sein von $\operatorname{grad}\chi$, da es die von $(\mathfrak{m}\;\;)\mathfrak{w}$ ist. Weil nun über $(\mathfrak{w}\operatorname{grad}\chi)$ keine Vorschriften bestehen sollen, muß $(\mathfrak{l}\operatorname{rot}\mathfrak{m})$ verschwinden, also

$$(\mathfrak{m}\operatorname{rot}\mathfrak{m}) = 0 \qquad (7)$$

sein.

Unsere Forderung legt also wegen (1) und (2) dem $\mathfrak{m}$-Felde die Beschränkung auf, daß es flächennormal sei.

Dieser Satz gilt auch für komplexe Felder $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{w}$, da wir über $\operatorname{grad}\mathfrak{l}^2$ uns nicht zu äußern brauchen. Die Voraussetzungen fallen mit denen unseres physikalischen Problems zusammen und die Forderung ist identisch mit der des Interferenzprinzips. Infolgedessen ist das Ergebnis (7) auch für unsere Welle bindend.

Multiplizieren wir nun die erwähnte Restgleichung (13″) in § 5, nämlich

$$\left.\begin{aligned} i\,2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m} + [\operatorname{rot}\mathfrak{m}, \operatorname{grad}\log a_\epsilon] \\ + i(\mathfrak{m}\operatorname{grad}\log a)\mathfrak{w} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

mit $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{rot}\mathfrak{m}, 2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m} + (\mathfrak{m}\operatorname{grad}\log a)\mathfrak{w}) \\ = i(\operatorname{rot}\mathfrak{m}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m}). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Schreiben wir wie in § 5 $\mathfrak{m} = \omega\cdot\mathfrak{l}$, worin der komplexe Einheitsvektor $\mathfrak{l}$ die Richtung von $\mathfrak{m}$ wiedergibt, so ist nach dem vorangegangenen die Komponente von

$$2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m} + (\mathfrak{m}\operatorname{grad}\log a)\mathfrak{w}$$

frei von $\operatorname{grad}\omega$, nämlich proportional ω, also muß das nach (9) auch für die entsprechende Komponente von $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m}$ gelten. Das ist aber unmöglich zu erzielen, deshalb muß sein

$$(\operatorname{rot}\mathfrak{m}\;\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m}) = 0, \qquad (10)$$

was übrigens aus (7), (2) und (1) keineswegs gefolgert werden kann. Der Verlauf der $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$-Linien soll also nach (10) unbeeinflußt sein von der Verteilung ihrer Beträge. Wegen (2) und (7) ist $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$ von der Form

$$\operatorname{rot}\mathfrak{m} = \varrho\mathfrak{w} + \sigma[\mathfrak{m}\mathfrak{w}], \qquad (11)$$

wo

$$\varrho = \frac{(\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{m})}{\mathfrak{w}^2}$$

und

$$\sigma = \frac{([\mathfrak{m}\mathfrak{w}]\operatorname{rot}\mathfrak{m})}{\mathfrak{m}^2\mathfrak{w}^2}$$

noch unbestimmte Funktionen sind, die in

$$\operatorname{div}\varrho\mathfrak{w} + \operatorname{div}\sigma[\mathfrak{m}\mathfrak{w}] = 0 \qquad (12)$$

noch zusammenhängen. Aus (11) entwickeln wir mit Hilfe von (3)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m} = [\operatorname{grad}\varrho, \mathfrak{w}] + \sigma\{2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m} \\ + [\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{m}] + \mathfrak{m}\operatorname{div}\mathfrak{w} - \mathfrak{w}\operatorname{div}\mathfrak{m}\} \\ + [\operatorname{grad}\sigma, [\mathfrak{m}\mathfrak{w}]], \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

so daß mit Rücksicht auf (9)

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{rot}\mathfrak{m}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m}) = (\operatorname{grad}\varrho\,[\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{m}]) \\ -(\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{m})\{\sigma\operatorname{div}\mathfrak{m} + \sigma(\mathfrak{m}\operatorname{grad}\log a) \\ + (\mathfrak{m}\operatorname{grad}\sigma)\} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

wird. In diesem Ausdruck, in welchem die Bedingungen (1) und (2) verwertet sind, soll nun nach (10) der Betrag von $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$ keine Rolle spielen. Das ist nur möglich, wenn $(\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{m}) = \varrho$ überall verschwindet. Wir haben daher

$$(\mathfrak{w}, \operatorname{rot}\mathfrak{m}) = 0 = \operatorname{div}[\mathfrak{m}\mathfrak{w}]; \qquad (15)$$

für σ besteht nach (12) die Vorschrift

$$([\mathfrak{m}\mathfrak{w}]\,\mathrm{grad}\,\sigma) = 0\,. \qquad (16)$$

Nach (9) und (3) ist nun auch

$$(\mathrm{rot}\,\mathfrak{m},\ (\mathfrak{w}\nabla)\,\mathfrak{m}) = 0 = (\mathrm{rot}\,\mathfrak{m},\ (\mathfrak{m}\nabla)\,\mathfrak{w}). \qquad (17)$$

Es liegen also $(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m}$, $(\mathfrak{m}\nabla)\mathfrak{w}$ und $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}$ alle miteinander in der von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{w}$ bestimmten Ebene.

Damit sind jetzt alle Bedingungen gefunden, die auch in der Restgleichung (8) das Wellennormalenpaar $\mathfrak{w}$ unberührt lassen vom Betrage des magnetischen Wellenvektors $\mathfrak{m}$.

Der besseren Übersicht halber stellen wir das gesuchte Gleichungssystem der magnetischen Welle zusammen. Es ist

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m) = 0, \qquad (18)$$

$$(\mathfrak{m}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}) = 0, \qquad (19)$$

$$(\mathfrak{w}_m\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}) = 0, \qquad (20)$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathfrak{m},\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}) = 0, \qquad (21)$$

$$\mathrm{div}\,a_m\mathfrak{m} = 0, \qquad (22)$$

$$\mathfrak{w}_m^2 + i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}_m - i(\mathfrak{w}_m\,\mathrm{grad}\log a_e) - a = 0, \qquad (23)$$

$$\left.\begin{array}{l} i\,2(\mathfrak{w}_m\nabla)\mathfrak{m} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m} + [\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}, \mathrm{grad}\log a_e] \\ \quad + i\,(\mathfrak{m}\,\mathrm{grad}\log a)\,\mathfrak{w}_m = 0\,. \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Da wir nach (7) und (15)

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{m} = i(\chi - 1)\,[\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m]$$

setzen können, worin χ ein noch zu bestimmender Skalar ist, erhalten wir für das elektrische Feld in Abhängigkeit von dem magnetischen nach Gl. (16) im § 5

$$a_e E = \chi\,[\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m]\,e^{i\Phi_m}, \qquad (25)$$

und für die Strahlung[1])

$$\mathfrak{R} = \frac{V}{4}\cdot e^{-2(\nu''t + \Phi''_m)}\,\chi\chi^*\left\{(\mathfrak{m}\mathfrak{m}^*)\left(\frac{\mathfrak{w}_m}{a_e} + \frac{\mathfrak{w}_m^*}{a_e^*}\right) - \left[\frac{\mathfrak{w}_m}{a_e} - \frac{\mathfrak{w}_m^*}{a_e^*},\ [\mathfrak{m}\mathfrak{m}^*]\right]\right\}. \qquad (26)$$

Diese Ausdrücke gelten für **jede** Welle, die durch einen gewöhnlichen isotropen Körper läuft, insbesondere für jede ausgesprochene Beugungswelle sowie für jede durch einen stetig-inhomogenen Körper sich krümmende Welle.

Für den Bau der elektrischen Welle gelten natürlich Gleichungen, die denen der magnetischen vollkommen entsprechen.

Wie sich das Gleichungssystem für die elastische Scherungswelle gestaltet, ist nach diesen Ausführungen unschwer zu entwickeln.

§ 7. **Das Gleichungssystem der Temperaturwelle in gewöhnlichen isotropen und festen Körpern.** Solange in keinem Punkt eine Energieumsetzung statthat, beherrscht das Temperaturfeld Θ die Beziehung

$$c\mu\dot{\Theta} = \mathrm{div}\,\{\lambda\,\mathrm{grad}\,\Theta\} \qquad (1)$$

ohne sonstige Nebenbedingungen. Darin bedeutet μ die Massendichte, c die Wärmekapazität und λ das Wärmeleitvermögen. Für eine Temperaturwelle von elementarer Schwingungsform

$$\Theta = \Theta_0 + {}^1/_2\,\{\vartheta\cdot e^{i(\nu t + \Phi)} + \vartheta^*\cdot e^{-i(\nu^* t + \Phi^*)}\}, \qquad (2)$$

worin Θ_0 eine Konstante ist, nimmt Gl. (1) die Form an

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta\,\{\mathfrak{w}^2 + i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + i\,(\mathfrak{w},\,\mathrm{grad}\log\lambda) - a\} \\ \quad - \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\vartheta + i\,2\,(\mathfrak{w},\,\mathrm{grad}\,\vartheta) \\ \quad - (\mathrm{grad}\,\vartheta,\,\mathrm{grad}\log\lambda) = 0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Der Wellenparameter $a = -i\nu c\mu/\lambda$ hat den gleichen Bau wie der für die Flüssigkeitsscherungswelle[1]).

Das Interferenzprinzip verlangt nun in der hinsichtlich ϑ und Φ zunächst noch willkürlichen Zusammensetzung der Wellengleichung (3), daß, welchen Wert man auch dem Skalar ϑ beilege, Φ und somit $-\mathrm{grad}\,\Phi = \mathfrak{w}$ davon ganz unberührt bleibe. Infolgedessen muß sein

$$\mathfrak{w}^2 + i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + i\,(\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\log\lambda) - a = 0\,. \qquad (4)$$

Auch die Restgleichung

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\vartheta - i\,2\,(\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\,\vartheta) \\ \quad + (\mathrm{grad}\,\vartheta\,\mathrm{grad}\log\lambda) = 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

hat dieser Forderung zu genügen, was $\mathrm{grad}\,\vartheta = 0$, also

$$\vartheta = \mathrm{const} \qquad (6)$$

nach sich zieht. Nun erst ist zum Ausdruck gebracht, daß Temperaturwellen sich weder vereinigen noch zerlegen lassen. Und nun ist ϑ der Wellenskalar und $\mathfrak{w}$ das Wellennormalenpaar. Wir sehen, daß die Intensitätsverteilung der Temperatur ganz vom Felde des Wellennormalenpaares geregelt wird.

Diffusionswellen befolgen die gleichen Gesetzmäßigkeiten. Für Skalarwellen, in denen neben $\alpha\dot{\Theta}$ noch Glieder von der Form $\beta\ddot{\Theta} + \gamma\dddot{\Theta} + \cdots$ auftreten, würde das Interferenzprinzip dieselben Bedingungen wie (4) und (6) fordern; nur der Wellenparameter a würde sich anders zusammensetzen.

1) K. Uller, Die Strahlung in einer Welle von elementarer Schwingungsform (diese Zeitschr. **17**, 369, 1916).

1) K. Uller, Wellen von elementarer Schwingungsform in Flüssigkeiten und Gasen (diese Zeitschr. **17**, 303, 1916).

Gießen, im Juli 1917.

(Eingegangen 14. Juli 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Problem der Materie [1]).

Von Gustav Mie.

I.

Die Aufgabe meiner Vorträge soll sein, einige Probleme und Fragen zu erörtern, die sich der Theorie der Materie, soviel ich sehen kann, zurzeit als die nächstliegenden darbieten. Die Theorie der Materie ist auf das engste verknüpft mit der Theorie der Gravitation; denn wahrscheinlich sind Gravitation und Elektromagnetismus die beiden Urphänomene, die der ganzen Erscheinungswelt zugrunde liegen. Während nun die Gesetze der elektrischen und magnetischen Erscheinungen experimentell eingehend erforscht werden konnten, und die Theorie des Elektromagnetismus ganz auf der experimentellen Erfahrung aufgebaut ist, bietet die Gravitation der Experimentierkunst unüberwindliche Schwierigkeiten, weil man weder Gravitationsfelder von genügender Stärke künstlich im Laboratorium herstellen, noch das vorhandene Feld der Erde willkürlich verändern kann. Dadurch ist die Theorie gezwungen worden, den Weg der reinen Spekulation zu beschreiten, wobei als Führung die in dem Newtonschen Gravitationsgesetz enthaltenen Erfahrungstatsachen dienen müssen, vor allem die Tatsache, daß schwere Masse und träge Masse miteinander proportional sind. Diese Tatsache allein kann uns nicht sehr weit bringen, dazu ist ihr Inhalt doch zu dürftig; man muß zur Spekulation übergehen, einer Forschungsmethode, die in der Physik ziemlich neu und ungewohnt ist. Man geht so vor, daß man Prinzipien ersinnt, die gleichzeitig von großer Allgemeinheit und von großer Fruchtbarkeit sind, und aus denen sich vor allem die experimentell ermittelten Gesetze zwanglos als Konsequenzen herleiten lassen. Solche Prinzipien kennen wir längst in der Geometrie, die ja im Grunde genommen auch nur ein Teil der theoretischen Physik ist, als die sogenannten Axiome, und Hilbert nennt deswegen sehr bezeichnend den hier geschilderten Forschungsweg „die axiomatische Methode". Ein Beispiel für ein Axiom der neueren Physik ist das Hamiltonsche Prinzip, dessen allgemeine Bedeutung zuerst Helmholtz [2]) dargelegt hat, und das auch in meinen Versuchen, eine Theorie der Materie zu finden, eines der Fundamente bildet. Ein anderes Prinzip ist das von der Relativität der Bewegungen, welches H. A. Lorentz und A. Einstein aufgestellt haben. Dieses Prinzip ist, wie Minkowski gezeigt hat, tatsächlich nichts anderes als ein rein geometrisches Axiom, das sich nur dadurch von den alten euklidischen Axiomen unterscheidet, daß es von dem vierdimensionalen Gebiet Raum-Zeit etwas aussagt. Neuerdings hat Einstein ein Prinzip aufgestellt, welches er das allgemeine Prinzip der Relativität nennt, und welches er als eine Erweiterung des Prinzips von der Relativität der Bewegungen, des von ihm sogenannten „speziellen" Relativitätsprinzips ansieht. Auf dieses außerordentlich fruchtbare Prinzip hat Einstein eine wundervolle Theorie der Gravitation aufgebaut, die von Hilbert in interessanter Weise beleuchtet worden ist, und die man wohl als die Lösung des Rätsels von der Gravitation anzusehen hat. Jedenfalls wird es sich in der nächsten Zeit hauptsächlich darum handeln, die beobachtbaren Konsequenzen dieser Theorie zu prüfen und alle Folgerungen dieser Theorie zu entwickeln. Die Theorie der Materie wird die Gravitation nun einfach in der von Einstein fertig dargebotenen Fassung aufnehmen müssen, und in der Tat hat Hilbert nachgewiesen, daß dies ohne weiteres möglich ist. Eine Frage bleibt jedoch noch zu erledigen, und ich glaube zeigen zu können, daß diese Frage gerade für die Theorie der Materie besonders wichtig ist, das ist die Frage nach der physikalischen Bedeutung des sogenannten allgemeinen Relativitätsprinzips. Ich will von vornherein sagen, daß ich hier zu einer anderen Ansicht komme als Einstein. Wir werden sehen, daß das Prinzip, welches der Einsteinschen Theorie zugrunde liegt, doch einen anderen Charakter hat als das ältere Axiom von der Relativität der Bewegungen, und daß die Form, in welcher Einstein es ausgesprochen hat, eine zu große Unbestimmtheit mit sich bringt, als zulässig. Die im folgenden von mir gegebene Fassung des neuen Axioms vermeidet diesen Fehler, zugleich eröffnet sie für die spekulative Methode, auf die wir in der Theorie der Materie angewiesen sind, einen neuen Ausblick.

Um den physikalischen Sinn des Einsteinschen Prinzips der allgemeinen Relativität klar zu machen, will ich mit einem Beispiel beginnen,

1) Dieser Aufsatz gibt im wesentlichen den Inhalt dreier vom 5.—8. Juni in Göttingen gehaltener Wolfskehlvorträge wieder. Zum Teil habe ich die Vorträge nachträglich wesentlich umgearbeitet und erweitert.

2) Aus einer Bemerkung von Herrn Felix Klein habe ich ersehen, daß kurz vor Helmholtz auch J. J. Thomson die allgemeine Bedeutung des Hamiltonschen Prinzips gezeigt hat.



das in Einsteins ersten Veröffentlichungen eine große Rolle spielt, dem geschlossenen Coupé, das beschleunigt durch den Weltraum fährt, und in welchem eine Anzahl Physiker beisammen sind mit allerlei feinen Meßinstrumenten, an denen sie Beobachtungen anstellen. Wenn das Coupé keine Fenster hat, durch welche die Beobachter hindurchsehen können, wird es ihnen dann möglich sein, die beschleunigte Bewegung zu konstatieren? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir unterscheiden, was für eine Kraftwirkung die Beschleunigung hervorruft. Denken wir uns zuerst einmal, daß eine ferne große schwere Masse das Coupé durch die Gravitationskraft in Beschleunigung setzt. Das Coupé könnte ein Planet sein, der nicht um die Sonne herumläuft, sondern kometenartig aus weiter Ferne direkt in radialer Richtung herbeieilt. Da die träge Masse eines jeden Stoffes seiner schweren Masse proportional ist, so heben sich in einem frei fallenden materiellen System in allen seinen Teilen Schwerkraft und Trägheitswiderstand gerade gegeneinander auf. Die Gelehrten in dem Einsteinschen Coupé werden also weder von der Schwerewirkung der Sonne, zu der sie hinstürzen, noch von dem Trägheitswiderstand, der mit der beschleunigten Bewegung verbunden ist, etwas bemerken. Sie müßten also schon nach der Art des Michelsonschen Versuches sehen, ob sie an einem Lichtstrahl nicht den Einfluß der Beschleunigung konstatieren könnten. Und in der Tat, wenn die Materie weiter nichts zeigte, als die Lorentzsche Kontraktion, die mit wachsender Geschwindigkeit des Coupés natürlich immer mehr zunehmen muß, und wenn das Licht sich durch den Raum mit der gewöhnlichen Geschwindigkeit geradlinig fortpflanzte, so müßte der Michelsonsche Versuch in dem Einsteinschen Coupé ein positives Resultat geben. Einstein hat nun untersucht, ob nicht doch Veränderungen in der Materie und im Äther vorhanden sein könnten, die auch in diesem Fall das zu erwartende positive Resultat des Michelsonschen Versuchs und aller ähnlichen Versuche gerade kompensierten. Das Resultat dieser außerordentlich schwierigen Untersuchungen, die sich über viele Jahre erstreckt haben, ist die jetzige Einsteinsche Gravitationstheorie. Ihr liegt die Annahme zugrunde, daß an allen Stellen, wo ein Gravitationspotential herrscht, welches von dem unendlich fern von allen gravitierenden Massen vorhandenen Nullwert verschieden ist, der Äther in all seinen Eigenschaften und Wirkungen durchgängig eine Modifikation erfährt. Das äußert sich in allen Kräften, auch den inneren Kraftwirkungen der Materie, die ja schließlich alle durch den Äther übertragen werden, und die Materie bekommt daher eigentümliche Deformationen, die aber ähnlich wie die Lorentzsche Kontraktion, für alle Körper genau gleich sind und daher von den Gelehrten in dem Einsteinschen Coupé nicht beobachtet werden können, es ändern sich auch träge Masse und überhaupt alle physikalischen Eigenschaften der Materie in derselben unbemerkbaren Weise. Aber auch außerhalb der Materie im leeren Raum macht sich die Veränderung der physikalischen Beschaffenheit des Äthers bemerkbar: Die Lichtgeschwindigkeit ändert sich bei verändertem Gravitationspotential, ein Lichtstrahl, der quer zum Gravitationsfeld geht, wird abgelenkt, beschreibt also eine krumme Linie, in verschiedenen Richtungen ist die Lichtgeschwindigkeit verschieden, aber doch, ohne daß der Äther dabei doppeltbrechend würde. Diese eigentümlichen physikalischen Veränderungen des Äthers können nun, wie in der Einsteinschen Theorie bewiesen wird, gerade den Einfluß der beschleunigten Bewegung auf die Beobachtungen kompensieren und somit alle Bemühungen der Beobachter in dem Coupé, Schwerewirkung und Beschleunigung getrennt nachzuweisen, zuschanden machen. Wie ist es nun aber, wenn der Planet mit dem Coupé durch andere gewaltige Kräfte magnetische oder elektrische oder auch durch die Kraftwirkung eines gewaltigen Motors, der von einem andern Stern mit Hilfe eines Seiles an ihm zieht, in beschleunigte Bewegung versetzt wird? In diesem Fall muß man natürlich die der Beschleunigung entgegengesetzte Trägheitswirkung spüren und man sollte meinen, daß die Gelehrten in dem Einsteinschen Coupé nun die Beschleunigung absolut nachweisen könnten. Um aber einzusehen, daß das nicht der Fall ist, braucht man sich nur zu denken, es befände sich in der der wirkenden Kraft entgegengesetzten Richtung eine sehr große schwere Masse, deren Gravitationswirkung der Kraft gerade das Gleichgewicht hielte. Die Gravitation würde für sich allein eine Beschleunigung hervorbringen, die der wirklich vorhandenen entgegengesetzt gleich wäre, die Gelehrten in dem Coupé würden nicht entscheiden können, ob diese Schwerewirkung und die mit ihr verbundene Beschleunigung (die die zuerst betrachtete gerade aufheben würde) vorhanden wären oder nicht. Es wäre für ihre Beobachtungen demnach dasselbe, ob das Coupé durch das Seil mit beschleunigter Bewegung vorwärts gezogen würde oder ob es still an dem Seil in einem Schwerefeld hinge, wenn nur das Seil in beiden Fällen mit der gleichen Kraft zieht. Sie würden also nicht bloß die Trägheitswirkungen vollständig mit Schwerewirkungen verwechseln

können, sondern auch durch Michelson-Versuche und ähnliche Experimente zwischen beschleunigter Bewegung und Schwerefeldwirkung nicht entscheiden können. In dieser Form erscheint uns das Prinzip der allgemeinen Relativität der Bewegung als ein Prinzip der Äquivalenz von Schwere und Trägheit.

Da es die Aussage einschließt, daß man die beschleunigte Bewegung ebensowenig wie die konstante durch einen Michelsonschen Versuch und ähnliche Versuche nachweisen kann, so liegt es nahe, es für eine Verallgemeinerung des alten Relativitätsprinzips zu halten. Es ist aber für das Folgende von der größten Wichtigkeit, einen ganz fundamentalen Unterschied im Wesen der beiden Prinzipe auf das nachdrücklichste hervorzuheben.

Die Transformationen des alten Relativitätsprinzips der Bewegung sind rein geometrischer Natur, es wird nach der Ausdrucksweise Minkowskis durch sie nur eine Drehung des Koordinatensystems dargestellt, die Transformationen dagegen, die das Prinzip der Äquivalenz der Schwere und der Trägheit zum Ausdruck bringen, sollen (nach Einsteins ursprünglicher Absicht wenigstens) Hypothesen über das Vorhandensein wirklicher materieller Körper, wenn auch für die Beobachter nicht wahrnehmbarer Körper, in sich schließen.

Während es also nach dem Relativitätsprinzip der Bewegung unmöglich ist, von zwei Koordinatensystemen, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit verschieben, das eine als das richtige und das andere als das falsche zu bezeichnen, gerade so wie es unmöglich ist, zwischen zwei im Raum gegeneinander gedrehten Koordinatensystemen einen solchen Wertunterschied zu machen, müssen wir die verschiedenen Koordinatensysteme, die das Einsteinsche Äquivalenzprinzip liefert, als wahr und falsch unterscheiden. Denn, wenn wir einen Körper hypothetisch annehmen, so heißt das doch, daß wir erwarten, die Existenz dieses Körpers, wenn er uns auch zurzeit unbekannt ist, schließlich einmal nachweisen zu können. Wenn beispielsweise unser Fixsternsystem auf einen in ungeheurer Ferne befindlichen riesigen dunklen Weltkörper hinstürzte, so müßten wir erwarten, daß schließlich das Fixsternsystem diesem Körper so nahe kommt, daß man ihn bemerken muß. Es würden schließlich Körper unseres Fixsternsystems auf ihn aufprallen, oder mit großer Geschwindigkeit ihn umkreisen, was man von der Erde aus beobachten könnte, er würde selber auch wohl irgendeine Strahlung aussenden, wenigstens als Reflex der Fixsternstrahlung, er kann Planeten haben, die man vielleicht sieht, usf. Selbst wenn er erst in Zeiten wahrnehmbar würde, wo die Menschheit längst untergegangen ist, so wäre es darum doch immer ein Irrtum, wenn wir seine Existenz leugnen, ein Irrtum, der veranlaßt ist durch die Mangelhaftigkeit unserer Sinnesorgane und Instrumente und die kurze Dauer unserer Beobachtungen, ein Irrtum, wie wir natürlich sehr viele in unserer Wissenschaft haben, ohne daß sie etwas schaden, aber doch immer ein Irrtum, weil die Welt objektiv, unabhängig von unserer Wahrnehmung existiert. Gerade in den Einsteinschen Theorien spielen so oft äußerst feine und zarte Wirkungen eine wichtige Rolle, von denen man sehr viele mit unseren groben Instrumenten niemals beobachten wird, und doch muß man annehmen, daß diese Wirkungen objektiv in der Welt auftreten, wenn man die betreffende Theorie für richtig erklärt; sonst würde man sich selber logisch widersprechen. Nehme ich einen materiellen Körper als existierend an, so muß ich damit zugleich auch annehmen, daß es irgendwelche Wirkungen gibt, wenn auch noch so zarte, durch die er erkennbar ist. Ein materieller Körper, der an sich selbst unwahrnehmbar ist, wäre ein logisches Unding, wie ein viereckiges Dreieck. Und somit enthielte im letzten Grunde das Prinzip der Äquivalenz von Schwere und Trägheit, wenn man es ganz allgemein fassen wollte, in sich selber einen untilgbaren logischen Widerspruch, weil es an sich undenkbar ist, einen wirklichen materiellen Körper durch rein mathematische Operationen in die Welt hinein oder aus ihr heraus zu eskamotieren.

Auf diese Schwierigkeit habe ich übrigens schon vor annähernd vier Jahren in einer Diskussion über die damals noch unvollkommene Einsteinsche Theorie aufmerksam gemacht. Er wird interessant sein, zu sehen, in welcher Weise in der nun vorliegenden vollendeten Theorie sich die einfache Logik der soeben gebrachten Darlegungen mathematisch widerspiegelt.

Um die physikalische Bedeutung des allgemeinen Relativitätsprinzips möglichst gründlich zu erfassen, will ich es einmal von einem andern Standpunkt aus ansehen, nämlich von dem Standpunkt, der für die Theorie der Materie der nächstliegende ist.

Die Theorie der Materie ist, kurz gesagt, die Vorstellung, daß alle elementaren Teilchen der Materie nichts weiter sind als Anhäufungsstellen enormer Energiemengen in sehr kleinen Gebieten des Äthers, Energieknoten, die der Äther ganz aus sich selber hervorbringt. Nach ihr gibt es also nur eine einheitliche Weltsubstanz, die wir Äther nennen, und die kleinen Knotenstellen angehäufter Energie in ihr täuschen uns

nur die Existenz materieller Teilchen vor, die vom Äther verschiedenartig zu sein scheinen. Es wird nun eine der ersten Aufgaben der Theorie sein, zu zeigen, wie sich solche Knotenstellen der Energie, die sich ganz verhalten, als ob sie harte und durch äußere Wirkungen wenig beeinflußbare Korpuskeln wären, herstellen können.

Während man bisher in der Ätherphysik nur Feldstärken kannte, elektrische, magnetische, Gravitations-Feldstärken, behauptet die Theorie der Materie, daß zur vollständigen Beschreibung des Zustandes des Äthers auch die Absolutwerte der Potentiale, also das elektromagnetische Viererpotential, welches sich aus dem elektrischen skalaren Potential und dem magnetischen Vektorpotential zusammensetzt, und das Gravitationspotential unentbehrlich sind. Die Theorie enthält also die Voraussagung, daß es der Experimentierkunst noch gelingen muß, Mittel zu finden, mit denen sie die Absolutwerte der Potentiale selbst in jedem Punkt des Äthers bestimmen kann, wenn sie bisher auch nur Feldstärken oder, was dasselbe ist, Potentialdifferenzen messen konnte. Ich habe vor, in dieser Richtung Versuche über das elektrische Potential anzustellen. Für das Gravitationspotential sagt die Einsteinsche Theorie schon in bestimmter Weise voraus, wie man es beobachten kann, es soll eine Verschiebung der Spektrallinien eines im Gravitationsfeld schwingenden Atoms bewirken, es soll die Lichtgeschwindigkeit beeinflussen usf. Bis zu einem gewissen Grade ist es allerdings willkürlich, wo man den Nullpunkt des Potentials annehmen will, so wie ja auch der Nullpunkt des Gasdrucks oder der Nullpunkt der Temperatur in gewisser Weise willkürlich ist. Aber wie es das Natürlichste ist, den Nullpunkt des Druckes in das Vakuum zu legen, den gasfreien Raum, so ist der natürlich gegebene Nullpunkt für die Potentiale in einem Raum zu suchen, der, unendlich weit entfernt von aller Materie, von elektromagnetischen und von Gravitationsfeldern nicht erreicht wird. Einen solchen Raum werde ich der Kürze wegen im folgenden das „ideale Vakuum" nennen. Im idealen Vakuum setzen wir das elektromagnetische Viererpotential gleich Null, dem Gravitationspotential dagegen soll hier nach Einstein der skalare Wert -1 beigelegt werden.

Eine Zusammenballung kolossaler Energiemengen, die wir als materielles Teilchen beobachten, wäre im Äther nicht möglich, wenn man in den ungeheuer intensiven Feldern der Zusammenballungsstelle, also „im Innern des materiellen Teilchens", dieselben Gesetzmäßigkeiten annehmen wollte, die in den verhältnismäßig schwachen Feldern, mit denen man experimentiert, nachgewiesen worden sind. Vor allem muß unbedingt ein Gesetz fallen, das in der bisherigen Ätherphysik eine sehr wichtige Rolle spielt, nämlich das Superpositionsprinzip. Dieses Prinzip sagt aus, daß das Feld, welches zwei Körper unter irgendwelchen Umständen zusammen hervorrufen, sich aus den Feldern, welche jeder der beiden Körper einzeln unter sonst unveränderten Umständen hervorrufen würde, nach den einfachen Regeln der geometrischen Addition ergibt. Es sagt also aus, daß sich die beiden Felder übereinander lagern, ohne sich gegenseitig zu stören. Wie wichtig dieses Prinzip in der Physik des Äthers ist, sieht man beispielsweise daraus, daß sich zwei Lichtstrahlen nicht glatt durchkreuzen würden, wenn es nicht gültig wäre. Und doch muß es in der Theorie der Materie als ein Näherungsgesetz betrachtet werden, das zwar bei den kleinen Feldstärken, die im eigentlichen Vakuum auftreten, mit einer ganz außerordentlich guten Näherung gilt, das aber im „Innern der materiellen Teilchen", wo infolge der enormen Feldstärken ganz andere Verhältnisse herrschen, vollkommen hinfällig wird. Um zu zeigen, wie die Grundgleichungen der Felder beim Fehlen des Superpositionsprinzips modifiziert werden müssen, will ich die Maxwellschen Gleichungen hinschreiben. Es seien

$\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}$ elektrische Feldstärke und Verschiebung,
$\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$ magnetischer Kraftfluß und Feldstärke,
φ, $\mathfrak{f}$ skalares und Vektor-Potential,
ϱ, $\mathfrak{v}$ elektrische Ladung und Stromstärke,

dann kann man die Maxwellschen Gleichungen folgendermaßen schreiben:

$$\mathfrak{e} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t}$$

$$\mathfrak{b} = \operatorname{rot} \mathfrak{f}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{h} = \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} + \mathfrak{v}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = \varrho.$$

Das Superpositionsprinzip ist gültig, wenn, wie in der Maxwellschen Theorie angenommen wird, $\mathfrak{e}$ genau proportional $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$ genau proportional $\mathfrak{h}$, im reinen Äther speziell $\mathfrak{e} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}$, wenn also Dielektrizität und Permeabilität absolut konstant ($= 1$) sind. Das soll nun in den starken Feldern im Innern der materiellen Teilchen nicht mehr der Fall sein. Man kann hier aber, wenn das Hamiltonsche Prinzip gilt, doch wenigstens die Zusammenhänge zwischen den Größen mit Hilfe einer einzigen Funktion darstellen, die explizit nur von den Zustandsgrößen abhängt, also von all den Größen, die zu einer vollständigen Schilderung des Zustandes des Äthers nötig sind. Diese Funktion habe ich die Weltfunktion genannt, ich pflege sie mit Φ zu

bezeichnen. Die physikalische Bedeutung von Φ ist, daß das Integral von Φ über den von einem „materiellen Teilchen" erfüllten Raumteil gleich der Ruh-Energie oder, was dasselbe ist, gleich der Ruh-Masse des Teilchens ist. Als die Zustandsgrößen, welche zur vollständigen Schilderund des Ätherzustandes notwendig, aber zugleich auch hinreichend sind, nehme ich an, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$, φ, $\mathfrak{f}$, ferner Gravitationspotential und Gravitationsfeldstärke, die ich durch g und $\mathfrak{g}$ andeuten will. Die Weltfunktion ist also:

$$\Phi(\mathfrak{e}, \mathfrak{b}, \varphi, \mathfrak{f}, g, \mathfrak{g}).$$

Dann ist:

$$\mathfrak{d} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{e}}, \mathfrak{h} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{b}}, \mathfrak{v} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{f}}, \varrho = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}.$$

Für sehr kleine Werte der anderen Variabeln und g nahezu -1 muß Φ sich mit einer außerordentlich guten Annäherung als:

$$\Phi = -\frac{1}{2}\mathfrak{e}^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{b}^2 + \Phi_1$$

berechnen lassen, wo Φ_1 von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{b}$ frei ist, dann gilt für sehr kleine Feldstärken, das heißt im idealen Vakuum, das Superpositionsprinzip. Im idealen Vakuum sind dann Dielektrizität und Permeabilität konstant gleich 1; wo die Zustandsgrößen aber sehr stark von den Werten des idealen Vakuums abweichen, wo also der eben hingeschriebene Näherungswert von Φ nicht zu brauchen ist, hängen Dielektrizität und Permeabilität in hohem Maße von dem Zustand ab, in welchem sich der Äther an der betreffenden Stelle befindet.

Ganz Ähnliches läßt sich auch über die Gravitation sagen. Das Charakteristische der Einsteinschen Gravitationstheorie ist, daß in ihr das Potential des Gravitationsfeldes ein vierdimensionaler Tensor ist. Einstein nennt ihn:

$$\begin{matrix} g^{11}, & g^{12}, & g^{13}, & g^{14}, \\ g^{21}, & g^{22}, & g^{23}, & g^{24}, \\ g^{31}, & g^{32}, & g^{33}, & g^{34}, \\ g^{41}, & g^{42}, & g^{43}, & g^{44}, \end{matrix}$$

wobei $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$. Das Potential hat also 10 voneinander unabhängige Komponenten. Die Feldstärke der Gravitation bekommt man durch Differentiation des Potentials nach den Koordinaten: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = i \cdot t$ als:

$$\mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}.$$

Es ist das im Sinne der Minkowskischen Geometrie ein Tensor dritten Ranges, ich will ihn einen Tensoren-Vektor nennen, weil er sich zum gewöhnlichen Tensor so verhält, wie ein Vektor zum Skalar. Im Sinne der allgemeinen Invariantentheorie ist $\mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu}$ übrigens kein Tensor dritten Ranges. Das Einsteinsche Gravitationsfeld hat nicht weniger als 40 Komponenten. In die oben hingeschriebene Weltfunktion Φ sind für g die $g^{\mu\nu}$ und für $\mathfrak{g}$ die $\mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu}$ als Argumente eingesetzt zu denken. Es gibt dann noch einen zweiten Tensorenvektor, den Einstein mit $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ bezeichnet und durch den man das Gravitationsfeld ebenfalls darstellen kann. Man könnte ihn die Erregung des Gravitationsfeldes nennen. Für diesen gelten die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^3}{\partial x_3} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^4}{\partial x_4} = -h_{\mu\nu}$$

wo $h_{\mu\nu}$, ein vierdimensionaler Tensor, die Dichtigkeit der schweren Masse ist. Es klingt zunächst etwas sonderbar, daß die Dichtigkeit der schweren Masse, die uns als spezifisches Gewicht eine der geläufigsten Größen ist, uns hier nicht mehr als einfache Zahl, als Skalar entgegentritt, sondern 10 verschiedene voneinander unabhängige Komponenten haben soll. Aber das Rätsel löst sich gleich, wenn man weiß, daß praktisch in der Materie bei nicht zu großen Geschwindigkeiten die eine der Komponenten h_{44} alle anderen so stark überwiegt, daß die andern dagegen alle gestrichen werden können. Auch die Energie tritt in ähnlicher Weise in der vierdimensionalen Schreibweise der Relativitätstheorie bekanntlich als die (4,4)-Komponente eines Tensors auf. Das Vorwiegen der Komponente h_{44} hat weiter zur Folge, daß von allen vierzig Komponenten des Gravitationsfeldes im allgemeinen nur die $\mathfrak{g}^{44}$ sich in den Kräftewirkungen des Feldes bemerkbar machen, und daß man daher im allgemeinen so rechnen kann, als ob das Gravitationsfeld ein einfacher Vektor wäre. Aber an der Anomalie der Merkurbahn spürt man doch schon das Mitwirken anderer Komponenten, weil der Merkur in einem sehr starken Gravitationsfeld läuft und ziemlich große Geschwindigkeiten hat.

Gravitationserregung und Dichtigkeit der schweren Masse berechnen sich nach dem Hamiltonschen Prinzip als:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu}}, \quad h_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Phi}{\partial g^{\mu\nu}}.$$

Da nun in der Einsteinschen Theorie der Teil von Φ, welcher die Feldstärken $\mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu}$ enthält, vollständig gegeben ist, so kann man den Wert der $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ als Funktion der anderen Zustandsgrößen vollständig hinschreiben. Am einfachsten kann man sie durch die folgenden Gleichungen bestimmen:

$$\mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu} = \sum_\tau^{1\ldots 4} (g^{\mu\tau} \cdot \Gamma_{\tau\sigma}^\nu + g^{\nu\tau} \cdot \Gamma_{\tau\sigma}^\mu).$$

Gerade an dieser expliziten Form der Beziehung, welche die $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\sigma}$ und die $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ verknüpft, sieht man sehr deutlich, daß das Verhältnis der beiden Tensorenvektoren, also diejenige Eigenschaft des Äthers, die im Gravitationsfelde das Analogon zu der Dielektrizität im elektrischen Felde ist, von dem Zustande des Äthers, nämlich vom Gravitationspotential abhängt. Das ist durchaus vergleichbar mit der Tatsache, daß die Dielektrizitätskonstante und andere physikalischen Konstanten eines greifbaren Stoffes von seiner Temperatur und von seinem sonstigen Zustand abhängen. Nur im idealen Vakuum, wo der Tensor der $g^{\mu\nu}$ den skalaren Wert — 1 annimmt, also:

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = g^{44} = -1, \quad g^{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu,$$

wird die Beziehung zwischen den $\mathfrak{g}$ und den Γ rein linear:

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\sigma} = -(\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}),$$

und nunmehr gilt das Superpositionsprinzip für die Gravitationsfelder.

Die Ungültigkeit des Superpositionsprinzips aber im Innern der „materiellen Teilchen" führt uns zu einem Problem, dessen Lösung für die Theorie der Materie von fundamentaler Bedeutung sein wird.

(Fortsetzung folgt.)

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Heidelberg Dr. Ernst Wilke für Chemie.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Lothar Schrutka Edler v. Rechtenstamm zum ord. Professor der Mathematik an derselben Hochschule, der Oberingenieur der Österreichischen Siemens-Schuckertwerke in Wien Oskar Primavesi zum ord. Professor der Elektrotechnik II an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn, an der Technischen Hochschule Warschau Dr. Boleslaus Miklaszewski zum ord. Professor für chemische Technologie und Dr. Stanislaus Gliksell für analytische Chemie.

Berufen: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen Dr. Constantin Carathéodory in gleicher Eigenschaft an die Universität Berlin.

Rücktritt vom Staatsdienst: Der ord. Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Gustav Rasch (unter Verleihung des Titels Geheimer Regierungsrat).

Gestorben: Der a. o. Professor der anorganischen Chemie an der Universität Erlangen Dr. Eduard Jordis (als Bataillonskommandeur auf dem Schlachtfeld gefallen).

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig. Druck von August Pries in Leipzig.

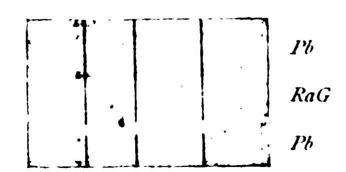


Fig. 1. Die Röntgenspektren [α-Reihe] der Elemente *Pb*—*RaG*.

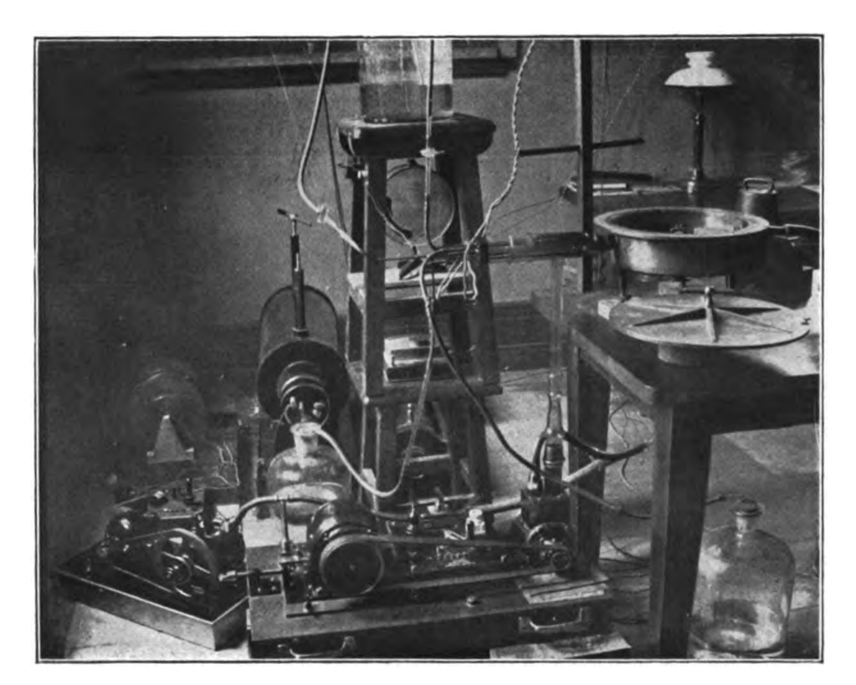


Fig. 3. Versuchsanordnung mit Röntgenrohr zur Aufnahme der *M*-Reihe.

M. Siegbahn u. W. Stenström, Über die Röntgenspektren der isotopischen Elemente.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 23. 1. Dezember 1917. 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 1 am 4. Dezember 1917.

INHALT:

Ernst Pringsheim †.

Am 28. Juni 1917, abends gegen 6 Uhr, erlag der ordentliche Professor der theoretischen Physik an der Universität Breslau, Dr. Ernst Pringsheim, einem Schlaganfalle, mitten aus scheinbar bestem Wohlbefinden und blühender Gesundheit heraus.

Zu dieser Stunde sollte eine Sitzung der Naturwissenschaftlichen Sektion der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur im physikalischen Institut der Universität stattfinden, die Pringsheim als vorsitzender Sekretär mit einem Nekrolog auf den jüngst verstorbenen Mineralogen Carl Hintze eröffnen sollte. Statt dessen kam, wenige Minuten vor Beginn der Sitzung, uns alle überraschend und erschütternd, die Nachricht von seinem jähen Hinscheiden. In tiefer Rührung sprach Lummer einige Worte zum Gedächtnisse seines langjährigen Freundes und Mitarbeiters, und dann wurde die Sitzung vertagt. Am 1. Juli wurde er auf dem Friedhofe der reformierten Gemeinde in Breslau beigesetzt.

Pringsheim war am 11. Juli 1859 in Breslau geboren; er hat also ein Alter von nicht ganz 58 Jahren erreicht. Er besuchte in seiner Vaterstadt das Magdalenen- und Johannes-Gymnasium und widmete sich dann auf den Universitäten Breslau, Heidelberg und Berlin dem Studium der Physik und Mathematik. Besonderen Einfluß gewannen auf ihn Helmholtz und Kirchhoff, und aus diesen Zeiten stammen seine freundschaftlichen Beziehungen zu zahlreichen namhaften Physikern, die aus dem Berliner Laboratorium hervorgegangen sind. 1882 promovierte er zum Doktor der Philosophie, 1886 erfolgte

seine Habilitation für Physik an der Berliner Universität, 1896 wurde er durch Verleihung des Professortitels ausgezeichnet, und 1905 wurde er, nachdem er inzwischen einen Ruf nach Greifswald abgelehnt hatte, als ordentlicher Professor der theoretischen Physik nach Breslau berufen, wohin ihm sein Mitarbeiter Lummer ein halbes Jahr früher vorangegangen war. Hier waren ihm noch 12 Jahre reichen Schaffens und Wirkens vergönnt.

Pringsheims wissenschaftliche Produktion war fast ausschließlich experimenteller Natur; er war ein vortrefflicher, kritischer Beobachter und in seinen Arbeiten zeigt sich ein ausgesprochenes experimentelles Geschick. Gleich in seiner Dissertation tat er den bedeutungsvollen Schritt, zur Untersuchung der ultraroten Wärmestrahlung die Linsen des Spektrometers durch Hohlspiegel zu ersetzen, und er schuf so eine Anordnung, aus der sich unser heutiges Spiegelspektrometer entwickelt hat. In derselben Arbeit verwendete er auch als erster das Radiometer zu Meßzwecken. Er hat damit das Gebiet beschritten, auf dem er später mit Lummer zusammen seine bedeutendsten Arbeiten machen sollte. Einstweilen jedoch behandeln seine der ersten nachfolgenden Arbeiten recht verschiedene Themata; so verband er sich mit dem Jenenser Philologen Schwan zu einer phonometrischen Untersuchung über den französischen Akzent, mit dem damaligen Königsberger Juristen Gradenwitz zur Ausarbeitung einer photographischen Methode zur Rekonstruktion von Palimpsesten. Eine kleine Arbeit ist es nur, von etwa drei Seiten, aber eine Fülle von feinen physikalisch-chemischen Anwendungen enthaltend; mit einem Worte: ein kleines Meisterwerk. Nachdem er sich weiterhin der Frage nach der Art der Elektrizitätsleitung in heißen Gasen zugewandt hatte, erschienen zu Beginn der neunziger Jahre seine Abhandlungen über das Kirchhoffsche Gesetz und die Strahlung der Gase. Während man bis dahin — nach dem Vorgange seines Urhebers — unbedenklich das Kirchhoffsche Gesetz auf die Lichtemission der Gase z. B. im Bunsenbrenner, im Geißlerrohr usw. angewendet hatte, war Pringsheim der erste, der an der Berechtigung dazu zweifelte. Er bemühte sich zu zeigen, daß das Leuchten der farbigen Flammen keine Temperaturstrahlung sei — für eine solche gilt allein das Kirchhoffsche Gesetz —, sondern durch chemische Einflüsse bedingt würde. Er vertrat mit Energie die Ansicht, daß durch Temperaturerhöhung allein die Gase nicht zum Leuchten gebracht werden könnten. Zweifellos ist er damit — wie gerade die unter Lummers und seiner Leitung im hiesigen physikalischen Institut ausgeführten Arbeiten gezeigt haben, — zu weit gegangen; doch hat er das unbestrittene Verdienst, zuerst diese Frage angeschnitten und damit der Wissenschaft einen mächtigen Impuls gegeben zu haben. Insbesondere hat er den großen Unterschied betont zwischen der ultraroten Strahlung der Gase, z. B. der Kohlensäure, und der Lichtemission im Banden- oder Serienspektrum, und darin hat ihm die weitere Forschung durchaus recht gegeben.

Gegen Ende der neunziger Jahre beginnt die Periode gemeinsamen Schaffens mit Lummer. Zunächst veröffentlichten sie eine Arbeit, deren Inhalt ganz abseits liegt: Eine Neubestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärme einiger Gase. Diese Arbeit kann ein Muster exakter experimenteller Forschung genannt werden. Kurz darauf erschienen in rascher Folge die gemeinsamen Untersuchungen über die Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers, über die Energieverteilung im Spektrum desselben und des

blanken Platins, über bolometrische und photometrische Methoden zur Temperaturbestimmung. Die Bedeutung dieser Arbeiten ist zu bekannt, als daß es notwendig wäre, hier näher darauf einzugehen. Nur das eine sei hier betont, daß sie die ursprünglich einzige experimentelle Unterlage und den Anstoß für die kühne Quantenhypothese Plancks bildeten, die jetzt im Begriffe steht, die Grundbegriffe der Physik zu revolutionieren.

Diese gemeinsamen Arbeiten fanden etwa 1905 ihren Abschluß durch die Berufung Lummers nach Breslau, wohin ihm Pringsheim Oktober desselben Jahres als Vertreter der theoretischen Physik nachfolgte.

Es war bereits oben erwähnt worden, daß Pringsheims ganze Arbeitsrichtung experimenteller Natur war; nur eine theoretische Arbeit liegt von ihm vor, nämlich ein außerordentlich einfacher und strenger Beweis des Kirchhoffschen Gesetzes. Durch diese Arbeit wurde er übrigens in eine Polemik mit Hilbert verwickelt, die er schließlich abgebrochen hat, obwohl ihn die Gründe seines Gegners nicht überzeugt hatten. Durch seine Berufung wurde er plötzlich vor andere Aufgaben gestellt, die er mit der ihm eignen Gewissenhaftigkeit und Gründlichkeit zu bewältigen bestrebt war, nämlich die Ausarbeitung seiner Vorlesungen über theoretische Physik. So ist es erklärlich, daß der reiche Strom produktiver Forschung nach seiner Berufung nach Breslau allmählich verebbt ist. Dafür aber sind unter Lummers und seiner Leitung im Breslauer physikalischen Institut auf den von ihm gepflegten Gebieten zahlreiche wertvolle Arbeiten entstanden. Von diesen seien hier nur diejenigen über die Empfindlichkeitskurve des Auges für die verschiedenen Lichtwellenlängen erwähnt, die mittels des von ihm und Lummer konstruierten „Spektralflickerphotometers" ausgeführt worden sind.

Pringsheim hat hier in Breslau einen sechssemestrigen Kursus der theoretischen Physik eingerichtet. (Zwei Semester Mechanik, je eins Wärme, Elektrizität, Optik, kinetische Theorie der Materie und Elektrizität), wozu noch die Übungen im gewöhnlichen Umfange traten. Gelegentlich hat er auch eine kleine Spezialvorlesung über Relativität gehalten, in der sich neben den Studierenden auch fast sämtliche jüngere Dozenten vor seinem Katheder einfanden. Es war die einzige Vorlesung, die ich bei Pringsheim zu hören Gelegenheit hatte. Seine Art vorzutragen, entsprach durchaus seiner Natur: Stets sprach er rein sachlich, gelegentlich die Strenge des Stoffes mit feinem Takte durch einen leisen Humor würzend. So waren seine Vorlesungen nicht minder wie gelegentliche Vorträge im Humboldtverein für Volksbildung für den reifen Hörer ein vollendeter Genuß. Auch wer nicht Gelegenheit hatte, ihn zu hören, kann sich ein Bild von seiner Art machen, wenn er das prächtige Buch „Physik der Sonne" in die Hand nimmt, in dem er seine Berliner Vorlesung gleichen Titels der Öffentlichkeit übergeben hat. Auch hier zeigt sich glänzend seine pädagogische Begabung und seine lichtvolle Klarheit der Darstellung. Sie eignete ihm nicht nur in wissenschaftlichen Dingen; auch bei geschäftlichen Verhandlungen in Fakultät und Senat mußten diese Eigenschaften ihn zu einem äußerst geschätzten Mitgliede der Universität machen. Es war oft glänzend, wie er in schwierigen Fragen den Nagel auf den Kopf traf, und eine verfahrene Situation mit einem treffenden Witzwort löste, das die Spannung beseitigte und bei den Beteiligten kein Unbehagen hinterließ. So wuchs sein Einfluß in Breslauer Universitätskreisen rasch, und gerade im Todesjahr berief ihn das Ver-

trauen der Kollegen zur Würde des Dekans der philosophischen Fakultät. Nach zehnmonatlicher glänzender Geschäftsführung entriß ihn uns der unerbittliche Tod.

Uns allen, seinen Kollegen und seinen Schülern, wird sein Gedächtnis in Ehren stehen als das eines makellosen, vornehmen und liebenswürdigen Mannes; sein Wirken und seine Persönlichkeit werden im Breslauer Institut nicht vergessen werden.

Clemens Schaefer.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit.

Von Karl Federhofer.

Das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit

$$L_i = \min$$

in Verbindung mit der Gleichheit der inneren Arbeit L_i und der äußeren Arbeit L_a kann nach dem Lorenzschen Ansatze[1]) durch die gleichwertige Bedingung

$$L_i - 2L_a = \text{Extrem}$$

ersetzt werden. Man gewinnt einen gegenüber der Lorenzschen, mit Benutzung der Methode von Ritz gegebenen Beweisführung einfacheren Beweis dieses Satzes durch dessen unmittelbare Herleitung aus dem Kirchhoffschen Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, die nachstehend gezeigt werden soll.

Dieses Prinzip lautet für den elastisch-festen Körper bei Voraussetzung des Hookeschen Elastizitätsgesetzes bekanntlich:

$$\Sigma \mathfrak{P}\, \delta s - \delta L_i = 0, \qquad (1)$$

wenn δs die virtuelle Verschiebung des Angriffspunktes einer äußeren Kraft, $\mathfrak{P}$ und L_i die in den Formänderungsgrößen ausgedrückte Formänderungsarbeit bedeutet. Die Gesamtheit der Kräfte $\mathfrak{P}$, die nach den Achsenrichtungen x, y, z die Komponenten X, Y, Z besitzen, ruft in dem Körper eine Formänderuug hervor, wobei sie eine Arbeit

$$L_a = \frac{1}{2} \sum (X\xi + Y\eta + Z\zeta) \qquad (2)$$

leisten, wenn ξ, η, ζ die in den Achsenrichtungen genommenen Arbeitswege bedeuten und die Kräfte allmählich von Null bis zu den gegebenen Werten X, Y, Z anwachsen.

1) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 57, 543, 1913; diese Zeitschr. 14, 71, 1913.

Nun unterwerfen wir den deformierten Körper einer virtuellen Verschiebung, bei der sich die Verschiebungskomponenten um $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ ändern mögen; dann beträgt die Verschiebungsarbeit der äußeren Kräfte

$$\Sigma \mathfrak{P}\, \delta s = \Sigma (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta).$$

Da in Gleichung (1) solche geometrisch mögliche Formänderungszustände verglichen werden, die alle zu denselben Lasten gehören, so ist auch wegen (2):

$$\Sigma \mathfrak{P}\, \delta s = 2\delta L_a.$$

Hiermit lautet Gleichung (1):

$$2\delta L_a - \delta L_i = 0$$

oder

$$\delta (L_i - 2L_a) = 0$$

und hiernach

$$L_i - 2L_a = \text{Extrem}.$$

Für den sich tatsächlich einstellenden Formänderungszustand besitzt also die Differenz aus der Formänderungsarbeit und der doppelten Arbeit der äußeren Kräfte einen extremen Wert, und zwar handelt es sich hier, wie Prof. v. Kármán gezeigt hat, um ein Maximum.

Graz, am 1. Oktober 1917.

(Eingegangen 13. Oktober 1917.)

Über Schwebungen.

(Zugleich als Erwiderung an Herrn Budde.)

Von E. Waetzmann.

§ 1. Fragestellung.

Man pflegt das Auftreten von Schwebungen in folgender Weise herzuleiten: Gegeben sind zwei ungedämpfte sinusförmige Schwingungen von gleicher Amplitude und der anfänglichen Phasendifferenz Null, die sich ungestört, d. h.

rein additiv überlagern. Die Schwingungszahlen p und q sollen nahe aneinander liegen, so daß $p-q$ eine sehr kleine Zahl ist. Die Resultierende

$$y = A \sin 2\pi p t + A \sin 2\pi q t \qquad (1)$$

kann in der Form

$$y = 2A \cos 2\pi \frac{p-q}{2} t \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t \qquad (2)$$

geschrieben werden. Die rechte Seite von Gleichung (2) wird dann als Ton von der Schwingungszahl $\frac{p+q}{2}$ mit der variablen Amplitude

$$2A \cos 2\pi \frac{p-q}{2} t$$

gedeutet. Diese Variation der Amplitude ergibt pro Sekunde einen $p-q$ maligen Wechsel der Intensität.

Es wird demgemäß aus Gleichung (2) auf zweierlei geschlossen, erstens auf das Vorhandensein eines bestimmten Tones, nämlich des Tones $\frac{p+q}{2}$, und zweitens auf einen $p-q$ mal in der Sekunde erfolgenden Intensitätswechsel dieses Tones.

Gegen den ersten Teil der Deutung von (2) habe ich in einer früheren Arbeit[1]) Einwände erhoben. Ferner habe ich in dieser Arbeit allgemein klarzustellen versucht, aus welcher rein formalen Darstellung einer aus mehreren Tönen zusammengesetzten Kurve auf das Vorhandensein bestimmter Töne geschlossen werden darf, und habe endlich positive Aussagen über die Schwebungstöne gemacht.

Da Herr Budde[2]) meine Einwände für nicht stichhaltig hält, und auch meinen sonstigen Ausführungen eigene Ausführungen „gegenübergestellt", die mir zum großen Teil auf einem Mißverständnis meiner früheren Auseinandersetzungen zu beruhen scheinen, möchte ich mir im folgenden erlauben, nochmals etwas ausführlicher auf die strittigen Fragen zurückzukommen. Vorausschicken möchte ich, daß ich den an sich sehr interessanten Buddeschen Ausführungen, soweit sie sachlich wirklich im Gegensatz zu den meinigen stehen, nicht beizupflichten vermag.

§ 2. Schwebungskurven bei gleichen Amplituden der Primärtöne.

Wir beschränken uns zunächst auf den in § 1 erwähnten einfachsten Fall, daß die Amplituden der beiden Primärtöne gleich sind. Es wird behauptet, daß die Schwingungszahl der Resultierenden in diesem Falle konstant $= \frac{p+q}{2}$ ist, und daß damit Gleichung (2) das Vorhandensein eines bestimmten Tones von gegebener Schwingungszahl beweist.

Wenn wir schon außerhalb des Ohres von einem „Ton"[1]) sprechen, so ist das nur eine abgekürzte Bezeichnungsweise für einen rein physikalischen Vorgang. Wir verstehen darunter eine Sinusschwingung von bestimmter Schwingungszahl und Amplitude. Nimmt die Amplitude allmählich zu oder ab, so nennen wir diesen Vorgang auch noch einen Ton, und zwar an- oder abklingenden Ton. Das eigentliche Charakteristikum des Tones im Außenraum ist also die Schwingungszahl, indem per definitionem der „Ton" ein anderer wird, wenn sich die Schwingungszahl ändert. Das ist ein für die Würdigung der Buddeschen Bedenken grundsätzlich wichtiger Punkt.

Für die Beschreibung der Vorgänge im Ohre selbst sind dann noch spezielle Zusatzhypothesen über das Zustandekommen der Nervenreizungen notwendig. Auf diese Fragen kommen wir in § 4 zurück.

Zunächst wollen wir uns die charakteristischen Merkmale einer Schwebungskurve außerhalb des Ohres, soweit sie für unsere Zwecke von Wichtigkeit sind, auf möglichst einfache Weise vor Augen führen. Wir haben hierbei besonders auf die Schwingungsanzahl zu achten. Wenn wir von der Schwingungsanzahl oder Schwingungsdauer einer komplizierten Kurve sprechen, so müssen wir von vornherein genau festsetzen, was wir darunter verstehen wollen. Solange die Schwingung derart beschaffen ist, daß zwischen zwei Umkehrpunkten stets die Ruhelage durchschritten wird, ist es m. E. das physikalisch Richtige, als Dauer einer Schwingung die Zeitdauer von einem Durchgangspunkt durch die Ruhelage bis zum übernächsten Durchgang zu rechnen. Bei gegebener Schwingungszahl pro Sekunde kann noch die Dauer der einzelnen Schwingungen innerhalb dieser Sekunde eine verschiedene sein, und ferner können innerhalb einer Schwingung die Abstände der äußeren Nullstellen von der mittleren ungleich sein. Bei dem Schwingungsvorgang, der durch Gleichung (2) dargestellt wird, tritt unter speziellen Verhältnissen tatsächlich das eine oder andere oder beides ein. Wir wollen das Gesagte an einigen Zahlenbeispielen erläutern.

p und q sollen für die Beispiele dieses und

1) E. Waetzmann, diese Zeitschr. **12**, 231, 1911. (Waetzmann I.)

2) E. Budde, diese Zeitschr. **18**, 285, 1917. (Budde I.)

1) E. Waetzmann, Die Resonanztheorie des Hörens. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1912, S. 86 ff. (Waetzmann II.)

des folgenden Paragraphen die relativen Schwingungszahlen der Primärtöne bedeuten, so daß ihr größter gemeinsamer Teiler stets $= 1$ ist. Als Zeiteinheit haben wir dann die Dauer einer Periode zu wählen. Um Arbeit beim Zeichnen zu sparen, nehmen wir p und q sehr klein an; für größere Zahlenwerte erhält man entsprechende Kurven.

I. Es sei $p = 5$ und $q = 4$. Die Primärtöne und die Resultierende sind in Fig. 1 gezeichnet.

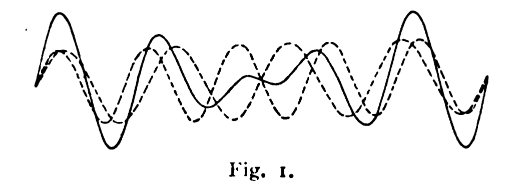


Fig. 1.

Während die Schwingungsdauer im Maximum und bis in die Nähe des Minimums konstant

$$= \frac{2}{p+q} = \frac{2}{9}$$

einer Periode ist, springt sie im Minimum selbst in

$$\frac{1}{p+q} = \frac{1}{9}$$

einer Periode um.

Daß das eintreten muß, sieht man ohne genaues Zeichnen der Resultierenden sehr leicht, wenn man zunächst den Faktor

$$2A \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$$

von Gleichung (2) mit einem Phasensprung von der Größe π an der Stelle $t = \frac{1}{2}$ betrachtet (Fig. 2) und nun die Amplitude von $t = 0$ und $t = 1$ aus nach der Mitte zu allmählich abnehmen läßt.

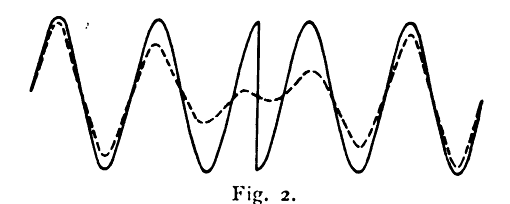


Fig. 2.

Auch aus Formel (2) selbst ist das leicht zu sehen, denn sie zeigt, daß Nullstellen eintreten für die Zeitmomente

$$t' = \frac{\mathfrak{k}}{p+q}, \text{ wo } \mathfrak{k} = 0, 1, 2 \ldots . p+q-1$$

ist, und für die Zeitmomente

$$t'' = \frac{2\mathfrak{k}+1}{2(p-q)}, \text{ wo } \mathfrak{k} = 0, 1, 2 \ldots p-q-1$$

ist. Ist also $p - q = 1$, so ist der Abstand der Nullstelle im Minimum, $t'' = \frac{1}{2}$, von den rechts und links benachbarten Nullstellen halb so groß wie die übrigen Abstände je zweier Nullstellen.

Die „Schwingungszahl" der Resultierenden springt also im Minimum in die höhere Oktave um, und es hat im Falle $p - q = 1$ keinen physikalischen Sinn, von einem Phasensprung in der Resultierenden zu sprechen. Wir kommen auf diesen Punkt noch zurück.

II. Es sei $p = 7$ und $q = 5$. Wir zeichnen zunächst wieder die Kurve

$$2A \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$$

mit den dem Faktor

$$\cos 2\pi \frac{p-q}{2} t$$

der Gleichung (2) entsprechenden Phasensprüngen an den Stellen

$$t = \frac{1}{4} \text{ und } t = \frac{3}{4}.$$

Fig. 3.

Denken wir uns die Amplitude in Fig. 3 nach den Stellen

$$t = \frac{1}{4} \text{ und } t = \frac{3}{4}$$

hin je von beiden Seiten allmählich abnehmen, so haben wir damit wieder ohne genauere Zeichnung ein ungefähres Bild der Resultierenden, aus dem wir das, was für uns von Interesse ist, entnehmen können. Dieses Bild zeigt uns, daß es im vorliegenden Falle und in entsprechenden Fällen auch noch physikalischen Sinn hat, die Resultierende als Kurve von konstanter Schwingungszahl mit Phasensprüngen anzusehen.

III. Betrachten wir endlich noch einen in der Mitte zwischen I und II liegenden Fall, wo die Phasensprünge in der Kurve

$$2A \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$$

nicht durchweg an Stellen maximaler Elongation oder von Durchgängen durch die Nullage stattfinden. Es sei $p = 7$ und $q = 4$. Die Phasensprünge finden dann in den Zeitmomenten $t = \frac{1}{6}$, $t = \frac{3}{6}$ und $t = \frac{5}{6}$ statt.

Lassen wir wieder die Amplitude nach

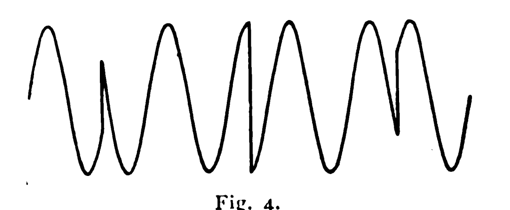


Fig. 4.

diesen Stellen hin allmählich abnehmen, so sehen wir in der Resultierenden an der Stelle $t = \frac{1}{2}$ Frequenzverdoppelung und an den Stellen $t = \frac{1}{6}$ und $t = \frac{5}{6}$ Frequenzänderung mit ungleichen Hälften einer Schwingung.

Wenn also die Resultierende selbst und nicht immer nur die spezielle Art betrachtet wird, wie man sie aus Gleichung (2) entstehen lassen kann, so sieht man, daß es physikalisch keinen Sinn hat, durchweg eine konstante Schwingungszahl $\left(\frac{p+q}{2}\right.$ mal der Periodenzahl$\left.\right)$ und Phasensprünge anzunehmen. Vielmehr ist die ungezwungene physikalische Vorstellung, die ein richtiges Bild der Resultierenden gibt, die folgende: Minima treten auf an den Stellen $\cos 2\pi \frac{p-q}{2} t = 0$, also $p-q$ pro Periode. Die hinzutretenden Bedingungen sind: a) für ausgesprochenen Phasensprung:

$$\sin 2\pi \frac{p+q}{2} t = 0$$

an der Stelle t''. b) für Frequenzverdoppelung:

$$\sin 2\pi \frac{p+q}{2} t = \pm 1$$

an der Stelle t'' und c) für andere Frequenzänderung komplizierter Art:

$$\sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$$

zwischen 0 und $\pm$ 1 an der Stelle t''.

Die Darstellung der Resultierenden durch Gleichung (2) hat natürlich auch ihre Vorzüge, namentlich zeigt sie sehr durchsichtig das Schwanken der Intensität. Auf der anderen Seite ist (2) aber nur eine mögliche, und zwar vom Standpunkt der Resonanztheorie aus völlig willkürliche, formale Darstellung, die ebensogut durch eine andere, z. B. (1) ersetzt werden kann. Wenn das Hauptinteresse nicht den Intensitätsschwankungen zugewandt ist, sondern gefragt wird, welche Töne da sind, so ist im Außenraum (1) nicht nur der Form (2) vorzuziehen, sondern es ist vom Standpunkt der Resonanztheorie aus sogar die einzig mögliche Form, und für das Innenohr reicht weder die Darstellung (1) noch (2) zur Beantwortung der gestellten Frage aus.

§ 3. Schwebungskurven bei ungleichen Amplituden der Primärtöne.

Bevor wir der Frage näher treten, welche Töne bei Schwebungen gehört werden, müssen wir noch kurz die Schwebungskurven mit ungleichen Amplituden der Primärtöne betrachten, zumal gleiche Amplituden in Wirklichkeit die Ausnahme bilden. Ich schicke aber voraus, daß wir hierbei auf die Hauptschwierigkeiten nicht näher eingehen und uns auf die Erörterung des Notwendigsten beschränken.

Wir schreiben mit Helmholtz[1]) den Ausdruck

$$y = A \sin 2\pi p t + B \sin 2\pi q t \qquad (3)$$

in der Form

$$y = C \sin(2\pi(pt - \varepsilon)), \qquad (4)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} A + B\cos 2\pi(p-q)t &= C\cos 2\pi\varepsilon \\ B\sin 2\pi(p-q)t &= C\sin 2\pi\varepsilon \end{aligned}\right\} (5)$$

also

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos 2\pi(p-q)t} \qquad (5')$$

und

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{B\sin 2\pi(p-q)t}{A + B\cos 2\pi(p-q)t} \qquad (5'')$$

ist. C und ε sind langsam veränderliche Funktionen der Zeit. Entsprechend wird (4) von Helmholtz, Taylor[2]) und anderen als ein in der Höhe allmählich sich ändernder „Ton" mit veränderlicher Amplitude gedeutet, wobei die Tonhöhe in jedem Moment durch den Ausdruck

$$p - \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{pA^2 + qB^2 + (p+q)AB\cos 2\pi(p-q)t}{A^2 + B^2 + 2AB\cos 2\pi(p-q)t}$$

gegeben ist. (6)

Inwieweit die Helmholtzsche und Taylorsche Darstellung im einzelnen zutreffend ist, wollen wir hier nicht untersuchen. Jedenfalls ist in der durch (3) oder (4) dargestellten Resultierenden die Schwingungszahl nicht konstant, sondern veränderlich. Als Beispiel wählen wir (wie in Fig. 1 und 2) $p = 5$ und $q = 4$, aber $A : B = 3 : 2$.

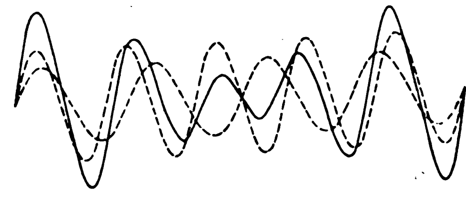


Fig. 5.

1) Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen, 5. Ausg., Beilage XIV. Daß Helmholtz mit Geschwindigkeiten und nicht mit Elongationen gerechnet hat, ist für unsere Zwecke unwesentlich.

2) S. Taylor, Phil. Mag. **44**, 56, 1872.

Ein Vergleich der Fig. 1 und 5 zeigt folgendes: Während für $A = B$ die Schwingungszahl der Resultierenden $= \frac{p+q}{2}$ ist, bis auf die eine Schwingung im Minimum, die in die höhere Oktave $p + q$ umspringt, ist für $A > B$ die Schwingungszahl im Minimum zwar $> p$, aber $< p + q$ und im Maximum $< p$, aber $> \frac{p+q}{2}$; die angegebenen Zahlen immer multipliziert mit der Periodenzahl. Je größer das Verhältnis $A : B$ wird, um so näher rückt die Schwingungszahl der Resultierenden sowohl im Minimum als auch im Maximum an p heran.

Ist umgekehrt $A < B$ für $p = 5$ und $q = 4$, so ist die Schwingungszahl im Minimum $< q$, während sie im Maximum zwar $> q$, aber $< \frac{p+q}{2}$ ist.

Wir können uns mit der Behandlung dieses einen Beispieles begnügen, da aus ihm die für unsere Zwecke wesentlichen Punkte bereits klar zu ersehen sind.

Budde bringt Gleichung (3) auf die Form

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos 2\pi (p - q) t} \,. \quad (7)$$
$$\sin \left[2\pi \frac{p+q}{2} t + \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{A - B}{A + B} \operatorname{tg} 2\pi \frac{p-q}{2} t \right) \right]$$

und deutet (7) ebenso wie (2) als Schwingung von der Kreisfrequenz $2\pi \frac{p+q}{2}$ mit variabler Amplitude. Auch in seiner letzten Arbeit hält er ausdrücklich an seiner Deutung von (7) fest und erweitert damit noch die von Helmholtz, Taylor, Starke[1]) und anderen auf Grund von (2) geübte Art der Herleitung von Tönen. Mir ist die Buddesche Auffassung in bezug auf (7) nicht verständlich und meines Erachtens lehrt allein schon das oben Gesagte und ein Blick auf Fig. 5, daß sie unhaltbar ist.

§ 4. Über die Höhe der gehörten Töne.

Wir wollen annehmen, daß eine im Außenraum verlaufende Schwebungswelle unverzerrt in das Innenohr übertragen wird. In der Regel ist das in Wirklichkeit zwar nicht der Fall, für unsere Zwecke können wir aber unbedenklich mit dieser vereinfachenden Annahme rechnen.

Wenn wir nun irgend etwas über die zu erwartenden Tonhöhen aussagen wollen, so müssen wir zunächst irgendeine Annahme über die Schwingungsvorgänge im Innenohr und über die Art der Reizung der Hörnerven machen. Vom Standpunkte der Resonanztheorie des Hörens aus ist dann folgendes zu erwarten: Je nach dem Grade der Dämpfung der Ohrresonatoren muß die Größe des Intervalls, bei welchem noch Schwebungen zu hören sind, verschieden sein. Wäre die Dämpfung so gering, daß bei einem Abstand von einer Schwingung zwischen einem erregenden Ton und dem Eigenton eines Ohrresonators ein merkliches Mitschwingen desselben nicht mehr stattfindet, so müßten schon bei Schwebungskurven, deren Primärtöne um nur zwei Schwingungen auseinanderliegen, für das Gehör die Schwebungen verschwinden, und die beiden Primärtöne müßten glatt abfließend, ungestört nebeneinander gehört werden.

Tatsächlich sind aber auch bei verhältnismäßig großen Intervallen Schwebungen zu hören, so daß, entsprechend den physiologischen Verhältnissen, eine ziemlich bedeutende Dämpfung der Ohrresonatoren angenommen werden muß. Um einen Überblick zu bekommen, stellen wir uns der Einfachheit halber das Mitschwingen der Ohrresonatoren zunächst sehr schematisch so vor, als ob immer nur ein Resonator gleichzeitig von beiden Primärtönen in Schwingungen versetzt würde. Der Ausdruck (1) oder (2) bzw. (3) oder (4) oder (7) soll jetzt die Schwingungsform dieses Ohrresonators darstellen. Welche Höhe der zugehörige Ton hat, bzw. ob überhaupt nur ein einzelner Ton von konstanter Höhe vorhanden ist, läßt sich aber aus den Ausdrücken (2) oder (4) oder (7) ebensowenig schließen, wie aus (1) oder (3).

Zur Feststellung der Tonhöhe sind vielmehr noch weitere Hypothesen notwendig, oder richtiger, wir müssen experimentell prüfen, was man hört und uns das Gehörte durch Zusatzhypothesen zur Resonanztheorie des Hörens verständlich zu machen suchen. Hierfür sind schon in meiner früheren Arbeit zwei Möglichkeiten diskutiert worden[1]). Die erste, wahrscheinlichere, ist die, daß die Lehre von den spezifischen Sinnesenergien auch in der speziellen Helmholtzschen Fassung richtig ist. Dann bringt jeder Nerv, wie er auch erregt wird, immer die gleiche Tonhöhe zur Empfindung. Sowohl im Falle (2), wo die Schwingungszahl zur Zeit der Minima in die höhere Oktave umspringt, als auch im Falle (4), wo sich die Schwingungszahl vom Maximum zum Minimum dauernd ändert, könnte dann nur ein konstanter Ton gehört werden. Die zweite, unwahrscheinlichere, Möglichkeit ist die, daß die Helmholtzsche Lehre von den spezifischen Sinnesenergien falsch ist, und dann ist die nächstliegende Annahme die, daß der gereizte Nerv in jedem Moment die Tonhöhe zur Empfindung bringt, die der jeweiligen Schwingungsdauer entspricht.

1) H. Starke, Verh. d. D. phys. Ges. 10, 285, 1908.

1) Waetzmann I, S. 236.



Auch **Helmholtz** operiert gelegentlich mit dieser Annahme. Er gibt an, daß für ungleiche Amplituden der Primärtöne ein Schwanken der Höhe „des" schwebenden Tones zu hören sei, und führt das auf die Änderung der Schwingungsdauer in der Resultierenden, wie sie Gleichung (4) zeigt, zurück. Hierbei läßt **Helmholtz** außer acht, daß er damit seiner Lehre von den spezifischen Sinnesenergien widerspricht. Ferner aber nimmt er stillschweigend, und **Taylor**[1]) ausdrücklich, an, daß bei gleichen Amplituden der Primärtöne ein Schwanken der Tonhöhe nicht stattfinden könne, weil hier die Schwingungsdauer durchweg konstant $= \frac{2}{p+q}$ sei, eine Behauptung, die, wie wir in § 2 gesehen haben, irrig ist und auf die einseitige Betrachtung des Faktors $\sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$ in der Darstellung (2) für die Resultierende zurückzuführen ist.

Es ist das Verdienst **Buddes**, in einer sehr interessanten früheren Arbeit[2]) auf eine Möglichkeit hingewiesen zu haben, Tonhöhenschwankungen bei Schwebungen auch ohne Verletzung des Prinzips der spezifischen Sinnesenergien herzuleiten. **Budde** versucht diese Herleitung auf Grund der allgemein geltenden und von O. **Fischer**[3]) weiter gebildeten Vorstellung, daß nicht ein einzelner Ohrresonator die schwebenden Schwingungen ausführt, sondern immer ein ganzer Bereich. Wenn ich mich auch mit den **Budde**schen Ausführungen in der zitierten Arbeit im einzelnen durchaus nicht identifizieren möchte, so scheint mir mit ihnen doch ein wichtiger neuer Hinweis für die Weiterentwicklung unserer Anschauungen über die Tonhöhen bei Schwebungen gegeben zu sein.

Das bisher vorliegende experimentelle Material über die Tonhöhe bei Schwebungen ist äußerst dürftig. Es würde uns hier zu weit führen, auf die Einzelheiten einzugehen. Es sollte nur besprochen werden, welche Möglichkeiten für die Herleitung der Schwebungstöne vom Standpunkte der Resonanztheorie des Hörens aus vorliegen.

Im wesentlichen ist das in diesem Paragraphen Gesagte eine Wiederholung von Dingen, die ich bereits in meiner früheren Arbeit ausgeführt habe[4]). Diese Wiederholung war aber notwendig, weil die Arbeit **Buddes** in folgenden 2 Bemerkungen gipfelt[5]):

1. Für das Auftreten eines zwischen den Primärtönen liegenden schwebenden Tones gebe Gleichung (1) (bei **Budde** Nr. 7) für sich allein durchaus keinen Anhalt; „man muß, um es zu erklären, die Unschärfe der Resonanz im Ohre zu Hilfe nehmen".

2. Neben dem **Ohm**schen Gesetz komme „für jeden, der sich auf die Grundlage der **Helmholtz**schen Theorie stellt, das Prinzip der spezifischen Sinnesenergien in Betracht, und zwar mit gleicher Berechtigung wie jenes".

Wer meine frühere Arbeit nicht gelesen hat, muß aus der **Budde**schen Darstellung schließen, daß ich gegen die zitierten Sätze verstoßen habe. Demgegenüber muß ich betonen, daß ich in den **Budde**schen Bemerkungen absolut nichts finden kann, was meinen Ausführungen widerspricht, und was nicht im Gegenteil bereits von mir völlig klar und unmißverständlich auseinandergesetzt worden ist. In bezug auf Einzelheiten muß ich auf die Originalarbeiten verweisen und möchte zur Begründung des Gesagten nur einige besonders charakteristische Sätze zitieren.

Zu der 1. **Budde**schen Bemerkung erinnere ich an die Sätze: „Da die auf das Ohr auftreffende Schwebungskurve durch die Ohrresonatoren in ihre ursprünglichen Bestandteile zerlegt wird, und da erst infolge der Dämpfung in den zwischen p und q liegenden Resonatoren neue schwebende Schwingungen entstehen ...."[1]), und an: „Wäre die Dämpfung der Ohrresonatoren so schwach, oder die Resonanzschärfe so ausgeprägt, daß auf jeden Ton nur eine einzige Faser anspräche, so müßten die beiden Töne glatt abfließend ohne Schwebungen nebeneinander gehört werden"[2]).

Zu der 2. **Budde**schen Bemerkung möchte ich folgende Sätze anführen: „Es liegen nun zwei Möglichkeiten vor. Entweder, die Ohrresonatoren besitzen spezifische Energien im **Helmholtz**schen Sinne, d. h., jeder Ohrresonator bringt, wie er auch erregt werden mag, nur eine bestimmte Tonhöhe zur Empfindung. In diesem Falle müßte der schwebende Ton von konstanter Höhe sein ...."[3]). Ich habe dann des weiteren noch die von **Budde** gar nicht ins Auge gefaßte Möglichkeit diskutiert, daß die Lehre von den spezifischen Sinnesenergien in dem speziellen **Helmholtz**schen Sinne nicht richtig ist.

§ 5. Folgerungen aus den §§ 2—4.

In meiner früheren Arbeit habe ich es für irreführend erklärt, aus (2) das Auftreten eines

1) Taylor, l. c.
2) E. Budde, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 369, 1916. (Budde II.)
3) O. Fischer, Ann. d. Phys. (4) **25**, 118, 1908.
4) Waetzmann I, S. 234 ff.
5) Budde I, S. 288.

1) Waetzmann I, S. 236.
2) Waetzmann II, S. 92.
3) Waetzmann I, S. 236.

Tones von der Schwingungszahl $\frac{p+q}{2}$ herzuleiten und habe allgemein gesagt, „daß das Auftreten eines Sinus als Faktor eines Produktes, dessen anderer Faktor auch eine Funktion der Zeit ist, das Vorhandensein eines Tones von der betreffenden Schwingungszahl weder physikalisch noch physiologisch verständlich zu machen vermag". Herr Budde hat nun darin recht, daß der Satz in dieser Fassung zu allgemein ist, denn es würde unter ihn auch der Ausdruck $e^{-bt} \sin 2\pi pt$ fallen, aus dem allgemein und mit Recht auf das Vorhandensein des Tones p geschlossen wird. Allerdings möchte ich darauf hinweisen, daß schon durch den Zusammenhang, in dem der Satz steht, Mißverständnisse ziemlich ausgeschlossen sind, und daß außerdem der herangezogene Spezialfall ausdrücklich ausgenommen wird mit den Worten[1]): „Ein langsam abklingender Ton wird ja auch als einfacher Ton empfunden, obwohl hier wie dort eine allmähliche Amplitudenänderung eintritt". Aber selbstverständlich hätte der Satz so formuliert sein müssen, daß er auch außerhalb des Zusammenhanges gelesen richtig bleibt. Demgemäß sei in dem zitierten Satz vor das Wort „Funktion" noch „periodische" hinzugefügt. Aber auch in dieser Fassung wird er von Herrn Budde bekämpft.

Budde behauptet, daß sich ein „Ton" mit periodisch veränderlicher Amplitude nur darstellen lasse in der Form $\varphi(t) \sin 2\pi pt$, worin $\varphi(t)$ eine periodische Funktion der Zeit sei, und hierbei könne $\varphi(t)$ ebensowohl ein Kosinus wie irgendeine andere periodische Funktion von t sein. Ich habe demgegenüber behauptet, daß ein „Ton", dessen Amplitude ein Kosinus oder eine andere periodische Funktion der Zeit ist, eben kein Ton ist, und daß zur Beantwortung der Frage, welche Töne da sind, das Produkt in Summen zerlegt werden muß.

Dem bereits in § 2—4 zur Begründung dieser Behauptung Gesagten habe ich nichts Wesentliches mehr hinzuzufügen. Für das, was man hört, ist, worüber wir uns mit Budde einig sind, für große $p-q$ die Summe maßgebend, und für kleine $p-q$ weder die Summe noch das Produkt — der beste Beweis für die Richtigkeit des zitierten Satzes, was das Innenohr anlangt. Im Außenraum ist er aber ebenso richtig, denn die Schwingungszahl der Resultierenden ist ja gar nicht konstant gleich der Periodenzahl des betreffenden Sinus oder Kosinus. Allerdings kann Budde einwenden, daß bei sehr langsamen Schwebungen die Schwingungszahl über größere Zeitabschnitte hin konstant $=\frac{p+q}{2}$ ist. Wenn ich aber solchen Zeitabschnitt herausgreife, betrachte ich eben nicht den Gesamtvorgang. Das wäre dasselbe, als wenn ich etwa bei Unterbrechungen eines Tones, die so schnell aufeinander folgen, daß ein komplizierter Klang entsteht, nur einen Zeitabschnitt betrachte, in dem der Ton gerade angegeben wird und nun behaupte, damit alles erledigt zu haben.

Vom Standpunkte der Resonanztheorie aus ist die Darstellung einer komplizierten Schwingung in einer Fourierschen Reihe die einzige, die etwas über die vorhandenen Tonhöhen aussagt. Ist nur ein einziger Ton da, so erübrigt sich die Zerlegung. So hat es z. B. keinen Sinn, eine Fouriersche Reihe anzusetzen, wenn etwa der gleiche Ton in Abständen von Minuten oder Stunden periodisch wiederkehrt. Welche Grundperiode anzusetzen ist, entscheidet letzten Endes das Experiment, indem geprüft werden muß, wann infolge von Unterbrechungen oder dergleichen nicht mehr ein einziger Ton konstanter Höhe gehört wird.

Wenn Herr Budde dem zitierten Satz seine im vorigen Paragraphen besprochenen Bemerkungen „gegenüberstellt", so scheint mir das einfach auf einem Mißverständnis zu beruhen, als hätte ich behauptet, daß durch die Summendarstellung jeder gehörte Ton erklärt werden könne, wovon in meiner früheren Arbeit aber gar keine Rede ist.

Die Darstellung (2) ist von mir auch mit Recht als „irreführend" bezeichnet worden, insofern als sie leicht zu der falschen Annahme verleitet, daß die Schwingungszahl der Resultierenden konstant $=\frac{p+q}{2}$ ist. Helmholtz, Taylor, Starke und andere haben diese Annahme tatsächlich gemacht und aus ihr unklare Folgerungen gezogen, denen sich Budde anschließt, während ich zwischen dem Buddeschen „Ton" mit periodisch veränderlicher Amplitude und einem allmählich an- oder abklingenden ($e^{-bt} \sin 2\pi pt$) Ton noch den großen Unterschied sehe, daß im zweiten Fall die Schwingungszahl konstant ist, im ersten nicht. Ich muß auch meine Kritik der Starkeschen Erklärung[1]), weshalb ein auf $\frac{p+q}{2}$ abgestimmter Resonator nicht mittönt, wenn er durch eine Schwingung von der Form (2) erregt wird, aufrecht erhalten. Budde schließt sich der Starkeschen Erklärung an und erläutert sie noch des Näheren dahin, daß ein Resonator auf $\frac{p+q}{2}$ in (2) mitschwingen

1) Waetzmann I, S. 235.

1) H. Starke, l. c.



wird, vorausgesetzt, daß er „empfindlich genug sei, die Erregung genügend anzunehmen und dabei dem Phasenwechsel der Amplitude zu folgen". Mir scheint dies doch eine recht unklare Vorstellung zu sein, auf die zurückzugreifen gar keine Veranlassung vorliegt. Wozu so vage und nicht definierte Begriffe wie die „Empfindlichkeit" eines Resonators einführen, wenn die exakt festgelegten Begriffe der Dämpfung und Resonanzschärfe zur klaren und erschöpfenden Darstellung des Vorganges ausreichen? Nach meiner Darstellung ist die Sachlage die: Der auf $\frac{p+q}{2}$ abgestimmte Resonator schwingt mit, wenn er so stark gedämpft ist, daß er auf die beiden Primärtöne p und q anspricht, und ein Mittönen kommt nicht zustande, wenn er so schwach gedämpft ist oder seine Resonanzschärfe so groß ist, daß er auf p und q nicht mehr merklich anspricht. Damit ist auch die Frage erledigt, warum bei gegebenem Intervall $p:q$ der eine Resonator mittönt, der andere nicht. Ich vermute, Herr Budde würde auch auf die Dämpfung zurückgreifen, wenn er die „Empfindlichkeit" des Resonators näher zu definieren versucht.

Zusammenfassend möchte ich bemerken, daß ich die Bedenken, die Herr Budde gegen einige Ausführungen meiner früheren Arbeit hegt, nicht teile. Ferner möchte ich aber hervorheben, daß hier nicht der Ort und die Gelegenheit war, den Wert der Buddeschen Arbeiten zu würdigen, sondern daß es nur darauf ankam, die Punkte klarzustellen, in denen unsere Ansichten scheinbar oder in Wirklichkeit auseinander gehen.

Breslau, Physikalisch. Institut. Septbr. 1917.

(Eingegangen 2. Oktober 1917.)

Nachtrag zu meinem Aufsatz: Zur Akustik der Atmosphäre [1]).

Von E. Schrödinger.

(Aus dem II. physikalischen Institut der Universität Wien.)

Die in den §§ 2 und 3 durchgeführte Klarstellung des Vorganges der Energieausbreitung ist nicht durchaus neu. Auf ihre prinzipielle Neuheit schloß [2]) ich daraus, daß in der neuesten Literatur unklare und — wie ich erkannte — unrichtige Vorstellungen über diesen Vorgang unwiderlegt vorlagen und diskutiert wurden, um deren Beseitigung mir eben zu tun war.

1) E. Schrödinger, diese Zeitschr. **18**, 445, 1917.
2) Der Aufsatz ist im Feld entstanden.

Den charakteristischen Amplitudenfaktor $e^{\frac{\alpha x}{2}}$, auf den es dabei in erster Linie ankommt, haben bereits früher gefunden: Poisson [1]), Rayleigh [2]) und Lamb [3]). Überflüssig erscheint meine Durchrechnung trotzdem nicht. Denn Poisson rechnet noch mit isothermen Zustandsänderungen in der Schallwelle und sein mathematischer Apparat würde im adiabatischen Fall, in dem kein Geschwindigkeitspotential existiert [4]), versagen. Rayleigh und Lamb behandeln nur den eindimensionalen Spezialfall vertikaler Wellen [5]), wobei Lamb in anderer Hinsicht viel allgemeinere Annahmen macht (Temperaturgefälle, stetig zunehmende Reibungsdämpfung), ohne übrigens seine Ergebnisse physikalisch zu verwerten.

Erwähnt sei noch, daß Lamb in einer zweiten interessanten Arbeit [6]) über jene Wellentypen berichtet, die ich — als für akustische Fragen belanglos — beiseite gelassen habe [7]), jene nämlich, deren Wellenlänge nicht klein ist gegen die virtuelle Höhe der Atmosphäre.

1) Poisson, „Mémoire sur la théorie du son". Journal de l'École Polytechnique, T. VII (1807).
2) Rayleigh, Phil. Mag. (4) **29**, 173, 1890.
3) H. Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. Ser. II, **7**, 122, 1909.
4) Schrödinger, l. c. S. 449, Anmerkung.
5) Schrödinger, l. c. § 2.
6) H. Lamb, Proc. Roy. Soc. Lond. (Ser. A), **84**, 1911.
7) Schrödinger, l. c., S. 448, linke Spalte, Mitte und S. 449, linke Spalte, Mitte.

(Eingegangen 2. November 1917.)

Größen und elektrische Ladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe.

Von Irene Parankiewicz.

§ 1. Zweck der Untersuchung.

Bei Gelegenheit einer Untersuchung der Wirkung strahlender Energie auf die Materie wurden gewisse interessante Erfahrungen bezüglich der Größenbestimmung kleiner Materieteilchen nach dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetze und aus der Farbe des von ihnen im Dunkelfelde abgebeugten Lichtes, sowie bezüglich der von diesen getragenen elektrischen Ladungen gesammelt, die im folgenden dargestellt werden sollen.

Die Versuche sind nach der Methode von Ehrenhaft im reinsten Argon [1]) ausgeführt

1) Das Argon aus der Bombe, bezogen von Linde, München-Hellriegelskreuth, das noch 30 Proz. Stickstoff und 0,5 Proz. Sauerstoff enthielt, wurde zur weiteren Rei-

worden. Zur Darstellung der Probekörper wurde aber statt des bisher üblichen elektrischen bzw. mechanischen Zerstäubens die Methode des Verdampfens der betreffenden Substanz verwendet, eine Darstellungsweise, die dort, wo sie anwendbar ist, jedenfalls am einfachsten zum Ziele führt. Der Dampf kondensiert zu kleinen Kugeln, die im Dunkelfelde sichtbar werden und sich in einem Kondensator nach dem bekannten Verfahren im Schwere- und elektrischen Felde behandeln lassen.

Aus der Fallgeschwindigkeit läßt sich der Radius des kugelförmigen Probekörpers nach dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetz berechnen. In unserem Falle, da die Reibungsverhältnisse bei der Fallbewegung eines Teilchens im Argon, einem einatomigen Gase, besonders einfach sein müssen, worauf H. Rubens schon auf dem Solvay-Quantenkongreß 1911 aufmerksam gemacht hat[1]), könnte man die Ergebnisse dieser Art der Größenbestimmung allein als vollkommen zuverlässig ansehen. Nun existieren aber für die Richtigkeit dieser Berechnung noch andere, unabhängige Kriterien, welche erstens in der Übereinstimmung der vorerwähnten Größenbestimmung submikroskopischer, metallischer Partikel mit jener aus der Farbe des von ihnen abgebeugten Lichtes[2]), und zweitens in der Tatsache zu erblicken sind, daß — wie Ehrenhaft weiters auseinandergesetzt hat[3]) — das Maximum der lichtpositiven Photophorese (der größten Fortführungsgeschwindigkeit der Partikel im Strahl) bei denjenigen Silberkugeln eintritt, deren Radien sich aus dem Stokes-Cunninghamschen Gesetz und aus der Resonanzfarbe zu $9,8 \cdot 10^{-6}$ cm bzw. zu $9,0 \cdot 10^{-6}$ cm ergeben, also gerade bei jenen Größen der Silberkugeln, an welchen die Theorie nach K. Schwarzschild[4]) und P. Debye[5]) das Beugungsmaximum der Strahlung, und infolgedessen die stärkste Wirkung, erwarten läßt.

Alle diese Untersuchungen über die Größenbestimmung der submikroskopischen Partikel nach den drei verschiedenen Methoden sind bisher nur an Metallen durchgeführt worden. Deswegen ist es interessant, die Erscheinungen der optischen Resonanz an dielektrischen Kugeln auch zur Größenbestimmung derselben heranzuziehen, das heißt nach der Beugungstheorie des Lichtes an einer Kugel im Grunde der Entwicklungen von G. Mie[1]) den Zusammenhang zwischen den Farben des zerstreuten Lichtes und den Größen der zerstreuenden Kugeln zu berechnen, und die Größe, die auf diesem Wege für ein Partikel bestimmter Farbe resultiert, mit jener zu vergleichen, die sich für dasselbe aus seiner Fallgeschwindigkeit nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetz ergibt. Als Versuchssubstanz wurde zunächst Schwefel gewählt.

Um ferner ein weiteres Kriterium für den Gültigkeitsbereich des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes zu bekommen, wurden die farbigen Schwefelkügelchen auch bei verschiedenen Drucken behandelt, ihre Größen nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetz für diese Drucke berechnet und mit den Ergebnissen der optischen Theorie für Kugeln der betreffenden Farbe verglichen.

Über die Gültigkeit der gewonnenen Resultate erhält man weitere Aufklärung durch Erörterung der Frage, inwiefern die Art der Herstellung die Beschaffenheit der Partikel beeinflussen könnte; deshalb wurde auch eine Substanz, deren Partikel durch das elektrische sowie das mechanische Zerstäuben und durch das Verdampfen darstellbar sind, das Quecksilber, untersucht. Dadurch wird die Möglichkeit geboten, den teils schon vorhandenen, teils neu gewonnenen Resultaten am elektrisch und mechanisch zerstäubten Quecksilber diejenigen Erfahrungen, die sich am verdampften ergeben werden, gegenüberzustellen.

§ 2. Untersuchungen am Schwefel.

a) Resonanzfarben und Größenbestimmung.

Die durch das Verdampfen von Schwefel hergestellten kolloidalen Kügelchen[2]) zeigen im Dunkelfeld sehr schöne Resonanzfarben in den Abstufungen von Blau bis Orange. Die Fallgeschwindigkeit der blauen Partikel ist die kleinste; dies weist darauf hin, daß diese Kügelchen auch die kleinsten sein müssen; die grünen Partikel fallen rascher, sie sind größer; noch größere Fallgeschwindigkeit besitzen *Na*-gelbe Teilchen.

nigung im elektrischen Ofen über Polzeniussche Masse zur Absorption des restlichen Stickstoffes und anderer aktiver Gase, sodann über mehrere Trocknungsvorlagen aus H_2SO_4 und P_2O_5, über elektrische Öfen mit *Cu*-Spiralen (Bindung von O_2), CuO (Absorption von Wasserstoff), schließlich über glühendes metallisches *Ca* (Absorption der Reste von Stickstoff) und unmittelbar vor der Apparatur über zwei P_2O_5-Röhren und Vorlagen aus Glaswolle geleitet.

1) P. Langevin et M. de Broglie, La théorie du rayonnement et les quanta. Réunion tenue à Bruxelles sous les auspices de M. E. Solvay 1911, S. 150.

2) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. **15**, 952, 1914 und **16**, 227, 1915; G. Laski, Wiener Akademieberichte und Ann. d. Phys. **53**, 1, 1917.

3) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. **18**, 352, 1917.

4) K. Schwarzschild, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. **31**, 293, 1901.

5) P. Debye, Ann. d. Phys. **26**, 57, 1909.

1) G. Mie, Ann. d. Phys. **25**, 377, 1908.

2) Die Mikrophotographien solcher Schwefelkügelchen hat F. Ehrenhaft in dieser Zeitschr. **18**, 352, 1917 veröffentlicht.

Die gelben Farben gehen dann allmählich an den noch rascher fallenden Kügelchen ins Orange über; rote Partikel sind nicht vorhanden. Die am raschesten fallenden Teilchen zeigen eine gelblich-weiße Farbe, welche der Eigenfarbe des Schwefels im reflektierten Licht entspricht.

Für diese durch selektive Zerstreuung des Lichtes an den Schwefelkügelchen zustande kommenden Farbenphänomene (optische Resonanz) ergeben sich nach der Beugungstheorie des Lichtes als Resultat langwieriger Rechnungen[1]) folgende Kurven, die den Zusammenhang zwischen der Intensität des abgebeugten Lichtes verschiedener Wellenlängen und der Größe der beugenden Partikel darstellen.

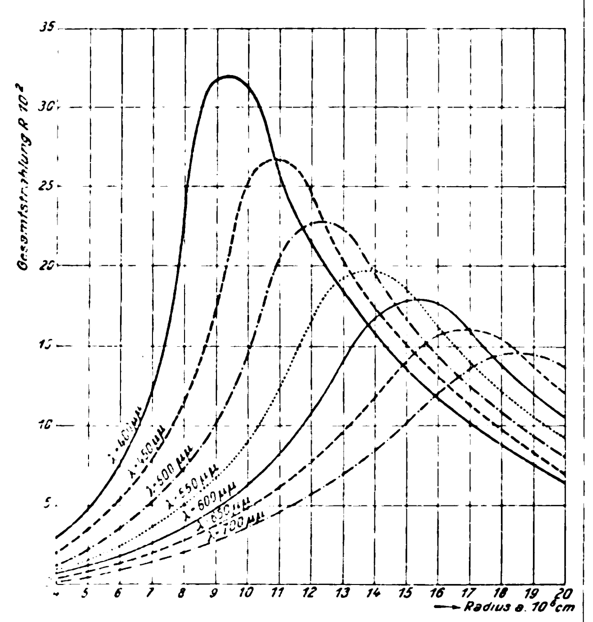


Fig. 1. Optische Resonanz der Schwefelpartikel.

1) Die Berechnungen sind nach den von G. Mie (l. c., S. 412—415) angegebenen Formeln ausgeführt worden. Es war dazu die Berücksichtigung von drei elektrischen und zwei magnetischen Partialwellen erforderlich. Die Brechungsexponenten des amorphen Schwefels als Funktionen der Lichtwellenlängen sind der Abhandlung von H. E. Mervin und E. L. Larsen (Amer. Journ. Soc. [4] 34, 43) entnommen:

λ in $\mu\mu$	n
400	2,080
450	2,060
500	2,030
550	2,010
600	1,992
650	1,980
700	1,970

Zur Berechnung der Reihen f_ν, f_ν', g_ν, g_ν' wurden 6—7 Glieder berücksichtigt. Ausführliche Angabe der berechneten Partialwellen erfolgt in den Berichten der Wien. Akad. d. Wiss.

Als Abszissen sind die Radien, als Ordinaten die Intensitäten der Gesamtstrahlung verschiedener Wellenlängen, die von einem Kubikmillimeter einer Suspension im Gas von der Konzentration $C = 10^{-6}$ (1 mm³ in 1 Liter) ausgeht, aufgetragen. (Vgl. Mie, l. c. S. 422.)

Will man aus einer beobachteten Farbe auf die Größe des zerstreuenden Körpers schließen, dann ist es übersichtlicher, die Intensitäten des seitlich ausgestrahlten Lichtes als Funktionen der Wellenlängen für jeden Radius darzustellen, was in Fig. 2 durchgeführt ist.

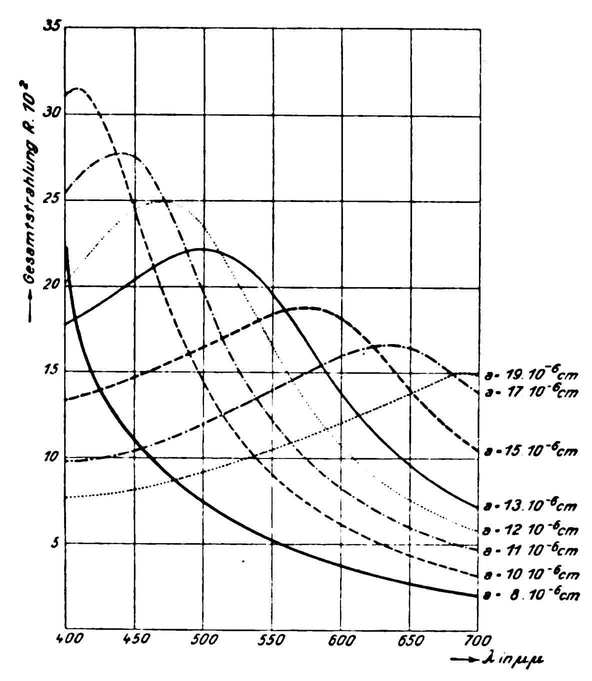


Fig. 2. Ausstrahlungskurven der submikroskopischen Schwefelpartikel.

Die Maxima dieser Kurven entsprechen den Wellenlängen des von den Partikeln der betreffenden Größe am intensivsten ausgestrahlten Lichtes.

Auf diesem Wege erhält man also theoretisch im Dunkelfelde folgendes Bild der Schwefelpartikel:

Kleinste Kügelchen zerstreuen eine gesättigte blaue Farbe; größere beugen das grüne, noch größere das gelbe Licht ab; ganz große Teilchen erscheinen orange. Zwischen den Radien der Schwefelkügelchen und den zugehörigen selektiv zerstreuten Farben ergibt sich also nach der Beugungstheorie folgende Zuordnung:

Radius	Farbe
$8-10\cdot10^{-6}$ cm	blau
10—12	grün
12—13	grüngelb
13—15	gelb
15—19	orange
über 19	Eigenfarbe des Schwefels

Die Theorie bestätigt demnach zunächst qualitativ das im Dunkelfelde zur Beobachtung gelangende Bild der Partikel und die Schlüsse, die aus der beobachteten Zuordnung der Farben und Fallgeschwindigkeiten auf die Reihenfolge der Größen der Teilchen gezogen werden konnten.

Tabelle I enthält die quantitativen Ergebnisse der experimentellen Größenbestimmung der untersuchten Partikel[1]) nach dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetze.

Tabelle I.

Nr. des Partikels	Beobachtete Farbe	Fallgeschwindigkeit $v_f\cdot10^3\frac{cm}{sec}$	Radien $a\cdot10^6$ cm: Aus dem Widerstandsgesetze $f=0$	Aus dem Widerstandsgesetze $f=1$	Aus der optischen Theorie	Ladungen $e\cdot10^{10}$ el.-st. E. $f=0$	$f=1$
		Normaler Druck.					
19	blau	0,27	8,27	6,06		+ 0,91	0,35
17	blau	0,29	8,70	6,40		— 0,24	0,09
8	blau	0,30	8,86	6,57	8—10	+ 0,83	0,34
42	blau	0,33	9,42	7,07		+ 0,42	0,18
9	blau	0,34	9,65	7,25		— 0,31	0,13
29	grün	0,38	10,34	7,87		+ 0,61	0,27
31	grün	0,42	11,02	8,47	10—12	+ 1,59	0,73
32	grün	0,42	11,02	8,47		— 0,76	0,34
25	grün	0,43	11,20	8,62		+ 1,33	0,56
6	grüngelb	0,52	12,62	9,02	12—13	— 0,84	0,41
21	grüngelb	0,59	13,65	10,88		+ 4,55	2,30
3	gelb	0,66	14,64	11,80		+ 0,32	0,17
34	gelb	0,67	14,77	11,92	13—15	— 0,85	0,45
23	gelb	0,70	15,14	12,28		+ 0,96	0,51
12	orange	0,77	16,06	13,12		+ 1,77	0,97
28	orange	1,04	19,20	16,12		+ 5,12	3,03
14	orange	1,06	19,43	16,32	15—19	+ 1,44	0,85
10	orange	1,08	19,64	16,54		— 4,65	2,77
11	orange	1,19	20,80	17,62		+ 2,12	1,29
4	weiß	1,24	21,30	18,12	über 19	+ 1,18	0,72
		Druck: 496 mm Hg.					
60	blau	0,44	9,86	6,87	8—10		
63	grün	0,52	11,08	7,87	10—12		
59	gelb	0,85	15,36	11,60	13—15	+ 4,08	1,76
61	orange	1,32	20,29	16,08	15—19	+ 7,67	3,83
		Druck: 354 mm Hg.					
43	blau	0,55	10,02	6,68	8—10		
47	grüngelb	0,81	13,20	9,15	12—13		
44	orange	1,55	20,50	15,38	15—19	—14,00	5,90
		Druck: 143 mm Hg.					
53	grün	1,25	11,30	6,55	10—12		
49	grüngelb	1,36	12,20	7,10	12—13	— 2,42	0,48
54	gelb	1,77	15,10	9,10	13—15	+ 0,27	0,06
50	orange	2,32	18,70	11,70	15—19	— 1,98	0,48
52	orange	2,35	18,88	11,80		+ 0,93	0,23
51	weiß	4,07	28,45	19,10			
		Druck: 55 mm Hg.					
56	blau	2,48	10,75	5,20	8—10	— 0,19	0,02
55	blau	2,68	11,50	5,75		— 0,09	0,01
57	grün	3,00	12,65	6,40	10—12	+ 0,23	0,03
58	weiß	3,96	31,40	21,70		+ 2,81	0,77

1) Die Messungsprotokolle dieser Partikel gelangen in den Berichten der Wien. Akad. d. Wiss. zur Publikation

Aus dieser Tabelle ergeben sich folgende Tatsachen:

Der feinstverteilte kolloidale Schwefel liefert blaue Partikel, deren Radien sich aus dem Widerstandsgesetze zu $8{,}3 - 10{,}0\cdot10^{-6}$ cm ergeben; größere Teilchen strahlen seitlich grünes Licht aus; ihre ebenso ermittelten Radien liegen zwischen 10,3 und $11{,}2\cdot10^{-6}$ cm; noch größere Kügelchen sind gelbgrün und gelb. Die größten Kugeln, die noch eine spektrale Farbe zerstreuen, sind orangefarbig und weisen zufolge des Widerstandsgesetzes Radien zwischen 16 und $20{,}8\cdot10^{-6}$ cm auf.

Schließlich reflektieren Teilchen über dieser Größe die Eigenfarbe des Schwefels[1]).

Vergleichen wir mit diesen aus der Fallgeschwindigkeit gefolgerten Radien die jedem Partikel aus der Farbe des zerstreuten Lichtes zugehörigen, dann kommen wir zu dem Schlusse, daß die nach dem Widerstandsgesetze ($f=0$) sowohl bei normalem Drucke wie auch bei tieferen Drucken[2]) berechneten

1) Auf diesem Wege ist also die für die Mineralogie wichtige Frage nach der Existenz des kolloidalen blauen und grünen Schwefels theoretisch und experimentell entschieden. Von diesem Standpunkte aus kann die Behauptung von C. Doelter (Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. d. Wiss. [I] **124**, 37, 1915), daß die verschiedenen Färbungen des Ultramarins dem Überschuß farbigen kolloidalen Schwefels zugeschrieben werden können, als begründet angesehen werden.

2) Die für den Druck 55 mm Hg nach Stokes-Cunningham berechneten Radien der blauen und grünen Partikel sind um ca. 10 Proz. größer als jene aus der optischen Theorie erschlossenen, was auch zu erwarten ist, denn die freie mittlere Weglänge der Gasmoleküle ist bei diesem Druck bereits groß gegen die Durchmesser der sich am Gase reibenden Kügelchen von der Größe $10\cdot10^{-6}$; damit ist der Gültigkeitsbereich des Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetzes — wie M. Knudsen und S. Weber (Ann. d. Phys. **36**, 681, 1911) schon auf Grund rein mechanistischer Versuche nachgewiesen haben — überschritten.

Vergleicht man nämlich den durch jenes Gesetz gegebenen Faktor

$$\left(1 + 0{,}815\,\frac{l}{a}\right)$$

mit dem des empirischen Gesetzes von Knudsen-Weber

$$\left(1 + \left[0{,}683 + 0{,}354\cdot e^{-1{,}845\cdot\frac{a}{l}}\right]\cdot\frac{l}{a}\right),$$

so ergibt sich, daß diese Faktoren für $\frac{l}{a} = 2$ einander

Radien der Schwefelpartikel mit denjenigen, die sich aus der optischen Resonanz ergeben, ausgezeichnet übereinstimmen.

Damit ist der Beweis geführt, daß das Stokes-Cunninghamsche Widerstandsgesetz (Grenzfall $f = 0$) für Metalle und Dielektrika unabhängig von dem widerstehenden Medium bei Kugeln von der Größenordnung 10^{-5} bis 10^{-6} cm auch bei verschiedenen Gasdrucken richtige Werte der Radien ergibt[1]).

Gleichzeitig ist in dieser Übereinstimmung beider unabhängigen Methoden zur Berechnung der Größe der Partikel sowie in der eindeutigen Zuordnung ihrer Fallgeschwindigkeiten und der Wellenlängen des von ihnen zerstreuten Lichtes ein weiterer Beweis dafür zu erblicken, daß die Dichte aller Partikel desselben Materials gleich und gleich der Dichte der kompakten Substanz ist.

gleich werden, d. h. daß das Cunninghamsche Zusatzglied zum Stokesschen Widerstandsgesetze nur bis zu jenen Drucken als Korrektur ausreicht, bei welchen die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle von der Größenordnung der Teilchendurchmesser ist.

Beispielsweise wäre aus den vorliegenden Untersuchungen für den Druck 143 mm Hg — da der mittlere Radius der gemessenen Partikel $2 \cdot 10^{-5}$ beträgt — das Verhältnis $\frac{l}{a}$ ungefähr 3; die für diesen Druck errechneten Radien stimmen auch mit jenen aus der optischen Resonanz noch befriedigend überein. Bei dem Druck 55 mm Hg ist aber für blaue Partikel ($a = 10 \cdot 10^{-6}$ cm) $\frac{l}{a}$ bereits 14. In diesem Falle wird die weitere Korrektur des Widerstandsgesetzes, das von Knudsen und Weber eingeführte Exponentialglied $0{,}354 \cdot e^{-1{,}845 \cdot \frac{a}{l}} \cdot \frac{l}{a}$, von Einfluß, dessen Wert sich unter diesen Verhältnissen zu $0{,}311 \frac{l}{a}$ ergibt.

Berechnet man mit dieser Korrektur die Radien der blauen und grünen Partikel für den Druck 55 mm Hg, so ergibt sich:

Nr. des Partikels	Farbe	Radius $a \cdot 10^6$ cm	
		berechnet	aus der Farbe
56	blau	8,50	8—10
55		9,10	
57	grün	10,25	10—12

Diese Übereinstimmung der so gewonnenen Radien der Kugeln, die bereits klein gegen mittlere freie Weglänge sind, mit den Ergebnissen der optischen Theorie bildet einen neuen und von den mechanistischen experimentellen Erörterungen M. Knudsens und S. Webers vollkommen unabhängigen Beweis dafür, daß der Gültigkeitsbereich des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes sich auf jenes Intervall beschränkt, in welchem die freie mittlere Weglänge der Gasmoleküle von der Größenordnung der Teilchendurchmesser ist und über dieses hinaus, wenn also l groß gegen a ist, die Knudsen-Webersche Korrektur mitberücksichtigt werden muß.

1) Bis zu der Radiengröße 10^{-4} cm hatte Mc Keehan (diese Zeitschr. 12, 707, 1911) an den mikroskopisch ausgemessenen Wachskugeln durch Messung ihrer Fallgeschwindigkeiten in Luft bei verschiedenen Drucken das Widerstandsgesetz von Stokes-Cunningham für einen in der Nähe von $f = 0$ gelegenen Wert des Korrektionskoeffizienten als richtig nachgewiesen.

b) Die Ladungen der Schwefelkugeln.

Alle durch die Verdampfung hergestellten Partikel sind zunächst ungeladen, was dadurch kenntlich ist, daß ihre Fallbewegung durch ein elektrisches Feld nicht geändert wird; sie müssen erst mit Hilfe eines ionisierenden Präparates aufgeladen werden; demnach entsprechen alle am Schwefel gemessenen Ladungen — wie man im Sinne der Ionentheorie sagen würde — den aus dem ionisierten Gas aufgefangenen Elektrizitätsmengen (Ionen).

Aus den Kolonnen 7 und 8 der Tabelle I ist es ersichtlich, daß diese Ladungen meistens in die Größenordnung 10^{-11} el.-st. E. fallen[1]).

1) Es wurden ferner durch Verdampfung erzeugte Partikel des amorphen roten Selens untersucht. Auch hier sind auffallende Resonanzfarben vorhanden: Die kleinsten Partikel sind blau, größere zeigen rein spektrales Grün; bei noch größeren läßt sich die ausgeprägte *Na*-gelbe Farbe konstatieren. Die Orangefarbe ist schon ziemlich verwaschen und geht an größeren Partikeln in die typisch rötlichen Töne der Eigenfarbe des Selens über.

Die Messungen ergaben an dieser Substanz folgende Resultate:

Nummer des Partikels	Beobachtete Farbe	Fallgeschwindigkeit $v_f \cdot 10^3 \frac{cm}{sec}$	Radius $a \cdot 10^6$ cm	Ladung $e \cdot 10^{10}$ el.-st. E.
Normaler Druck.				
3		0,48	7,28	+0,17
1	blau	0,50	7,44	+0,21
19		0,51	7,57	+0,22
18		0,59	8,35	+0,82
2	grün	0,64	8,84	—0,23
22		0,67	9,08	—0,08
9		0,72	9,53	—0,54
7	gelbgrün	1,12	12,62	+0,59
6	gelb	1,18	13,07	+1,31
10		1,38	14,36	+0,75
21	orange	1,45	14,82	+4,42
4		1,49	15,06	+6,07
20		1,53	15,30	+2,03
11	rot	1,64	15,97	+1,62
8		1,83	17,07	—1,49
Druck: 488 mm Hg.				
14	blau	0,66	7,63	
17	grün	0,81	8,86	+0,72
13	gelbgrün	1,12	11,10	
16	gelb	1,50	13,50	+0,36
12	orange	1,61	14,14	
15	rot	2,00	16,26	+1,03

Auch bei diesen Partikeln ordnen sich die Wellenlängen des zerstreuten Lichtes von den kürzeren zu längeren den wachsenden Fallgeschwindigkeiten zu, was wieder den Beweis der Gleichheit der Dichte aller Partikel liefert. Aus der ausgezeichneten Übereinstimmung der er-

§ 3. Untersuchungen am Quecksilber.

a) Drei Darstellungsmethoden der *Hg*-Partikel.

Als eine dritte Versuchssubstanz diente das Quecksilber. Das elektrisch und mechanisch zerstäubte *Hg* war schon öfters Objekt der Untersuchung; nur waren die Meinungen der Autoren über die Beschaffenheit der Partikel geteilt.

Ehrenhaft[1]) und Konstantinowsky[2]) fanden in den im elektrischen Lichtbogen hergestellten *Hg*-Partikeln vollkommene Kugeln metallischen Charakters mit blauen und gelblichen Resonanzfarben, deren Größe sich, nach zwei unabhängigen Methoden, aus dem Widerstandsgesetz und aus der Beugungstheorie übereinstimmend ergab. Unter anderen Beweisen der Reinheit der Substanz führen diese Autoren an, daß solche auf Glasplatten niedergeschlagene Kugeln zusammengerollt werden können und sich zu größeren Kugeln vereinigen.

Die Autoren, die das mechanisch zerstäubte Quecksilber behandelten[3]), glaubten Anhaltspunkte zu finden, daß die so hergestellten Partikel merklich verdampften, während sie bei elektrisch verteilten Partikeln dieses Verhalten nicht fanden.

In vorliegender Untersuchung, welche zum Teil auch unternommen wurde, um diese differierenden Behauptungen zu klären, wurden, um über die Beschaffenheit der *Hg*-Partikel entscheiden zu können, die Versuche mit den durch das elektrische bzw. mechanische Zerstäuben und durch das Verdampfen in reinsten, trockenen, inerten Gasen hergestellten *Hg*-Partikeln ausgeführt.

Als Resultat ergeben sich folgende Tatsachen:

1. Das Bild des im reinsten vollkommen trockenen Argon elektrisch zerstäubten Quecksilbers ist dem von Ehrenhaft beschriebenen Bilde solcher Partikel im reinen trockenen Stickstoff analog; die Untersuchung dieser Partikel konnte demnach nichts wesentlich Neues bieten.

2. Mechanisch habe ich das Quecksilber in reinstem Stickstoff mittels eines gläsernen Zerstäubers zerrissen. Diese Art der Zerteilung erweist sich aber als ziemlich ungünstig. Die Partikel sind meistens sehr groß; sie besitzen im reflektierten Licht die Eigenfarbe des metallischen Quecksilbers. Nur sehr selten wurden auch kleinere Kügelchen beobachtet, welche die für das kolloidale Quecksilber im Dunkelfeld charakteristische azurblaue Farbe zerstreuen. Für ein solches blaues Partikel (Nr. 13, Tabelle II) ergibt sich aus dem Widerstandsgesetz der Radius $a = 4{,}25 \cdot 10^{-6}$ cm, ein Wert, der in vollkommener Übereinstimmung mit dem aus der Beugungstheorie für blaue Partikel zu $3 - 4 \cdot 10^{-6}$ cm folgenden steht.

3. Zur Darstellung der Quecksilberpartikel ist — wie zu erwarten — die Verdampfungsmethode sehr geeignet. In einer Glaskugel von ca. 2 cm Durchmesser mit Zu- und Ableitungsrohr für den Argongasstrom wird ein Tröpfchen *Hg* einige Sekunden mit einem Bunsenbrenner erwärmt und sodann der Strom reinen Argongases wieder darüber geleitet, welcher die Tröpfchen in die Beobachtungskammer trägt. Auf diese Weise kommen neben wenigen größeren Partikeln hauptsächlich ganz kleine tiefblaue Kügelchen zum Vorschein, an welchen eine Reihe ausführlicher Messungen unternommen wurde.

Gemeinschaftlich für die Partikel aller Darstellungsmethoden ist die Gleichheit ihrer Beschaffenheit. Alle zeigen vollkommene Stabilität, unter den bei solchen Versuchen obwaltenden Umständen keine Spur des Verdampfens, eine ausgesprochen metallische Oberfläche und den Metallglanz; die kleinen Kügelchen in der Größenordnung $7 - 2 \cdot 10^{-6}$ cm besitzen auch charakteristische Resonanzfarben.

Das optische Bild des verdampften Quecksilbers im Dunkelfeld stimmt vollkommen mit dem der elektrisch zerstäubten *Hg*-Partikel überein. Die kleinsten Partikel sind tiefblau; sie liegen an der Grenze des Beobachtbaren und des bisher Erreichten[1]): ihre Radien ergeben sich zu $2 - 3 \cdot 10^{-6}$ cm. Die Resonanzfarben gehen dann über hellazurblau und gelblich zu stahlglänzend über. Die letztere Farbe entspricht den größten Partikeln, deren Radien bei ungefähr $7 \cdot 10^{-6}$ cm beginnen.

Tabelle II gibt die Messungsprotokolle einiger kleinster Partikel; Tabelle III die Übersicht aller im Argon gemessenen Quecksilberkugeln.

---

rechneten Radien der bei verschiedenen Drucken beobachteten Kügelchen gleicher Farbe, d. h. gleicher Größe, muß neuerlich auf die Richtigkeit und Anwendbarkeit des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes geschlossen werden. Die am Schwefelkügelchen ausführlich besprochenen Ergebnisse wurden durch die Messungen am Selen erneut erhärtet.

1) E. Ehrenhaft, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, Nr. 22, 1187, 1913; Ber. d. Wien. Akad. **122**, 55, 1914; diese Zeitschr. **15**, 955, 1914 und **16**, 225, 1915.

2) D. Konstantinowsky, Ber. d. Wien. Akad. **123**, 1697, 1914.

3) R. A. Millikan, Phys. Rev. (4) **32**, 349, 1911; Ann. d. Phys. **50**, 729, 1916; Phys. Rev. (6) **8**, 595, Dezember 1916; A. Schidlof und A. Karpowicz, C. R. **158**, 199, 1914; diese Zeitschr. **16**, 42 und 372, 1915; Arch. sc. phys. nat. Genève **41**, Februar 1916; A. Targonski, Arch. sc. phys. nat. Genève **41**, März 1916; A. Schidlof und A. Targonski, diese Zeitschr. **15**, 376, 1916.

1) Die kleinsten von G. Laski (l. c.) gemessenen Silberkügelchen haben Radien von $4 \cdot 10^{-6}$ cm.



Tabelle II.

Fallstrecke $s = 11,4 \cdot 10^{-3}$ cm.
Reibungskoeff. d. Argons bei 18 C $\mu = 2,219 \cdot 10^{-4}$
freie mittlere Weglänge bei 18° C $l = 10,29 \cdot 10^{-6}$ cm,
Reibungskoeff. d. Stickstoffs bei 18° C $\mu = 1,759 \cdot 10^{-4}$
freie mittlere Weglänge bei 18° C $l = 10,11 \cdot 10^{-6}$ cm,
Dichte des Quecksilbers $\sigma = 13,55$.

Positives Hg-Partikel Nr. 1
Farbe; tiefblau: $\mathfrak{E} = 2,475$

Fallzeiten	Steigzeiten
19.63 sec	28,90 sec
19,60	30,05
30,48	30,10
26,70	30.90
27,00	39,90
31,40	

Negatives Hg-Partikel Nr. 9
Farbe: tiefblau; $\mathfrak{E} = 2,400$

Fallzeiten	Steigzeiten
22,08 sec	12,80 sec
14 90	10,00
33,70	11,90
37,20	16,30
29,00	
30,05	

Negatives Hg Partikel Nr. 13
(mech. zerstäubt in N; azurblau)
$\mathfrak{E} = 2,921$; $s = 17,13 \cdot 10^{-3}$ cm

Fallzeiten	Steigzeiten
20,15 sec	8,67 sec
20,06	10,10
15,20	9,95
20,74	8,90
17,94	8,89
19,75	10,16
21,47	9,72
17,45	9,38
19,62	10,20

Negatives Hg-Partikel Nr. 10
Farbe: tiefblau; $\mathfrak{E} = 3,090$

Fallzeiten	Steigzeiten
29,12	56.40 sec
45 90	53,20
35,90	48,13
39,40	46,28
39.15	47,49
30,00	52,54
36,98	56,46
39,98	
47,72	
38,40	

Positives Hg-Partikel Nr. 12
Farbe: tiefblau; $\mathfrak{E} = 3.335$

Fallzeiten	Steigzeiten
33,67	41,90 sec
42,20	38,50
40,44	51,45
35.37	45,31
50,73	36,05
33 46	45,53
39,84	51,70
48,45	

Tabelle III.

Nr. des Partikels	Beobachtete Farbe	Fallgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_f \cdot 10^3 \frac{cm}{sec}$	Radien $a \cdot 10^6$ cm: Aus dem Widerstandsgesetze $f=0$	Aus dem Widerstandsgesetze $f=1$	Aus der optischen Theorie	Ladungen $e \cdot 10^{12}$ el.-st. E. $f=0$	$f=1$
12	tiefblau	0,28	2,03	1,16	bis 3	+ 0,268	0,051
10		0,30	2,15	1,25		— 0,309	0,061
9		0,41	2,73	1,67		— 1,52	0,34
1		0,44	2,89	1,77		+ 0,97	0,22
6	azurblau	0,50	3,24	2,00	3—4	+ 3,98	0.94
5		0,55	3,48	2,18		— 3,47	0,84
2		0,63	3.86	2,44		— 3.39	0,86
7	gelblich	0,97	5.32	3.58	über 4	— 8.01	2,44
8		1,08	5,72	3,91		+24,00	7,64
11		1,41	6.92	4,88		+24.10	8,46
3	stahlglänzend	1,45	7,06	5,00		+29,70	10,60
4		1,94	8,58	6,30		+37,60	14,19

Aus der Tabelle III ist zu entnehmen, daß die Werte der Radien für die durch Verdampfung hergestellten Hg-Partikel nach dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetz ($f = 0$) mit denjenigen aus der Theorie der Resonanzfarben vollkommen übereinstimmen. Da sich dasselbe auch für ein durch das mechanische Zerreißen dargestelltes Partikel (Nr. 13, Tabelle II) ergibt, so ist dadurch ein Beweis für die gleiche Beschaffenheit, d. h. für den metallischen Charakter der Hg-Partikel aller Darstellungsarten in inerten trockenen Gasen gegeben.

b) Die Ladungen der Quecksilberkugeln.

Während das elektrische bzw. mechanische Zerreißen von Quecksilber elektrisch geladene Teilchen liefert, sind die durch die Verdampfung hergestellten Partikel sämtlich ungeladen. Da aber nach dieser Darstellungsmethode die kleinsten aller bisher behandelten Materieteilchen zustande kommen, so verdienen die ihnen durch ein ionisierendes Präparat aufgezwungenen Ladungen ein besonderes Interesse.

In einem elektrischen Felde von der Stärke $\mathfrak{E} = 3,3 \frac{\text{el.-st. E.}}{\text{cm}}$ steigen diese geladenen Kügelchen außerordentlich langsam (über eine Strecke von ungefähr $1/_{10}$ mm in ca. 40 Sek.). Experimente mit solchen Kügelchen lassen sich, wie obige Messungsprotokolle zeigen, mit vollkommenster Präzision ausführen. Ihre Ladungen fallen in die Größenordnung 10^{-11} bis 10^{-13} el.-st. E. und zeigen mit immer kleiner werdender Kapazität der Quecksilberkügelchen (vgl. Tabelle III, Kolonne 4) ein deutliches Abnehmen (vgl. Tabelle III, Kolonne 7). Die kleinste auf einem Kügelchen vom Radius $2,0 \cdot 10^{-6}$ gemessene Ladung beträgt

$$2,68 \cdot 10^{-13} \text{ el.-st. E.}$$

Durch diese Messungen ist also erneuert festgestellt worden, daß die Größe der Ladung mit der Kapazität des Trägers abnimmt und daß die von den Kügelchen kleinster erreichbarer Kapazität zur Zeit der Beobachtung wirklich getragenen Ladungen den 1800ten Teil des nach der Hypothese unteilbaren Elementarquantums $e = 4,7 \cdot 10^{-10}$ el.-st. E. bilden.

§ 4. Zusammenfassung.

Die Untersuchungen über die Größenbestimmung der submikroskopischen Materieteilchen, die an den metallischen Partikeln drei untereinander übereinstimmende Methoden: das Stokes-Cunninghamsche Widerstandsgesetz, die Resonanzfarben und die Bestimmung des Lichtdruckmaximums ergeben haben, sind in dieser Arbeit auch auf Dielektrika ausgedehnt worden.

Die aus den Resonanzfarben der Schwefelpartikel resultierenden Größen stimmen mit den nach dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetze ($f = 0$) in seinem Gültigkeitsbereich berechneten Radien ausgezeichnet überein.

Da die Kügelchen gleicher Farbe auch gleich groß sind, bietet die Behandlung der farbigen Partikel bei verschiedenen Gasdrucken die Möglichkeit, das zur Berechnung ihrer Radien verwendete Widerstandsgesetz durch den Vergleich dieser Radien mit jenen, die aus der optischen Theorie resultieren, zu prüfen.

So ergibt sich an Schwefelkügelchen die Richtigkeit und Anwendbarkeit des nach Cunningham korrigierten Stokesschen Widerstandsgesetzes für jene Gasdrucke, bei welchen die freie mittlere Weglänge l der Gasmoleküle mit dem Teilchendurchmesser a vergleichbar ist. Bei tieferen Drucken, wo das Verhältnis $\frac{l}{a}$ groß ist, $\left(\text{z. B. } \frac{l}{a} = 14\right.$ für blaue Schwefelpartikel beim Druck 55 mm $\left.Hg\right)$ muß man — wie schon auf Grund der Versuche von M. Knudsen und S. Weber zu erwarten ist — das weitere von diesen Autoren eingeführte Korrektionsglied des Widerstandsgesetzes berücksichtigen.

Ferner wurde in dieser Arbeit auch die Frage nach der Beschaffenheit der durch das elektrische bzw. mechanische Zerstäuben und durch das Verdampfen hergestellten Hg-Partikel untersucht. Es ergibt sich aus dem gleichen optischen Bilde dieser Partikel im Dunkelfelde und aus der Übereinstimmung der nach dem Widerstandsgesetz berechneten Radien der Partikel aller Darstellungsmethoden mit jenen aus der Theorie der optischen Resonanz, daß alle Hg-Partikel unabhängig von der Art ihrer Herstellung in inerten trockenen Gasen den metallischen Charakter und die Dichte des kompakten Metalles haben.

Die Verdampfungsmethode liefert nur ungeladene Partikel. Die an Schwefel- und Hg-Kügelchen gemessenen Ladungen entsprechen also den aus dem ionisierten Gas aufgefangenen Elektrizitätsmengen. Sie fallen an Schwefelkugeln der hier behandelten Größen meistens in die Größenordnung 10^{-11} el.-st. E., an den kleinsten Hg-Kügelchen in die Ordnung 10^{-13} el.-st. E.

Die vorliegenden Messungen liefern also einen Beweis dafür, daß Ladungen, die nur den 1800ten Teil des von der Theorie statuierten Elektrons betragen, noch eine reale Existenz zukommt.

Wien, I. physikal. Institut der Universität Juli 1917.

(Eingegangen 26. Juli 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Problem der Materie.

Von Gustav Mie.

(Fortsetzung.)

II.

Denken wir uns, eine Zusammenballung von Energie, ein „Energieknoten", den wir als materielles Teilchen bezeichnen, sei uns in einem ganz feldfreien Raum, in einem „idealen Vakuum", vollständig gegeben. Es sei uns also genau bekannt, wie die elektrischen Ladungen in ihm verteilt sind und nach welchem Gesetz die elektrische Feldstärke in ihm variiert, ebenso sei die Dichte der schweren Masse und das Gravitationsfeld mit allen 40 Komponenten überall bekannt. Wir wollen das alles zusammen kurz als „das innere Gefüge des materiellen Teilchens" bezeichnen. Nun möge dieses „materielle Teilchen" an eine Stelle geraten, wo Potentiale und Feldstärken merkbare Werte annehmen. Was wird das „äußere" Potential und das „äußere" Feld dann auf das innere Gefüge des Teilchens für einen Einfluß haben?

Solange man das Superpositionsprinzip für eines der fundamentalen Prinzipien der Ätherphysik hielt, kam man auf diese Frage überhaupt nicht. Denn da superponierten sich die Potentiale und die Feldstärken des äußeren Feldes einfach über die inneren Zustände des materiellen Teilchens, ohne daß an seinem Gefüge irgend etwas geändert wurde. Das wird nun aber ganz anders, wenn man das Superpositionsprinzip fallen läßt, wie es die Theorie der Materie verlangt. Nun ist das Teilchen in dem felderfüllten Raum überhaupt etwas ganz anderes als im idealen Vakuum. A priori wäre es denkbar, daß sich das Gefüge des Teilchens im felderfüllten Raum völlig umwandelt. Ich habe dafür in einer meiner Arbeiten zur Theorie der Materie ein sehr auffälliges Beispiel gefunden. Ich hatte, um einmal mit einem bestimmten Beispiel zu arbeiten, mit rein elektro-

magnetischen Größen, ohne die Gravitation einzuführen, eine Weltfunktion aufgestellt[1]), aus deren Annahme sich kugelförmige Zusammenballungen elektrischer Ladungen herleiten ließen, also gewissermaßen Elektronen. Diese Elektronen hatten aber die Eigentümlichkeit, daß sie nur in einem idealen Vakuum existenzfähig waren. In einem Gebiet, in welchem ein von Null verschiedenes elektrisches Potential existiert, selbst wenn damit kein elektrisches Feld verbunden wäre, also etwa in einem Gebiet, wie wir es praktisch im Innenraum eines elektrisch geladenen metallischen Hohlkörpers haben, könnten diese Elektronen nicht im innern Gleichgewicht sein, ihr Gefüge müßte sich aufzulösen suchen, die Elektronen müßten auseinanderfließen und sich mit den anderen in der Nähe vorhandenen elektrischen Teilchen zu verschmelzen suchen. Das ist natürlich ein ganz extremer Fall, aber man sollte doch im allgemeinen wenigstens sehr beträchtliche Einwirkungen der Potentiale auf die materiellen Elementarteilchen erwarten.

In der Wirklichkeit ist es nun aber gerade so, daß das Vorhandensein von Potentialen in dem Raum, in welchem sich ein Elementarteilchen befindet, auf dieses Teilchen einen so geringen Einfluß hat, daß man bisher überhaupt noch gar nichts davon wahrgenommen hat und daß man deswegen die Potentiale bisher meistens für rein mathematische Rechnungsgrößen, aber nicht für wirkliche physikalische Zustandsgrößen des Äthers, zu halten gewohnt ist. Über die Feldstärken läßt sich ganz Ähnliches sagen. Befindet sich das Teilchen in einem äußeren Feld, so kann nach der Theorie dieses Feld sich nicht den eigenen Feldstärken des Teilchens einfach superponieren, sondern man muß erwarten, daß sich das ganze innere Gefüge des Teilchens verändert. In Wirklichkeit dagegen bringt die äußere Feldstärke nur eine beschleunigte Bewegung des als materielles Teilchen bezeichneten Energieknotens hervor, es läßt aber sein inneres Gefüge so gut wie unangetastet. Denn die Experimentalphysik kann die Feldstärken bisher nur durch die beschleunigenden Kräfte nachweisen, die sie auf materielle Teilchen ausüben, aber nicht durch Veränderungen des inneren Gefüges der Teilchen.

Es bietet sich somit der Theorie der Materie das Problem, erstens zu untersuchen, wie die Weltfunktion gebaut sein muß, damit die Energieknoten, die sich nach ihr ergeben, sich wie feste, harte, wenig beeinflußbare Partikelchen verhalten, und zweitens den geringen Einfluß der äußeren Potentiale und Felder auf das innere Gefüge der Energieknoten, der vorhanden sein muß, zu berechnen.

Man wird dies Problem am besten so behandeln, daß man einzeln untersucht: den Einfluß eines von -1 verschiedenen Gravitationspotentials, den Einfluß eines Gravitationsfeldes, den Einfluß eines elektromagnetischen Viererpotentials, und endlich den Einfluß eines elektromagnetischen Feldes. Das Problem ist völlig gelöst für die Gravitation, dagegen steht man dem elektromagnetischen Teil des Problems noch ziemlich ratlos gegenüber.

Das Problem ist außerordentlich einfach zu erledigen für das Gravitationspotential. Die Gravitationstheorien, die in neuester Zeit aufgestellt worden sind, erfüllen alle ganz von selbst ein Axiom, welches ich das „Prinzip von der Relativität des Gravitationspotentials“ genannt habe. Besonders einfach läßt sich dieses Prinzip durchführen, wenn das Gravitationspotential ein Skalar ist. In diesem Fall fordert das genannte Prinzip, wenn man von dem Gravitationspotential im idealen Vakuum -1 zu einem andern Potential $-a$ übergeht, daß dann alle Eigenschaften des Äthers, wie Dielektrizität, Permeabilität usw., durch die Existenz des Potentials $-a$ in der Weise beeinflußt werden, daß ihr Verhältnis zu den Werten im idealen Vakuum immer eine gewisse für jede der Größen besonders anzugebende Potenz von a ist. Auch im Innern der materiellen Elementarteilchen verändert sich alles in derselben Weise Nicht nur die physikalischen Konstanten des Äthers, sondern auch seine Zustände, also die Feldstärken, die Potentiale, die Dichte der Ladung und die der schweren Masse in dem durch das Gravitationspotential beeinflußten Teilchen stehen zu den entsprechenden Größen in entsprechenden Raum-Zeit-Punkten des unbeeinflußten Teilchens in konstanten Verhältnissen, die alle durch bestimmte Potenzen der Größe a anzugeben sind. Diese Veränderung sämtlicher Zustandsgrößen, die das „innere Gefüge“ des Teilchens ausmachen, bringt es weiter mit sich, daß seine Dimensionen sich ändern. Zwei Punkte des dem Gravitationspotential ausgesetzten Teilchens haben eine andere Entfernung d', als die entsprechenden Punkte des unveränderten Teilchens, deren Entfernung ich d nennen will, und zwar ist $d' : d$ wiederum eine Konstante, nämlich eine bestimmte Potenz von a. Finden Bewegungen statt, so steht die Zeitdauer eines Ereignisses in dem veränderten Atom zu der des genau entsprechenden Ereignisses im unveränderten Atom auch in einem konstanten Verhältnis. Und da die Zeit nach dem Prinzip der Relativität der Bewegungen in die Gleichungen der Physik überall in derselben Weise ein-

1) Ann. d. Phys. 39, 18, 1912.

tritt wie die räumlichen Koordinaten, so muß das Verhältnis der Zeiten das gleiche sein, wie das, nach welchem sich die Längen ändern. Die Lichtgeschwindigkeit des Äthers bleibt demnach von dem Einfluß des Gravitationspotentials unberührt, sie ist aber auch die einzige Ätherkonstante, von der man dies sagen kann. Kurz gesagt behauptet also das Prinzip der Relativität des Gravitationspotentials, wenn das Potential ein Skalar ist, daß man das Gefüge des durch das Gravitationspotential veränderten Massenteilchens und alle physikalischen Ereignisse, die sich in ihm abspielen, aus dem Gefüge des unveränderten Teilchens und aus den Ereignissen in ihm, durch eine einfache Ähnlichkeitstransformation gewinnen kann.

Wie die Weltfunktion beschaffen sein muß, damit dieses Axiom gilt, läßt sich sehr leicht sagen: Sie muß eine homogene Funktion der Zustandsgrößen sein. Von welchem Grade sie sein muß, und welche Dimension man den einzelnen Arten der Zustandsgrößen geben muß, darüber sagt das Axiom nichts aus.

So außerordentlich allgemein dieses Axiom nun auch ist und so wenig man aus ihm über den Bau der Weltfunktion erfährt, so folgt doch aus ihm schon ein sehr wichtiger Satz, nämlich der Satz von der Proportionalität der trägen und der schweren Masse, oder, mit anderen Worten, das Newtonsche Gravitationsgesetz. Allerdings ist diese Proportionalität vielleicht nicht ganz streng mathematisch genau, aber sie ist sicher mit einer solchen Annäherung erfüllt, daß man auch bei den allersubtilsten Messungen, wie sie beispielsweise Eötvös gemacht hat, noch längst keine bemerkbare Abweichung zu erwarten hat. Bei gewissen sehr einfachen Annahmen über den Grad der Weltfunktion und über die Dimensionen, die den einzelnen Zustandsgrößen beizulegen sind, Annahmen, wie sie beispielsweise in der Nordströmschen Theorie gemacht sind, verschwinden auch noch diese kleinen, schon unbemerkbaren Abweichungen vollständig, so daß das Gravitationsgesetz mathematisch genau gilt.

Wie wesentlich in diesen Gravitationstheorien die Voraussetzung ist, daß sich das Gravitationspotential im Innern der Materie nicht superponiert, sondern eine durchgreifende Veränderung des ganzen Gefüges verursacht, wenn auch nach der sehr einfachen Gesetzmäßigkeit, die das Prinzip der Relativität des Gravitationspotentials fordert, erkennt man daraus, daß gerade diese innere Veränderung der Materie der Grund dafür ist, daß sich die schweren Massen anziehen. Es ist eine Frage gewesen, die wohl jedem, der über Gravitation nachgedacht hat, Kopfzerbrechen verursacht hat, wie es möglich ist, daß sich die gravitierenden Körper gerade so zu bewegen suchen, daß die Energie des Gravitationsfeldes sich vergrößern muß, während zum Beispiel die elektrischen Kräfte das a priori zu erwartende umgekehrte Verhalten zeigen. Der Grund hierfür ist eben, daß das Gravitationspotential das innere Gefüge der Materie in dem Maße beeinflußt, daß aus ihm die zur Bewegung notwendige Energie frei wird. Meines Wissens ist es das Verdienst Abrahams, dies zuerst klar erkannt zu haben. Wenn nun beispielsweise ein schwerer Körper mit Fallbeschleunigung zur Erde fällt, so findet in ihm lediglich eine innere Energieumwandlung statt, indem seine Atome durch die Veränderung des Gravitationspotentials so verändert werden, daß ihre innere Energie abnimmt, zugleich aber durch die Zunahme der Geschwindigkeit so, daß ihre Energie zunimmt. Es verwandelt sich also die potentielle Energie der Atome selbst in Bewegungsenergie, ihre Energie im ganzen bleibt konstant. Die Energieänderung des Gravitationsfeldes der Erde infolge der Annäherung des fallenden Körpers wird durch kleine Änderungen der Energie der Atome des festen Erdbodens ausgeglichen.

Wenn man sich diese Dinge recht vergegenwärtigt, so wird es verständlich, wie so aus dem Axiom der Relativität des Gravitationspotentials, also einer Aussage über die innern physikalischen Veränderungen der Materie durch das Potential, der Satz von der Proportionalität der beiden Massen, also eine Aussage über die Kraftwirkungen des Schwerefeldes folgen kann.

Versucht man nun weiter zu gehen und eine ähnliche einfache Gesetzmäßigkeit für den Einfluß einer äußeren Feldstärke der Gravitation auf das innere Gefüge der Materie zu gewinnen, so stößt man auf unüberwindliche Schwierigkeiten, wenn man die einfache Theorie der Gravitation mit skalarem Potential beibehalten will. Da tritt nun die Theorie mit dem Tensorpotential ein.

Vielleicht ist es nützlich, ehe ich weiter gehe, darauf aufmerksam zu machen, daß wir in der Physik gewohnt sind, der Beschreibung irgendeines Vorganges immer ein ganz bestimmtes Koordinatensystem zugrunde zu legen. Infolgedessen sind wir in der Lage, z. B. von bestimmten Geschwindigkeiten und von einer bestimmten Verteilung der Bewegungsenergie in dem betrachteten materiellen System zu sprechen, so wie ich es soeben bei der Betrachtung des fallenden Körpers getan habe. Freilich wird man, wenn man nach dem Prinzip der Relativität der Bewegungen ein anderes Koordinatensystem wählt, sich ein anderes Urteil über die Bewegungen und die Bewegungsenergien bilden, ohne daß sich irgendeine Schwierigkeit ein-

stellt, aber man kann das doch auch wieder nur so machen, daß man immer konsequent bei dem nunmehr gewählten Koordinatensystem bleibt. Ich werde also im folgenden voraussetzen, daß wir die ganze Welt an einem ganz bestimmten Koordinatensystem beurteilen, in welchem die euklidische und noch mehr: die minkowskische Geometrie gilt. Wie man dieses Koordinatensystem praktisch gewinnt, will ich jetzt nicht diskutieren. Das Auftreten von Gravitationspotentialen, die von — 1 verschieden sind, bringt einige Schwierigkeiten mit sich. Denn um die Deformationen, welche das Gravitationspotential an den Maßstäben und Zeitmessern hervorbringt, zu korrigieren, muß man das Gravitationspotential kennen. Andererseits kann man aber die Absolutwerte des Gravitationspotentials empirisch nur durch die Veränderungen, die es an der Materie hervorbringt, also an diesen Deformationen, bestimmen. Es könnte sich vielleicht ergeben, daß infolge dieser eigentümlichen Lage der Dinge die Bestimmung des Koordinatensystems noch mehr Willkürlichkeiten enthält, als das Relativitätsprinzip der Bewegungen schon mit sich bringt. Indessen wäre das für das Folgende ohne Bedeutung, wenn sich nur überhaupt ein Koordinatensystem festlegen läßt, in welchem die minkowskische Geometrie gilt und mit welchem sich eine vernünftige einfache Beschreibung der Welt ergibt. Das setzen wir voraus, und wie schon gesagt, wollen wir im folgenden alles ganz konsequent nach einem solchen in der ganzen Welt fest vorgelegten Koordinatensystem beurteilen.

Eine Theorie der Gravitation mit Tensorpotential unterscheidet sich, wenn in ihm das Axiom von der Relativität des Gravitationspotentials gilt, von einer Theorie mit skalarem Potential zunächst durch eine etwas größere Kompliziertheit. Das tensorielle Gravitationspotential wirkt auf die materiellen Teilchen so, daß sie nicht einfach eine nach allen Richtungen gleichförmige Ausdehnung oder Zusammenziehung erfahren, sondern daß sie gleichzeitig auch deformiert werden, daß also beispielsweise aus einer Kugel ein Ellipsoid wird. Die Komponenten des Tensorpotentials selber müssen irgendwie die Komponenten des Deformationstensors liefern. Da es sich nun aber um einen vierdimensionalen Tensor handelt, so erstreckt sich die Deformation auch auf die Zeit. Das heißt: die Periode der Atomschwingungen oder die Zeitdauer anderer Vorgänge im Atom wird verändert, und zwar in einem anderen Verhältnis, als die räumlichen Längen. Kurz gesagt, man kann das Gefüge des veränderten materiellen Teilchens und die Vorgänge in ihm aus dem Gefüge und den Vorgängen im unveränderten Teilchen nicht mehr durch eine Ähnlichkeitstransformation, wohl aber durch eine allgemeine homogene lineare Transformation gewinnen, wie man sie in der Lehre von den Deformationen fester Körper gebraucht. Die Änderung der Maßverhältnisse durch den Einfluß des Gravitationspotentials wird im Grunde dadurch hervorgerufen, daß das Gravitationspotential den ganzen physikalischen Zustand im Innern des materiellen Teilchens verändert und man gewinnt die sämtlichen Zustandsgrößen in einem Punkt des veränderten Teilchens aus denen in dem entsprechenden Punkt des unveränderten Teilchens durch gewisse lineare Transformationen, dieselben, welche von einem orthogonalen Koordinatensystem zu einem beliebigen schiefwinkligen Koordinatensystem mit veränderten Maßeinheiten führen. In derselben Weise werden auch die Konstanten des reinen Äthers, in welchem sich der Energieknoten befindet, durch das Gravitationspotential beeinflußt, nämlich Dielektrizität, Permeabilität und die entsprechenden Konstanten für die Gravitation. Das tensorielle Gravitationspotential bewirkt auch eine Veränderung der Lichtgeschwindigkeit, weil es Längen und Zeiten in verschiedenen Verhältnissen ändert, ja, die Lichtgeschwindigkeit nimmt sogar in verschiedenen Richtungen verschiedene Werte an.

Die Bedingung für die Gültigkeit des Prinzips ist, daß die Weltfunktion die Zustandsgrößen nur in solchen Kombinationen enthält, daß nach der Ausführung einer linearen Transformation, wie ich sie soeben beschrieben habe, die neuen Werte der Zustandsgrößen in genau derselben Weise in die Funktion eintreten, wie vorher die untransformierten, abgesehen von einem konstanten Faktor, der in jedem Summanden in derselben Weise auftritt und sich vor die Funktion setzen läßt.

Ist das Prinzip erfüllt, so ergibt sich aus ihm auch für die Theorien mit Tensorpotential die Gültigkeit des Satzes von der Proportionalität der schweren und der trägen Masse. Man kann kurz sagen, daß die mathematische Durchführung dieser Theorien, obwohl sie ja etwas komplizierter sind, doch nicht wesentlich schwieriger ist als die der Theorien mit skalarem Potential, daß sie aber auch, solange man weiter nichts fordert als die Gültigkeit des Axioms von der Relativität des Gravitationspotentials, keine Vorteile vor diesen bieten.

Ein ungeheurer Fortschritt war es aber, als es Einstein und Hilbert gelang, der Weltfunktion eine solche Form zu geben, daß sie nicht nur für lineare, sondern für beliebige Transformationen invariant ist. Damit ist nun das unvergleichlich viel schwierigere Problem

gelöst, für den Einfluß eines beliebigen äußeren Gravitationsfeldes auf das innere Gefüge eines materiellen Teilchens eine einfache Regel zu finden. Wenn nämlich die Grundgleichungen der Physik beliebige Transformationen zulassen, so hat, wie wir im folgenden sehen werden, die Feldstärke der Gravitation an sich überhaupt gar keinen Einfluß auf das Teilchen; die Veränderungen des inneren Gefüges des Teilchens im Gravitationsfeld sind nur durch das Vorhandensein des äußeren Gravitationspotentials bedingt. Ist eine äußere Gravitationsfeldstärke vorhanden, so zeigt sich das im Innern des Teilchens nur daran, daß man das den Zustand beeinflussende Gravitationspotential auch in dem von dem Teilchen eingenommenen Volumen als veränderlich mit Ort und Zeit anzusehen hat. Die Veränderungen, die das Teilchen durch das Feld erfährt, sind demnach nicht mehr einfach durch eine lineare Transformation darzustellen, sondern erfordern kompliziertere und schwierigere Rechnungen.

Ganz besonders verwickelt wird das Problem, wenn sich die Deformationen, die das Gravitationspotential in den einzelnen Elementen des von dem Teilchen eingenommenen Raumzeitgebietes hervorbringt, im ganzen nicht zu einer endlichen inhomogenen Verzerrung zusammenschließen. Wie wir gleich sehen werden, ist das tatsächlich im allgemeinen so. Man kann dann die Punkte des veränderten Teilchens nicht entsprechenden Punkten des unveränderten Teilchens zuordnen und das veränderte Teilchen aus dem unveränderten durch irgendeine Transformation berechnen. Es ist dann vielmehr ein ganz neues Problem, das Gefüge des veränderten Teilchens zu finden. Es sind jedoch auch Gravitationsfelder denkbar, welche im ganzen eine endliche inhomogene Deformation ergeben. Die hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ist, daß die folgenden Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\varkappa\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\varkappa\mu}}{\partial x_{\nu}} = \sum_{1}^{4}{}_{\sigma}\left(\Gamma^{\sigma}_{\varkappa\nu} \cdot \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\varkappa\mu} \cdot \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\right)$$

wo die $\Gamma^{\sigma}_{\varkappa\nu}$ Komponenten der Gravitationserregung sind. Da diese Größen lineare Funktionen der Feldstärken

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\sigma} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$$

sind, deren Koeffizienten von den Potentialen $g^{\mu\nu}$ abhängen, so sind die Riemannschen Differentialgleichungen Gleichungen zweiter Ordnung in den $g^{\mu\nu}$, und zwar ist jedes Glied entweder vom ersten Grad in den zweiten Ableitungen, oder vom zweiten Grad in den ersten Ableitungen. Glieder, die sowohl erste wie zweite Ableitungen enthalten, oder Glieder, die keine Ableitung enthalten, gibt es nicht. Die Koeffizienten sind Funktionen der $g^{\mu\nu}$.

Wenn das Gravitationsfeld die Riemannschen Differentialgleichungen befriedigt, so ist damit die hinreichende und notwendige Bedingung dafür erfüllt, daß es ein krummliniges Koordinatensystem

$$\lambda_1 = f_1(x, y, z, it), \ \lambda_2 = f_2(x, y, z, it),$$
$$\lambda_3 = f_3(x, y, z, it), \ \lambda_4 = f_4(x, y, z, it)$$

gibt, welches zu dem Gravitationspotential in folgenden Beziehungen steht:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_3}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_4}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial f_4}{\partial x_\nu} = g^{\mu\nu} .$$

Hier bedeuten x_1, x_2, x_3, x_4 die kartesischen Koordinaten $x_1 = x, \ x_2 = y, \ x_3 = z, \ x_4 = it$ und $g^{\mu\nu}$ die $(\mu\nu)$-Komponente des Potentials des vorgelegten Gravitationsfeldes in dem Punkte (x, y, z, it). Denken wir uns in einem Punkte, der entweder durch seine kartesischen Koordinaten (x, y, z, it) oder durch die Parameter $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ des eben definierten krummlinigen Koordinatensystems bezeichnet werden kann, ein Wertesystem $(d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3, d\lambda_4)$, welches den Differentialen (dx, dy, dz, idt) entspricht (Fig. 1b), also:

$$d\lambda_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial f_1}{i\,\partial t} \cdot i\,dt$$

usw., so ist dann:

$$d\lambda_1^2 + d\lambda_2^2 + d\lambda_3^2 + d\lambda_4^2 = \sum_{1}^{4}{}_{\mu} \sum_{1}^{4}{}_{\nu}\, g^{\mu\nu} \cdot dx_\mu \cdot dx_\nu$$

$(d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3, d\lambda_4)$ definiert ein schiefwinkliges vierdimensionales Parallelepipedon in dem krummlinigen Koordinatensystem der $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, welches dieselbe Diagonale hat, wie das rechtwinklige Parallelepipedon (dx, dy, dz, idt). Das Quadrat dieser gemeinsamen Diagonale ist natürlich:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 .$$

Es seien nun Gefüge des materiellen Teilchens und alle Vorgänge in ihm gegeben in einem idealen Vakuum. Wir wollen hier die Raumzeit-Koordinaten der Punkte des Teilchens mit (X, Y, Z, iT) bezeichnen. Das veränderte Gefüge desselben Teilchens und die entsprechenden Vorgänge in einem Raum-Zeitgebiet, in welchem das von Ort und Zeit abhängige Gravitationspotential $g^{\mu\nu}$ herrscht, läßt sich dann dadurch berechnen, daß man jedem Punkt (X, Y, Z, iT) den Punkt (x, y, z, it) zuordnet, dessen λ-Koordinaten sind:

$$\lambda_1 = X, \ \lambda_2 = Y, \ \lambda_3 = Z, \ \lambda_4 = iT,$$

und nun die Zustandsgrößen in (x, y, z, it) aus denen in (X, Y, Z, iT) nach den aus dem Prinzip der Relativität des Gravitationspotentials bekannten Transformationsformeln berechnet. Einer Strecke (dX, dY, dZ, idT) in dem unveränderten Teilchen entspricht im veränderten Teilchen die Strecke (dx, dy, dz, idt), deren zugehörige $d\lambda$ sind:

$$d\lambda_1 = dX,\quad d\lambda_2 = dY,\quad d\lambda_3 = dZ,\quad d\lambda_4 = idT.$$

Wenn wir die Länge dieser Strecke im veränderten Teilchen ds und die der entsprechenden Strecke im unveränderten Teilchen dS nennen, so ist:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - i \cdot dt^2$$
$$dS^2 = dY^2 + dY^2 + dZ^2 - i \cdot dT^2.$$

Man sieht, daß die Verbindungsstrecke (dx, dy, dz, idt) zweier benachbarter Punkte durch folgende Formel auf das ideale Vakuum umgerechnet werden kann:

$$dS^2 = \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu} \cdot dx_\mu \cdot dx_\nu.$$

Das Gravitationspotential bewirkt also überall eine Verzerrung der Materie, wobei der Tensor des Deformationsellipsoides durch das Tensorpotential der Gravitation gegeben ist. Dabei verwandelt sich zum Beispiel (Fig. 1a und 1b) das recht-

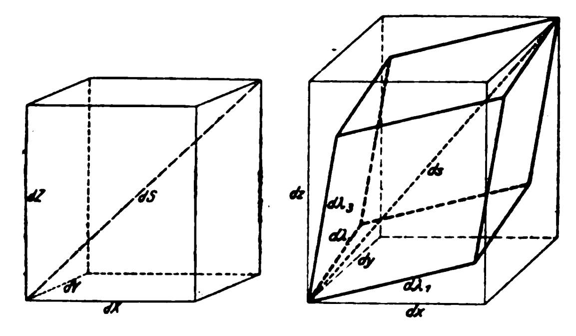


Fig. 1. *a* Volumenelement im idealen Vakuum, *b* Volumenelement im Gravitationsfeld.

winklige vierdimensionale Parallelepipedon (dX, dY, dZ, idT) in das schiefwinklige $(d\lambda_1\ d\lambda_2, d\lambda_3, d\lambda_4)$, alle die unendlich kleinen Deformationen schließen sich zu einer endlichen inhomogenen Deformation zusammen, und die nach dem Prinzip der Relativität des Gravitationspotentials berechneten Zustandsgrößen erfüllen nun tatsächlich überall die Grundgleichungen der Physik, da diese nach dem Einsteinschen Axiom jede beliebige Transformation zulassen.

Um jedes Mißverständnis auszuschalten, hebe ich noch hervor, daß man in dem betrachteten Gebiet bei Messungen mit starren Maßstäben und mit konstant gehenden Uhren, die im idealen Vakuum geeicht sind, in dem vom Gravitationsfeld $g^{\mu\nu}$ erfüllten Gebiet das in Wirklichkeit krummlinige und schiefwinklige Koordinatensystem der $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ für ein kartesisches orthogonales Koordinatensystem halten wird, solange man den Einfluß des Gravitationsfeldes auf Maßstäbe und Uhren unberücksichtigt läßt und ohne Kritik annimmt, daß sie in dem vom Gravitationsfeld erfüllten Raum genau ebenso zu gebrauchen sind, wie im idealen Vakuum. Hier liefern sie das zweifellos kartesische orthogonale Koordinatensystem (X, Y, Z, iT), welchem die $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ Punkt für Punkt entsprechen. Aber in dem vom Gravitationsfeld erfüllten Raum muß man die richtigen kartesischen Koordinaten (x, y, z, it) erst aus den durch den Einfluß des Gravitationspotentials gefälschten Messungen $(\lambda_1, \lambda_2\ \lambda_3, \lambda_4)$ durch geeignete Korrektionsrechnungen gewinnen.

Das ist der physikalische Inhalt des neuen Einsteinschen Axioms. Da die Transformationen, welche von dem (X, Y, Z, iT)-Gebiet zu dem (x, y, z, it)-Gebiet führen, nun im allgemeinen nicht mehr linear sind, so ist vorauszusehen, daß sie die beschleunigten und die krummlinigen Bewegungen frei fallender oder geworfener Körper in einem Gravitationsfeld richtig wiedergeben können. Es ist aber noch die Frage zu erledigen, ob oder vielmehr wann die Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind, deren Gültigkeit die Voraussetzung für die Möglichkeit der Transformation war.

Ich will zuerst ein quasi-homogenes Gravitationsfeld betrachten. Darunter verstehe ich ein Feld, dessen Feldstärke in Raum und Zeit so wenig veränderlich ist, daß man in dem beschränkten Raum des Einsteinschen Coupés, in welchem man experimentiert, und in der kurzen Zeit der Dauer eines Versuchs noch keine Spur einer Veränderung des Feldes, einer Inhomogenität, beobachten kann. Ein solches quasihomogenes Feld kann ich praktisch durch ein anderes quasi-homogenes Feld ersetzen, welches die Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Der Koordinatenanfang für das (x, y, z, it)-System liege in dem Raumzeitgebiet, auf das die Beobachtungen beschränkt sind. Wenn man dann die Komponenten des Gravitationspotentials $g^{\mu\nu}$ des gegebenen Feldes in eine Potenzreihe nach den Koordinaten entwickelt:

$$g^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})_0 + \sum \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)_0 \cdot x_\sigma + \frac{1}{2!} \cdot \sum \left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau}\right)_0 x_\sigma \cdot x_\tau + \cdots$$

so soll es also nach unserer Annahme für den Genauigkeitsgrad der Beobachtungen völlig ausreichend sein, wenn man die Reihe hinter den Gliedern vom ersten Grade in den x abbricht. Diese Glieder haben wir als klein von der ersten

Ordnung anzusehen, die Glieder mit höheren Potenzen von x als klein von höherer, zum mindesten von zweiter Ordnung, so daß man sie ohne weiteres streichen darf. Wir setzen nun die $(g^{\mu\nu})_0$ und die $(\partial g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma)_0$ in die Riemannschen Differentialgleichungen ein und suchen ein Wertesystem $\partial^2 g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma \partial x_\tau$ auf, welches die Gleichungen befriedigt. Ist nun jede Größe $(\partial g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma)_0 \cdot \bar{x}$ sehr klein von erster Ordnung, wobei $\bar{x}$ den größten Wert bedeuten soll, den die x_σ in dem betrachteten Gebiet annehmen können, so folgt aus dem, was wir über die Natur der Riemannschen Differentialgleichungen oben bemerkt haben, daß die aus ihnen berechneten Größen $(\partial^2 \bar{g}^{\mu\nu}/\partial x_\sigma \partial x_\tau)_0 \cdot \bar{x}^2$ sehr klein von zweiter Ordnung sind. Setzen wir also:

$$\bar{g}^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})_0 + \sum \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)_0 \cdot x_\sigma + \frac{1}{2!} \cdot \sum \left(\frac{\partial^2 \bar{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau}\right)_0 \cdot x_\sigma x_\tau + \cdots$$

so stellen diese $\bar{g}^{\mu\nu}$ ein quasi-homogenes Feld dar, welches in den praktisch allein in Betracht kommenden Gliedern der Potenzreihenentwicklung mit dem vorgelegten Feld völlig übereinstimmt, durch welches wir demnach bei allen Rechnungen das vorgelegte Feld ersetzen können, und welches außerdem den Riemannschen Differentialgleichungen gehorcht. Das heißt:

Das Gefüge der materiellen Teilchen und die materiellen Vorgänge in einem quasi-homogenen Gravitationsfeld können wir aus dem Gefüge, das dieselben Teilchen in einem idealen Vakuum haben, und aus den entsprechenden Vorgängen im idealen Vakuum durch eine geeignete Transformation mit ausreichender Genauigkeit berechnen.

Anders wird es aber in einem nicht-homogenen Gravitationsfeld. Einstein hebt selber in seiner letzten Annalenarbeit[1]) hervor, daß von dem inhomogenen Gravitationsfeld eines wirklichen materiellen Körpers die Riemannschen Differentialgleichungen nicht erfüllt sein können. Es ist demnach nicht möglich, für ein endliches, nicht gar zu kleines, Gebiet in Raum und Zeit die Deformationen der Strecken und der Zeitintervalle durch das Gravitationspotential mit Hilfe einer Koordinatentransformation darzustellen.

Um dies zu beweisen, gehe ich davon aus, daß, wenn es eine solche Transformation gäbe, die Lichtstrahlen diejenigen Kurven darstellen müßten, in welche die Koordinatentransformation die geraden Linien des idealen Vakuums überführen würde; denn im idealen Vakuum ist die gerade Linie physikalisch identisch mit dem Lichtstrahl. Nun denke ich mir (Fig. 2) aber Lichtstrahlen a und b, die beide von einem

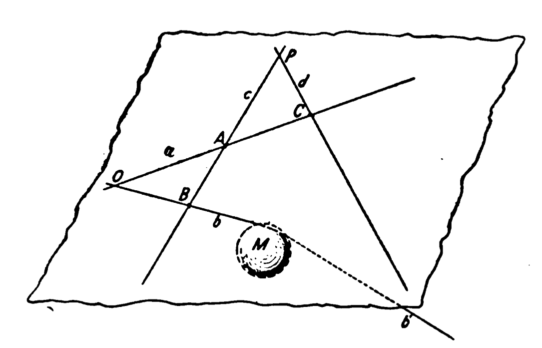


Fig. 2. Ein wirkliches Gravitationsfeld läßt sich nicht wegtransformieren.

Punkte O ausgehen. Die durch a und b definierte Ebene heiße E. Dicht neben dieser Ebene, ohne von ihr geschnitten zu werden, befinde sich eine schwere Masse M, und zwar so, daß der Lichtstrahl b dicht über ihr vorbeigeht. Der Strahl b wird dann durch das Gravitationsfeld von M aus der Ebene herausgebrochen in die Richtung b'. Dagegen soll a überall so weit von M entfernt bleiben, daß er keine bemerkbare Brechung erfährt; a bleibt also in der Ebene E. Nun mögen von einem anderen Punkt P dieser Ebene zwei Strahlen c und d ausgehen, die überall von M so weit entfernt bleiben, daß sie nicht gebrochen werden, und zwar verlaufe c in dem Gebiet der Ebene, in welchem der Strahl b das Gravitationsfeld von M noch nicht passiert hat, dagegen d in dem anderen Gebiet, in welchem der Lichtstrahl b nicht mehr in der Ebene E vorhanden ist. c schneidet also a und b in den Punkten A, B, dagegen schneidet d nur a in einem Punkte C, kreuzt aber bei b' im Raume vorbei. Es ist unmöglich, diese Figur durch eine Transformation aus einem ebenen Vierseit zu gewinnen, denn jedem der vier Schnittpunkte der Strahlen dieses ebenen Vierseits müßte auch nach der Transformation ein Schnittpunkt der Kurven entsprechen, in welche die vier Geraden des Vierseits transformiert wären. Es müßte dann also d auch b' schneiden, was tatsächlich nicht der Fall ist.

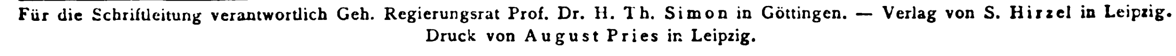
(Schluß folgt.)

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 49, 803, 1916.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Verliehen: Dem Privatdozent für anorganische Chemie an der Universität Wien Dr. Moritz Kohn, dem Privatdozent für Physik an der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Hans Witte und dem Privatdozent für Physik an der Universität Berlin Dr. Otto Reichenheim der Titel Professor.


Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 24. 15. Dezember 1917. Redaktionsschluß für No. 2 am 18. Dezember 1917. 18. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

V.

Mechanik des elektrischen Stromes. Ponderomotorische Wechselwirkungen von Stromringen.

Eine elektrische Strömung entsteht durch translatorische Bewegung von Elektronen.

In jedem Elektron sei wieder

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=\theta_1$$

gesetzt, dann bezeichnen wir, wenn u_0, v_0, w_0 seine sichtbaren[1]) Geschwindigkeitskomponenten sind,

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \theta_1 u_0\,, \\ u_y &= \theta_1 v_0\,, \\ u_z &= \theta_1 w_0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

als die Strömungsgeschwindigkeiten des Elektrons.

Für die Grundlegung der Elektrostatik hatten wir den Fall

$$u_2=v_2=w_2=0$$

ins Auge gefaßt, für die Theorie der elektrischen Ströme wollen wir als grundlegenden Fall denjenigen betrachten, in dem zwar nicht überall die wahren Werte

$$u_1=v_1=w_1=0$$

sind, aber jedenfalls ihre Mittelwerte in kleinen Räumen verschwinden.

Dann ergeben sich nach den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes[2]) für die Mittelwerte von u_2, v_2, w_2, u_x, u_y, u_z die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_2}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}=\frac{1}{c}u_x,\ldots, \\ &\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

u_2, v_2, w_2 müssen von der Zeit t unabhängig sein und die Mittelwerte der u_0, v_0, w_0 verschwinden.

Bei der Substitution:

$$u_2=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z},\ldots, \qquad (3)$$

in der U, V, W drei mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen sind, welche der Gleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0 \qquad (4)$$

genügen, können wir auch schreiben:

$$\Delta U=-\frac{1}{c}u_x,\ldots \qquad (5)$$

Bedenken wir noch, daß bei unserer Auffassung über den Äther[1]) in demselben

$$u_x=u_y=u_z=0\,,$$

und daß bei unserer Auffassung über Leiter[1]) ohne sichtbare Bewegung die durch (1) definierten Strömungsgeschwindigkeiten im Innern der Leiter stetig sein müssen und an der Oberfläche der Leiter

$$u_x\cos(\nu x)+u_y\cos(\nu y)+u_z\cos(\nu z)=0$$

sein muß, da sonst an der Oberfläche ein beständiges Zuströmen von Elektronen einer bestimmten Art, ein Abströmen von Elektronen der entgegengesetzten Art stattfinden würde, was mit der Unabhängigkeit des Feldes von der Zeit nicht verträglich wäre, so ergibt sich aus (4) und (5):

$$U=\frac{1}{4\pi c}\int u_x\frac{d\tau}{r},\ldots \qquad (6)$$

1) Bezüglich der nicht immer wörtlich zu nehmenden Bezeichnung „sichtbar" vgl. diese Zeitschr. 18, 323, 1917.
2) Vgl. diese Zeitschr. 18, 344—345, 1917.

1) Vgl. Abh. II, diese Zeitschr. 18, 341—345, 1917.

und

$$u_2 = \frac{1}{4\pi c}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int u_z \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int u_y \frac{d\tau}{r}\right\},\ldots \quad (7)$$

Es ist also alles, wie in der Hydrodynamik bei Voraussetzung von Wirbelkomponenten

$$\frac{1}{8\pi c} u_x \sin\frac{t}{T} 2\pi,\quad \frac{1}{8\pi c} u_y \sin\frac{t}{T} 2\pi,\quad \frac{1}{8\pi c} u_z \sin\frac{t}{T} 2\pi.$$

Wir können in diesem Falle von einem stationären Felde sprechen und bemerken, daß natürlich dabei die Werte der u_x, u_y, u_z nicht völlig willkürlich gewählt werden dürfen, daß man aber, wenn sie bekannt sind, nach der Formel (7) die Funktionen u_2, v_2, w_2 so bilden kann, als ob sich die Wirkungen der einzelnen Wirbelfäden superponierten. Wie in der Hydrodynamik können wir uns das Feld der u_x, u_y, u_z als ein Feld von Wirbelfäden zurechtlegen.

Daß durch die translatorische Bewegung der Elektronen derartige Wirbel hervorgerufen werden, deren Achsen den Translationsrichtungen parallel sind, ist, entsprechend der Ableitung der Gleichungen des elektromagnetischen Feldes, eine direkte Folge der Voraussetzung des universellen Dralles[1]). Wir haben bereits damit eine rein mechanische Auffassung der elektrischen Strömung gewonnen; dieselbe wird im folgenden noch weiter geklärt werden.

In den meisten Theorien blieb bisher der Zweifel bestehen, ob in einem Stromringe sich nur die eine Elektronenart bewegt (z. B. die negativen Elektronen) oder ob sich die positiven Elektronen in der einen, die negativen in der entgegengesetzten Richtung bewegen; wir haben hier, um im stationären Falle mit verschwindenden Mittelwerten von u_0, v_0, w_0 rechnen zu können[2]), die letztere Vorstellung gewählt, doch sei bemerkt, daß auch die unitarische Anschauung in ähnlicher Weise mechanisch weiter ausgebaut werden kann, nur müßten hierfür erst die Grundlagen der Theorie für den Fall großer, nicht verschwindender Mittelwerte von u_0, v_0, w_0 gelegt werden, worauf wir erst später bei der Betrachtung rasch veränderlicher, elektromagnetischer Felder zurückkommen werden.

Wenn wir die Formel für die ponderomotorischen Kräfte X_0, Y_0, Z_0, welche ich in der IV. Abhandlung[3]) abgeleitet habe:

$$X_0 = \frac{1}{2}\mu_0 \int_\omega \left\{\frac{1}{2}(u_2^2+v_2^2+w_2^2)\cos(\nu x) - u_2 u_{2\nu}\right\} d\omega = -\frac{1}{2c}\mu_0 \int_\tau (v_2 u_z - w_2 u_y)\, d\tau,\ldots \quad (8)$$

auf die ponderomotorische Wechselwirkung von Stromringen unmittelbar anwenden könnten, würden wir durch diese Formeln ohne weiteres alle seit Ampère klassischen Formeln für die ponderomotorische Wechselwirkung von elektrischen Stromringen gewinnen; es treten aber hier Schwierigkeiten auf, welche auf den ersten Blick nicht gering erscheinen und darin begründet sind, daß ein Ring kein einfach zusammenhängender Körper ist. Im übrigen stellt die Formelgruppe (8) das Ziel dieser Abhandlung dar.

Ich will zeigen, wie mir die Überwindung dieser Schwierigkeit gelungen ist, und ich komme hierbei zu dem vielleicht schönsten Teile der ganzen Theorie.

Wir denken uns einen Ring mit kreisförmigem Querschnitte q; der Kurve σ der Querschnittsmittelpunkte geben wir willkürlich, aber ein für allemal fest eine bestimmte positive Richtung, deren Richtungskosinusse mit

$$\cos(\sigma x),\ \cos(\sigma y),\ \cos(\sigma z)$$

bezeichnet werden mögen. Die Strömungsgeschwindigkeit in der Richtung σ sei eine bestimmte (positive oder negative) Konstante $\varkappa$, so daß in dem Ringe in jedem Querschnitte q:

$$u_x = \varkappa\cos(\sigma x),\quad u_y = \varkappa\cos(\sigma y),\quad u_z = \varkappa\cos(\sigma z),$$

somit im Außenraume des Ringes:

$$u_2 = -\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = \frac{\varkappa}{4\pi c}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \frac{\cos(\sigma z)}{r} d\tau - \frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \frac{\cos(\sigma y)}{r} d\tau\right\},\ldots$$

Eine wesentliche Schwierigkeit ist nun, daß das so definierte Potential ψ_2 im Außenraume des Ringes nicht eindeutig ist. Wenn wir den (zunächst nicht einfach zusammenhängenden) Raum durch eine Fläche Σ in bekannter Weise in einen einfach zusammenhängenden Raum verwandeln, indem wir die beiden Seiten dieser Fläche zu der Begrenzung des Raumes hinzunehmen, so ergibt sich bei dem Durchgange durch diese Fläche Σ ein Sprung für ψ_2, dessen absoluter Betrag

$$\frac{q|\varkappa|}{c}$$

ist. Bedenken wir jetzt, daß die hydrodynamische Formel für den Druck

1) Vgl. Abh. II, diese Zeitschr. 18, 342, 1917.

2) Es bleibt dabei die Möglichkeit bestehen, die Geschwindigkeiten der beiden Elektronenarten ungleich anzunehmen, wenn nur die Mittelwerte verschwinden.

3) Vgl. diese Zeitschr. 18, 539—542, 1917.

$$p = \mu_0 \left\{ \frac{2\pi}{T} \psi_2 \cos \frac{t}{T} 2\pi - \frac{1}{2} (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) \sin^2 \frac{t}{T} 2\pi \right\}$$

ergibt, so werden wir zu dem Schlusse geführt, daß bei dem Durchgange durch die Fläche Σ der Druck einen Sprung im absoluten Betrage von

$$\frac{2\pi}{T} \frac{\mu_0 q}{c} \left| x \sin \frac{t}{T} 2\pi \right|$$

erleidet, was der mechanischen, aus dem Grundprinzip sich leicht ergebenden Forderung widerspricht, daß der Druck zu beiden Seiten von Σ gleich sein muß. Wir wollen dieser Bedingung, ohne die schwingungsartigen Wirbel aufzugeben, dadurch genügen, daß wir die schwingungsartigen Wirbel bei konstantem, sehr großem Produkt:

Wirbelgeschwindigkeit mal Querschnitt dadurch entstehen lassen, daß die Länge $d\sigma$ jedes Ringelements schwingungsartig verändert wird. Wir haben ja zu bedenken, daß jedes positive Elektron sein Volumen schwingungsartig ändert, somit auch jedes Längenelement $d\sigma$ nach der Formel:

$$d\sigma = d\sigma_0 \left(1 + \varepsilon \sin \frac{t}{T} 2\pi \right),$$

wo $d\sigma_0$ und ε Konstanten sind, während für negative Elektronen die Änderung nach der Formel

$$d\sigma = d\sigma_0 \left(1 - \varepsilon \sin \frac{t}{T} 2\pi \right)$$

vor sich geht. Wenn nun für die positiven Elektronen, welche sich in der einen Richtung bewegen, Wirbelkomponenten

$$\frac{1}{2} K_+ \cos(\sigma x), \quad \frac{1}{2} K_+ \cos(\sigma y), \quad \frac{1}{2} K_+ \cos(\sigma z)$$

vorhanden sind, von solcher Art, daß

$$K_+ q_+$$

eine bestimmte Konstante ist, für die negativen Elektronen, welche sich in der entgegengesetzten Richtung bewegen, die Wirbelkomponenten

$$\frac{1}{2} K_- \cos(\sigma x), \quad \frac{1}{2} K_- \cos(\sigma y), \quad \frac{1}{2} K_- \cos(\sigma z)$$

von solcher Art, daß

$$K_- q_- = - K_+ q_+ {}^{1)},$$

so werden wir in den Geschwindigkeiten:

$$u = \frac{K_+}{8\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_+ \frac{\cos(\sigma z)}{r} d\sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int_+ \frac{\cos(\sigma y)}{r} d\sigma \right\} + \frac{K_-}{8\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_- \frac{\cos(\sigma z)}{r} d\sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int_- \frac{\cos(\sigma y)}{r} d\sigma \right\}, \ldots,$$

in denen die Zeichen + bzw. — an den Integralen andeuten, daß wir über einen Ring von positiven bzw. negativen Elektronen zu integrieren haben, Sinusterme

$$u_2, \; v_2, \; w_2$$

erhalten, von der früheren Form, aber jetzt unter Einhaltung der Forderung, daß p eindeutig ist, mit Rücksicht auf die Konstanz von $K_+ q_+$ bzw. $(-K_- q_-)$.

Die kurze Untersuchung lehrt uns folgendes: Wenn wir bei konstant angenommenen $d\sigma$ von schwingungsartigen Wirbelkomponenten

$$\frac{1}{2} \mathfrak{u}_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \sin \frac{t}{T} 2\pi, \ldots$$

sprechen, so haben wir es mit scheinbaren, schwingungsartigen Wirbeln zu tun; denselben liegen wahre, ganz außerordentlich große Wirbelkomponenten[1])

$$\frac{1}{2} \mathfrak{u}_W = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_W}{\partial y} - \frac{\partial v_W}{\partial z} \right), \ldots$$

zugrunde, von solcher Art, daß die Sinusterme der Größen

$$\frac{1}{2} \frac{\int_\Omega \left(v_W \cos(\nu z) - w_W \cos(\nu y) \right) d\omega}{\overline{d\tau_0}}, \ldots$$

mit den Größen

$$\frac{1}{2} \mathfrak{u}_2, \quad \frac{1}{2} \mathfrak{v}_2, \quad \frac{1}{2} \mathfrak{w}_2$$

zusammenfallen, wenn unter $\overline{d\tau_0}$ der Mittelwert von $\overline{d\tau}$ im Verlaufe einer Schwingungsdauer verstanden wird. Ohne unsere formale Analyse sonst irgendwie zu verändern, können wir durch diese Vorstellung alle Schwierigkeiten beseitigen, welche in dem mehrfachen Zusammenhang der Ringfläche begründet sind.

Wir haben dementsprechend auch unsere Voraussetzung des universellen Dralles (Abh. II[2])) in der Form aufzustellen:

$$\mu u = \mu_0 \left(u_0 + u_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + u_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi \right) = u' + U', \quad \ldots,$$

wo

$$\frac{\overline{du'}}{dt} = \frac{\overline{dv'}}{dt} = \frac{\overline{dw'}}{dt} = 0$$

und

1) Wir setzen hier, in einem zweifellosen Fortschritte gegen meine frühere, in dieser Zeitschr. 17, 262—264, 1916 (Über pulsierende Wirbelringe) dargelegte Auffassung, nicht $K_+ = K_-$ völlig konstant; die schwingenden Komponenten ergeben sich bei dieser neuen Auffassung infolge der schwingungsartigen Änderung der $d\sigma$.

1) Der Index W soll als Abkürzung für „wahr" stehen.
2) Diese Zeitschr. 18, 341 ff., 1917.

$$U' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - a$$

$$\lim_{d\tau=0} \frac{\int_\Omega \mu_0 \left(v_W \cos(\nu z) - w_W \cos(\nu y)\right) d\omega}{d\tau_0}, \ldots$$

Bei dieser formalen Zugrundelegung der Voraussetzung des universellen Dralles folgen unsere Vorstellungen über den elektrischen Strom unmittelbar aus dieser Voraussetzung; die formalen Ableitungen der Ausdrücke[1]) für die ponderomotorischen Kräfte bleiben nunmehr auch für mehrfach zusammenhängende Körper unverändert, und wir gelangen jetzt unter Überwindung der hervorgehobenen Schwierigkeit zu den Formeln (8) für die ponderomotorischen Kräfte, mögen die betrachteten Körper einfach oder mehrfach zusammenhängend sein, da ja nunmehr der Druck im ganzen Außenraume, bei dem Zurückgehen auf die wahren Wirbelkomponenten, eindeutig und stetig ist.

Wir führen jetzt, unter Beibehaltung des stets von Lorentz verwandten Maßsystems, die Stromkomponenten

$$J_x, J_y, J_z$$

durch die Definition

$$J_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}}\, q u_x, \ldots \tag{9}$$

ein, dann ergibt sich aus (8) für die Kraftkomponenten, welche ein Stromring σ mit den Stromkomponenten

$$J_x = J \cos(\sigma x), \ldots \tag{10}$$

im Elemente $d\sigma$ (ξ, η, ζ) auf einen Stromring σ' mit den Stromkomponenten

$$J_x' = J' \cos(\sigma' x), \ldots \tag{10'}$$

im Elemente $d\sigma'$ (ξ', η', ζ') ausübt:

$$X_0 = \frac{J J'}{4\pi c^2} \int_\sigma \int_{\sigma'} \frac{\cos(\sigma x)\cos(r\sigma') - \cos(r x)\cos(\sigma\sigma')}{r^2}\, d\sigma\, d\sigma', \ldots, \tag{11}$$

wo

$$r = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}, \quad \cos(\sigma\sigma') = \cos(\sigma x)\cos(\sigma' x) + \cos(\sigma y)\cos(\sigma' y) + \cos(\sigma z)\cos(\sigma' z);$$

ich brauche hier nicht besonders darauf einzugehen, daß sich auch die Drehungsmomente so berechnen, als ob jedes Stromelement $J d\sigma$ auf jedes Stromelement $J' d\sigma'$ die Kraftkomponenten

$$\frac{J J'}{4\pi c^2} \frac{\cos(\sigma x)\cos(r\sigma') - \cos(rx)\cos(\sigma\sigma')}{r^2}, \ldots$$

ausübte.

1) Abh. IV, diese Zeitschr. **18**, 539—542, 1917.

Durch die Definition (9)[1]) haben die Stromkomponenten eine ganz bestimmte mechanische Bedeutung gewonnen.

1) Bei Benutzung des elektrostatischen Maßsystems wäre

$$J_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{8\pi}}\, q u_x, \ldots$$

zu setzen, bei Benutzung des elektrodynamischen Maßsytems

$$J_x = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\, q u_x, \ldots,$$

bei Benutzung des elektromagnetischen Maßsystems

$$J_x = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\mu_0}{8\pi}}\, q u_x, \ldots$$

(Eingegangen 18. Oktober 1917.)

Über die Zerfallskonstante des Radiothors.

Von B. Walter.

Kürzlich haben Stefan Meyer und Fritz Paneth[1]) den Nachweis geführt, daß der bisher für die Halbwertzeit des Radiothors angenommene Wert von 2,0 Jahren zu hoch ist, und daß derselbe höchstens auf 1,9 Jahre gesetzt werden darf. Einen genaueren Wert für diese Konstante anzugeben, war ihnen deswegen nicht möglich, weil das von ihnen untersuchte Radiothorpräparat, das sie selbst aus einem starken, aus Monazitsand stammenden Mesothorpräparat durch Fällung mit Ammoniak abgeschieden hatten, sich als nicht ganz frei von Mesothor erwies.

Unter diesen Umständen dürfte es von Interesse sein, daß auch ich seit längerer Zeit zu demselben Zweck zwei Radiothorpräparate in Untersuchung habe, die mir von der hiesigen Chemischen Fabrik von Dr. Richard Sthamer freundlichst zur Verfügung gestellt waren und bei denen sich bisher kein Anhalt dafür gezeigt hat, daß sie durch Mesothor oder irgendeinen anderen radioaktiven Stoff verunreinigt sind. Somit glaube ich denn auch in der Lage zu sein, auf Grund meiner Messungen, die übrigens das Ergebnis der genannten Beobachter in der Hauptsache bestätigen, die fragliche Konstante noch mit einer etwas größeren Genauigkeit anzugeben als sie, trotzdem die Aktivität meiner beiden Präparate nur etwa $^1/_{30}$ bzw. $^1/_{100}$ von der des ihrigen betrug.

Der Apparat, welchen ich bei meinen Messungen benutzte, war fast derselbe wie derjenige der genannten Beobachter, nur daß ich wegen der geringeren Stärke meiner Präparate natürlich auch ein entsprechend schwächeres Radium-

1) Stefan Meyer und Fritz Paneth, Wien. Ber. Abt. IIa, **125**, 1253, 1916.

normal und ferner auf dem Plattenkondensator statt einer Bleischicht von 10 mm nur eine solche von 5 mm verwandte. Derartige Unterschiede sind ja indessen für den vorliegenden Zweck vollkommen nebensächlich; und die Hauptaufgabe ist hierbei vielmehr die, die Messungen jedesmal unter möglichst denselben Bedingungen zu wiederholen.

Die in dieser Weise für meine beiden Präparate gemessenen Werte sind nun in der folgenden Tabelle zusammengestellt, und zwar steht in der ersten Spalte die Nummer und in der zweiten das Datum der Messung, in der dritten ferner die gefundene Aktivität des Präparates in mg $Ra\,Br_2 + 2H_2O$, in der vierten die Zahl der seit der vorhergehenden Messung verflossenen Tage und in der letzten Spalte endlich der auf Grund der danebenstehenden und der vorhergehenden Messung berechnete Wert der Halbwertzeit T in Jahren.

1. Präparat I (hergestellt am 12./8. 1915.)

Messung	Datum	mg $Ra\,Br_2 + 2\,H_2O$	Tage	T
1	10./5. 16	0,5012	—	—
2	26./2. 17	0,3716	292	1,852
3	21./5. 17	0,3426	84	1,963
4	27./9. 17	0,2997	129	1,830

2. Präparat II (hergestellt am 6./3. 1916.)

Messung	Datum	mg $Ra\,Br_2 + 2\,H_2O$	Tage	T
1	10./5. 16	0,2060	—	—
2	21./5. 17	0,1416	376	1,903
3	27./9. 17	0,1245	129	1,901

Bewerten wir nun bei jedem der beiden Präparate die Genauigkeit der in der letzten Spalte stehenden Einzelwerte von T entsprechend der Größe der danebenstehenden Zahl der seit der letzten Messung verflossenen Tage, so erhalten wir als Mittelwert von T aus den Einzelwerten des Präparates I: 1,8650 und aus denen des Präparates II: 1,9026 Jahre. Die Zuverlässigkeit dieser beiden Mittelwerte ferner dürfte sich annähernd wie die Aktivität der beiden Präparate selbst, d. h. also wie 5 : 2 verhalten, so daß sich schließlich als Gesamtmittel aus allen Versuchen $T = 1{,}876$ Jahre oder 685 Tage ergibt. Die entsprechenden Werte der Zerfallskonstanten λ sind

$$0{,}3695\ a^{-1} = 1{,}012 \cdot 10^{-3}\, d^{-1}$$

und die der mittleren Lebensdauer

$$\tau = 2{,}707\ a = 989\ d.$$

Hamburg, Physikal. Staatslaboratorium, im Oktober 1917.

(Eingegangen 8. Oktober 1917.)

Ganzjährige Beobachtungen der durchdringenden Strahlung auf dem Obir (2044 m).

Von Victor F. Hess und Martin Kofler.

(Auszug aus einer in den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien Oktober 1917 erschienenen Abhandlung.)

Die zahlreichen, in den letzten Jahren veröffentlichten Untersuchungen über die durchdringende Strahlung haben ergeben, daß diese sehr komplexer Natur ist. An der Erdoberfläche setzt sie sich aus drei Komponenten zusammen, diese sind: 1. die γ-Strahlung der radioaktiven Substanzen im Erdboden und an der Erdoberfläche, 2. die γ-Strahlung der radioaktiven Zerfallsprodukte in der Atmosphäre und 3. eine von oben kommende sehr durchdringliche Strahlung, deren Vorhandensein durch Ballonbeobachtungen von Gockel[1]), Hess[2]) und Kolhörster[3]) sichergestellt, deren Natur dagegen noch ganz ungeklärt ist[4]). Die quantitative Beteiligung der genannten drei Komponenten an dem beobachteten Gesamteffekt ist wegen der sehr variablen Bodenstrahlung an verschiedenen Orten durchaus verschieden. Festgestellt ist nur, daß die oben unter 2 genannte Komponente nur einen sehr kleinen Betrag zur Gesamtstrahlung liefert und daß die prozentuelle Beteiligung der Komponente 3 mit wachsender Erhebung in der Atmosphäre stark anwächst.

Zur näheren Ergründung der Natur der von oben kommenden sehr harten Strahlungskomponente und insbesondere zur Entscheidung der Frage, ob auch diese Schwankungen unterworfen ist, schien es sehr wünschenswert, auf einem Bergobservatorium eine längere Messungsreihe durchzuführen, wo die gleichzeitige Beobachtung der meteorologischen Elemente dann auch die Beurteilung des Einflusses dieser Faktoren ermöglicht. Auf die Wichtigkeit einer solchen Versuchsreihe hat später noch insbesondere Gockel[5]) hingewiesen.

Im Herbste 1913 ergab sich hierfür eine besonders günstige Gelegenheit, da von der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien der eine von uns (Kofler) und Dr. Artur Wagner zur Ausführung erdmagnetischer

1) Diese Zeitschr. 11, 280, 1910; 12, 595, 1911.
2) Diese Zeitschr. 12, 998, 1911; 13, 1084, 1912; Wien. Ber. (IIa), 121, 2001; 122, 1481, 1912/13.
3) Abh. der Naturforsch. Ges. Halle; Neue Folge Nr. 5, 1913, Nr. 4, 1914. Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 1111; 16, 719.
4) Hess, diese Zeitschr. 14, 610, 1913; E. v. Schweidler, Elster-Geitel-Festschrift S. 411, 1915; K. Bergwitz, ebenda S. 585; Meteorol. Zeitschr. 33, 310, 1916; Linke, Meteorol. Zeitschr. 33, 157 u. 510, 1916.
5) Diese Zeitschr. 16, 345, 1915.

Messungen auf den Obir (2044 m) in Südkärnten entsendet wurden. Der eine von uns (Kofler) hatte es auf sich genommen, dort die Beobachtungen der durchdringenden Strahlung einzurichten und dann abwechselnd mit Dr. A. Wagner weiterzuführen.

Die Untersuchungen sind von der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien und der k. k. Österreichischen Gesellschaft für Meteorologie durch Gewährung von Subventionen ermöglicht worden.

Für die Beobachtungen der durchdringenden Strahlung wurden zwei vom Institut für Radiumforschung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien zur Verfügung gestellte Wulfsche Strahlungsapparate[1]) benutzt, dieselben, welche von dem einen von uns (Hess) bei zehn Messungsreihen im Freiballon gebraucht worden waren. Einem Voltverluste von 1 Volt pro Stunde entsprach in dem einen Apparate eine Ionisierungsstärke von $q = 0{,}79$ Ionen ccm/sec, in dem anderen Apparate 1,56 Ionen ccm/sec. (Um mit den zahlreichen bisherigen Literaturangaben in Einklang zu bleiben, haben wir den alten Wert des Elementarquantums $e = 4{,}65 \cdot 10^{-10}$ st. E. beibehalten.)

Die Apparate wurden gegen Ende September auf den Obir gebracht, dort zwecks Druckausgleich mit der Außenluft geöffnet und von Zeit zu Zeit mit frischem Natrium beschickt, so daß die Isolationsverluste auch bei sehr feuchtem Wetter stets auf ihrem normalen Betrag erhalten werden konnten. Die Luftfüllung der beiden Apparate entsprach einem Drucke von 595—600 mm bei etwa 0^0 C. Die mittleren Werte der durchdringenden Strahlung am Obir betrugen bei Apparat I 13,2, bei Apparat II 10,6 Ionen ccm/sec.

Die meteorologische Station Obir (Berghaus) liegt kaum 100 m unterhalb des Gipfels (2140 m) in einer flachen, von Nord nach Süd verlaufenden Mulde. Das Haus steht dicht an dem steil nach Nordost abfallenden Rücken des Berges und wird von dem Grat nur um etwa 15 m überragt. Die Wulfschen Strahlungsapparate waren etwa 1 m über dem Boden dicht neben dem Hause (an der Südwestecke desselben) innerhalb eines auf vier freistehenden Pfählen montierten Holzkastens aufgestellt. Die Wandstärke des Holzkastens war 12 mm. Während der eigentlichen Beobachtungsintervalle blieb der Kasten geschlossen, nur für die Ablesungen selbst wurde die Vorder- und Hinterwand an Scharnieren heruntergeklappt. Die Temperatur im Innern des Kastens wurde fortlaufend gemessen. Die Strahlungsapparate waren zur Abhaltung rascher Temperaturschwankungen allseitig mit einer 2 cm dicken Watteschicht umhüllt.

1) Wulf, diese Zeitschr. 10, 152 u. 997, 1909.

Die Beobachtungen wurden Ende September 1913 begonnen. Der eine von uns (Kofler) und Dr. Artur Wagner waren abwechselnd 2 bis 3 Monate auf dem Obir anwesend. Nachdem die Beobachtungsverhältnisse einigermaßen stabilisiert waren, wurde für die Ablesungen der meteorologische Beobachter Martin Urantschitsch geschult. Dieser hat, nachdem Dr. Kofler und Dr. Wagner durch die allgemeine Mobilisierung am 1. August abberufen worden waren, die Beobachtungen allein bis zum 3. November 1914 fortgesetzt. Wegen zweimaliger Beschädigung des Apparats I liegen zusammenhängende Messungen an diesem Apparat nur für die Zeit vom 25. Januar bis 28. Mai 1914 vor. Die Beobachtungen an Apparat II wurden für die Zeit vom 1. November 1913 bis 3. November 1914 ausgewertet. In der Regel wurden pro Tag fünf Messungen gemacht, indem die Voltverluste während der Zeitintervalle (die Stunden sind nach der 24stündigen Bezeichnungsweise eingetragen) $7^h 30$ bis $10^h 30$, $10^h 30$ bis 14^h, $14^h 30$ bis $17^h 30$, 18^h bis 21^h und während des zehnstündigen Nachtintervalls 21^h bis 7^h beobachtet wurden.

Die meteorologischen Daten sind teils den Originaltabellen der Station Obir-Berghaus, teils dem Jahrbuche der k. k. Meteorolog. Zentralanstalt entnommen. Nur die Anemographenangaben wurden, da es sich um die Kenntnis der allgemeinen, nicht der lokalen Windrichtung und Stärke handelte, der Gipfelstation Obir-Hannwarte (2140 m) entnommen.

Die Berechnungen und die Bearbeitung des gesamten Beobachtungsmaterials über durchdringende Strahlung am Obir mußte, da Dr. Kofler seit Ende August 1914 sich in russischer Kriegsgefangenschaft befindet, von Dr. Hess allein durchgeführt werden.

I. Jährliche Periode der durchdringenden Strahlung.

Als erster hat Mache[1]) in Innsbruck eine jährliche Periode festgestellt, doch sind seine Messungen mit einem offenen, sehr dünnwandigen Ionisationsgefäß gemacht, so daß sie mit den neueren Messungen mit Wulfschen Apparaten nicht vergleichbar sind. Mit dem Wulfschen Strahler hat Gockel[2]) eine viel geringere jährliche Schwankung gefunden: das Minimum ($q = 10{,}6$ Ionen ccm/sec) fiel im Februar, das Maximum ($q = 12{,}2$ Ionen ccm/sec) auf Juni bis

1) Mache, Wien. Ber. (IIa), 119, 55, 1910.
2) Gockel, diese Zeitschr. 16, 345—352, 1915.



Juli. Er erklärt diese Schwankungen mit dem wechselnden Gehalt der obersten Bodenschichten an Emanation und deren Zerfallsprodukten.

Da auf dem Obir nur mit Apparat II durch ein ganzes Jahr fortlaufende Messungen der durchdringenden Strahlung gemacht wurden, seien hier nur die diesbezüglichen Resultate angeführt. In der folgenden Tabelle sind die Monatsmittel nach den Messungen mit Apparat II verzeichnet, und zwar getrennt: a) die Monatsmittel der Nachtwerte (21^h bis 7^h) und b) die Monatsmittel der Tagwerte. Unter „Tagwert" ist der Mittelwert der vier bei Tag ausgeführten Terminbeobachtungen verstanden.

Tabelle I.

Jahr und Monatsziffer	Monatsmittel der durchdringenden Strahlung	
	Nachtwert	Tagwert
1913, XI.	10,61	10,78
1913, XII.	10,58	10,67
1914, I.	10,66	10,69
1914, II.	10,54	10,43
1914, III.	10,53	10,40
1914, IV.	10,56	10,31
1914, V.	10,66	10,64
1914, VI.	10,82	10,76
1914, VII.	10,76	10,84
1914, VIII	10,88	10,63
1914, IX.	10,90	10,69
1914, X.	10,83	10,55
Jahresmittel	10,69	10,62
Zahl der hierzu verwendeten Einzelmessungen	(ca. 360)	(ca. 1440)

Aus der Tabelle ersieht man, daß die niedrigsten Werte der Strahlung auf die Monate März und April fallen. Im Mai erfolgt ein Anstieg. Noch deutlicher ist dies in den beiden Kurven Fig. 1 erkennbar.

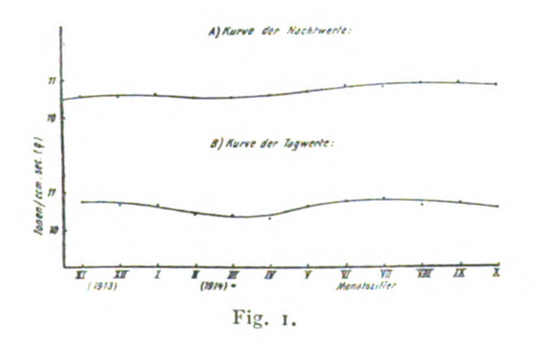


Fig. 1.

Das Maximum wird bei der Kurve A erst im September erreicht, wogegen bei der Kurve der Tagwerte es schon im Juli erreicht ist. Wie man auf den ersten Blick erkennt, ist der jährliche Gang überhaupt bei den Tagwerten viel deutlicher als bei den Nachtwerten. Bei letzteren sind die Monatsmittel der Wintermonate Dezember—April praktisch überhaupt gleich. Man könnte von einem Wintertypus (Dezember—April) und einem Sommertypus (Mai—November) der durchdringenden Strahlung sprechen. Die maximale Schwankung (Amplitude) im Verlaufe des Jahres beträgt bei den Nachtwerten 0,37 Ionen ccm/sec, bei den Tagwerten ist diese 0,77 Ionen ccm/sec, also doppelt so groß.

Daraus folgt, daß die jährliche Periode der durchdringenden Strahlung einem sekundären Effekt der Sonnenstrahlung (Bodenerwärmung, Änderung der Emanationsverteilung in den obersten Bodenschichten und in der Atmosphäre) ihren Ursprung verdankt[1]). Dieser Effekt wird sich in unserem Falle mehr in den Gebieten der weiteren Umgebung des Berges geltend machen, da der felsige Boden des Berggipfels nur wenig zur Emanationsexhalation beitragen dürfte. Erst die allgemeine Konvektion (aufsteigender Luftstrom) wird auf dem Obir die Änderung der durchdringenden Strahlung wesentlich zur Geltung bringen. Diese Erklärung wird auch dadurch gestützt, daß dort, wie wir später noch sehen werden, bei Schneefällen die strahlungserhöhende Wirkung des frisch gefallenen Schnees fast immer vor seiner abschirmenden Wirkung gegenüber der Bodenstrahlung prädominiert. Zum Teil wird allerdings im jährlichen Gang der Strahlung auch die abschirmende Wirkung dauernder Schneebedeckung des Bodens zur Geltung kommen, da auf dem Obir von November bis Ende Mai eine im Mittel $^3/_4$ m dicke Schneedecke vorhanden war.

Die jährliche Amplitude der durchdringenden Strahlung auf dem Obir ist im Mittel etwa 0,5 Ionen ccm/sec, also etwa dreimal kleiner, als sie in der Ebene nach Beobachtungen Gockels gefunden wurde.

Daraus ersieht man, daß die variablen Anteile der durchdringenden Strahlung auf einem ziemlich isolierten Felsgipfel, wie dem Obir in 2000 m Höhe prozentuell bedeutend weniger ins Gewicht fallen. Es liegt somit nahe, anzunehmen, daß die Zerfallsprodukte der Radium-Thorium- und eventuell der Aktinium-Emanation das einzige variable Element der durchdringenden Strahlung sind. Die von oben kommende äußerst durchdringliche Strahlungskomponente, welche in 2000 m natürlich schon bedeutend mehr zur Gesamtstrahlung beiträgt, als am Meeresniveau, scheint somit im Verlaufe des Jahres praktisch konstant zu bleiben.

Die oben gegebene Darlegung der Ursachen der jährlichen Periode der Strahlung wird noch

1) A. Gockel, diese Zeitschr. **16**, 345, 1915.

bekräftigt, wenn man folgendes beachtet: In der Kurve der Tagwerte Fig. 1 ist unzweifelhaft ersichtlich, daß das Minimum der Strahlung etwa zwischen Mitte März und Mitte April fällt, also in jene Zeit, wo in geringeren Höhen schon während des ganzen Tages Tauwetter vorherrscht. Die Bildung des Tauwassers hat eine Verhinderung des Austritts der Emanation aus dem Boden, also auch geringeren Emanationsgehalt des aufsteigenden Luftstromes und damit eine Verringerung der am Berggipfel beobachteten Strahlung zur Folge. Bei den Nachtwerten, wo der Effekt der aufsteigenden Luftströme im allgemeinen wegfällt, ist daher das März-April-Minimum viel weniger scharf ausgeprägt. Der nachfolgende Anstieg der Strahlung im Mai ist der Austrocknung des Bodens und der dadurch bedingten vermehrten Emanationsabgabe der Erdoberfläche in der weiteren Umgebung, zum Teil aber wohl auch dem allmählichen Verschwinden der Schneedecke am Berge selbst zuzuschreiben.

Die viermonatlichen zusammenhängenden Resultate bei Apparat I ergaben eine vollkommene Bestätigung der oben gezogenen Schlüsse.

II. Temperatureinfluß und tägliche Periode.

Bergwitz[1]) und Dorno[2]) haben gefunden, daß die bei den Wulfschen Strahlungsapparaten angebrachten Temperaturkompensationseinrichtungen nicht unter allen Umständen ausreichend wirksam sind: Insbesondere bei nur einseitiger Erwärmung des Gehäuses, ferner während einer raschen Erwärmung oder Abkühlung des Apparats entspricht die ablesbare Fadenspreizung nicht der wahren Spannung, zu welcher der Apparat aufgeladen ist. Doch verbleibt keine Dauerwirkung, d. h. wenn man, nachdem alle Teile des Apparats die neue Temperatur angenommen haben, abliest, erhält man richtige Werte.

Auf dem Obir waren, wie erwähnt, die Apparate vor direkter Sonnenstrahlung geschützt innerhalb eines Holzkastens aufgestellt. Da innerhalb des geschlossenen Kastens durch Strahlung bei Tag höhere, bei Nacht tiefere Temperaturen auftraten als im Freien, — an manchen sonnigen Tagen erreichte die Temperaturschwankung 20° — so haben wir es doch von vornherein nicht für ganz unmöglich halten dürfen, daß eine Beeinflussung der Angaben der Apparate im Bergwitz-Dornoschen Sinne durch Temperaturschwankungen stattgefunden habe.

1) Bergwitz, diese Zeitschr. **14**, 953, 1913.
2) Dorno, ebenda **14**, 956, 1913.

Zur Untersuchung dieser Frage haben wir direkt das vorhandene Beobachtungsmaterial benutzt.

Zunächst wurden die während des an Temperaturexzessen so reichen Monats Mai 1914 bei Tag erhaltenen Strahlungswerte mit Ausschluß der bei Niederschlag erhaltenen Messungen in drei Gruppen eingeordnet: bei zunehmender, bei praktisch konstanter und bei abnehmender Außentemperatur. Bei Apparat I zeigten sich gar keine, bei Apparat II so geringe Verschiedenheiten, daß die Heranziehung eines größeren Beobachtungsmaterials nötig erschien.

Demgemäß wurden die bei Tag erhaltenen Strahlungswerte zweier anderer Monate (Februar, März) in Gruppen geordnet je nach der Größe der gleichzeitig beobachteten, im Innern des Kastens während der dreistündigen Messung eingetretenen Temperaturänderung. Aus den so entstandenen Tabellen (vgl. unsere ausführliche Mitteilung in den Wiener Sitzungsberichten) geht hervor, daß von einem regelmäßigen Gang der Werte mit der Temperaturänderung *keinesfalls* die Rede sein kann, insbesondere ist keine Spur von einem entgegengesetzten Einfluß bei Erwärmung und Abkühlung zu sehen.

Bei unseren Messungen auf dem Obir ist also eine Änderung der Angaben der Wulfschen Apparate bei Temperaturänderung der Umgebung nicht erkennbar. Unter einem ist damit auch die Frage, ob die durchdringende Strahlung selbst durch Temperaturänderungen beeinflußt wird, im negativen Sinne entschieden.

Es bleibt somit nur übrig, zu untersuchen, ob der absolute Stand der Temperatur selbst für die durchdringende Strahlung irgendwie von Einfluß ist. Da wir das Vorhandensein einer jährlichen Periode festgestellt haben, so werden wir von vornherein erwarten, daß bei höheren Temperaturen im Mittel etwas höhere Strahlungswerte sich ergeben.

Dies ist auch tatsächlich der Fall, sobald man die Werte eines größeren, Winter und Sommer umfassenden Zeitintervalls (z. B. 1. Februar bis 1. September 1914) nach den gleichzeitig am Thermographen registrierten, während jedes Beobachtungsintervalls herrschenden Mitteltemperaturen ordnet (um den Einfluß einer etwa vorhandenen täglichen Periode auszuschließen, sind hier nur die Strahlungsbeobachtungen während des 10stündigen Nachtintervalls 21^h bis 7^h verwendet). Siehe Tabelle II.

Die Zunahme der Mittelwerte der Strahlung mit zunehmender Mitteltemperatur ist hier unverkennbar. Wenn man jedoch z. B. nur die Werte einer Jahreszeit oder eines Monats nach den gleichzeitig beobachteten Mitteltemperaturen

Tabelle II.

Mittlere Temperatur	Durchdringende Strahlung (Apparat II) (Nachtwerte)
Unter — 2°	10,55 (39)
— 1,9° bis 0°	10,56 (17)
0° bis + 1,9°	10,59 (24)
+ 2,0° bis 3,9°	10,77 (33)
+ 4° bis 5,9°	10,72 (22)
+ 6° bis 7,9°	10,78 (14)
+ 8° bis 12°	10,91 (25)

ordnet, so ist keinerlei derartige Abhängigkeit erkennbar, ein Zeichen, daß in der obigen Tabelle nur die jährliche Periode wieder zum Ausdruck kommt. (Tabellen vgl. die ausführliche Mitteilung.)

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der täglichen Periode der durchdringenden Strahlung. Die diesbezüglichen bisherigen Resultate verschiedener Autoren zeigen untereinander beträchtliche Abweichungen.

Nach einigen älteren Untersuchungen[1]) besteht eine doppelte tägliche Periode der Strahlung. Wulf (l. c.) fand bei langdauerndem Schönwetter im Herbst eine dem Potentialgefälle analoge doppelte tägliche Periode, die gegen Winter zu in eine einfache überging und bei bedeckten feuchten Tagen ganz verschwand. Bergwitz[2]) fand in Braunschweig in einem Garten und am Andreaskirchturm nur schwache Andeutungen einer täglichen Periode (Mittagsdepression, Ansteigen gegen Abend). Gockel[3]) bezweifelt auf Grund seiner an verschiedenen Orten der Schweiz ausgeführten zahlreichen Messungen überhaupt die Existenz einer täglichen Periode der durchdringenden Strahlung. Simultanmessungen, welche 1913 in Davos, Graz, Innsbruck, Valkenburg (Holland) und Wien an verabredeten Tagen ausgeführt worden sind[4]), haben für die erwähnten fünf Orte ganz verschiedenen täglichen Gang ergeben. Dagegen stimmte der tägliche Gang je zweier an gleichem Orte aufgestellten Apparate ziemlich gut überein.

Was die vorliegenden Messungen auf dem Obir betrifft, so muß zunächst bemerkt werden, daß die zur Beurteilung des Vorhandenseins einer täglichen Periode der Strahlung eigentlich erforderlichen stündlichen Ablesungen nur an den sogenannten internationalen Tagen gemacht worden sind. Es sind dies die Tage, an welchen laut Beschluß der internationalen Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt ausführliche Beobachtungen der meteorologischen Verhältnisse der freien Atmosphäre ausgeführt werden (in der Regel jeden ersten Donnerstag im Monat, manchmal auch an den folgenden Tagen). Im ganzen sind aber am Obir stündliche Messungen der Strahlung nur an 11 Tagen (Apparat I) bzw. 18 Tagen (Apparat II) gemacht worden. Die Zahl der Messungen ist zur sicheren Beurteilung des Vorhandenseins einer täglichen Periode nicht ausreichend. (Vgl. die ausführliche Mitteilung.)

Wir müssen daher zur Beurteilung des täglichen Ganges die sehr zahlreich vorhandenen, gewöhnlichen dreistündigen Beobachtungen bei Tage bzw. die 10stündigen Nachtbeobachtungen heranziehen. So resultieren pro Tag 5 Terminwerte zu den mittleren Zeiten 2^h, 9^h, 12^h, 15^h, 16^h und $19{,}30^h$.

Als wir zunächst für die vier Monate, in welchen Simultanbeobachtungen an beiden Apparaten vorlagen, den täglichen Gang nach den Mittelwerten zu den erwähnten fünf Terminen zeichneten, bemerkten wir, daß die beiden Apparate einen durchaus nicht übereinstimmenden Gang der durchdringenden Strahlung ergaben, was umso überraschender war, als wir mit denselben Apparaten 1913 an anderem Orte (Wien, Hohe Warte, k. k. Meteorol. Zentralanstalt) auf der Plattform eines Turmes gute Übereinstimmung im täglichen Gang der beiden Instrumente gefunden hatten. Die Diskrepanz im scheinbaren täglichen Gang auf dem Obir ließ vermuten, daß irgendein mit der Tageszeit variierender Einfluß, der jedoch bei den beiden Apparaten verschieden war, die Strahlungsschwankung vortäuschte.

Wir schritten nun zur genauen Untersuchung über die Ursachen der Diskrepanz des täglichen Ganges der beiden Instrumente, worüber hier nur ganz kurz berichtet werden kann.

Wir haben die Tageskurven für beide Apparate für schöne und bedeckte Tage getrennt ermittelt und gefunden, daß der Verlauf der Kurven an schönen Tagen fast genau gleich dem an bedeckten oder Niederschlags- und Nebel-Tagen ist. Da somit die Diskrepanz im täglichen Gang der beiden Apparate an bedeckten Tagen bestehen blieb, kann keinesfalls die Sonnenstrahlung oder deren Folgeerscheinungen die Ursache der Diskrepanz sein.

Den Schlüssel des Verständnisses lieferte uns die Kenntnis des Umstandes, daß die beiden Apparate an jedem einzelnen Tage nicht gleichzeitig frisch geladen wurden: Apparat II mußte täglich nur einmal, Apparat I dagegen zweimal

1) Mache und Rimmer, diese Zeitschr. **7**, 619, 1906; T. F. Mc. Keon, Phys. Rev. **25**, 399; Th. Wulf, diese Zeitschr. **10**, 152, 1909 u. a.

2) Bergwitz, Elster-Geitel-Festschr. (Braunschweig, Vieweg & Sohn), 1915, S. 596.

3) Gockel, diese Zeitschr. **14**, 1143, 1913; **16**, 345, 1915; Neue Denkschr. d. Schweiz. Naturforsch. Ges. **54**, 1. Abh., 1917.

4) Benndorf, Dorno, Hess, v. Schweidler u. Wulf, diese Zeitschr. **14**, 1141, 1913.

geladen werden (wegen seines größeren Volumens) und es war durchgehends während des ganzen Jahres der Vorgang eingehalten worden, daß Apparat I um 7^h und $17^1/_2{}^h$, Apparat II um 14^h neu geladen wurde. Die einzelnen Messungen wurden bei sehr verschiedenen mittleren Feldstärken im Apparat ausgeführt, da bei Beginn der Messungen die Spannung 250 bis 300 Volt beträgt und bis herab zu etwa 80 Volt fortlaufend weiter beobachtet wurde.

Nun ist nach den grundlegenden Untersuchungen von Moulin u. a. nicht mehr zweifelhaft, daß auch bei Ionisation durch γ-Strahlen und bei den kleinsten Stromstärken die anfängliche Wiedervereinigung frischerzeugter Ionenpaare bewirkt, daß bei Feldstärken von 10 bis 50 Volt/cm noch nicht voller Sättigungsstrom erreicht ist.

Bei unseren Apparaten variierte die mittlere Feldstärke zwischen 30 und 10 Volt/cm. Im ersteren Falle ist für durchdringende Strahlen nach Moulin[1]) die erreichte Stromstärke 97,5 Proz., im letzteren Falle aber nur 93 Proz. des Sättigungsstromes. Bei konstanter Ionisierungsquelle (in unserem Falle also konstanter durchdringender Strahlung) nimmt somit der gemessene Effekt (Voltverlust pro Stunde) mit fortlaufender Entladung des Apparats um fast 5 Proz. ab. Dies ist noch günstig gerechnet, denn die Moulinschen Zahlen gelten eigentlich nur für den Kreisplattenkondensator. Für eine für Erreichung der Sättigung so ungünstige Kondensatorform, wie sie der Wulfsche Apparat darstellt, wird die Änderung im Laufe der Entladung noch größer sein. Weiter sind die Verhältnisse bei Apparat I noch ungünstiger als bei Apparat II, da ersterer größeres Volumen bei unsymmetrischer Feldverteilung im Innern aufweist.

Wir sehen also, daß die bisher als selbstverständlich geltende Voraussetzung, daß in den Wulfschen Apparaten stets „praktisch" Sättigung erreicht ist, nicht zutrifft.

An den oben mitgeteilten täglichen Ladezeiten der beiden Apparate ersehen wir weiter, daß gerade zur Zeit, wo Apparat II die größte Feldstärke hatte (Nachmittagsintervall $14^1/_2$ bis $17^1/_2{}^h$), bei Apparat I die kleinste mittlere Feldstärke herrschte. Also werden bei konstanter Ionisierungsquelle die in den beiden Apparaten gemessenen Ströme im Verlaufe des Tages um mehrere Prozente in dem einen oder anderen Sinne differieren müssen.

Das nächstliegende ist daher, alle gemessenen Werte auf vollkommene Sättigung nach Moulin zu korrigieren.

Wir konnten so feststellen, daß die Amplitude des scheinbaren täglichen Ganges bei beiden Apparaten wesentlich gemildert wird. Die Hauptdiskrepanz (tiefes Minimum der Strahlung laut Apparat I um 16^h) verschwindet.

Da die Moulinsche Korrektur für Apparat II wegen seiner zur Erreichung der Stromsättigung überhaupt günstigeren Form sicher vollständiger ist, als für Apparat I, so seien im folgenden nur die mit Apparat II erhaltenen Resultate hinsichtlich des täglichen Ganges diskutiert.

In der folgenden Tabelle sind die zu den fünf täglichen Terminen erhaltenen Monatsmittel eingetragen und bei jedem Werte der auf Sättigungsstrom nach den Moulinschen Zahlen korrigierte Wert in Klammern beigesetzt.

Fig. 2 enthält die graphische Darstellung dieser Tabelle. Fig. 2a gibt die direkt beob-

Tabelle III.

Jahreszahl und Monatsziffer	Durchdringende Strahlung (Ionen ccm/sec). (Apparat II).					
	Nachtwert 2^h	9^h	$12^1/_4{}^h$	16^h	$19^1/_2{}^h$	Tagwert[2]) (Mittel)
1913, XI.	10,61 (11,01)	10,85 (11,42)	10,65 (11,35)	11,02 (11,32)	10,61 (10,95)	10,78 (11,26)
1913, XII.	10,58 (10,98)	10,52 (11,06)	10,50 (11,19)	10,72 (11,01)	10,94 (11,27)	10,67 (11,13)
1914, I.	10,66 (11,06)	10,56 (11,12)	10,58 (11,27)	10,73 (11,02)	10,89 (11,24)	10,69 (11,16)
1914, II.	10,54 (10,94)	10,53 (11,07)	10,17 (10,84)	10,34 (10,63)	10,66 (11,01)	10,43 (10,89)
1914, III.	10,53 (10,93)	10,17 (10,71)	10,27 (10,94)	10,60 (10,90)	10,56 (10,90)	10,40 (10,86)
1914, IV.	10,56 (10,96)	10,14 (10,66)	10,14 (10,80)	10,90 (11,21)	10,05 (10,37)	10,31 (10,76)
1914, V.	10,66 (11,06)	10,24 (10,76)	10,35 (11,03)	11,24 (11,55)	10,71 (11,05)	10,64 (11,10)
1914, VI.	10,82 (11,22)	10,47 (11,03)	10,70 (11,40)	11,39 (11,70)	10,50 (10,85)	10,76 (11,25)
1914, VII.	10,76 (11,16)	10,61 (11,16)	10,56 (11,27)	11,45 (11,76)	10,75 (11,10)	10,84 (11,32)
1914, VIII.	10,88 (11,28)	10,51 (11,05)	10,45 (11,14)	11,27 (11,60)	10,47 (10,82)	10,63 (11,40)
1914, IX.	10,90 (11,30)	10,75 (11,30)	10,28 (10,95)	11,14 (11,44)	10,61 (10,95)	10,69 (11,16)
1914, X.	10,83 (11,23)	10,46 (11,02)	10,44 (11,12)	10,53 (10,83)	10,78 (11,14)	10,55 (11,03)
Jahresmittel	10,69 (11,09)	10,48 (11,11)	10,42 (11,11)	10,94 (11,25)	10,63 (10,97)	10,62 (11,11)

1) Moulin, Ann. de chim. et de phys. 22, 26, 1911.

2) Unter „Tagwert" ist der Mittelwert der 4 Messungen um 9^h, $12^1/_4{}^h$, 16^h, $19^1/_2{}^h$ verstanden.

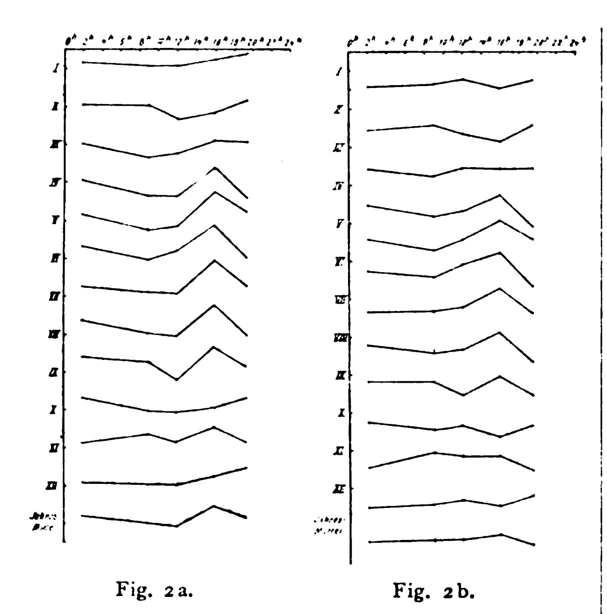


Fig. 2a. Fig. 2b.

achteten, Fig. 2b die auf Sättigungsstrom korrigierten Werte wieder.

Man sieht an den Kurven, daß in den Sommermonaten der tägliche Verlauf der Strahlung Schwankungen aufweist, die weitaus größer sind, wie im Winter und auch in den auf Sättigung korrigierten Werten erkennbar sind. Berechtigterweise kann daher ein Wintertypus und ein Sommertypus des täglichen Ganges unterschieden werden. Bei ersterem sind die Schwankungen so klein, daß man von einer „täglichen Periode" überhaupt nicht sprechen kann. Im Sommer dagegen (April—September) sind auch nach den auf Sättigung korrigierten Werten von Apparat II regelmäßige Änderungen der Strahlung im Laufe des Tages unverkennbar. Sie steigt von Vormittag bis zu einem Maximum um 16^h, um dann wieder zu sinken. Die Amplitude der Tagesschwankung beträgt im Mittel nur etwa 0,5 Ionen ccm/sec. Die durchdringende Strahlung im Sommer scheint somit der Tageskurve der Temperatur ziemlich parallel zu gehen. Wir haben oben gezeigt, daß dieses Verhalten nicht etwa störenden Einflüssen der Sonnenstrahlung auf das Fadensystem zuzuschreiben ist, sondern reellen Veränderungen der Ionisatoren entspricht. Daß die durchdringende Strahlung im Sommer der täglichen Temperaturkurve im allgemeinen parallel geht, läßt sich unschwer auf die allgemeine Konvektion der variablen Elemente der durchdringenden Strahlung (Emanationen und deren Zerfallsprodukte) zurückführen.

Keinesfalls kann man sagen, daß die tägliche Variation der durchdringenden Strahlung am Gipfel des Obir etwa stärker hervortritt, als in der Ebene. Hierdurch wird der bei der Diskussion der jährlichen Periode S. 587 gezogene Schluß, daß der von oben kommende Anteil der durchdringenden Strahlung (harte Strahlung) keine merklichen Variationen zeigt, neuerlich bekräftigt.

Was endlich den Unterschied der Strahlung bei Tag und bei Nacht betrifft, so lehrt ein Blick auf die Tabelle III, daß die Unterschiede durchwegs minimal sind. Im Jahresmittel ergibt sich der Mittelwert bei Nacht zu 10,69 (korrigiert 11,09), bei Tag zu 10,62 (korrigiert 11,11).

Bei Apparat I scheinen die (unkorrigierten) Werte bei Tag etwas höher als die bei Nacht, doch wurden die Tagwerte bei diesem Apparate durchwegs bei größerer Feldstärke, also besserer Sättigung erhalten, als die Nachtwerte. Bei der Unsicherheit der Korrektionsfaktoren für Apparat I wird auf Anführung der doch nur in ungenügendem Maße korrigierten Werte verzichtet.

Nachdem auf dem Obir im Verlaufe eines ganzen Jahres kein regelmäßiger Unterschied zwischen den Werten der durchdringenden Strahlung bei Tag und bei Nacht gefunden worden ist[1]) und in dieser Höhe die von oben kommende sehr harte Strahlungskomponente schon bedeutend mehr ins Gewicht fällt, wie in der Ebene, so scheint die von einzelnen Autoren vertretene Anschauung, daß die Sonne die Quelle der unbekannten harten Strahlungskomponente ist, als irrig erwiesen.

III. Einfluß des Luftdruckes und der Luftdruckschwankungen.

Luftdruck und Luftdruckschwankungen können die durchdringende Strahlung nur indirekt beeinflussen, indem sie auf den Emanationsgehalt der Luft und der obersten Bodenschichten einwirken. Die mit Ort und meteorologischen Verhältnissen ungemein wechselnde Durchlässigkeit des Bodens läßt jedoch derartige Einflüsse sehr verschieden zur Geltung kommen. Von bisherigen Beobachtern haben Wulf[2]), ferner auch Simpson und Wright[3]) bei tiefem Luftdruck Strahlungserhöhung festgestellt, während Mache (l. c.) in Innsbruck keinen derartigen Effekt finden konnte. Letzterer konstatierte

1) Gockel, Neue Denkschr. d. Schweiz. Naturforsch. Ges. **45**, 1. Abh. 1917, S. 50, fand auch auf dem 3200 m hohen Piz Languard keinen Unterschied der Strahlung bei Tag und bei Nacht.

2) Wulf, diese Zeitschr. **10**, 1002, 1909.

3) Simpson und Wright, Proc. Roy. Soc. A. **85**, 175, 1911.

dagegen im Winter einen Einfluß von Luftdruckänderungen derart, daß bei steigendem Luftdruck die kleinsten Strahlungswerte auftraten.

Wir haben zur Untersuchung derartiger Einflüsse das Material der Simultanmessung an beiden Apparaten (Ende Januar bis Ende Mai 1914) auf dem Obir verwendet. Wenn man sämtliche Werte (Tag- und Nachtwerte) als gleichwertig verwendet und nur die bei Niederschlag erhaltenen Messungen ausschließt, erhält man folgende Tabelle (die Ziffern in Klammern bedeuten die Zahl der Einzelwerte):

Luftdruck	575—579	580—584	585—589 mm
ddr. Strahlg. App. I	13,16 (8)	13,24 (17)	13,21 (56)
„ „ App. II	10,61 (8)	10,57 (17)	10,61 (55)
Luftdruck	590—594	595—599	600—605 mm
ddr. Strahlg. App. I	13,43 (97)	13,20 (153)	13,09 (122)
„ „ App. II	10,39 (93)	10,36 (152)	10,38 (125)

Ein regelmäßiger Gang der Strahlungswerte mit dem Luftdruck ist nicht erkennbar.

Eine Zusammenstellung der Strahlungswerte mit den in den 12 vorhergehenden Stunden eingetretenen Luftdruckänderungen lieferte folgendes Resultat:

	Luftdruck steigend		Luftdruck fallend	
Apparat I	13,27	(237)	13,21	(192)
Apparat II	10,45	(263)	10,46	(195)

Auf dem Obir ist somit auch kein Einfluß von Luftdruckänderungen auf die Strahlung nachweisbar.

IV. Einfluß der Niederschläge.

Daß Niederschläge jeglicher Art die durchdringende Strahlung erhöhen, ist von Mache und Rimmer (l. c.), Gockel[1]), Mache (l. c.), E. v. Schweidler[2]) u. a. festgestellt worden und erklärt sich dadurch, daß die festen Zerfallsprodukte der Emanationen von den Niederschlägen mit zu Boden gerissen werden, wo sie als radioaktiver Oberflächenbelag während ihrer ganzen Zerfallszeit ionisierend wirken (höchstens einige Stunden lang, da die Zerfallsprodukte der Radiumemanation überwiegen). Das Beobachtungsmaterial auf dem Obir wurde diesbezüglich für die Zeit vom 1. Februar bis 1. August 1914 durchgearbeitet, um für alle Arten von Niederschlägen zu verschiedener Jahreszeit Beispiele zu erhalten. Zuerst seien (Tab. IV) die Resultate für die drei Monate mit fast rein winterlichem Charakter mitgeteilt: Der Einfluß der Nebelbildung, der sich insofern äußern kann, als die radioaktiven festen Produkte in der Atmosphäre häufig als Kondensationskerne fungieren, wird gleichzeitig mitbehandelt. Es wurden alle Einzelwerte (auch die Nachtwerte) in gleicher Weise berücksichtigt.

Tabelle IV.

	Durchdringende Strahlung					
	Apparat I			Apparat II		
	Februar	März	April	Februar	März	April
Gesamtmittel	13,31 (133)	13,13 (151)	13,14 (147)	10,45 (135)	10,44 (152)	10,35 (147)
Werte bei Schneefall (oder Regen)	13,56 (28)	13,30 (42)	13,24 (28)	10,69 (28)	10,57 (41)	10,54 (29)
Werte bei niederschlagsfreiem Wetter	13,24 (105)	13,06 (109)	13,10 (119)	10,37 (107)	10,36 (111)	10,31 (118)
Werte bei Nebel (ohne gleichzeit. Niederschl.)	13,53 (8)	13,30 (20)	13,32 (11)	10,47 (9)	10,44 (20)	10,31 (11)

Bei Schneefall sind durchweg an beiden Apparaten die Strahlungswerte um 0,2 bis 0,3 Ionen ccm/sec erhöht. Die Werte bei Nebel sind ebenfalls höher als die „niederschlagsfreien Werte“, doch vom Gesamtmittel oft nur unwesentlich verschieden.

Für den Monat Mai (s. Tab. V) waren genügend Fälle vorhanden, um den Einfluß von Schnee und Regen getrennt zu untersuchen:

Tabelle V.

Mai	Apparat I	Apparat II
Gesamtmittel	13,54 (138)	10,64 (149)
Werte bei Schnee allein .	13,25 (11)	10,36 (10)
Werte bei Schnee und gleichzeit. Regen	14,29 (11)	11,14 (13)
Werte bei Regen allein .	13,55 (23)	10,80 (24)
Werte bei Niederschlag (zusammen)	13,66 (45)	10,80 (47)
Werte bei niederschlagsfreiem Wetter	13,50 (93)	10,56 (102)
Werte bei Nebel (ohne gleichzeit. Niederschlag . . .	13,53 (16)	10,66 (23)

1) Gockel, diese Zeitschr. **8**, 701, 1907.
2) v. Schweidler, Wien. Ber. (IIa) **119**, 837, 1910; **121**, 1297, 1912.

Die Erhöhung der Strahlung bei Regen und gleichzeitigem Schneefall ist am deutlichsten und beträgt 0,6 bis 0,8 Ionen ccm/sec. Es ist dies auch verständlich, da gerade im Mai auf dem Obir das gleichzeitige Auftreten beider Niederschlagsarten die am meisten turbulenten und heftigsten Kondensationsvorgänge kennzeichnet. Daß im Mai bei Schneefällen eine Erniedrigung der Strahlung erfolgt, hängt wohl einerseits mit der Schirmwirkung des Schnees gegenüber der Bodenstrahlung, anderseits aber auch damit zusammen, daß zu dieser Jahreszeit reine Schneefälle vorwiegend erst nach (eventuell anderorts) vorhergegangenen heftigen anderen Niederschlägen auftreten, also zu einer Zeit, wo die Atmosphäre nahezu frei von radioaktiven Zerfallsprodukten ist.

Für die beiden Sommermonate Juni und Juli wurden speziell noch die Werte bei Gewitterregen und unmittelbar nachher getrennt zusammengestellt (in diesen Monaten liegen nur die Beobachtungen mit Apparat II vor):

Tabelle VI.

Apparat II		
	Juni 1914	Juli 1914
Gesamtmittel	10,78 (149)	10,84 (153)
Werte bei niederschlagsfreiem Wetter	10,69 (103)	10,76 (111)
Werte bei Regen oder Schnee	10,95 (37)	10,97 (35)
Werte bei Gewitterregen	11,03 (9)	10,99 (7)
Unmittelbar nach Gewitter	11,04 (7)	10,96 (5)

Die Erhöhung der Strahlung ist, wie man sieht, bei Gewitterregen am stärksten und dauert auch unmittelbar nachher an (Zerfall der zu Boden beförderten radioaktiven Produkte), was sich sogar bei unserer Beobachtungsweise (dreistündige Intervalle) noch erkennen läßt.

V. Einfluß der Feuchtigkeit.

Abgesehen von einer vereinzelten Messung Gockels[1]), der einmal bei einer Ballonfahrt innerhalb einer Wolke eine Erhöhung der durchdringenden Strahlung bemerkte, liegen diesbezüglich unseres Wissens keine Beobachtungen vor. Erhöhter Wasserdampfgehalt der Luft kann natürlich nur indirekt die Strahlung erhöhen, wenn etwa eine lokale Anreicherung der Luft an radioaktiven Produkten durch deren Anlagerung an Wassertröpfchen und allgemeine Verminderung ihrer Beweglichkeit stattfindet. Zur Untersuchung derartiger Einflüsse haben wir wieder das Material der Simultanbeobachtungen (1. Februar—31. Mai 1914) mit beiden Apparaten herangezogen. Da im Jahrbuche der k. k. Meteorologischen Zentralanstalt die Angaben der relativen Feuchtigkeit und des Dampfdrucks nur für die drei meteorologischen Haupttermine 7^h, 14^h und 21^h vorliegen, während unsere Zeitmittel für die Strahlungsbeobachtungen auf die dazwischenliegenden vier Termine 9^h, $12^1/_4{}^h$, 16^h und $19^1/_2{}^h$ fallen, so wurden die Tagesmittel dieser vier Strahlungsmessungen und ebenso die Tagesmittel der drei täglichen Feuchtigkeits- und Dampfdruckangaben gebildet und nach entsprechenden Klassen geordnet zusammengestellt:

Tabelle VII.

Relative Feuchtigkeit in Proz.	Tagesmittel der durchdringenden Strahlung	
	Apparat I	Apparat II
20 bis 49	13,31 (11)	10,24 (11)
50 bis 59	13,24 (13)	10,31 (13)
60 bis 69	13,34 (11)	10,33 (11)
70 bis 79	13,26 (17)	10,41 (17)
80 bis 89	13,54 (17)	10,51 (17)
90 bis 100	13,47 (6)	10,54 (7)

Tage, an welchen wesentliche Niederschläge fielen, sind in dieser Tabelle ausgelassen.

Wie man erkennt, besteht wirklich ein geringer Anstieg der durchdringenden Strahlung mit zunehmender relativer Feuchtigkeit, wie es nach dem am Anfange dieses Abschnittes Gesagten erwartet werden konnte.

Ferner haben wir die Tagesmittel der durchdringenden Strahlung (Niederschlagstage ausgenommen) mit den Tagesmitteln des Dampfdrucks (absolute Feuchtigkeit) zusammengestellt.

Die Zunahme der Strahlung mit wachsendem Dampfdruck tritt viel deutlicher hervor, als die mit steigender relativer Feuchtigkeit. Dies rührt aber wohl zum Teil davon her, daß die niedrigsten Dampfdruckwerte bei kaltem Schönwetter im Winter, die höchsten in der wärmeren Jahreszeit nach Niederschlägen vorkommen. Das Ansteigen der Strahlung mit vorrückender Jahreszeit (jährliche Periode) spiegelt sich daher hier wieder.

VI. Einfluß der Bewölkung und der Sonnenscheindauer.

Ein direkter Einfluß der Bewölkung auf die durchdringende Strahlung ist wohl nicht zu erwarten. Man könnte höchstens daran denken, daß eine Absorption der von oben kommenden Strahlungskomponente durch Wolkenschichten von sehr großer vertikaler Mächtigkeit sich bemerkbar machen könnte. Eine Überschlagsrechnung zeigt, daß ein derartiger Effekt weit

1) Gockel, diese Zeitschr. 11, 280, 1910.

unter der Grenze der Beobachtungsmöglichkeit liegt:

Rechnen wir mit A. Wagner[1]) den maximalen Wassergehalt von 1 m^3 Wolkenluft zu etwa 5 g Wasser. Auf 1 m^2 ausgebreitet, würde dies eine Wasserschicht von $5 \cdot 10^{-4}$ cm Höhe ergeben. Eine Wolke von 1000 m vertikaler Mächtigkeit würde demnach einer nur 5 mm hohen Wasserschicht entsprechen. Rechnen wir für die harte Strahlung nach Kolhörster (l. c.) ein etwa 7 fach größeres Penetrationsvermögen als für die γ-Strahlen von RaC, so würde der Absorptionskoeffizient der harten Strahlung in Wasser zu etwa $\mu = 0{,}006$ cm^{-1} sich ergeben. Die Absorption in der 1 km hohen Wolkenschicht entspräche somit $e^{-0{,}003} = 0{,}997$, d. h. einer Schwächung um höchstens 3 Promille.

Demnach können nur indirekte Einflüsse des Bewölkungsgrades auf die durchdringende Strahlung existieren, indem etwa die radioaktiven Zerfallsprodukte in der Atmosphäre wegen ihrer Eigenschaft als Kondensationskerne in den Wolkenschichten sich stauen und somit an dem 2000 m hoch gelegenen Beobachtungsorte strahlungserhöhend wirken.

Faßt man wieder die Tagesmittel der durchdringenden Strahlung (Simultanwerte Februar bis Mai 1914) mit den entsprechenden Tagesmitteln des nach der 10 stufigen Skala gemessenen Bewölkungsgrades zusammen, so erhält man folgende Tabelle:

Tabelle VIII.

Mittlerer Bewölkungsgrad	Apparat I	Apparat II
0 bis 2	13,21 (26)	10,32 (26)
3 bis 6	13,36 (36)	10,33 (36)
7 bis 10	13,50 (28)	10,47 (31)

Tage mit Niederschlag sind in dieser Tabelle wieder ausgeschlossen worden. Der Anstieg der Strahlung bei zunehmender Bewölkung ist zwar sehr gering (0,2 Ionen ccm/sec), aber doch ersichtlich.

Man wird daher auch erwarten können, daß eine Zusammenstellung der Tagesmittel der durchdringenden Strahlung mit den (nach den Angaben eines Sonnenscheinautographen entnommenen) täglichen Sonnenscheindauern eine Abnahme der Strahlung mit zunehmender Dauer des Sonnenscheins ergibt (auch hier ist nur das Material der Simultanbeobachtungen Februar bis Mai 1914 verwertet):

Tabelle IX.

Mittlere Dauer des Sonnenscheins (in Stunden)	Durchdringende Strahlung	
	Apparat I	Apparat II
0 bis 1	13,54 (39)	10,59 (41)
1 bis 4	13,20 (8)	10,44 (9)
4 bis 7	13,49 (14)	10,44 (14)
7 bis 9	13,39 (27)	10,37 (27)
9 bis 11	13,25 (18)	10,37 (18)
über 11	13,34 (15)	10,30 (15)

Es besteht also tatsächlich eine wenn auch nur sehr schwach angedeutete Abnahme der Strahlungs-Tagesmittel mit zunehmender Dauer des Sonnenscheins. Die Erklärung ist in der Übereinanderlagerung zweier Effekte zu suchen: Die Sonnenstrahlung an sich wird (besonders bei trockenem Boden) die Emanationsexhalation des Erdbodens und damit auch (bei aufsteigendem Luftstrom) die durchdringende Strahlung in der Höhe etwas vergrößern. Diese Wirkung wird aber offenbar auf dem Obir durch die mit Stauungserscheinungen der radioaktiven Zerfallsprodukte in und unterhalb der Wolken zusammenhängende Strahlungserhöhung bei Bewölkung übertroffen.

VII. Einfluß der Windrichtung und Windstärke.

Auch von diesen beiden meteorologischen Elementen ist nur ein indirekter Einfluß auf die durchdringende Strahlung zu erwarten, nämlich insofern als der Emanationsgehalt der Atmosphäre und der obersten Bodenschichten lokal, je nach der Windrichtung und allgemein nach der Windgeschwindigkeit etwas variieren kann (saugende Wirkung insbesondere bei böigen Winden auf die obersten Bodenschichten).

Ordnet man die Beobachtungen eines halben Jahres (1. Mai bis 1. November 1914) (Apparat II) nach den acht Hauptwindrichtungen, so erhält man folgende Tabelle. (Die Zahl der Einzelwerte ist wieder in Klammern beigesetzt. Tag- und Nachtbeobachtungen sind als gleichwertig verwendet):

Windrichtung	N	NE	E	SE	S
durchdr. Strahlg.	10,76	10,57	10,68	(10,84)	10,70
	(149)	(61)	(92)	(16)	(47)

Windrichtung	SW	W	NW	Windstille
durchdr. Strahlg.	10,74	10,75	10,92	10,74
	(135)	(252)	(97)	(59)

Das Gesamtmittel der 908 Beobachtungen beträgt 10,74 Ionen ccm/sec. Der Mittelwert bei Windstille, ferner bei W, SW und N ist mit diesem Gesamtmittel praktisch gleich. Bei NE, E und SE ist die Strahlung etwas erniedrigt (das Mittel bei SE entspricht zu wenig Einzelmessungen), bei NW erhöht. Dies dürfte mit

1) A. Wagner, Wien. Ber. (IIa) **117**, 1283, 1908.

einer Erhöhung des Emanationsgehaltes der Luft zusammenhängen, welche verständlich ist, wenn man bedenkt, daß die aus dem NW-Quadranten stammenden Winde aus dem Gebiete der Uralpen kommen, wo die Emanationsabgabe der freien Oberfläche verwitternder Primärgesteine sicher erheblich größer ist, als bei vegetationsbedeckten Alluvialgebieten. Um den Einfluß der Windstärke zu untersuchen, haben wir die Werte in sechs Klassen wie folgt eingeordnet (Apparat II, Halbjahr 1. Mai bis 1. November 1914):

Windgeschw.	0 (Windstille)	1—9 km/st.	10—19 km/st.	20—29 km/st.
	10,74	10,82	10,71	10,70
	(59)	(251)	(280)	(155)

Windgeschw.	30—39 km/st.	über 40 km/st.
	10,80	10,86
	(91)	(62)

Nach dieser Tabelle glauben wir, daß eine Beeinflussung der durchdringenden Strahlung durch die Windstärke nicht besteht.

Zusammenfassung.

Es wurden auf dem Obir (Südkärnten) in 2044 m Seehöhe in der Zeit von Oktober 1913 bis November 1914 fortlaufende Messungen der durchdringenden Strahlung teils mit einem, teils mit zwei Wulfschen Strahlungsapparaten gleichzeitig ausgeführt. Die Zahl der bearbeiteten Einzelmessungen (über 3- bis 10stündige Intervalle) beträgt 1753 mit dem einen, 604 mit dem anderen Apparat[1]).

Es ergab sich eine deutliche jährliche Periode: Minimum im März bis April, Maximum Juli bis August. Die Amplitude der Jahresschwankung ist bei den Tagesbeobachtungen etwa doppelt so groß, wie bei den Nachtbeobachtungen und ist überhaupt erheblich kleiner, als nach Gockels Beobachtungen in normaler Seehöhe.

Die Strahlung erweist sich, wenn man die Werte nur eines Monats oder einer Jahreszeit zusammenstellt, als unabhängig von der Temperatur.

Bezüglich des täglichen Ganges zeigten die beiden Apparate eine Diskrepanz, die auch an bedeckten Tagen besteht, also nicht in störenden Einflüssen der Sonnenstrahlung auf den Apparat ihren Grund hat. Eine nähere Untersuchung zeigte, daß infolge nicht vollkommener Erreichung des Sättigungsstromes besonders in dem einen Apparate die gemessenen Werte von der mittleren Feldstärke, also auch von der seit der Neuaufladung verstrichenen Zeit, abhängen. Da die Apparate zu verschiedenen Tageszeiten geladen wurden, herrschte in ihnen zu gleicher Zeit verschiedener Sättigungsgrad. Durch Anbringung einer Korrektur nach Angaben von Moulin läßt sich diese Fehlerquelle größtenteils eliminieren.

Im Winter besteht auf dem Obir überhaupt keine regelmäßige Variation der durchdringenden Strahlung. Im Sommer zeigt sie einen schwachen Anstieg von 9^h bis 16^h, von da an Abfall bis abends. Die Mittelwerte der Strahlung bei Tag und Nacht sind gleich.

Eine Abhängigkeit der Strahlung vom Luftdruck und von Luftdruckschwankungen ist auf dem Obir nicht erkennbar. Niederschläge, besonders Gewitterregen, bringen eine deutliche Erhöhung der Strahlung hervor. Schnee wirkt meist strahlungserhöhend, nach vorhergegangenen anderen heftigen Niederschlägen aber strahlungserniedrigend.

Ferner wird die Abhängigkeit der Strahlung von relativer und absoluter Feuchtigkeit, Bewölkungsgrad, Sonnenscheindauer, Windrichtung und Windstärke diskutiert.

Aus den ganzjährigen Beobachtungen auf dem Obir ergibt sich, daß dort, in 2000 m Seehöhe, die Schwankungen der durchdringenden Strahlung sowohl absolut als auch relativ geringer sind als in normaler Seehöhe. Da in 2000 m die von oben kommende sehr harte Komponente der durchdringenden Strahlung schon erheblich mehr an der Gesamtstrahlung beteiligt ist, so können somit die Schwankungen dieser Komponente nur äußerst klein sein. Die Hypothese, daß diese Komponente von der Sonne herstammt, scheint endgültig dadurch widerlegt, daß auf dem Obir die Tag- und Nachtwerte der Strahlung gleich groß sich ergeben. Die Zerfallsprodukte der Radium- und Thorium- (eventuell der Aktinium-)Emanation im Boden und in der Atmosphäre scheinen die einzigen mit der Zeit und den meteorologischen Elementen variablen Bestandteile der Gesamtstrahlung zu sein.

Wien, im Oktober 1917. Institut für Radiumforschung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften und k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.

(Eingegangen 19. Oktober 1917).

1 Die vollständigen Tabellen der Beobachtungen sind im Jahrbuche der k. k. Meteorolog. Zentralanstalt in Wien für 1915 (Anhang) veröffentlicht.

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Problem der Materie.

Von Gustav Mie.

(Schluß.)

III.

Wir kehren nun zu dem Ausgangspunkt unserer Betrachtungen zurück: zu dem Einsteinschen Coupé. Wir sind jetzt in der Lage zu beurteilen, inwieweit die Physiker in diesem Coupé, wenn die neue Einsteinsche Theorie richtig ist, die Schwerewirkungen und die Wirkungen der beschleunigten Bewegung nicht voneinander trennen können, und inwieweit es ihnen doch möglich sein wird.

Solange die Feldstärke der Gravitation in dem ganzen Innern des Coupés als konstant und während der Zeit der Beobachtungen als unveränderlich anzusehen ist, werden sich für die im Coupé eingeschlossenen Beobachter die beiden Wirkungen in jeder Hinsicht genau kompensieren und die Beobachter können deshalb wähnen, daß das Coupé in einem schwerefreien Gebiet ruht, während ein außenstehender Beobachter feststellen kann, daß es in dem quasikonstanten Schwerefeld eine quasi-gleichförmige Beschleunigung hat. Allerdings werden die in dem Coupé eingeschlossenen Physiker mit ihren Maßstäben und Uhren sich ein nach ihrer Ansicht kartesisches, orthogonales Koordinatennetz konstruieren, welches der Außenstehende, der die Existenz des Gravitationsfeldes weiß, für krummlinig und schiefwinklig erklären muß, auch über Zeit- und Längenverhältnisse wird der außenstehende Beobachter andere Ansichten haben, als die eingeschlossenen Physiker. Aber trotzdem, was das Wesentliche ist: In sich werden die Beobachtungen der eingeschlossenen Physiker immer stimmen, und sie werden in ihrem Koordinatensystem auch ganz dieselben Naturgesetze finden, die man in einem richtigen minkowskischen Koordinatensystem im idealen Vakuum findet, auch dieselbe Lichtgeschwindigkeit und dieselben physikalischen Konstanten des Äthers.

Anders wird die Sache aber, sobald das Schwerefeld des Himmelskörpers, auf den das Coupé zustürzt, in dem Bereich, der den Beobachtern in Raum und Zeit für ihre Messungen zur Verfügung steht, so große Verschiedenheiten der Feldstärke aufweist, daß sie sich bei dem mit ihren Instrumenten erreichten Grad von Genauigkeit schon bemerkbar machen. Allerdings können die Beobachter auch jetzt bei ihren Messungen die Anwesenheit des Schwerefeldes ganz außer acht lassen. Sie können die Zeit durch mitbewegte Uhren messen, die Längen durch kleine starre Maßstäbchen, sie können sich gerade Linien in Raum und Zeit konstruieren, indem sie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten als gerade Linie definieren. Sie würden alsdann aber eine sehr sonderbare Geometrie bekommen. Wenn sie beispielsweise die Punktpaare $A\ A'$ und $B\ B'$ die auf zwei von einem Punkt O ausgehenden Geraden l und l' liegen, (Fig. 3) miteinander durch ganz

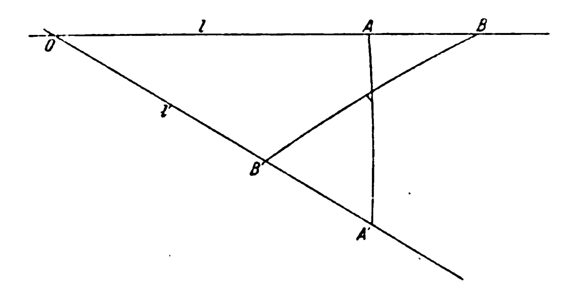


Fig. 3. Nichtminkowskische Geometrie im wirklichen Gravitationsfeld.

exakte Gerade verbänden, so würden sie finden, daß sich im allgemeinen $A\ A'$ und $B\ B'$ nicht in einem Punkte schneiden, sondern daß sie im Raum aneinander vorbei kreuzen. Sie bekämen eine Geometrie, in der es überhaupt keine ebenen Flächen gibt, natürlich auch keine ebenen Räume, kurz eine nichtminkowskische Geometrie. Das Eigentümliche dieser Geometrie besteht darin, daß in ihr überhaupt kein kartesisches Koordinatennetz möglich ist. Besonders zu beachten ist, daß man unter anderm auch dann keine Ebene bekommt, wenn man durch die einzelnen Punkte der Weltlinie eines frei bewegten Massenteilchens lauter Linien konstanten Ortes legt. In der minkowskischen Welt müßte das aus dieser Linienschar gebildete zweidimensionale Kontinuum eine zur Zeitachse parallele Ebene sein. In unserem nichtminkowskischen Gebiet aber ist es eine krumme Fläche. Folglich ist eine auf dieser Fläche gezogene Linie konstanter Zeit keine Gerade, keine kürzeste Linie in dem dreidimensionalen Raum konstanter Zeit. Das heißt: In unserem nichtminkowskischen Gebiet ist die Bahnkurve eines frei bewegten Massenpunktes in dem dreidimensionalen Raum konstanter Zeit keine Gerade, keine kürzeste Verbindungslinie zweier Bahnpunkte! Ebenso sind auch die Bahnen der Lichtstrahlen keine Geraden und man kann

demnach in dieser Geometrie die Geradlinigkeit einer Strecke nicht mehr durch optische Methoden kontrollieren. Es ist also klar, daß in diesem sonderbar veränderten Gebiet des Äthers die Naturgesetze nicht einfach in der Form gelten, wie im idealen Vakuum. Und doch darf man vermuten, daß sich die Grundgleichungen der Physik, wenn das Einsteinsche Axiom der allgemeinen Relativität gilt, in ganz ähnlicher Weise aussprechen lassen. Da man nämlich mit Hilfe der starren Maßstäbchen und der mitbewegten Uhren die Längen der Strecken und der Zeitintervalle überall messen kann, ohne daß man gerade Linien und ohne daß man irgend ein Koordinatennetz zu haben braucht, da ferner im unendlich kleinen die minkowskische Geometrie gilt, so kann man ohne weiteres das Linienintegral einer Vektorgröße längs jeder beliebigen Kurve und das Flächenintegral auf jedem beliebigen Flächenstück definieren. Daher kann man beispielsweise die Maxwellsche Gleichung:

$$\mathrm{Rot}\,\varphi = \mathfrak{F},$$

wo φ das elektromagnetische Viererpotential, $\mathfrak{F}$ den Sechservektor des elektromagnetischen Feldes bedeuten soll, für jede beliebige Geometrie verallgemeinern, indem man sagt:

Das Linienintegral des Vierervektors φ auf irgendeiner rings geschlossenen Kurve im vierdimensionalen Raum-Zeit-Gebiet ist gleich dem Flächenintegral des Sechservektors $\mathfrak{F}$ auf irgendeinem von der Kurve begrenzten Flächenstück.

Ebenso kann man die andere Gruppe der Maxwellschen Gleichungen leicht verallgemeinern. Ich vermute, daß sich auch die Gesetze der Gravitationsfelder der Körper, die sich im Innern des Einsteinschen Coupés befinden, und die die Beobachter hier studieren können, in einer ähnlich allgemeinen Fassung aussprechen lassen und daß sie, wie die elektromagnetischen Gesetze, in dem nichtminkowskischen Gebiet in der Nachbarschaft einer verborgenen großen schweren Masse in dieser Form ihre Gültigkeit behalten.

Aber trotzdem, auch wenn in dieser Weise eine Analogie mit der Physik des idealen Vakuums durchgehend besteht, wird man nicht verkennen, daß infolge der veränderten Gesetze der Geometrie die Physik des Äthers im inhomogenen Gravitationsfeld für die im Einsteinschen Coupé eingeschlossenen Beobachter doch ein ganz anderes Aussehen gewinnt, man sieht das schon aus den kurzen Andeutungen, die ich oben gemacht habe. Die Beobachter müssen an dieser Veränderung der physikalischen Verhältnisse in dem Äther, in welchem ihr Coupé sozusagen schwimmt, die Annäherung eines materiellen Körpers feststellen können, auch wenn sie diesen Körper nicht sehen, ganz so wie die Schiffer durch Beobachtung der Temperatur des Ozeans, in dem ihr Schiff schwimmt, das Herannahen eines Eisberges feststellen können, ohne den Eisberg zu sehen. Man erkennt hier deutlich, wie in der mathematischen Struktur der Einsteinschen Theorie ganz von selber jener am Schluß des ersten Vortrages aufgezeigte logische Widerspruch verschwindet, der dem Satz von der Äquivalenz der Schwere- und der Trägheitswirkungen anhaften würde, wenn man ihn ganz allgemein behaupten wollte.

Durch diese Darlegungen ist der physikalische Inhalt des neuen Einsteinschen Axioms nicht nur erschöpft, sondern auch noch bedeutend erweitert. In der erweiterten Form würde es etwa folgendes aussagen:

Axiom von der allgemeinen Relativität des Gravitationsfeldes.

Gefüge und physikalische Vorgänge in einem System materieller Teilchen, das sich in einem von Gravitationswirkungen erfüllten Gebiet befindet, kann man mit denen in einem entsprechenden System in einem gravitationsfreien Gebiet identifizieren, wenn man die geometrischen Maßverhältnisse in Raum und Zeit in geeigneter Weise definiert.

Kann man in dem vorgelegten Falle das Gravitationspotential in dem Gebiet als konstant ansehen, so geht das zur Beschreibung zu wählende Koordinatensystem aus dem allgemeinen kartesisch-orthogonalen Raum-Zeit-Koordinatensystem durch eine einfache lineare Transformation hervor.

Hat das Potential einen quasi-konstanten Gradienten, ist also ein quasihomogenes Gravitationsfeld vorhanden, so ist die Deformation des Koordinatensystems entsprechend der Änderung des Potentials inhomogen und es ergeben sich die gekrümmten Bahnen und die beschleunigten Bewegungen der Teilchen im Felde.

Ist das Feld auch nicht einmal quasihomogen, so muß man dem gravitationsfreien Gebiet, mit welchem man das vorgelegte Gebiet vergleichen will, eine eigentümliche nichtminkowskische Geometrie zuschreiben, in der es keine kartesischen Koordinatensysteme gibt; die Grundgleichungen der Physik bleiben dabei jedoch in ihrer allgemeinen Form trotz der veränderten Geometrie in Geltung.

Mit andern Worten: Sind Gefüge der Teilchen und physikalische Vorgänge in einem materiellen System im idealen Vakuum bekannt, so gewinnt man das entsprechende Gefüge und die entsprechenden Vorgänge in einem Raum mit konstantem Gravitationspotential durch eine einfache lineare Transformation, in einem Raum mit quasi-homogenem Gravitationsfeld durch eine Transformation, die mindestens vom zweiten Grade ist. Die Berechnung für ein Gebiet dagegen, in welchem ein nicht-homogenes Gravitationsfeld herrscht, stellt ein ganz neues Problem dar; man kann sie freilich auch in diesem Falle auf ein Problem in einem feldfreien Gebiet zurückführen, aber man muß in diesem Gebiet dann eine eigentümliche nichtminkowskische Geometrie annehmen.

Somit ist also das im Beginn des zweiten Vortrags formulierte Problem, das die Theorie der Materie uns stellt, durch das neue Einsteinsche Axiom in der erweiterten Fassung, die ich ihm soeben gegeben habe, für das Gravitationsfeld vollständig gelöst.

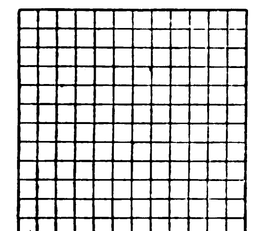
Wir müssen das Axiom aber, um seinen Sinn völlig zu erfassen, noch von einer andern Seite her betrachten. Während wir es soeben als eine Verallgemeinerung des Prinzips der Relativität des Gravitationspotentials für beliebig veränderliche Werte des Potentials aufgefaßt haben, betrachtet Einstein selber es als eine Verallgemeinerung des Axioms von der Relativität der Bewegungen für beliebig veränderliche Bewegungen. Im Beginn seiner Abhandlung: „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie"[1]) erläutert Einstein seine Auffassung an dem Beispiel zweier Kugeln S_1 und S_2, die im Weltraum um eine gemeinsame Achse relativ zueinander rotieren. Man kann der Beschreibung der Bewegung verschiedene Bezugssysteme zugrunde legen, es sei beispielsweise R_1 ein Bezugssystem, in welchem S_1 ruht und S_2 rotiert, dagegen R_2 ein System, in welchem umgekehrt S_2 ruht und S_1 rotiert. Nach Einsteins Ansicht darf kein Bezugssystem vor den andern bevorzugt sein, auch R_1 und R_2 müssen gleichwertig sein. Denken wir uns etwa unter S_1 die Erde und unter S_2 den Fixsternhimmel, so ist nach der gewöhnlichen, auf die klassische Mechanik gegründeten Ansicht R_2, also das System, in welchem die Erde rotiert, bevorzugt. Wir wollen uns nun die Frage vorlegen, ob man diese Bevorzugung von R_2 dadurch beseitigen kann, daß man große bewegte schwere Massen einführt, die uns im übrigen verborgen sind, deren Existenz sich aber äußert durch die bekannten Wirkungen, aus denen wir sonst die Rotation der Erde erschließen, wie beispielsweise die Drehung des Foucaultschen Pendels, die Ablenkung des fallenden Steins nach Osten, die Ablenkung der Passatwinde, Ebbe und Flut und so weiter. Wir fragen: Kann man die Hypothese durchführen, daß diese Wirkungen uns die Rotation der Erde nur vortäuschen, daß sie in Wahrheit durch die Gravitation riesiger Massen verursacht sind, die von uns sonst unbemerkt irgendwo im Weltraum kreisen, während die Erde sich tatsächlich gar nicht um ihre Achse dreht? Die Antwort ist: Diese Hypothese läßt sich nicht durchführen, die Physik eines schwerefreien Raums, in welchem die Materie eine inkonstante Geschwindigkeit hat, und die Physik eines Raumes, in welchem die Materie ruht, welcher dafür aber ein von schweren Massen hervorgerufenes Gravitationsfeld enthält, sind nur dann nicht zu unterscheiden, wenn die Geschwindigkeit eine im Raum und Zeit quasikonstante Beschleunigung hat und dementsprechend das Gravitationsfeld quasi-homogen ist. Bei einer rotierenden Bewegung ist aber die Zentripetal-Beschleunigung bekanntlich $r \cdot \omega^2$, wenn ω die konstante Winkelgeschwindigkeit, r die Entfernung des Punktes von der Rotationsachse ist. Da die Zentripetalbeschleunigung sich mit r proportional ändert, so ist die Bedingung ihrer Konstanz im Raume nicht erfüllt, es ist demnach unmöglich, die Rotation der Erde durch die Gravitation ferner Massen zu ersetzen.

Um trotzdem die Gleichwertigkeit beider Bezugssysteme behaupten zu können, muß man sich schon entschließen, eine andere Art von Gravitationskräften einzuführen, die mit wirklichen Massenkörpern — auch nur hypothetisch angenommenen — gar nichts zu tun haben, sondern ohne alle materielle Ursachen frei im Raume auftreten. Diese Gravitationsfelder, diese „willkürlich fingierten Felder", sind so zu wählen, daß sie die Riemannschen Differentialgleichungen befriedigen, man kann dann immer ein Feld angeben, dessen Wirkungen gerade mit denen einer beliebig vorgelegten ungleichförmigen Bewegung äquivalent sind. Ich denke aber, daß man ein solches Gravitationsfeld nicht als das ansehen kann, was man eine befriedigende Erklärung der Erscheinungen nennt. Und so wird man wohl bei der Bevorzugung des „Kopernikanischen" Koordinatensystems vor dem „Ptolemäischen" bleiben müssen.

Die Tatsache, daß es bevorzugte Koordinatensysteme gibt, läßt sich noch drastischer an folgendem Beispiel zeigen. Für die Genauigkeit der gewöhnlichen physikalischen Messungen ist der Einfluß des Gravitationspotentials der Erde auf Maßstäbe und Uhren so ganz verschwindend klein, daß wir im allgemeinen so tun können,

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 49, 769, 1916.

als sei der Raum um die Erde ein „ideales Vakuum". Hat also ein Physiker in einem Apparat, mit dem er experimentiert, ein Koordinatennetz in Raum und Zeit zu legen, so betrachtet er einen starren Maßstab in allen Lagen als gleich lang, benutzt den Lichtstrahl als Gerade, und sieht die Angaben einer guten Uhr, die er wo nötig noch durch Benutzung mechanischer oder elektromagnetischer Oszillatoren ergänzt, an allen Stellen und zu allen Zeiten als gleichbleibend an. Er konstruiert sich so ein kartesisches Koordinatennetz, das er — abgesehen von den möglichen orthogonalen Transformationen — als eindeutig bestimmt ansieht. Ich will dieses Koordinatensystem durch das Netz I (Fig. 4) andeuten. Nach dem Prinzip



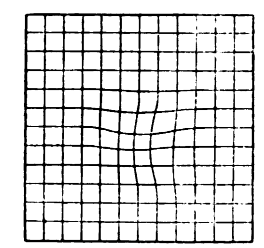


Fig. 4. Zwei „gleichberechtigte" Koordinatennetze.

der allgemeinen Relativität scheint es so, als ob man diesem Physiker vorhalten könnte, daß er durchaus keinen Grund habe, sein Netz I einem andern Koordinatensystem, welches er für krummlinig erklärt, und welches durch das Netz II dargestellt sein soll, vorzuziehen. Man kann nämlich annehmen, daß die Beobachtungen des Physikers durch ein Gravitationsfeld, welches den Riemannschen Differentialgleichungen gehorcht, gefälscht worden sind. Dieses Gravitationsfeld würde ja bewirken, daß die Lichtstrahlen, die der Physiker bei der Konstruktion des Netzes als geradlinig vorausgesetzt hat, in Wirklichkeit gekrümmt sind. Die Linien des Netzes I, die optisch gerade erscheinen, wären also krumm und man gewänne das richtige kartesische Koordinatennetz II erst dadurch, daß man die Angaben der Maßstäbe, Lichtstrahlen, Uhren nach den Regeln des Relativitätssatzes der Gravitation nach Maßgabe des an der Stelle des Koordinatennetzes herrschenden Gravitationsfeldes korrigierte. Wenn nun aber der Physiker, der das Koordinatennetz I konstruiert hat, fragen würde, wo denn dieses eigentümliche Gravitationsfeld herrühre, das ihm seine Messungen gefälscht hat, so wäre ihm zu antworten, daß dieses Feld nur „kraft souveräner Machtvollkommenheit der Mathematik" existiere, daß man es auch beliebig anders annehmen könne und daß man so noch zu vielen andern Koordinatennetzen kommen könne, die dem von ihm als einzig richtig angenommenen Netz vollkommen gleichwertig seien.

Ja, man braucht sogar nur einen einzigen geraden Stab zu betrachten. Ich nehme an, ich sehe an dem Stab entlang, um ihn mit Hilfe des Satzes von der Geradlinigkeit der Lichtstrahlen zu prüfen, und finde ihn so ganz gerade. Nun kann aber an der Stelle des Stabes ein Gravitationsfeld fingiert werden, welches bewirkt, daß der Lichtstrahl schlangenförmig gekrümmt ist, dann ist also auch der Stab schlangenförmig gewunden. Dieses Gravitationsfeld kann sich im Laufe der Zeit beliebig ändern, dann windet sich in diesem Felde der Stab, den ich als unbeweglich und geradlinig in der Hand halte, unbemerkt von uns allen, ohne eine reelle Ursache, wie eine Schlange hin und her.

Wie man aus diesen einfachen Beispielen sieht, läßt es sich nicht gut in Abrede stellen, daß es bevorzugte Koordinatensysteme gibt. Trotzdem ist es aber andererseits nicht zu leugnen, daß das Einsteinsche Axiom eine gewisse Unsicherheit für die Wahl des Koordinatennetzes mit sich bringt. Man sieht das besonders deutlich, wenn man die Theorie von dem höchst interessanten Standpunkt Hilberts[1]) betrachtet.

Ein Koordinatensystem ist genau genommen nichts weiter, als eine Numerierung der sämtlichen Raum-Zeit-Punkte der Welt, eine Numerierung, die man natürlich auf sehr mannigfache Weise durchführen kann, wie dies schon aus der dreidimensionalen Geometrie bekannt ist. Hilbert bezeichnet deswegen die Koordinaten allgemein auch als Parameter der Weltpunkte. Für die Wahl des Prinzips, nach welchem man die Numerierung mit diesen Parametern durchführt, ist lediglich entscheidend, daß sie der Natur des gerade behandelten Problems möglichst gut angepaßt sei. Etwas ganz anderes ist es aber, wenn wir von den wirklichen Längen der Strecken und Zeitintervalle reden. Da handelt es sich um physikalische Dinge, denn diese Längen müssen physikalisch mit Maßstäben, mit Uhren oder auch durch optische Beobachtungen ermittelt werden. Es fragt sich nun: Soll man die Resultate der Messungen mit wirklichen Maßstäben und Uhren ohne weiteres zur Definition der Strecken und Zeitintervalle benutzen, so wie wir das oben den Physikern im Einsteinschen Coupé zugelassen haben, oder soll man wie der „außenstehende

1) D. Hilbert, Göttinger Nachrichten, 20. November 1915 und 23. Dezember 1916.



Beobachter", von dem wir gleichzeitig gesprochen haben, erst noch Kritik an den Messungen üben und sie nach Maßgabe des am Ort der Beobachtung herrschenden Gravitationspotentials umrechnen? Es sind zwei ganz verschiedene Standpunkte, die man hier einnehmen kann, vielleicht sind beide berechtigt, aber unbedingt notwendig ist eines: Sie müssen streng auseinandergehalten werden. Wenn wir mit Einstein[1]) aus seiner Theorie die für den Physiker besonders wichtigen Folgerungen ziehen wollen, daß eine Uhr im Gravitationsfeld langsamer geht, als im idealen Vakuum, daß infolgedessen die Spektrallinien in der Nähe großer schwerer Massen nach Rot hin verschoben werden, ferner: daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Gravitationsfeld kleiner ist als im idealen Vakuum, daß ein Maßstab im Gravitationsfeld deformiert wird, daß ein Lichtstrahl gekrümmt wird, so müssen wir uns auf den zweiten Standpunkt stellen, denn diese Sätze kann man wenigstens in dieser Form nicht einmal aussprechen, wenn man die Messungsresultate, welche man mit Maßstäben und mit Uhren bekommt, ohne Umrechnung der Definition der Längen und Zeiten zugrundelegen will. Ich habe deshalb in meinen Vorträgen diesen Standpunkt, der für physikalische Folgerungen so fruchtbar ist, angenommen, ich will aber eine große Schwierigkeit, die ich oben schon einmal angedeutet habe, nochmals hervorheben: Wie kann man das Gravitationspotential für die Umrechnung der Längen und Zeiten als gegeben ansehen, wenn es doch selber erst aus seinen Wirkungen auf Maßstäbe und Uhren erkannt werden kann? Diese Schwierigkeit ist auf einmal gehoben, wenn man sich auf den Standpunkt Hilberts stellt. Nach ihm ist das Gravitationspotential durch physikalische Beobachtungen allein noch gar nicht gegeben, braucht aber auch nicht gegeben zu sein. Wir haben einfach, wie die Physiker im Einsteinschen Coupé, alle unsere Messungen mit Maßstäben und Uhren so zu beurteilen, als ob es überhaupt gar keine Gravitation gäbe, und zwar wollen wir bis in die unmittelbare Nähe der Atome, ja auch im Innern der Atome so verfahren. Alle Maßstäbe und Uhren sehen wir als unveränderlich an, der Lichtgeschwindigkeit und allen Ätherkonstanten legen wir überall dieselben Werte bei. Überall denken wir uns nun in räumlichen und zeitlichen Richtungen die mit den Maßstäben und Uhren zu findenden kürzesten Verbindungslinien, die geodätischen Linien, konstruiert und auf diesen Linien eine Einteilung in lauter gleiche Teilstrecken angebracht. Es wird sich dann ergeben, daß nur in gewissen großen Gebieten der Welt die minkowskische Geometrie gilt, daß jedoch an vielen Stellen größere oder kleinere Abweichungen von ihren Gesetzen zu erkennen sind. Von diesen Stellen sagen wir, daß sie in der Nähe materieller Körper seien, und die Gebiete, in denen die Abweichungen ganz besonders groß und auffallend werden, nennen wir die von den materiellen Elementarteilchen eingenommenen Weltröhren. Die ganze Welt stellt sich uns also dar, wie ein vierdimensionales geometrisches Gebilde, das auf weiten Strecken eben verläuft, dann aber wieder streckenweise von einer Unzahl feiner Runzeln und Fältchen erfüllt ist. Die Aufgabe der Physik ist, dieses eigentümliche geometrische Gebilde zu beschreiben. Dazu brauchen wir Parameter, Koordinaten, mit denen wir die Punkte des Gebildes numerieren, so wie Gauß die Punkte einer zweidimensionalen Fläche mit Gaußschen Koordinaten numerierte. Nennen wir die von uns benutzten Weltparameter w_1, w_2, w_3, w_4, so schneiden sich die Scharen der dreidimensionalen Gebilde:

$$w_1 = \text{const}, \; w_2 = \text{const}, \; w_3 = \text{const}, \; w_4 = \text{const}$$

in einem Netzwerk von Linien mit Netzknoten, durch welche immer je vier der Linien hindurchgehen. In einem Gebiet, in welchem die minkowskische Geometrie gilt, kann man aus den geodätischen Linien selber ein derartiges Netzwerk bilden, man kann die geodätischen Linien selber als Koordinatenlinien wählen und zur Numerierung die Längen der Koordinatenabschnitte nehmen. In Gebieten, wo die minkowskische Geometrie nicht gilt, ist das aber nicht möglich. Hier kann die Numerierung der Raum-Zeit-Punkte durch die Weltparameter nicht mit den durch Maßstäbe und Uhren ermittelten Längen der Strecken und Zeitintervalle übereinstimmen, weil die geodätischen Linien kein Netzwerk bilden. Es sei der mit Maßstab und Uhr gefundene Abstand zweier unendlich benachbarter Raum-Zeit-Punkte mit ds bezeichnet, ferner die Koordinaten, die die beiden Punkte in der von uns gewählten Numerierung bekommen haben, mit (w_1, w_2, w_3, w_4) und $(w_1 + dw_1, w_2 + dw_2, w_3 + dw_3, w_4 + dw_4)$. Es muß nun möglich sein, ds aus den Koordinatendifferentialen mit Hilfe gewisser Größen $g^{\mu\nu}$ zu berechnen, welche die Maßverhältnisse des Koordinatennetzes an der betreffenden Stelle charakterisieren, welche also Funktionen der Koordinaten sind:

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu} \cdot dw_\mu \cdot dw_\nu \, .$$

Die zehn Größen $g^{\mu\nu}$, welche die Maßverhältnisse des Koordinatennetzes angeben, nennt

1) Einstein, Ann. d. Phys. 49, 818, 1916.

man dann: „Komponenten des Gravitationspotentials". Von diesem Standpunkt aus gesehen, ist also das, was der Physiker beobachtet, zunächst nur der geometrische Charakter des vierdimensionalen Gebildes „Welt". Die Begriffe: Gravitationspotential und Gravitationsfeld treten erst auf, wenn wir uns mit Hilfe von Koordinaten in diesem Gebilde zurechtzufinden suchen.

Diese „geometrische" Auffassung der Einsteinschen Gravitationstheorie nach Hilbert liefert, ähnlich der Minkowskischen Auffassung des ersten Relativitätsaxioms, ein sehr klares Weltbild von großartiger Einfachheit und sie wird sich für die mathematische Lösung vieler Probleme fruchtbar erweisen können. Indessen wird man doch sagen müssen, daß sie für die praktischen Bedürfnisse des Physikers nicht ausreicht. Sie ist zu weit entfernt von den Begriffsbildungen, die dem Physiker vertraut und geläufig sind, und in diesem Sinne fehlt ihr deswegen die Anschaulichkeit, die man notwendig braucht, um ohne umständliche mathematische Überlegungen die experimentell wichtigen Folgerungen der Theorie in praktisch brauchbarer Form zu sehen. Wir haben schon bemerkt, daß alle die physikalisch interessanten Konsequenzen, die Einstein für die Prüfung der Theorie durch Beobachtungen angibt, voraussetzen, daß man gerade das Gravitationsfeld als das erfahrungsmäßig gegebene ansieht und die Wirkungen dieses Gravitationsfeldes auf die Materie und auf den Äther, speziell auf die Lichtfortpflanzung im Äther, untersucht.

Um diesen Standpunkt, den ich im Gegensatz zu der rein geometrischen die „physikalische" Auffassung von der Gravitation nennen möchte, zu vertreten, muß man voraussetzen, daß man für die ganze Welt ein einheitliches bevorzugtes Koordinatensystem, das nur noch orthogonalen Transformationen unterworfen werden darf, unabhängig von den an Ort und Stelle mit Maßstäben und Uhren ausgeführten Messungen festlegen kann. Dieses Koordinatensystem muß im idealen Vakuum überall in das Netz der geodätischen Linien übergehen, welches man hier natürlich immer als bevorzugtes Koordinatensystem brauchen wird. Ohne die Voraussetzung eines solchen Koordinatensystems kann man zum Beispiel von der Ablenkung des Lichtes durch ein Gravitationsfeld nicht sprechen, man kann nicht einmal das Gravitationsfeld eines bestimmten materiellen Systems eindeutig angeben. In der Tat haben denn auch Einstein und Schwarzschild[1]), um in einem bestimmten Fall, nämlich dem einer gravitierenden Kugel, das Gravitationsfeld praktisch berechnen zu können, den Grundgleichungen der Gravitation eine Reihe von Annahmen hinzufügen müssen, durch welche ein Koordinatensystem eindeutig bestimmt wird und zwar so, daß es in unendlicher Entfernung von der schweren Kugel in das Koordinatennetz der geodätischen Linien übergeht. Diese Annahmen sind:

1. Die $g^{\mu\nu}$ sind von der Zeitkoordinate x_4 unabhängig.
2. Es ist: $g^{14} = g^{24} = g^{34} = 0$.
3. Das Gravitationsfeld ist zentrisch-symmetrisch in bezug auf den Kugelmittelpunkt.
4. Die Determinante der $g^{\mu\nu}$ ist gleich 1.

Diese Bedingungen widersprechen sämtlich der Forderung der allgemeinen Transformierbarkeit des Koordinatensystems. Durch sie werden die „willkürlich fingierten Gravitationsfelder", die man sonst zu dem „wirklichen Gravitationsfeld" beliebig hinzufügen könnte, weggeschafft und somit eine eindeutige Lösung des Problems ermöglicht.

Ich will nun versuchen, ein allgemeines Prinzip aufzustellen, nach welchem das bevorzugte Koordinatennetz der Welt zu konstruieren ist. Wie wir gesehen haben, ist nach der Hilbertschen Auffassung die Welt ein geometrisches Gebilde von vier Dimensionen, welches in weiten Gebieten (wo ein ideales Vakuum ist) mit einer vierdimensionalen Ebene zusammenfällt. Es ist bekannt, daß man jedes beliebige geometrische Gebilde auffassen kann als enthalten in einem ebenen Raum von einer höheren, aber endlichen Zahl von Dimensionen. So kann man auch die Hilbertsche Welt auffassen als Gebilde in einem ebenen Raum von fünf oder wenn nötig noch mehr Dimensionen. Wir wollen nun in diesem höheren Raum diejenige vierdimensionale Ebene konstruieren, mit der die Welt an allen Stellen, wo ein ideales Vakuum ist, zusammenfällt, und in dieser vierdimensionalen Ebene ein kartesisches Koordinatennetz konstruieren. Projizieren wir dann jeden Punkt der Hilbertschen Welt senkrecht in die vierdimensionale Ebene hinein, so stellen die Projektionspunkte ein eindeutig definiertes Abbild der Welt dar, und man kann auch dieses Abbild der Hilbertschen Welt, in welchem überall die minkowskische Geometrie gilt, als „die Welt" ansehen. Konstruieren wir uns in der Hilbertschen Welt ein unendlich kleines vierdimensionales rechtwinkliges Parallelepipedon (dX, dY, dZ, $i\,dT$), so wird dies im allgemeinen in der Projektion zu einem schiefwinkligen Parallelepipedon mit veränderten Maßeinheiten ($d\lambda_1$, $d\lambda_2$, $d\lambda_3$. $d\lambda_4$), wie es in Fig. 1 dargestellt ist. Das Koordinatensystem (x, y, z, it),

[1]) Schwarzschild, Sitzungsber. der Berliner Akademie, S. 189, 1916.



mit welchem man die Punkte der bei der Projektion in die Ebene verzerrten Welt zu numerieren hat, ist als kartesisches Koordinatensystem in einer vierdimensionalen Ebene eindeutig gegeben.

Wenn man dies durchführt, so bekommt man ein Weltbild in der vierdimensionalen Ebene, das wir das „physikalische" Weltbild nennen können. Man sieht ohne weiteres, daß es niemals mit dem Hilbertschen „geometrischen" Weltbild in Widerstreit kommen kann. Beide Auffassungsweisen werden sich vielmehr gegenseitig ergänzen und befruchten.

Betrachten wir schließlich noch von dem jetzt gewonnenen Standpunkt aus das Axiom von der allgemeinen Relativität des Gravitationsfeldes! Wir wollen ein Gebiet der Hilbertschen Welt in der Umgebung einer großen schweren Masse ins Auge fassen. In dieser Gegend weicht die Welt stark von der Ebene des idealen Vakuums ab, ist aber, solange in ihr keine Materie vorhanden ist, ein glatt verlaufendes vierdimensionales Gebilde. Dieses glatte, von Materie freie, Gebilde wollen wir R_0 nennen. Nun denken wir uns aber in der betrachteten Gegend einige Weltröhren, die materielle Teilchen darstellen. Das von diesen Weltröhren durchzogene Gebilde nennen wir R_1. Wenn nur wenig materielle Teilchen vorhanden sind, unterscheidet sich R_1 von R_0 nur wenig, nämlich nur durch einige Runzeln auf dem sonst glatten und ganz wie R_0 verlaufenden Gebiet. Wenn die Stelle, wo man die Weltröhren in R_1 beobachtet, so wenig ausgedehnt ist, daß man ohne bemerkbaren Fehler R_0 durch seine Tangentialebene T ersetzen kann, so denke man sich die Weltröhren in diese Tangentialebene T hineinprojiziert, man bekommt dann ein Abbild des betrachteten Stückes der Hilbertschen Welt in T, welches nicht zu unterscheiden ist von einem Stück Weltbild im idealen Vakuum. Dieser Satz ist der Inhalt des Axioms von der Relativität des Gravitationspotentials. Weicht R_0 in dem betrachteten Gebiet schon merkbar von der Tangentialebene ab, so kann man es mit besserer Annäherung ersetzen, durch ein auf eine vierdimensionale Ebene abwickelbares Gebilde T_1, das sich an R_0 anschmiegt. Projiziert man das betrachtete Stück der Hilbertschen Welt Punkt für Punkt senkrecht in dieses abwickelbare Gebilde T_1 hinein und wickelt T_1 dann auf eine vierdimensionale Ebene ab, so hat man in dieser Ebene wiederum ein Abbild eines Stückes Welt, das man von einem physikalischen Stück Weltbild von einer Stelle, wo ein ideales Vakuum ist, nicht unterscheiden kann. Das ist der Satz von der Relativität eines quasihomogenen Feldes. Genügt endlich aber auch diese Näherung nicht, so projizieren wir R_1 Punkt für Punkt senkrecht in R_0 hinein. Wir bekommen dann ein Abbild der Welt in einem nichtminkowskischen Raum-Zeit-Gebiet, in welchem, abgesehen von der veränderten Geometrie, physikalische Grundgleichungen von derselben allgemeinen Form herrschen wie in einem gravitationsfreien idealen Vakuum. Das ist das Prinzip von der Relativität des Gravitationsfeldes in der allgemeinen Fassung, welche ich ihm gegeben habe.

In dieser allgemeinen Form habe ich das Prinzip bisher nur unter der Annahme ausgesprochen, daß die zehn Größen $K_{\mu\nu}$, welche die Krümmung von R_0 an der betrachteten Stelle angeben, sämtlich gleich Null sind. Es ergibt sich für uns nun das Problem, das Prinzip so allgemein zu fassen, daß es auch in Bereichen, wo die Krümmung nicht Null ist, gebraucht werden kann. Da diese Bereiche dadurch charakterisiert sind, daß in ihnen elektromagnetische Potentiale und Felder vorhanden sind, so heißt das: Das Prinzip der Relativität der Gravitationsfelder ist in geeigneter Weise auszudehnen auf elektromagnetische Felder. Erst wenn es gelungen sein wird, dies durchzuführen, wird das im Beginn des zweiten Vortrags vorgelegte Problem völlig gelöst sein: „eine Weltfunktion zu finden, die so gebaut ist, daß die sich aus ihr ergebenden Energieknoten wie die wirklichen materiellen Elementarteilchen von dem Zustand des umgebenden Äthers nur sehr wenig beeinflußt werden und daß zugleich diese Beeinflussung durch einfache Gesetze geregelt ist." Es ist zu vermuten, daß die Lösung dieses Problems auf dem von mir angedeuteten Wege zu einer eindeutigen Bestimmung der Weltfunktion führen wird und somit auch die Entscheidung der Frage bringen wird, ob es möglich ist, mit den uns heute zur Verfügung stehenden Mitteln eine Theorie der Materie aufzustellen, die die beobachteten Tatsachen richtig wiedergibt.

Halle a. S., Physikalisches Institut, den 30. Juni 1917.

(Eingegangen 3. Juli 1917.)

BESPRECHUNGEN.

W. Ostwald, Grundriß der allgemeinen Chemie. Fünfte Auflage. XVI u. 647 S. mit 69 Textfiguren. Dresden und Leipzig, Theodor Steinkopff. 1917. Geh. M. 24.—, geb. M. 25.50.

Die vierte Auflage des vorliegenden Werkes war mit ganz besonderem Interesse aufgenommen worden. Ostwald war vorher zu der Überzeugung gelangt, daß die Atomhypothese bei aller Zweckmäßigkeit der sicheren wissenschaftlichen Begründung entbehre und hatte es sich zur Aufgabe gemacht, das Lehrgebäude der Chemie unter Verzicht auf die Atomhypothese zu errichten. Eine Reihe neuer Tatsachen wie die Isolierung und Zählung der Gasionen, die Übereinstimmung der Brownschen Molekularbewegung mit den Forderungen der kinetischen Gastheorie u. a. wirkten zusammen, um ihn dann mit rückhaltloser Offenheit anerkennen zu lassen, „daß wir in den Besitz der experimentellen Nachweise für die diskrete oder körnige Struktur der Materie gelangt sind, welche die Atomhypothese seit Jahrhunderten, ja Jahrtausenden vergeblich gesucht hatte".

Der Fortfall des Zwanges, den sich Ostwald mit dem Verzicht auf das anschaulichste aller Darstellungsverfahren für chemische Tatsachen auferlegt hatte, machte sich in der Neubearbeitung geltend durch das Fehlen befremdlicher Umschreibungen, die doch erst Leben gewannen, wenn der Leser sie sich in die Sprache der Atomistik übertrug. Ostwalds oft bewährte pädagogische Meisterschaft hat jetzt in dem vorliegenden Werke für den behandelten Gegenstand die Form gefunden, die ihn von den verschiedensten Seiten her zugänglich macht. Hervorgehoben sei hier besonders das Kapitel über die radioaktiven Erscheinungen. Etwas dürftig ist das Kapitel über die Photochemie geblieben; man muß bedauern, daß der Verfasser diesen Abschnitt als für eine Neubearbeitung noch nicht reif erklärt. Man hätte gewünscht, daß Ostwald mit seiner Fähigkeit zur Systematik dem im Werden begriffenen Gebiet zu nützen versucht hätte.

Das Werk hat sich als hervorragend geeignet erwiesen, die Lehren der physikalischen Chemie solchen Studierenden zu übermitteln, denen das Gebiet nicht Spezialfach ist. A. Coehn.

„Aus großen Meistern der Naturwissenschaften". Sammlung populär-wissenschaftlicher Schriften. Herausgegeben von J. A. Barth, Leipzig. Preis jeder Nummer 45 Pfg., 20—99 Nummern, auch gemischt, je 40 Pfg., 100 und mehr Nummern, auch gemischt, je 35 Pfg.

Mit der Herausgabe dieser Sammlung kommt die Verlagsbuchhandlung in dankenswertester Weise dem Bedürfnis entgegen, die Gebildeten und Nachdenkenden unter unseren Feldgrauen mit wissenschaftlicher Lektüre zu versorgen, ohne dabei gegen die Notwendigkeiten des Feldlebens zu verstoßen. Zum Studium tiefgründiger Werke wird der Soldat meist nicht die genügende Zeit und die erforderliche geistige Sammlung aufbringen können, auch wird er nur selten Platz haben, um dicke Bücher unterbringen zu können. So hat der Verlag aus den Werken unserer großen Naturforscher einzelne Kapitel herausgegriffen, die man für sich als abgeschlossenes Ganze betrachten kann, die zwar nicht in die letzten Tiefen der Wissenschaft hineinführen, die aber, als in bestem Sinne populär-wissenschaftliche Lektüre, in hervorragender Weise geeignet sein dürften, den Stumpfsinn zu bannen, wie ihn namentlich der jahrelange Stellungskrieg nur zu leicht gebiert. Die einzelnen Hefte haben einen Umfang von je 2 Druckbogen, finden also leicht in jeder Rocktasche und in jedem Tornister Platz. Es liegen uns die ersten 5 Nummern vor, enthaltend Boltzmanns „Reise eines deutschen Professors ins Eldorado", ferner zwei Vorträge von Mach „Über Erscheinungen an fliegenden Projektilen" und „Vom räumlichen Sehen", zwei Aufsätze von C. Snyder über „Die Endlichkeit des Weltalls" und über „Die Fortschritte auf dem Wege zur Erklärung der Elektrizität", einen Aufsatz von P. J. Möbius über „Das Pathologische in Goethes Lebenslauf" und zwei Vorträge von Prof. Lassar-Cohn über „Die Chemie im täglichen Leben". Schon diese kurze Liste — die Sammlung enthält bis jetzt 16 Nummern und soll fortgesetzt werden — läßt die Reichhaltigkeit der Auswahl erkennen. Auf dem Umschlag eines jeden Heftes befindet sich eine kurze biographische Notiz über den Verfasser, sowie ein Inhaltsverzeichnis desjenigen Werkes, dem der betreffende Aufsatz entnommen ist. Da sich außerdem einzelne Literaturhinweise finden, so dürften die Hefte auch geeignet sein, diejenigen Leser, die genügend Interesse und Zeit haben, zu einem Studium der vollständigen Werke anzuregen. V. Pieck.

K. Meyer, Die Entwicklung des Temperaturbegriffs im Laufe der Zeiten. kl. 8°. 160 S. (Die Wissenschaft, Bd. 49.) Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. 1913. Geh. M. 4.—, geb. M. 4.80.

Die Verfasserin hat mit einem Bienenfleiße von Aristoteles an die Jahrhunderte durchstöbert, um die Entwicklung des Temperaturbegriffs von dem Chaos der physikalischen Urzeit bis zur Begründung der absoluten Skala klarzulegen. Wie schwierige und mühselige Wege die Menschheit gerade in bezug auf den heute so alltäglichen Begriff zu durchlaufen hatte, weiß man schon aus Machs klassischer Darstellung. Das vorliegende Buch führt uns noch einmal diese ganze lange Wanderung und zwar, wie mir scheint, in mehr philologischer, wie physikalischer Weise, jedenfalls nicht in der physikalisch scharfsinnig zugespitzten Weise, wie es Mach in seinem klassischen Werk tut. Wer von den Physikern Zeit hat, sich in diese physikalische Philologie zu vertiefen, wird Wohlgefallen und Nutzen von dem Buche haben. Aber den meisten wird es wohl etwas zu breit ausgesponnen erscheinen.
H. Th. Simon.

F. Henning, Die Grundlagen, Methoden und Ergebnisse der Temperaturmessung. gr. 8°. IX u. 297 S. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. 1915. Geh. M. 9.—, geb. M. 10.—

Während das vorstehend besprochene Buch in behäbiger historischer Breite die tastende Entwicklung des Temperaturbegriffs behandelt, stellt sich das vorliegende ausgezeichnete Buch zunächst einmal fest und breit auf den Boden des wissenschaftlich gesicherten, thermodynamisch durchgearbeiteten Temperatur-

begriffs. Danach werden in fünf sorgfältig gegliederten Kapiteln die Meßmethoden der Temperatur dargelegt. Nur die neueren Ergebnisse der Forschung werden zur Sprache gebracht, in einem zielsicheren klaren Aufbau, der überall die rein wissenschaftlichen Grundlagen in den Vordergrund rückt, auf denen das ganze Temperaturproblem theoretisch und praktisch steht. Von dem ungemein reichen Inhalt des wertvollen Buches mögen die Kapitelüberschriften zeugen: I. Einleitung (als Grundlegung der Begriffe). II. Gasthermometrie. III. Sekundäre Thermometer (Flüssigkeitsthermometer, Widerstandsthermometer, Thermoelemente usw.) IV. Temperatur und Strahlung des schwarzen Körpers (Pyrometrie). V. Temperatur nicht schwarzer Körper. VI. Erzeugung konstanter Temperaturen und Fixpunkte (auch hoher und ganz tiefer Temperaturen). Dazu kommt ein Anhang mit zehn wertvollen thermometrischen Tabellen. Ein sorgfältiges Literaturverzeichnis, sowie ein umfassendes Sachregister geben dem Buch auch als Nachschlagewerk hohen Wert. Da dem Verfasser als Mitglied der physikalisch-technischen Reichsanstalt eine Fülle von praktischer Erfahrung auf dem Gebiet zur Verfügung stand, wie sie kaum sonst jemand zur Verfügung stehen konnte, so darf man sein theoretisch und praktisch auf gleicher Höhe stehendes Buch getrost als das derzeitige Richtwerk über den Temperaturbegriff bezeichnen. H. Th. Simon.

Chr. Ries, Die Blindenlesemaschine von Finzenhagen und Ries. gr. 8⁰. 58 S. Jos. C. Hubers Verlag, Diessen, vor München. 1916. M. 1.80.

Die hier vorgeschlagene Blindenlesemaschine soll folgende Einrichtung bekommen: Die zu lesende Schrift wird, episkopisch vergrößert, auf eine senkrecht zur Zeilenrichtung aufgestellte Reihe von acht Selenzellen projiziert, welche in der Zeilenrichtung über die Buchstabenbilder hingleitet, sie so gewissermaßen abtastet und in acht Horizontalschnitte zerlegt. Auf einem entsprechend mit einer Reihe von acht Fühlstiften versehenen Ablesebrett tastet der Blinde die Schrift in folgender Weise ab: Sobald eine Selenzelle von einem Buchstabenschatten berührt wird, wird unter Vermittlung eines Relais der entsprechende Fühlstift herausgedrückt. Auf diese Art ist es, als seien die Buchstaben erhaben gedruckt und der Finger des Blinden streiche in der Zeilenrichtung über sie hin. Um auch noch die Längsausdehnung der Horizontalschnitte der Buchstaben sicher fühlbar zu machen, wird intermittierender Gleichstrom zur Betätigung der Selenzellen verwendet (oder auch intermittierendes Licht im Episkop). Dann erscheint jeder Horizontalbalken eines Buchstabens ebenso in eine Anzahl von Punkten aufgelöst, wie es die Vertikalbalken durch die acht Selenzellen erscheinen. Durch ein neues „Differentialrelais" sehr einfacher Art, welches die beiden Väter der Idee erfunden haben, über das aber nichts Näheres mitgeteilt wird, soll es möglich sein, den Apparat hinreichend wohlfeil herzustellen. Doch scheint er bisher nur in Einzelheiten wirklich ausgeführt zu sein. — Zum Schluß wird noch die Idee mitgeteilt, jeder Zelle der Zellreihe einen akustischen Ton zuzuordnen, und so die Schrift durch den Klangfarbenwechsel abhörbar statt abfühlbar zu machen, ähnlich wie das bei dem Optophon von Fournier d'Albe vorgeschlagen wurde. H. Th. Simon.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Die a. o. Professoren Dr. Hugo Ditz (Chemische Technologie anorganischer Stoffe) an der Deutschen Technischen Hochschule Prag und Dr. August L. Bernoulli (Physikalische Chemie) an der Universität Basel zu ord. Professoren an den gleichen Hochschulen, der a. o. Professor an der deutschen Universität Prag Dr. Philipp Frank zum ord. Professor der theoretischen Physik an derselben Hochschule.

Rücktritt vom Lehramt: Der Privatdozent für angewandte Physik an der Universität Frankfurt a. M. Dipl.-Ing. Dr. Paul Humann (zwecks Übersiedelung nach Berlin), der ord. Professor für Pharmakognosie an der Universität Straßburg Dr. Otto Oesterle.

Gestorben: Der a. o. Professor der darstellenden Geometrie an der Universität Bern Dr. Albert Benteli, der Präzisionsmechaniker Rudolf Fuess in Berlin-Steglitz, Mitglied des Kuratoriums der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, der ord. Professor für Mathematik an der Universität Bern Dr. Eduard Ott, der Observator am Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam Dr. Erich Kron (im Felde gefallen), der frühere ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Kopenhagen Dr. Christian Christiansen.

Angebote.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 00922 0800

